Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

POSTAVITVE VEČDIMENZIONALNIH KOCK

MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

GAL ZAJC, 3. letnik

Mentor: dr. Tilen MARC

Somentorica: Jasna KOS

Ljubljana, marec 2020

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Tilnu Marcu za idejo naloge ter pomoč pri razlagi. Zahvalil bi se tudi za to, ker mi je odprl pogled na širšo, ne šolsko, plat matematike. Somentorici Jasni Kos se zahvaljujem za podporo, pomoč in vloženi čas pri izdelavi raziskovalne naloge.

Zahvaljujem se tudi moji družini, ki me je podpirala in mi pomagala.

KAZALO

KAZALO SLIK

POVZETEK

V nalogi obravnavamo dvodimenzionalne mostove iz kock 2×1, ki predstavljajo osnovo za izračun števila večdimenzionalnih mostov, ki ustrezajo določenim pogojem. Za število mostov v dvodimenzionalnem in tridimenzionalnem prostoru so dobljene konkretne formule, v večdimenzionalnih prostorih so dobljene formule rekurzivne. Pripeljejo nas do zaporedij, ki jih primerjamo s tistimi, ki so v bazi OEIS. Naloga se zaključi s postavitvijo kock v dvodimenzionalnem prostoru, ki se imenuje zid.

Ključne besede:

Catalanova števila, kocke 2×1, kocke v večdimenzionalnih prostorih, postavitev most, postavitev zid

Key words:

Catalan numbers, bricks 2×1, bricks in high dimensions, stack bridge, stack wall

1 UVOD

Vedno sem se rad ukvarjal s kockami vseh vrst (Lego, Fischer, Minecraft, Pokemon rom hacking,…), saj imam dobro prostorsko predstavo, ki se je z igrami s kockami še nadgrajevala. Iz teh iger je nastalo poglobljeno delo, ko sem se začel ukvarjati z raziskovalno nalogo. Povezovanje elementarne kombinatorike, vsot, programiranja, vse to so bili gradniki, s katerimi sem prišel do formul za števila možnih različnih postavitev kock v dvo in večdimenzionalnih prostorih. Moj prvi cilj je bil poiskati število vseh postavitev določenega števila lego kock dimenzije $2 \times 1 \times 1$. Naloga se je izkazala za neizvedljivo, zato sem si izbral posebne postavitve kock in naslednje cilje:

- Poiskati število različnih mostov iz danega števila dvodimenzionalnih kock

- Posplošiti problem na večdimenzionalne prostore

- Sprogramirati program za rešitev problema pri velikem številu kock

Programiral sem v programu Mathematica, slike v dvodimenzionalnem prostoru sem risal v programu Inkscape in slike v tridimenzionalnem v programu Mathematica. Nekaj slik je narisanih v programu GeoGebra.

Ko sem rešil osnovni problem postavitve mostu v dvodimenzionalnem prostoru, sem ugotovil, da so rešitev Catalanova števila, v tridimenzionalnem prostoru sem dobil enostavne formule, v višjih dimenzijah pa sem prišel do rekurzivnih formul. Pripeljejo nas do zaporedij, ki jih primerjamo s tistimi, ki so v bazi OEIS. Formule zaporedij objavljenih v bazi so bile dobljene iz drugačnih primerov in se po obliki razlikujejo od tistih, ki so predstavljene v raziskovalni nalogi, čeprav dajo isto zaporedje števil.

Obravnaval sem še problem postavitve zadnje kocke v mostu in število teh postavitev. Zanimivo je, da se v večdimenzionalnem prostoru, ko iščemo število možnih postavitev zadnje kocke v mostu, rezultat pri velikem številu kock ujema z volumnom ortopleksa, kar se navezuje na raziskovalno nalogo, ki sem jo predstavil lansko leto.

V nalogi sem predstavil še postavitev kock, ki sem jo poimenoval zid.

Pristopi do reševanja vseh teh problemov so plod lastne intuicije, nekatere ideje pa sem dobil tudi iz različnih videoposnetkov, kot na primer iskanje števila Catalanovih poti. Nikjer nisem zasledil, da bi obravnavali podobne primere postavitve kock, predvsem pa ne postavitve kock v višjih dimenzijah, zato je naloga izvirna.

2 DEFINICIJE KOCKE IN POSTAVITVE KOCK V DVODIMENZIONALNEM PROSTORU

2. 1 Kocka 2 x 1

Kocka 2×1 je množica točk $\{(x, y); x \in [a_1, a_1 + 2],\ \ y \in [a_2, a_2 + 1]; \{a_1, a_2\} \subset \mathbb{Z}\}$.

Z urejenim parom števil (a_1, a_2), imenujemo ju koordinati, lahko natančno opredelimo položaj kocke na ravnini. Točka $T(a_1, a_2)$ je spodnje levo oglišče opisane kocke.

Predstavljajmo si jih kot dvodimenzionalne »lego kocke«, ki se druga na drugo pritrjujejo s čepki, kot je to na sliki 1. V nadaljevanju bodo večinoma poimenovane kar »kocke« ali pa kocke (a_1, a_2).

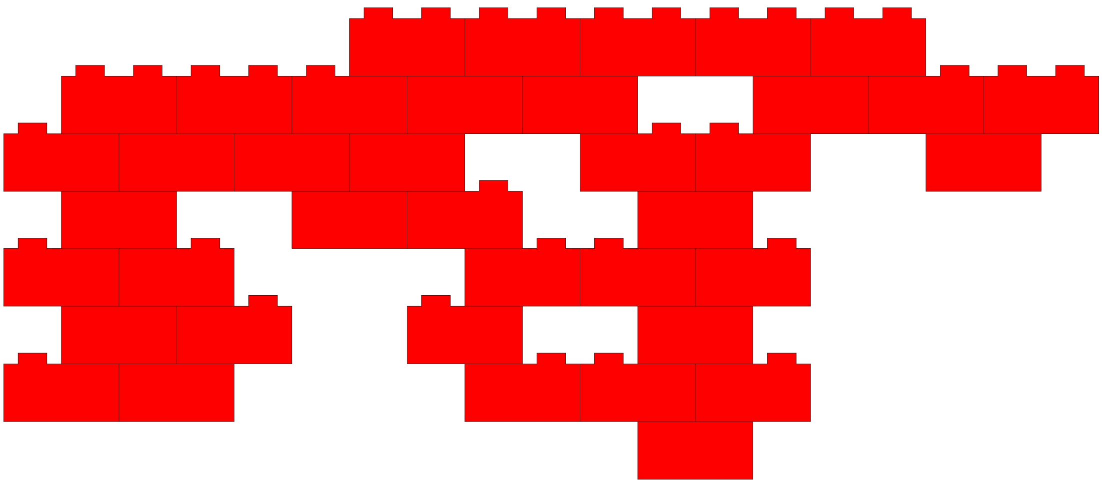
2. 2 Pravilna postavitev kock 2 x 1

Kocka a se dotika kocke b, če ima kocka a koordinati (a_1, a_2) in b koordinati $(a_1 \pm 1, a_2 \pm 1)$, možne so vse kombinacije $+$ in $-$. Postavitve $(a_1 \pm 1, a_2)$ ne dovoljujemo.

Postavitev je pravilna, če lahko iz vsake kocke na vsako drugo kocko pridemo s premiki po dotikajočih se kockah.

To pomeni, da so »lego kocke« v pravilni postavitvi sestavljene tako, da se ena na drugo pripenjajo z enim čepkom in ne dvema.

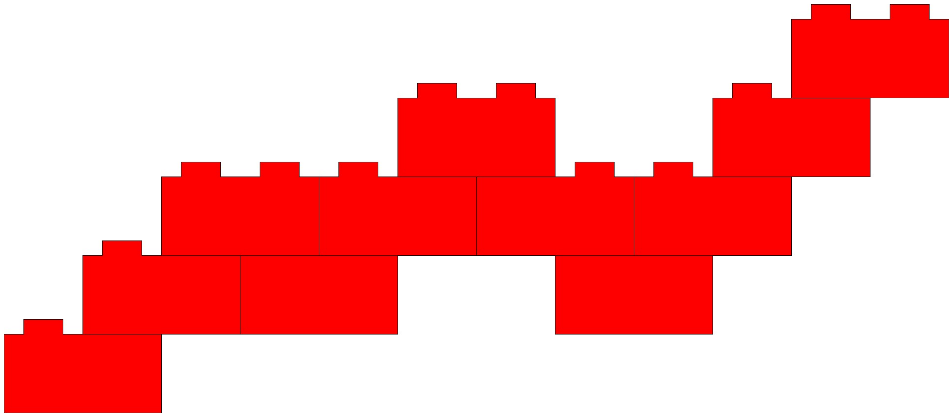
Če imamo eno samo kocko, rečemo, da je v pravilni postavitvi.



Slika 1 : Pravilna postavitev kock 2 x 1

2. 3 Most

Most naj bo pravilna postavitev kock 2×1, pri kateri ni kock 2×1 z isto prvo koordinato a_1.

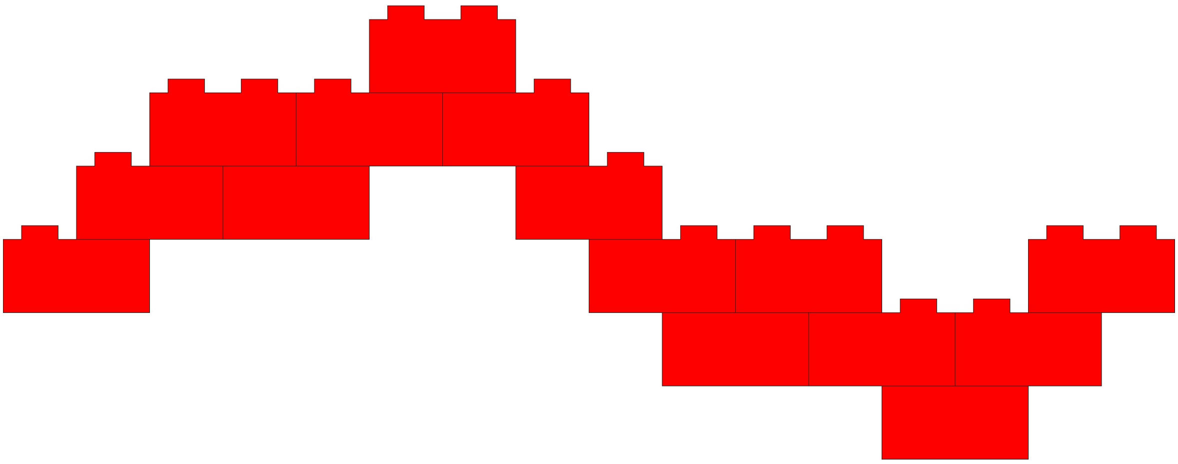


Slika 2 : Most v dvodimenzionalnem prostoru

Iz definicije sledi, da most začnemo graditi z eno kocko in vsako nadaljnjo postavimo za eno enoto desno ter eno enoto navzgor ali navzdol glede na prejšnjo. To pomeni, da je vektor premika posamezne kocke glede na prejšnjo $\vec{a} = (1, \pm 1)$.

2. 4 Pravilni in nepravilni most

Most imenujmo pravilen, če je zadnja kocka v enaki višini kot prva, ostale pa so v enaki višini ali višje od prve kocke. Most, ki temu ne ustreza, je nepravilen.



Slika 3 : Nepravilni most

3 ŠTEVILO MOSTOV V DVODIMENZIONALNEM PROSTORU

3. 1 Mostovi, ki se začnejo in končajo na enaki višini

Denimo, da uporabimo n kock, $n > 0$. Prva kocka naj bo določena s točko $T(0, 0)$. Koliko je mostov, pri katerih je zadnja kocka $(n - 1, 0)$? To pomeni, da se most konča na enaki višini kot se začne.

Za vsako kocko razen prve, ki ima že določen položaj, imamo dve možni postavitvi, lahko je zamaknjena za 1 navzgor ali za 1 navzdol glede na prejšnjo. To pomeni, da bomo premikali $n - 1$ kock. Ker moramo končati na enaki višini, kot smo začeli, je število premikov navzgor in navzdol enako, kar pomeni, da je $n - 1$ sodo število in število vseh kock liho. Mostov, ki se začnejo in končajo na enaki višini je toliko, kot je izborov $\frac{n-1}{2}$ premikov med $n - 1$ premiki, to je število kombinacij reda $\frac{n-1}{2}$ iz $n - 1$ elementov:

$$C_{n-1}^{\frac{n-1}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} \tag{1}$$

Če je število kock sodo, mostu pri danih pogojih ne moremo postaviti. Ker v binomskem koeficientu lahko nastopajo poljubna realna števila, dodajmo enačbi (1) še en faktor, s katerim dobimo rešitev 0 v primeru, da je število kock sodo:

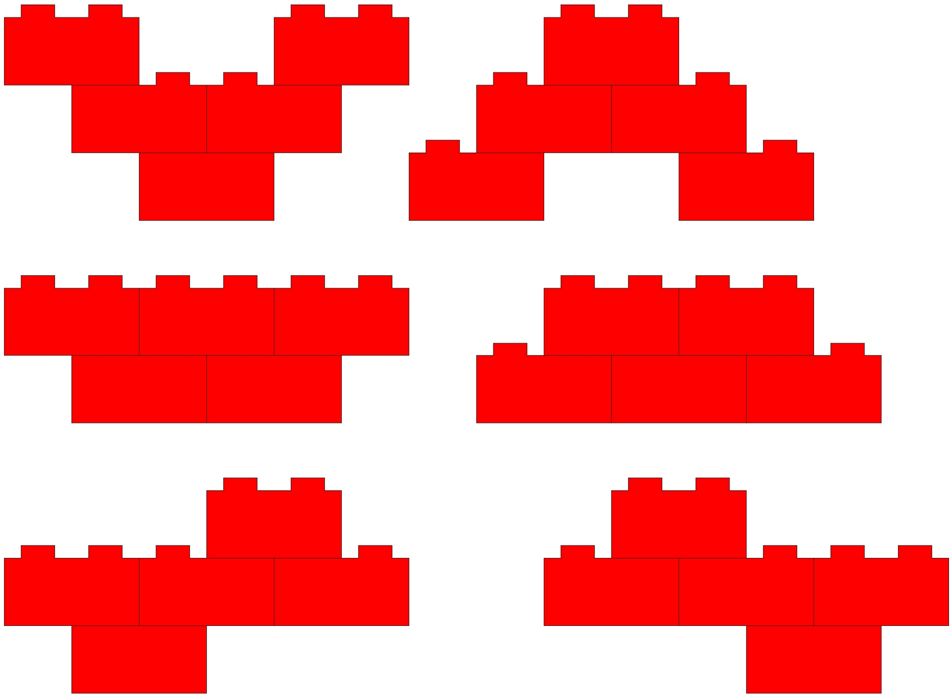
$$\frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} \tag{2}$$

Primer 1:

Koliko mostov, ki se začnejo in končajo na enaki višini, lahko postavimo s petimi kockami?

$$\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} = \binom{4}{2} = 6$$

Prva kocka je fiksna, za ostale štiri pa imamo možna dva premika navzgor in dva navzdol, kar pomeni, da izberemo dva premika izmed štirih. Postavimo lahko šest mostov.



Slika 4 : Mostovi iz petih kock, ki se začnejo in končajo na enaki višini

3. 2 Mostovi, ki nimajo začetka in konca na enaki višini

Sedaj pa nalogo posplošimo.

Recimo, da uporabimo $\boldsymbol{n}$ kock, $\boldsymbol{n > 0}$. Koliko je postavitev mostov, takih da je zadnja kocka $(\boldsymbol{n-1, i})$, pri čemer $\boldsymbol{i}$ ustreza pogoju $\boldsymbol{-n < i < n}$.

Z G označimo število kock zamaknjenih navzgor, z D pa število kock zamaknjenih navzdol. Ker je število kock, ki jih premikamo, $n-1$, druga koordinata, ki predstavlja višino zadnje kocke, pa je i, dobimo enačbi:

$$G + D = n - 1$$

$$G - D = i$$

To pomeni, da je število premikov za 1 enoto navzgor

$$G = \frac{n + i - 1}{2}$$

in je zato vseh postavitev

$$\binom{n-1}{\frac{n+i-1}{2}} \tag{3}$$

Formula (3) je pravilna le v primeru, da je eno od števil n in i liho in drugo sodo. Zato bomo dodali faktor, ki bo 0 v primeru, da sta obe števili n in i lihi ali obe sodi, ter 1, če je eno od njiju sodo in drugo liho:

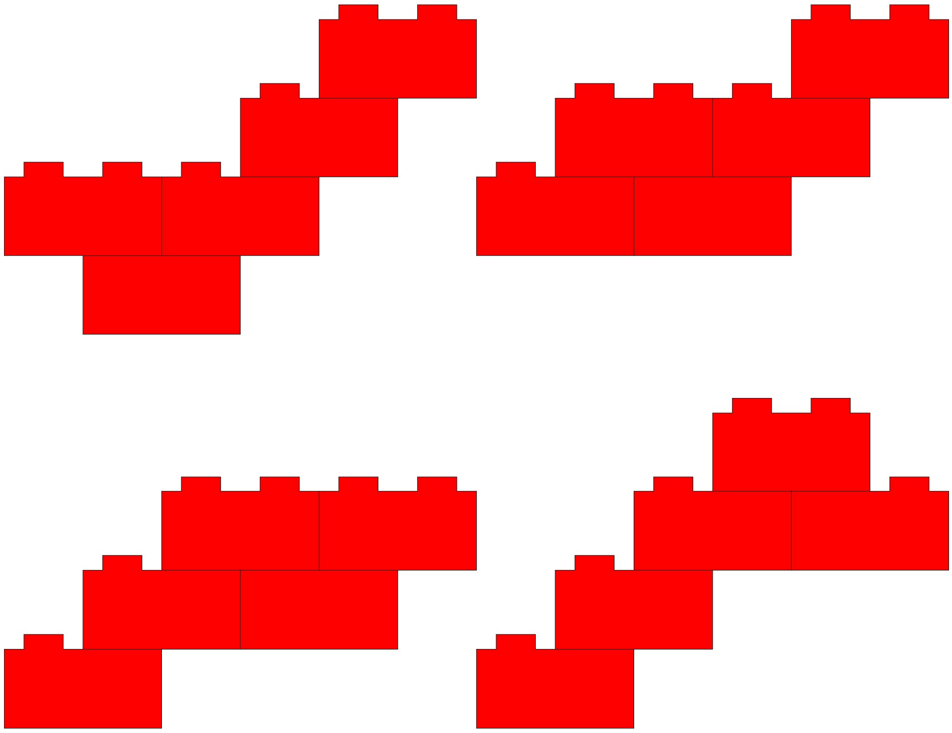
$$\frac{\left|(-1)^{n+1}+(-1)^{i}\right|}{2}\binom{n-1}{\frac{n+i-1}{2}} \tag{4}$$

Primer 2:

Koliko mostov lahko postavimo s petimi kockami, če naj bo konec mostu za dve enoti višje od njegovega začetka?

$$n=5, i=2 \rightarrow \binom{n-1}{\frac{n+i-1}{2}}=\binom{4}{3}=4$$

Postavimo lahko 4 mostove.



Slika 5 : Mostovi s petimi kockami, ki imajo konec dve enoti višje od začetka

3. 3 Pravilni mostovi

Izrek 1: ***V dvodimenzionalnem prostoru je vseh pravilnih mostov iz n kock***

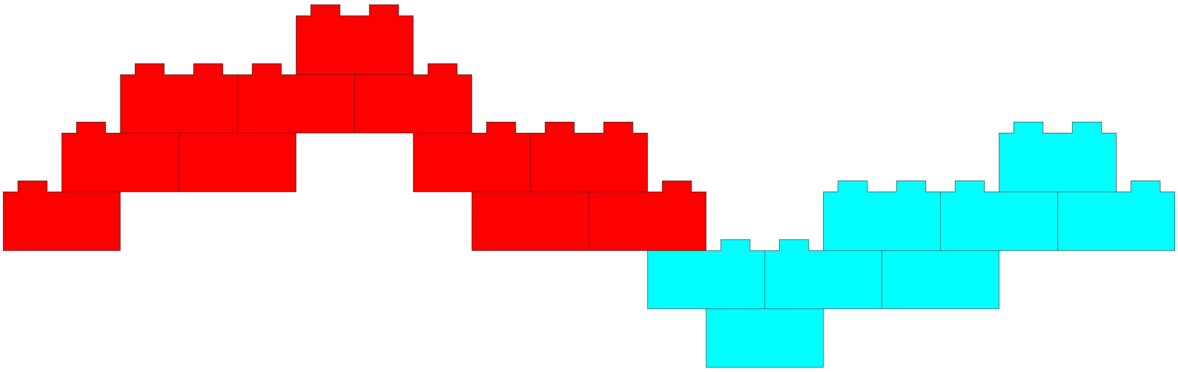
$$\frac{\mathbf{1}+(-\mathbf{1})^{n+1}}{n+\mathbf{1}}\binom{n-\mathbf{1}}{\frac{n-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} \tag{5}$$

Dokaz:

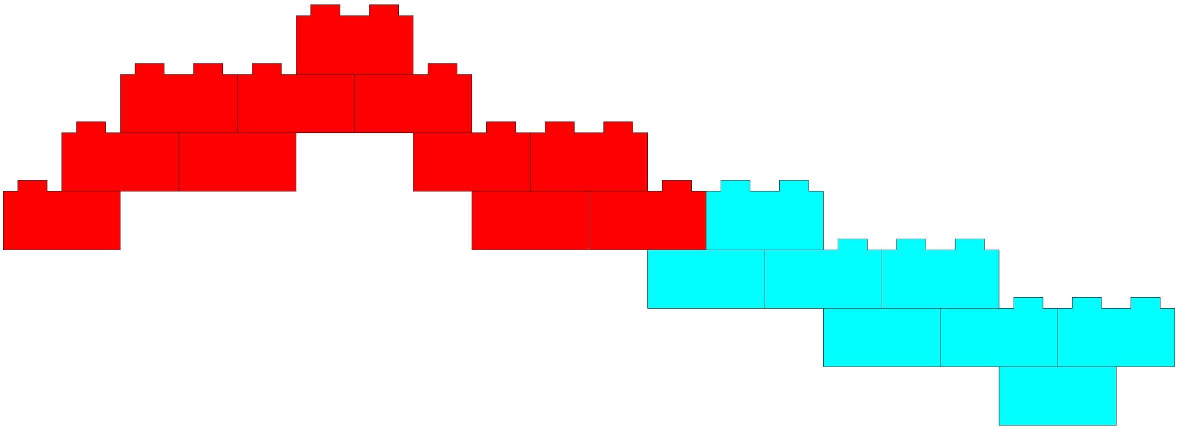
Denimo, da uporabimo n kock, $n > 0$. Prva kocka naj bo določena s točko $(0{,}0)$. Koliko je mostov, pri katerih je zadnja kocka $(n-1, 0)$, za vse vmesne kocke pa velja, da je njihova druga koordinata nenegativna?

Število pravilnih mostov je enako številu vseh mostov, od katerega odštejemo število nepravilnih mostov. Poskusimo prešteti vse nepravilne mostove iz n kock.

Vsak nepravilni most vsebuje kocko, ki ima koordinato $a_2 = -1$. Ko prvič naletimo na tako kocko, vse nadaljnje kocke prezrcalimo preko osi $y = -1$. Zrcaljenje kocke preko premice pomeni zrcaljenje točk, ki določajo kocko, zato kocke s koordinato $a_2 = -1$ ostanejo nespremenjene. Da je tako dobljena postavitev res most, vemo, ker premike kock v mostu določajo vektorji $(1, \pm 1)$. Pri zrcaljenju čez premico $y = -1$ postanejo to vektorji $(1, \mp 1)$. To pomeni, da gre za enake premike in tudi po tem zrcaljenju bomo dobili postavitev kock, ki smo jo imenovali most.

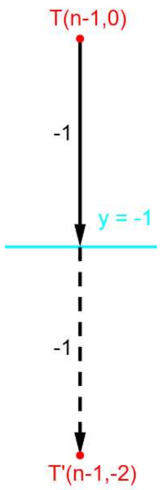


Slika 6 : Nepravilni most pred zrcaljenjem preko osi $y = -1$



Slika 7 : Nepravilni most po zrcaljenju preko osi $y = -1$

Preštevali smo mostove, ki se končajo s kocko $(n-1, 0)$. Tudi nepravilni mostovi bi se lahko končali s to kocko, vendar se po zrcaljenju preko osi $y = -1$ kocka premakne v $(n-1, -2)$, kot kaže slika 8.



Slika 8 : Premik kocke (n-1,0) preko osi y=-1

Vsakemu nepravilnemu mostu, ki se začne s kocko $(0,0)$ in konča s kocko $(n-1,0)$ smo priredili nov nepravilni most, ki se konča s kocko $(n-1,-2)$. Sedaj naredimo še obratno. Vsakemu mostu, ki ima prvo kocko $(0,0)$ in zadnjo $(n-1,-2)$, priredimo nov most, ki ga dobimo tako, da od prve kocke, ki ima koordinato $a_2=-1$, vse nadaljnje prezrcalimo preko osi $y=-1$. Dobimo zopet nepravilni most, ki se konča v $(n-1,0)$. To pomeni, da smo naredili bijektivno preslikavo, ki vsakemu nepravilnemu mostu, ki se začne s kocko $(0,0)$ in konča s kocko $(n-1,0)$, priredi most z zadnjo kocko $(n-1,-2)$ in vsakemu mostu z zadnjo kocko $(n-1,-2)$ priredi nepravilni most. In koliko je nepravilnih mostov? Toliko kot je mostov, ki imajo prvo kocko $(0,0)$ in zadnjo $(n-1,-2)$. Število pravilnih mostov dobimo tako, da od števila vseh mostov, odštejemo število nepravilnih mostov:

$$\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}-\frac{|(-1)^n-1|}{2}\binom{n-1}{\frac{n-3}{2}}=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\left(\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}-\binom{n-1}{\frac{n-3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\left(\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)!}-\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\right)=$$

$$=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\left(\frac{(n-1)!\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n-1}{2}\right)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-3}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\left(\frac{2(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\right)=$$

$$= \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n+1} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$$

QED

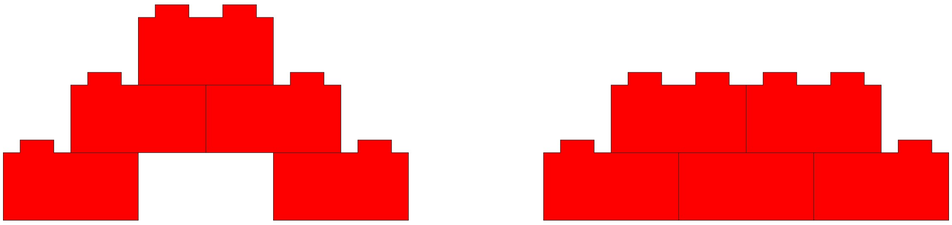
S sodim številom kock ne moremo postaviti pravilnega mostu, pri lihem številu kock je število pravilnih mostov

$$\frac{2}{n+1} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} \tag{6}$$

Primer 3: Koliko pravilnih mostov iz petih kock lahko zgradimo?

$$\frac{2}{6} \binom{4}{2} = 2$$

Postavimo lahko 2 mostova.



Slika 9 : Pravilna mostova iz 5 kock

Primer 4: Koliko pravilnih mostov iz 11 kock lahko zgradimo?

$$\frac{1 + (-1)^{11+1}}{11+1} \binom{11-1}{\frac{11-1}{2}} = \frac{1}{6} \binom{10}{5} = 42$$

Postavimo lahko 42 mostov.

Števila, ki jih dobimo pri lihih n iz dane formule, se imenujejo Catalanova števila. Catalanovo število C_n je definirano kot

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

(7)

Zaporedje $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$ se imenuje zaporedje Catalanovih števil. Izkaže se, da se zaporedje Catalanovih števil pojavlja pri mnogih preštevalnih nalogah iz kombinatorike. Iz n kock v dvodimenzionalnem prostoru lahko postavimo toliko pravilnih mostov, kot je vrednost Catalanovega števila $C_{\frac{n-1}{2}}$.

3. 4 Mostovi, ki nimajo začetka in konca na enaki višini in nobena kocka ni postavljena nižje od začetne

Poglejmo most, ki povezuje začetno točko $(0,0)$ z neko višje ali enako visoko ležečo točko ter se vprašajmo, koliko je mostov iz n kock, ki se končajo s kocko $(n-1, i)$, $0 \leq i < n$ in za vse vmesne kocke velja, da je njihova druga koordinata nenegativna.

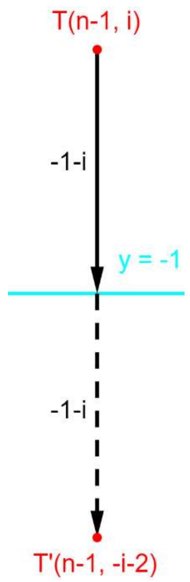
Izrek 2: ***V dvodimenzionalnem prostoru je število vseh mostov iz n kock, ki povezujejo kocki $(0,0)$ in $(n-1, i)$, ter se ne spustijo pod absciso, enako***

$$\frac{\left|(-1)^{n+1} + (-1)^{i}\right|}{n+i+1}(i+1)\binom{n-1}{\frac{n+i-1}{2}}$$

(8)

Dokaz:

Tu je sklep popolnoma enak kot v prejšnjem primeru. Edina razlika je, da se zadnja kocka $(n-1, i)$ prezrcali preko osi $y = -1$ v kocko $(n-1, -i-2)$, kot je prikazano na sliki 10.



Slika 10 : Zrcaljenje zadnje kocke preko osi y=-1

Izračun druge koordinate:

$$i + 2(-1-i) = -i - 2$$

Število mostov je v tem primeru

$$\frac{\left|(-1)^n + (-1)^{i+1}\right|}{2}\binom{n-1}{\frac{n+i-1}{2}} - \frac{\left|(-1)^n + (-1)^{-i-1}\right|}{2}\binom{n-1}{\frac{n-i-3}{2}} =$$

$$= \frac{\left|(-1)^{n+1} + (-1)^{i}\right|}{2}\left(\binom{n-1}{\frac{n+i-1}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n-i-3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\left|(-1)^{n+1} + (-1)^{i}\right| \ (i+1)}{n+i+1}\binom{n-1}{\frac{n+i-1}{2}}$$

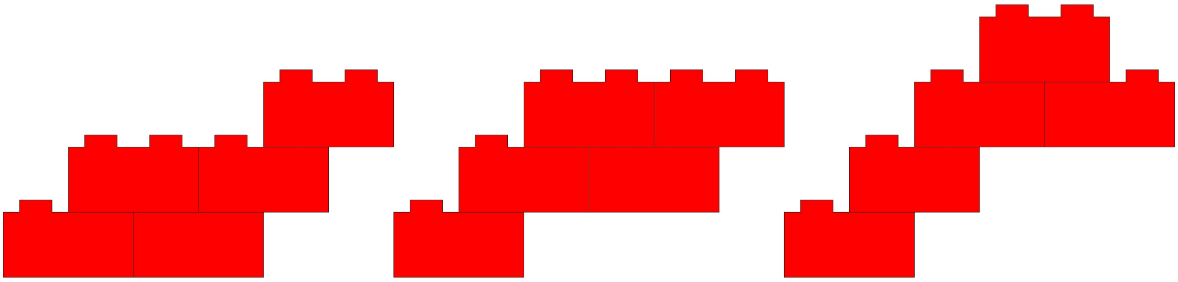
QED

Primer 5:

Koliko je mostov s petimi kockami, če je zadnja kocka postavljena za dve enoti višje od začetne, nobena kocka pa ni postavljena nižje od začetne?

$$n = 5, i = 2 \rightarrow \frac{3 \cdot |2|}{5 + 2 + 1}\binom{4}{3} = 3$$

Taki mostovi so trije.



Slika 11 : Mostovi s petimi kockami, ki se končajo za dve enoti višje od lege začetne kocke, nobena kocka pa ni nižje od začetne

Primer 6:

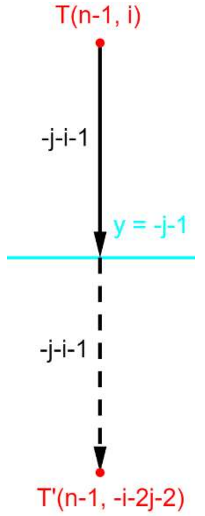
Koliko je mostov s šestimi kockami, če je zadnja kocka postavljena za dve enoti višje od začetne?

Takega mostu ni mogoče postaviti. Pod absolutno vrednostjo je v tem primeru število 0.

3. 5 Mostovi, ki nimajo začetka in konca na enaki višini in nobena kocka ni postavljena nižje od določene vrednosti

Rešimo še en primer, v katerem **dovolimo, da se vmesne kocke spustijo pod os x, vendar naj bo njihova druga koordinata večja ali enaka $-j$, pri čemer je $0 \leq j < n$. Enako kot prej naj bo prva kocka $(0, 0)$ in zadnja $(n - 1, i)$. Koliko različnih mostov lahko postavimo v tem primeru?**

Tudi v tem primeru je reševanje tako kot prej, le os zrcaljenja ni več $y = -1$, ampak $y = -\mathrm{j} - 1$. Točka $(n-1, i)$, ki določa zadnjo kocko, se prezrcali v točko $(n-1, -i-2j-2)$.



Slika 12 : Zrcaljenje zadnje kocke preko osi y=-1

Število mostov je v tem primeru

$$\frac{\left|(-1)^n + (-1)^{i+1}\right|}{2}\binom{n-1}{\frac{n+i-1}{2}} - \frac{\left|(-1)^n + (-1)^{-i-2j-1}\right|}{2}\binom{n-1}{\frac{n-i-2j-3}{2}} =$$

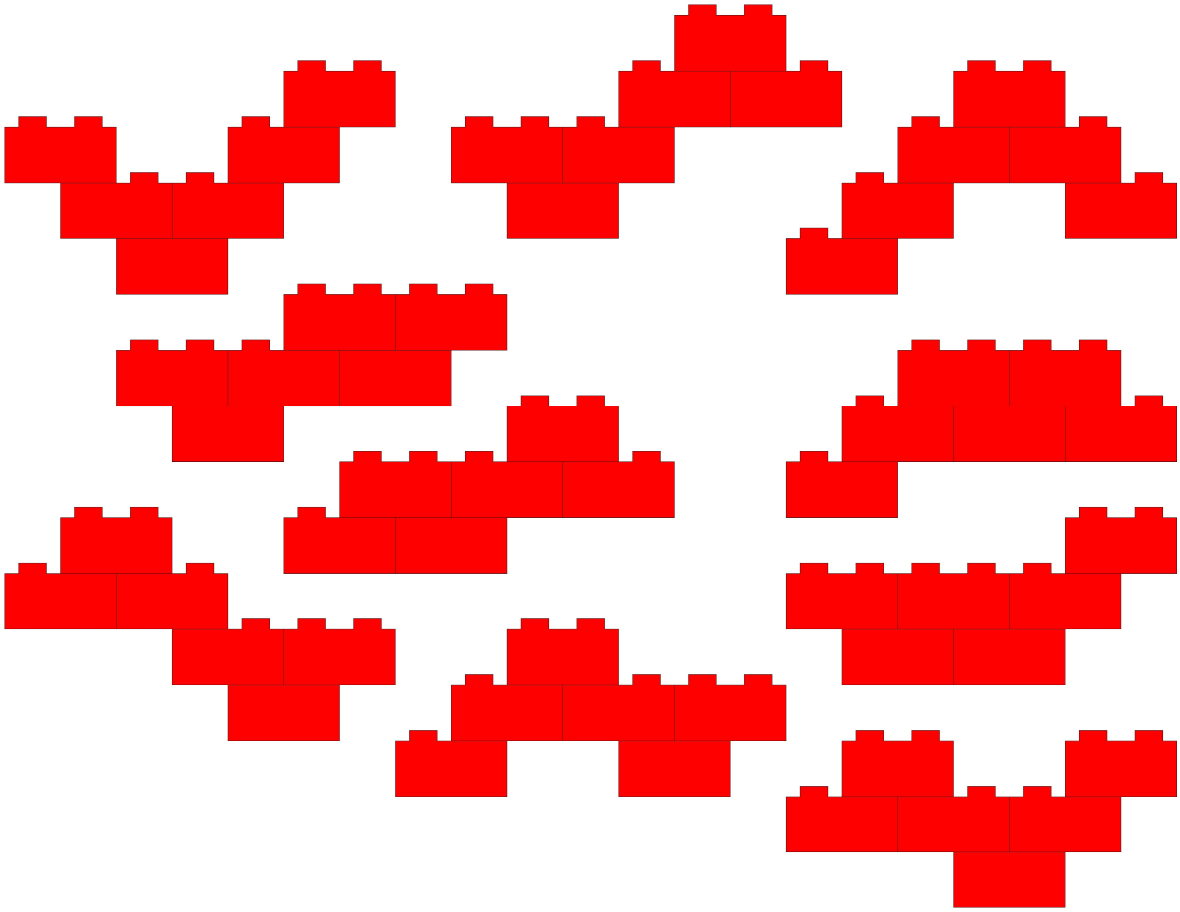
$$= \frac{\left|(-1)^{n+1}+(-1)^{i}\right|}{2}\left(\binom{n-1}{\frac{n+i-1}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n-i-2j-3}{2}}\right) \tag{9}$$

Primer 7:

Denimo, da imamo 6 kock. Koliko je mostov, ki se začnejo v $(0,0)$, končajo v $(5,1)$ in ne prečkajo osi $y = -2$?

$$\frac{|(-1)^{6+1} + (-1)^{1}|}{2}\left(\binom{6-1}{\frac{6+1-1}{2}} - \binom{6-1}{\frac{6-1-2*2-3}{2}}\right) = \binom{5}{3} - \binom{5}{-1} = 10 - 0 = 10$$

Negativno celo število k v binomskem koeficientu $\binom{n}{k}$ naj ne moti, saj je v tem primeru po definiciji binomskih simbolov[1] vrednost binomskega koeficienta enaka 0.



Slika 13 : Rešitev primera 7

4 DEFINICIJE KOCKE IN POSTAVITVE KOCK V VEČDIMENZIONALNIH PROSTORIH

4. 1 Kocka v tridimenzionalnem in d-dimenzionalnem prostoru

V tridimenzionalnem prostoru je kocka $2 \times 1 \times 1$ množica točk $\{(x, y, z); x \in [a_1, a_1 + 2],\ \ y \in [a_2, a_2 + 1], z \in [a_3, a_3 + 1]; \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{Z}\}$. V d-dimenzionalnem prostoru pa je kocka množica točk

$\{(x_1, x_2, \dots, x_d);\ x_1 \in [a_1, a_1 + 2], x_i \in [a_i, a_i + 1]\ ; i \in \mathbb{N}, i > 1, a_1 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{Z}\}$.

To pomeni, da sta kocka in njen položaj v d-dimenzionalnem prostoru natanko določena z urejeno d-terico $(a_1, a_2, \dots, a_d)$.

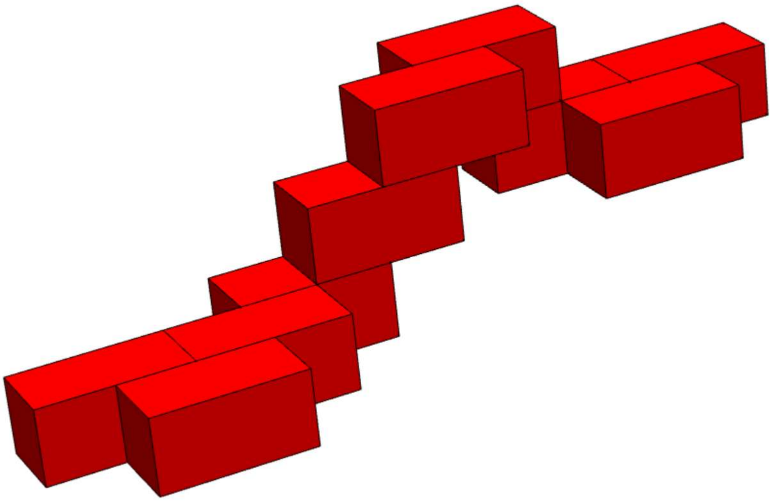
4. 2 Pravilna postavitev d-dimenzionalnih kock v d-dimenzionalnem prostoru

d-dimenzionalna kocka a se dotika d-dimenzionalne kocke b, če ima kocka a koordinate $(a_1, a_2, \dots, a_d)$ in se koordinate kocke b od koordinat kocke a razlikujejo za ± 1 v prvi koordinati in še v eni od ostalih koordinat.

Postavitev je pravilna, če lahko iz vsake kocke na vsako drugo kocko pridemo s premiki po dotikajočih se kockah.

4. 3 Most v večdimenzionalnem prostoru

Tako kot v dvodimenzionalnem prostoru naj tudi v večdimenzionalnem postavitev most pomeni tako pravilno postavitev, pri kateri ni dveh kock z isto prvo koordinato a_1. Kocko z najmanjšo prvo koordinato bomo poimenovali prva kocka.



Slika 14 : Primer tridimenzionalnega mostu

V dvodimenzionalni postavitvi smo si kocke predstavljali kot lego kocke, ki jih s čepki pripenjamo eno na drugo, dve kocki se nista smeli v celoti ali delno prekrivati. V tridimenzionalnem prostoru pa z izrazom kocka poimenujemo kvader dimenzije $2 \times 1 \times 1$. Te kocke pa ne le, da se pripenjajo ena na drugo, smemo jih zlagati tudi eno poleg druge, vendar ne tako, da bi se dotikali s celima ploskvama.

5 ŠTEVILO MOŽNIH POLOŽAJEV ZADNJE KOCKE V MOSTU

5. 1 Položaj zadnje kocke v dvodimenzionalnem prostoru

Imamo n kock. Prva kocka je fiksna, ostalih $n - 1$ pa prestavljamo z enotskimi premiki desno in v smeri ordinatne osi. Tako kot prej velja, da je kocka določena z urejenim parom števil (a_1, a_2), ki predstavlja spodnje levo oglišče kocke. Koliko je različnih ordinat točk, v katerih se pot lahko konča? Po nekaj poskusih sklepamo, da je možnih ordinat n. Vprašanje je ekvivalentno naslednjemu: V koliko različnih točk na številski premici lahko iz izhodišča pridemo z $n - 1$ enotskimi premiki levo ali desno?

Poglejmo si primer. Nahajamo se v koordinatnem izhodišču in naredimo tri premike v levo ali desno. Možne poti so naslednje:

$$0 \to 1 \to 2 \to 3$$

$$0 \to 1 \to 2 \to 1 \text{ ali } 0 \to -1 \to 0 \to 1$$

$$0 \to 1 \to 0 \to -1 \text{ ali } 0 \to -1 \to 0 \to -1$$

$$0 \to -1 \to -2 \to -3$$

S tremi premiki lahko končamo pot v 4 točkah.

Sedaj se spomnimo na gradnjo mostu v dvodimenzionalnem prostoru. Gibanje po abscisni osi je bilo natanko določeno, z vsako nadaljnjo kocko je bil storjen premik za eno enoto v pozitivni smeri, spremenljivko pa je predstavljalo gibanje glede na ordinatno os. To pomeni, da lahko dvodimenzionalni problem prevedemo na enodimenzionalnega. Naj bo funkcija f predpis, ki vsaki dimenziji prostora zmanjšani za 1 in številu enotskih premikov iz izhodišča priredi število različnih točk, v katerih se lahko pot konča. V opisanem primeru je

$$f(1, 3) = 4.$$

Izrek 3: ***V enodimenzionalnem prostoru je število končnih položajev točke po $n - 1$ enotskih premikih levo ali desno iz izhodišča enako n, oziroma***

$$\boldsymbol{f(1, n - 1) = n.}$$

(10)

Dokaz s popolno indukcijo:

Za $n = 1$ je vrednost funkcije $f(1,0)$ število točk, v katerih se konča pot dvodimenzionalne kocke po 0 premikih. Če ne naredimo premika kocke, je število točk 1, kar pomeni

$$f(1,0) = 1$$

in za $n = 1$ je trditev dokazana.

Predpostavimo, da trditev velja za poljubno naravno število n. Radi bi dokazali, da velja tudi za naslednje naravno število $n + 1$, kar pomeni, da želimo dokazati

$$f(1,n) = n + 1.$$

Premikamo se po abscisni osi, pot začnemo v koordinatnem izhodišču, z lihim številom premikom pridemo v točke z liho koordinato, s sodim v točke s sodo koordinato. Če je vrednost funkcije $f(1, n-1)$ enaka n, to pomeni, da se po $n - 1$ premikih pot lahko konča v n različnih točkah. Denimo, da smo naredili liho število premikov, končali so se v točkah z liho koordinato. Če naredimo en premik več, to pomeni, da je število premikov n in je n sodo število. Pot se torej konča v točkah s sodo koordinato. Med prejšnjimi n točkami z liho koordinato je $n - 1$ točk s sodo koordinato. Sodo koordinato imata tudi točki, ki sta za eno enoto bolj oddaljeni od skrajne leve in desne točke, do katerih smo prišli z $n - 1$ premiki. To pomeni, da se pot lahko konča v $n + 1$ različnih točkah.

Ker trditev velja za naravno število $n = 1$ in iz predpostavke, da velja za poljubno naravno število n, lahko dokažemo, da velja tudi za naslednika, potem trditev velja za vsa naravna števila.

5. 2 Položaj zadnje kocke v tridimenzionalnem prostoru

S funkcijo $f(d-1, n-1)$ zapišimo število različnih točk v $d - 1$ dimenzionalnem prostoru, do katerih lahko pridemo iz izhodišča z $n - 1$ enotskimi premiki v smeri koordinatnih osi. Rešimo problem za tridimenzionalni prostor. Tako kot prej, tudi tokrat problem obravnavamo na nižji stopnji, iz tridimenzionalnega ga prevedemo na dvodimenzionalni. Na koliko različnih točk na ravnini lahko pridemo iz izhodišča z $n - 1$ enotskimi premiki v smeri koordinatnih osi, oziroma koliko je $f(2, n-1)$.

Zdaj lahko razdelimo premike na tiste v smeri y-osi in tiste v smeri z-osi. Če skupni premik v smeri ordinatne osi označimo z y, če je to premik v pozitivni smeri, oziroma - y, če je premik v negativni smeri, je največje možno število premikov v smeri osi z enako $n-1-|y|$. Če opazujemo samo premike v smeri z -osi, lahko število možnih končnih z koordinat izrazimo s funkcijo, ki je opisovala število možnih leg zadnje kocke v dvodimenzionalnem prostoru, to je

$$f(1, n-1-|y|) \tag{11}$$

pri čemer pa je y celo število iz intervala $[-n+1, n-1]$ in predstavlja drugo koordinato zadnje tridimenzionalne kocke.

Izračunajmo, koliko je različnih postavitev zadnje kocke v tridimenzionalnem prostoru:

$$f(2, n-1) = \sum_{y=1-n}^{n-1} f(1, n-1-|y|) =$$

$$= f(1, n-1) + 2\sum_{y=1}^{n-1} f(1, n-1-y) =$$

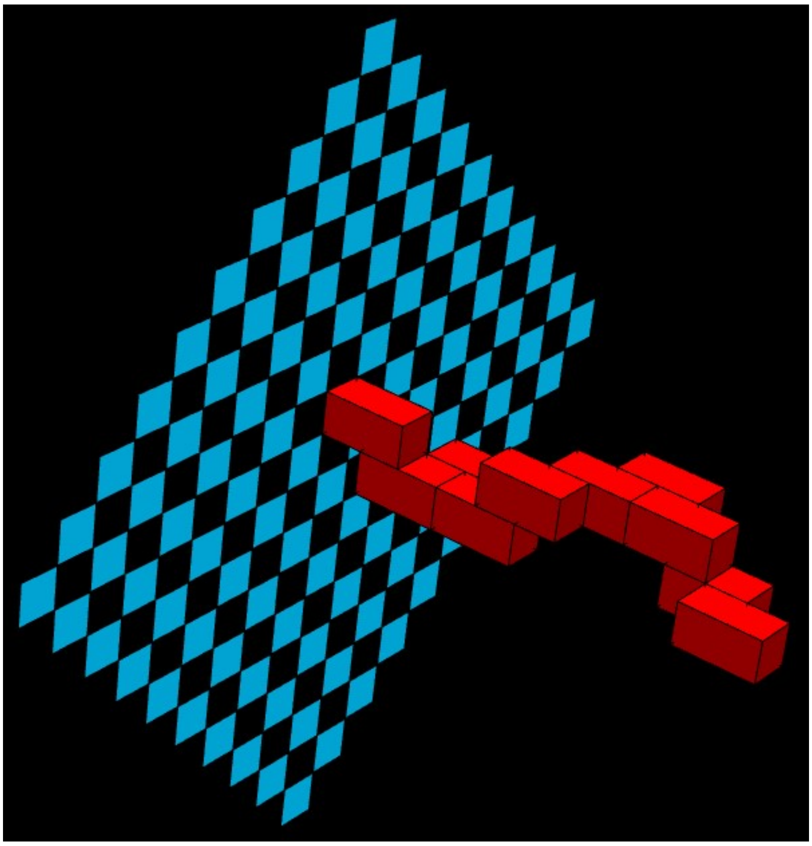
$$= n + 2\left(\sum_{x=1}^{n-1} n - \sum_{x=1}^{n-1} y\right) =$$

$$= n + 2\left((n-1)n - \frac{(n-1)n}{2}\right) = n^2$$

Dokazali smo, da velja naslednji izrek.

Izrek 4: ***V dvodimenzionalnem prostoru je število končnih položajev točke po*** $\boldsymbol{n-1}$ ***enotskih premikih levo ali desno od izhodišča ter navzgor ali navzdol enako*** $\boldsymbol{n^2}$. ***To je enako številu končnih položajev tridimenzionalne kocke, ki jo vsakič pomaknemo za eno enoto v desno ter za eno enoto v smeri*** $\boldsymbol{y}$ ***ali*** $\boldsymbol{z}$ **osi**, ***oziroma***

$$\boldsymbol{f(2, n-1) = n^2} \tag{12}$$



Slika 15 : Odtisi možnih končnih položajev kocke

5. 3 Število postavitev zadnje kocke v d-dimenzionalnem prostoru

Popolnoma enak sklep kot v 3-dimenzionalnem prostoru velja tudi za večdimenzionalne prostore. Tako smo izpeljali naslednji izrek:

Izrek 5: ***Kocka v d-dimenzionalnem prostoru naj bo množica točk $\{(x_1, x_2, \dots, x_d);\ x_1 \in [a_1, a_1+2], x_i \in [a_i, a_i+1]\ ; i \in \mathbb{N}, i > 2, a_1, a_i \in \mathbb{Z}\}$. Če imamo n kock v d-dimenzionalnem prostoru in je položaj prve kocke fiksen, vse ostale pa premikamo z enotskimi premiki v smeri koordinatnih osi, je število postavitev zadnje kocke določeno z rekurzivno formulo***

$$f(d-1, n-1) = f(d-2, n-1) + 2\sum_{x=1}^{n-1} f(d-2, n-x-1)$$

(13)

Za dvodimenzionalni prostor smo izračunali, da je n mogočih položajev zadnje kocke, za tridimenzionalnega smo izračunali, da jih je n^2. V naslednji tabeli pa so prikazani rezultati za večdimenzionalne prostore, kjer je d dimenzionalnost mostu, n pa število kock v mostu.

Rezultati so dobljeni s programom *Mathematika,* program je v prilogi 1.

d	Število možnih zadnjih položajev $f(d-1, n-1)$
2	n
3	n^2
4	$\frac{2n^3+n}{3}$
5	$\frac{n^4+2n^2}{3}$
6	$\frac{2n^5}{15}+\frac{2n^3}{3}+\frac{n}{5}$
7	$\frac{2n^6}{45}+\frac{4n^4}{9}+\frac{23n^2}{45}$
8	$\frac{4n^7}{315}+\frac{2n^5}{9}+\frac{28n^3}{45}+\frac{n}{7}$
9	$\frac{n^8}{315}+\frac{4n^6}{45}+\frac{22n^4}{45}+\frac{44n^2}{105}$
10	$\frac{2n^9}{2835}+\frac{4n^7}{135}+\frac{38n^5}{135}+\frac{1636n^3}{2835}+\frac{n}{9}$

V zgornji tabeli program *Mathematika* poenostavi izraze dobljene z rekurzivno formulo.

Poglejmo, kako lahko ročno dobimo število zadnjih položajev kocke v 4-dimenzionalnem prostoru. Izračunati moramo vrednost funkcije $f(3, n-1)$.

$$f(3, n-1) = f(2, n-1) + 2\sum_{x=1}^{n-1}(2, n-x-1) =$$

$$= n^2 + 2(f(2, n-2) + f(2, n-3) + f(2, n-4) + \cdots + f(2, 0)) =$$

$$= n^2 + 2((n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \cdots 1^2)$$

Z uporabo formule za vsoto kvadratov zaporednih naravnih števil

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

dobimo:

$$f(3, n-1) = n^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 + n}{3}$$

Podobno računamo v višjih dimenzijah. Tokrat smo potrebovali formulo za vsoto kvadratov zaporednih naravnih števil. V peti dimenziji bomo potrebovali za izpeljavo formulo za vsoto kubov zaporednih naravnih števil in tako naprej. Vsota potenc zaporednih naravnih števil se izračuna po Faulhaberjevi formuli [2]

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k m^{n+1-k}, \tag{14}$$

pri čemer je B_k Bernoullijevo število, ki ga izračunamo iz rekurzivne formule

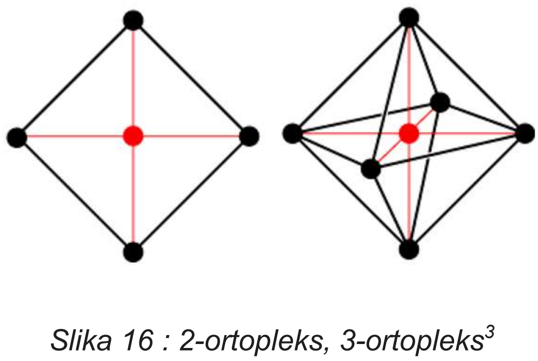
$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = 0$$

za $m > 0, B_0 = 1$.

5. 4 Geometrijski pogled na število možnih položajev zadnje kocke v mostu

Definicija ortopleksa: Ortopleks je politop katerega oglišča so v vseh točkah na koordinatnih oseh, ki so enako oddaljene od koordinatnega izhodišča.

V dvorazsežnem prostoru je to kvadrat, v trirazsežnem je oktaeder.



Slika 16 : 2-ortopleks, 3-ortopleks[3]

Intuicija nam pravi, da bodo vsi možni položaji zadnje kocke tvorili večdimenzionalno šahovnico podobno ortopleksu. Na sliki 15 lahko vidimo dvodimenzionalnemu ortopleksu podobno šahovnico.

Zato ugibamo, da bo število možnih končnih položajev približno enako polovici volumna ustreznega ortopleksa.

Prostornina $d-1$-ortopleksa s stranico a je

$$\frac{2^{\frac{d-1}{2}}a^{d-1}}{(d-1)!} \tag{15}$$

Ker je pri velikih n na diagonali ortopleksa približno $\sqrt{2}$ krat toliko končnih polj, kot je dolžina diagonale ustreznega ortopleksa, pomnožimo prostornino ortopleksa s faktorjem $\sqrt{2}$ za vsako koordinatno os. Zato pridemo do hipoteze, da lahko $f(d-1,n-1)$ pri velikih n aproksimiramo z izrazom

$$\boldsymbol{\frac{2^{d-2}}{(d-1)!}n^{d-1}}.$$

Za dokaz moramo pokazati, da velja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(d-1,n-1)}{\frac{2^{d-2}}{(d-1)!}n^{d-1}}=1.$$

To je limita kvocienta dveh polinomov. Enaka bo 1, če sta stopnji polinomov in vodilna koeficienta enaka. Zato moramo pokazati, da je vodilni člen polinoma $f(d-1,n-1)$ enak $\frac{2^{d-2}}{(d-1)!}n^{d-1}$.

Iz formule

$$\sum_{k=0}^{m-1}k^n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k m^{n+1-k}$$

je razvidno, da je stopnja polinoma v m na desni strani enačbe vedno $n+1$.

Vodilni člen tega polinoma je

$$\frac{\binom{n+1}{0} B_0 m^{n+1}}{n+1} = \frac{m^{n+1}}{n+1}.$$

Da je vodilni člen polinoma $f(d-1, n-1)$ enak $\frac{2^{d-2}}{(d-1)!} n^{d-1}$, dokažimo s popolno indukcijo.

Vemo, da enakost velja za $d = 2$, kot je razvidno iz tabele na strani 29.

Predpostavimo, da trditev velja za $d - 1$:

$$f(d-2, n-1) = \frac{2^{d-3}}{(d-2)!} n^{d-2} + p(n, d-3),$$

kjer je $p(n, d-3)$ polinom v n stopnje največ $d-3$.

To vstavimo v rekurzivno formulo (13) in dobimo, da je vodilni člen od $f(d-1, n-1)$ enak vodilnemu členu od

$$\frac{2^{d-3}}{(d-2)!} n^{d-2} + p(n, d-3) + 2 \sum_{x=1}^{n-1} \frac{2^{d-3}}{(d-2)!} (n-x)^{d-2} + p(n, d-3-x).$$

Iščemo vodilni člen izraza

$$2 \sum_{x=1}^{n-1} \frac{2^{d-3}}{(d-2)!} (n-x)^{d-2} + p(n, d-3-x).$$

Z zgoraj izpeljano formulo dobimo, da je ta

$$\frac{2 \frac{2^{d-3}}{(d-2)!}}{d-1} n^{d-1} = \frac{2^{d-2}}{(d-1)!} n^{d-1}$$

To pa smo tudi želeli dobiti, zato je približek še strogo dokazan.

6 ŠTEVILO MOSTOV V VEČDIMENZIONALNIH PROSTORIH, KI SE ZAČNEJO IN KONČAJO NA ENAKI VIŠINI

Probleme, ki smo jih v 3. poglavju reševali v dvodimenzionalnem prostoru, bi lahko posplošili še za večdimenzionalne prostore. Od petih postavitev mostov iz 3. poglavja posplošimo postavitev mostu, ki se začne in konča na enaki višini (3. 1).

Denimo, da naredimo $\boldsymbol{d}$-dimenzionalni most in uporabimo $\boldsymbol{n}$ kock, $\boldsymbol{n > 0}$. Prva kocka naj bo določena s točko $\boldsymbol{T(0, 0, \ldots, 0)}$. Koliko je mostov, pri katerih je zadnja kocka $\boldsymbol{(n-1, 0, 0, \ldots, 0)}$?

Imena koordinatnih osi naj bodo $x_1, x_2, x_3, \ldots., x_d$. V tridimenzionalnem prostoru naj x_1 predstavlja abscisno os, x_2 ordinatno os, z pa naj bo x_3. Vsakič se premaknemo za eno enoto desno po osi x_1. Število premikov glede na os x_2 označimo z X_2 in število premikov glede na os x_3 označimo z X_3. Če smo naredili X_2 premikov v smeri osi x_2, nam je za premike v smeri osi x_3 ostalo še $n-1-X_2$ premikov. Izmed $n-1$ kock izberemo tiste, ki so se premaknile po osi x_2. Število možnih položajev je toliko, kot je za vsako število premikov v x_2 smeri izborov $\binom{n-1}{X_2}$. Pri vsakem izmed njih je še polovica premikov v pozitivni smeri in polovica v negativni, kar pomeni, da število pomnožimo še z izbori $\binom{X_2}{\frac{X_2}{2}}$. Ostalo nam je še $n-1-X_2$ premikov po osi x_3, za katere je število položajev tako, kot je število izborov $\binom{n-1-X_2}{\frac{n-1-X_2}{2}}$, z dodanim popravnim faktorjem dobimo

$$\frac{1+(-1)^{X_d}}{2}\binom{n-1-X_2}{\frac{n-1-X_2}{2}}.$$

Rezultat za število mostov v tridimenzionalnem prostoru, ki se začnejo in končajo na enaki višini, je zato enak

$$f(2, n-1) = \sum_{X_d=0}^{n-1} \binom{n-1}{X_d} \frac{1+(-1)^{X_d}}{2} \binom{X_d}{\frac{X_d}{2}} f(1, n-1-X_d) =$$

$$= \sum_{X_d=0}^{n-1} \binom{n-1}{X_d} \frac{1+(-1)^{X_d}}{2} \binom{X_d}{\frac{X_d}{2}} \frac{1+(-1)^{n-X_d}}{2} \binom{n-X_d-1}{\frac{n-X_d-1}{2}} =$$

$$= \sum_{X_d=0}^{n-1} \frac{1+(-1)^{X_d}}{2} \frac{1+(-1)^{n-1-X_d}}{2} \frac{(n-1)!}{\left(\left(\frac{x}{2}\right)!\right)^2 \left(\left(\frac{n-1-x}{2}\right)!\right)^2}$$

Oba pomožna faktorja sta enaka 1, če je X_d sodo in n liho število. Zato lahko to poenostavimo naprej

$$= \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)!}{(x!)^2 \left(\left(\frac{n-1}{2}-x\right)!\right)^2} =$$

$$= \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} (n-1)! \sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(x! \left(\frac{n-1}{2}-x\right)!\right)^{-2}$$

S Chu–Vandermonde-ovo formulo[4] lahko izraz še poenostavimo in dobimo

$$\frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}^2 \tag{16}$$

Primer 8:

Izračunajmo število mostov s 5 kockami, ki se začnejo in končajo na enaki višini.

$$\frac{1+(-1)^{5+1}}{2} \binom{5-1}{\frac{5-1}{2}}^2 = \binom{4}{2}^2 = 36$$

V d-dimenzionalnem prostoru je postopek podoben. Iščemo število mostov, ki jih določa funkcija $f(d-1, n-1)$. Najprej izberemo število premikov med 0 in $n-1$ v smeri x_d-osi, ki ga označimo X_d. Nato izberemo, na katerih mestih v mostu se ti premiki pojavijo, to je $\binom{n-1}{X_d}$. Izberemo, kateri od teh premikov so v negativni in kateri v pozitivni smeri. Vsako od teh kombinacij pomnožimo še s številom kombinacij, ki jih določa funkcija $f(d-2, n-1-X_d)$.

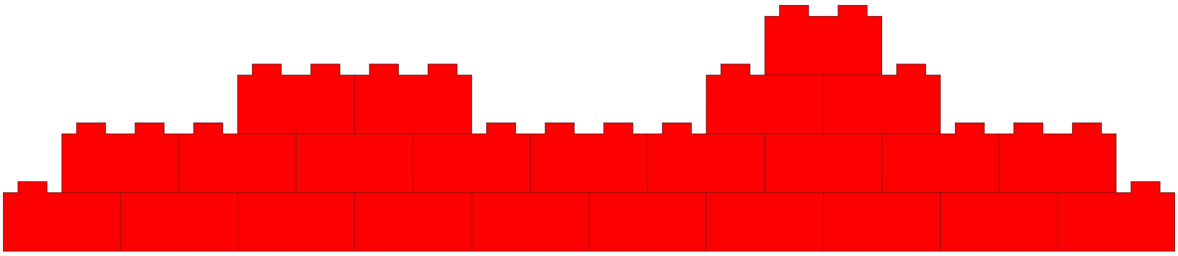
Iz vsega tega sledi rekurzivna formula za število mostov, ki se začnejo in končajo na enaki višini:

$$f(d-1, n-1) = \sum_{X_d=0}^{n-1} \binom{n-1}{X_d} \frac{1+(-1)^{X_d}}{2} \binom{X_d}{\frac{X_d}{2}} f(d-2, n-1-X_d) \tag{17}$$

7 ZID

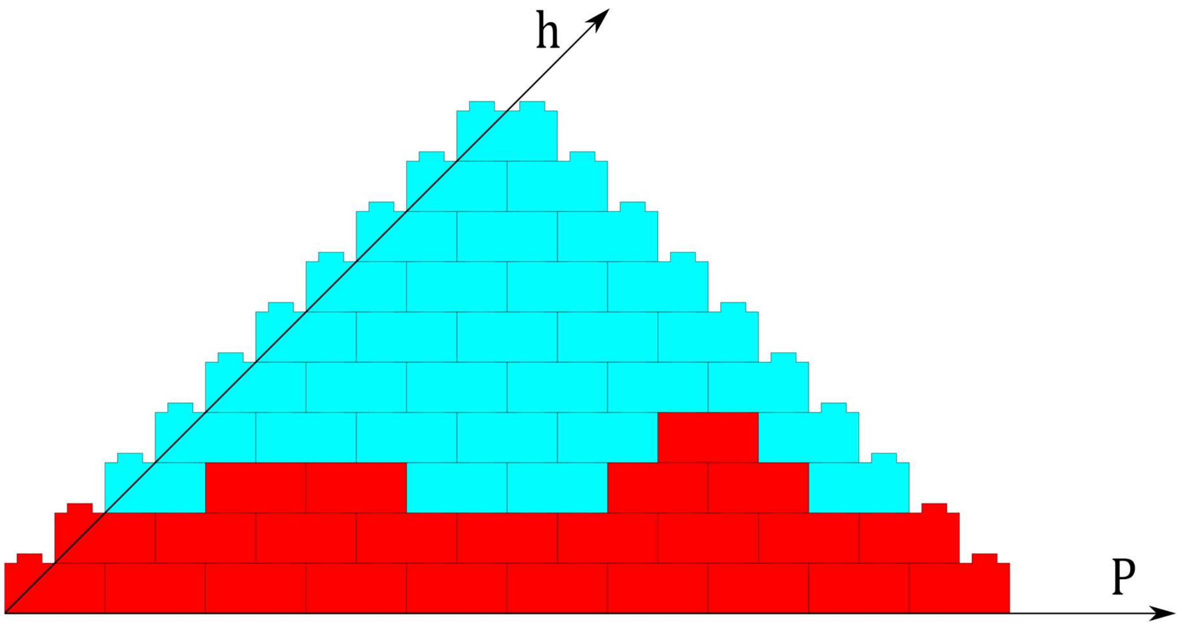
7. 1 Definicija zidu

Zid z začetno kocko $(0,0)$ naj bo taka pravilna postavitev končnega števila kock, ki je omejena s pravilnim mostom in osjo $y=0$, v njej pa je največje možno število kock.



Slika 17 : Zid

V zidu naj bo vsaka kocka določena s koordinatama (P,h), ki ju dobimo tako, da nad mostom postavimo »piramido«, kot kaže slika 17. Drugo koordinato h imenujmo nadstropje, P pa pove, katera po vrsti je kocka, če začnemo šteti kocke v nadstropju od leve proti desni in začnemo štetje z 0. Tudi štetje nadstropij začnemo z 0.



Slika 18 : Piramida nad zidom

7. 2 Število kock v zidu, ki ga omejuje dani pravilni most

V poglavju 2. 1 smo položaj kocke predstavili z urejenim parom števil (a_1, a_2). Točka $T(a_1, a_2)$ je predstavljala spodnje levo oglišče kocke. Poglejmo, kako bi koordinati (a_1, a_2) pretvorili v nov način označevanja kock s koordinatama (P, h).

Očitno je, da je druga koordinata h enaka a_2. Prva koordinata P v novem načinu označevanja kock pa je $\frac{a_1-a_2}{2}$.

Bralec, ki ima izkušnje v linearni algebri, bo prepoznal, da je transformacija baz linearna preslikava, katere matrika je $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. In dobimo

$$(P, h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}, a_2 \right)$$

(18)

Ko sestavljamo pravilni most, ki omejuje zid, se vsaki nadaljnji kocki prva koordinata poveča za eno enoto, to pomeni, da je sprememba na prvi koordinati 1, na drugi koordinati pa je sprememba $+1$ ali -1. Če vstavimo premike $(\Delta a_1, \Delta a_2) = (1, \pm 1)$ v formulo (18), dobimo možna premika kock glede na prejšnjo kocko

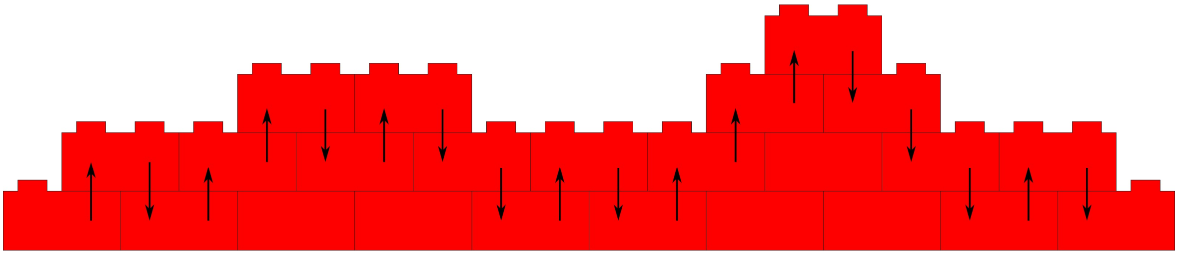
$$(\Delta P, \Delta h) = (0,1)$$

(19)

in $(\Delta P, \Delta h) = (1, -1)$

(20)

Na spodnji sliki je premik kocke $(\Delta P, \Delta h) = (0,1)$ označen s puščico, ki kaže navzgor: ↑. Premik $(\Delta P, \Delta h) = (1, -1)$ pa je označen s puščico, ki kaže navzdol: ↓.



Slika 19 : Zid z označenimi premiki kock

Zdaj izpeljimo preprost algoritem za izračun števila kock v zidu, če imamo podan samo urejen seznam premikov ↿ in ⇃ za izgradnjo pravilnega mostu ki omejuje zid.

Če je v seznamu n premikov, mora biti zadnja kocka pravilnega mostu

$$(a_1, a_2) = (n, 0) \Rightarrow (P, h) = \left(\frac{n}{2}, 0\right) \tag{21}$$

Iz tega sledi, da je v spodnjem nadstropju $S = \frac{n}{2} + 1$ kock.

(22)

Vsak zid lahko zgradimo iz seznama ↿ in ⇃ po naslednjem algoritmu:

1. Preštejemo premike v seznamu in postavimo $S = \frac{n}{2} + 1$ kock v 0-tem nadstropju.
2. Začnemo na kocki $(0,0)$ in se premaknemo v smeri puščice

2.1 Po vsakem premiku ↿ postavimo kocke od vključno tam, kjer se nahajamo, do desnega roba piramide.

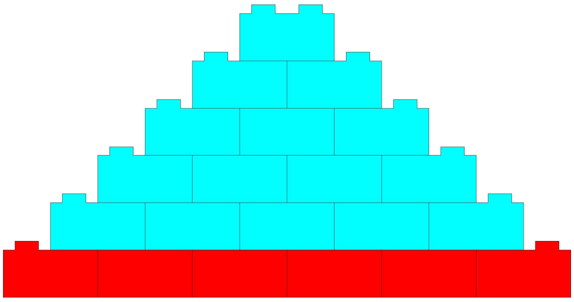
2.2 Po vsakem premiku ⇃ podremo kocke, ki so se nahajale desno od kocke, na kateri smo bili pred tem.

3. Ko smo prišli do konca seznama, je zid končan.

Primer 9:

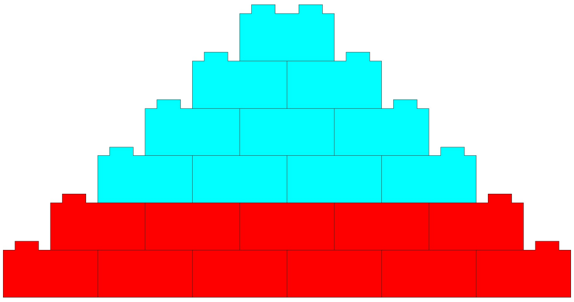
Podan je seznam premikov [↿, ↿, ⇃, ⇃, ↿, ↿, ⇃, ↿, ⇃, ⇃]. Narišimo zid, ki ustreza danemu zaporedju premikov.

1. V seznamu je 10 premikov, zato je v spodnjem nadstropju $S = \frac{10}{2} + 1 = 6$ kock.

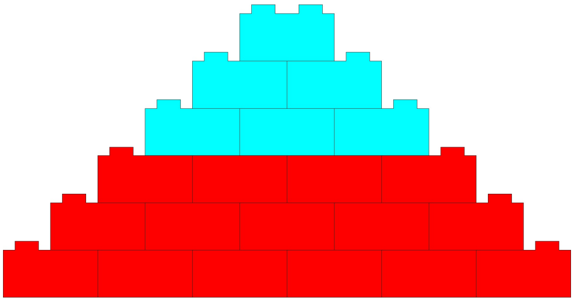


Slika 20 : 1. korak

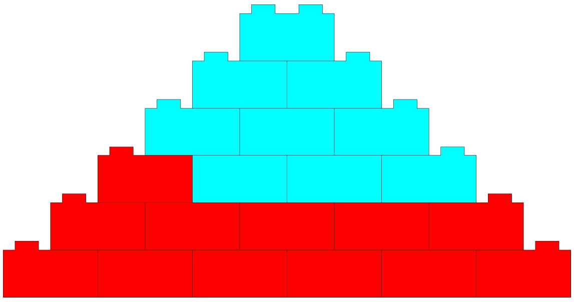
2. Faze gradnje zidu 2.1 in 2.2



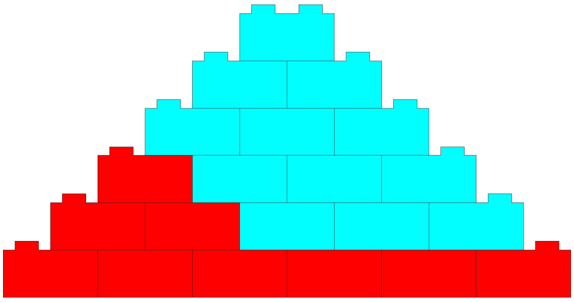
Slika 21 : Prva puščica ↑



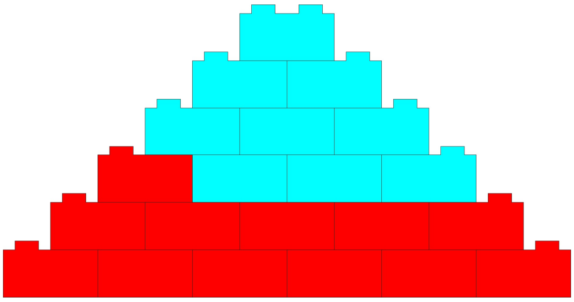
Slika 22 : Druga puščica ↑



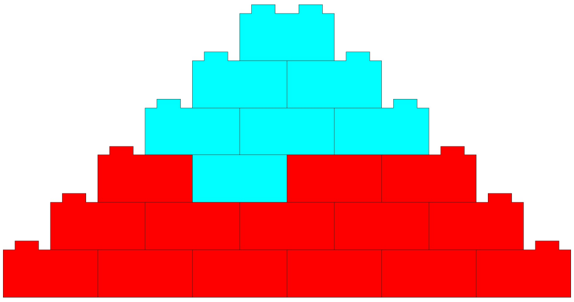
Slika 23 : Prva puščica ↓



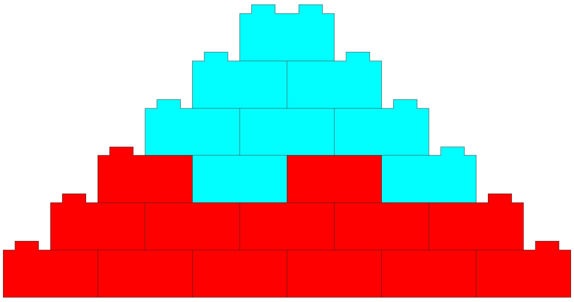
Slika 24 : Druga puščica ↓



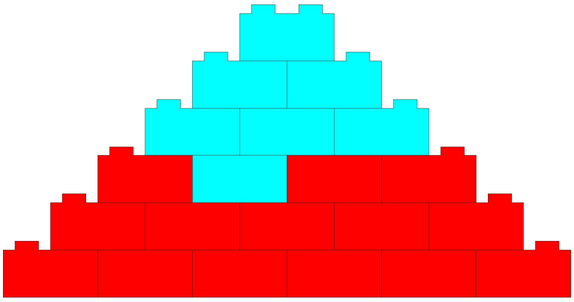
Slika 25 : Tretja puščica ↑



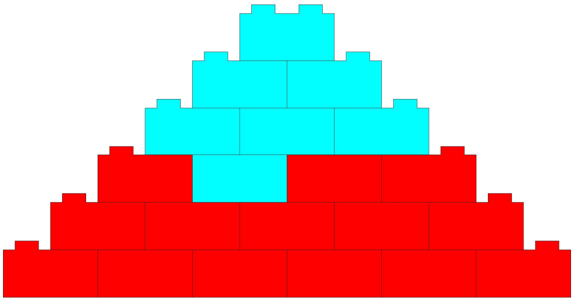
Slika 26 : Četrta puščica ↑



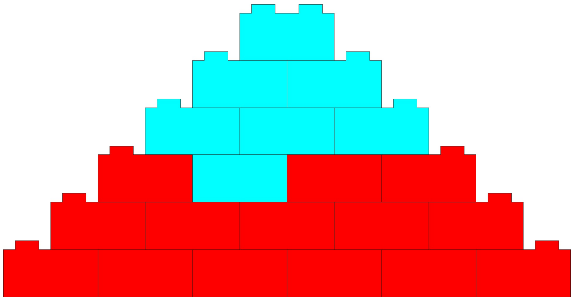
Slika 27 : Tretja puščica ↓



Slika 28 : Peta puščica ↑



Slika 29 : Četrta puščica ↓



Slika 30 : Peta puščica ↓

3. Zid je končan.

Zdaj pa ugotovimo, koliko kock je v zidu. Od števila kock, ki smo jih postavili, odštejemo toliko kock, kot smo jih podrli.

Najprej ugotovimo, koliko kock postavimo po premiku iz enega nadstropja v nadstropje višje, to pomeni iz (P, h) na $(P, h+1)$. Postavimo jih toliko, kolikor je kock od kocke $(P, h+1)$ do kocke na desnem robu piramide. Ker je kock v 0-tem nadstropju S, v vsakem nadstropju višje pa se število kock za 1 zmanjša, je koordinata zadnje kocke v $(h+1)$. nadstropju

$$(S-1{,}0)+(h+1)(-1{,}1)=(S-h-2, h+1).$$

Od kocke $(P, h+1)$ do kocke $(S-h-2,\ h+1)$ pa je seveda $S-h-P-1$ kock. To pomeni, da po premiku iz (P, h) na $(P, h+1)$ postavimo teh $S-h-P-1$ kock.

Koliko jih podremo po premiku iz $(P-1, h+1)$ na (P, h)? Seveda je rezultat isti, ker gre za iste kocke.

Vrnimo se k preštevanju kock v zidu in od kock, ki jih postavimo, odštejmo število kock, ki jih podremo:

$$N = S + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(S - h_{\uparrow i} - P_{\uparrow i} - 1) - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(S - h_{\downarrow i} - P_{\downarrow i} - 1),$$

pri čemer sta $(P_{\uparrow i}, h_{\uparrow i})$ koordinati kocke, od katere smo šli navzgor in $(P_{\downarrow i}, h_{\downarrow i})$ koordinati kocke, v katero se pomaknemo pri premiku navzdol.

Ker je v obeh vsotah enako členov, se členi $(S-1)$, ki nastopajo v obeh vsotah, odštejejo, odštejejo pa se tudi $h_{\uparrow i}$ in $h_{\downarrow i}$. Zakaj se odštejejo? Ker začnemo in končamo na enaki višini, velja, da če navzgor prečkamo neko nadstropje, ga moramo še enkrat prečkati v nasprotno smer, sicer ne bi mogli priti nazaj na začetno višino.

Zato nam ostane

$$S + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} P_{\downarrow i} - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} P_{\uparrow i}$$

Iz formule (18) za pretvorbo koordinat vemo, da je to enako

$$S + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\downarrow(i) - h_{\downarrow i} + 1}{2} - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\uparrow(i) - h_{\uparrow i}}{2},$$

kjer je $\downarrow(i)$ položaj i-te puščice navzdol v seznamu in $\uparrow(i)$ položaj i-te puščice navzgor v seznamu.

To zdaj poenostavimo

$$N = S + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\downarrow(i) - h_{\downarrow i} + 1}{2} - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\uparrow(i) - h_{\uparrow i}}{2} = S + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(\downarrow(i) + 1) - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \uparrow(i) =$$

$$= \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \downarrow(i) - \uparrow(i) + 1 = 1 + \frac{3n}{4} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \uparrow(i) - \downarrow(i) \tag{23}$$

Če upoštevamo

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \downarrow(i) + \uparrow(i) = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2},$$

(24)

lahko iz enačbe (24) izrazimo

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} -\downarrow(i) = -\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \uparrow(i).$$

Če to ustavimo v enačbo (23), dobimo

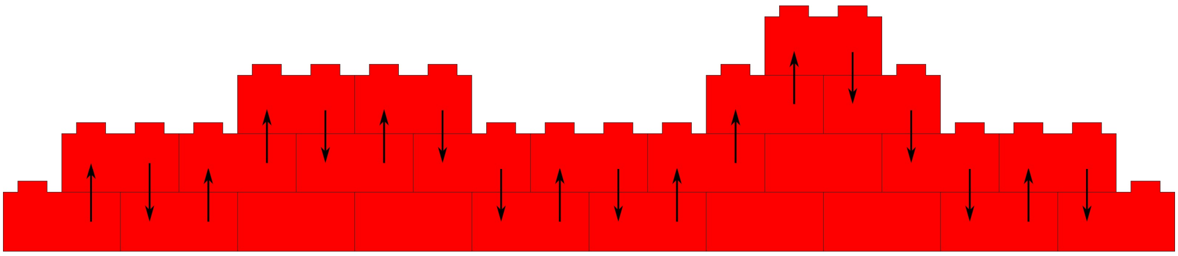
$$N = 1 + \frac{3n}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 2\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \uparrow(i)\right) = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + 1 - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \uparrow(i)$$

(25)

Primer 10:

Koliko kock je v zidu, ki je določen z zaporedjem premikov

$$[\uparrow,\downarrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow,\downarrow]?$$



Slika 31 : Primer štetja kock v zidu

Najprej preštejmo dolžino seznama

$$n = 18$$

Zdaj vstavimo podatke v formulo (25):

$$N = \frac{18^2}{4} + \frac{18}{2} + 1 - 0 - 2 - 3 - 5 - 8 - 10 - 11 - 12 - 16 = 24$$

Kock v danem zidu je 24.

7. 3 Število zidov iz N kock, ki jih definirajo pravilni mostovi z n premiki

Če iz enačbe (25) izrazimo vsoto, dobimo

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \uparrow(i) = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + 1 - N$$

To pomeni, da je problem, koliko je zidov iz N kock, ki jih definirajo pravilni mostovi z n premiki ekvivalenten problemu:

Imamo števila $0,1,2,3,\ldots,n-1$.
Na koliko načinov lahko izberemo $\frac{n}{2}$ izmed teh števil, da velja:

1. Vsota izbranih števil je $\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + 1 - N$.
2. Če $0,1,2,3,\ldots,n-1$ beremo od leve proti desni, je vedno vsaj polovica prebranih števil izbranih.

Najprej ugotovimo koliko izbiranj ustreza prvemu pogoju.

Definicija: Naj bo $g(p,r,s)$ rešitev vprašanja, na koliko načinov lahko med števili $0,1,2,3,4,\ldots,p-1$ izberemo r števil, da bo njihova vsota enaka s.

Izrek 6: **Velja rekurzivna formula**

$$\boldsymbol{g(p,r,s) = g(p-1,r-1,s-p+1) + g(p-1,r,s)}$$

In začetni pogoji

1. $\boldsymbol{s < 0 \Rightarrow g(p,r,s) = 0}$
2. $\boldsymbol{p < r \Rightarrow g(p,r,s) = 0}$
3. $\boldsymbol{g(0,r,s) = 0}$
4. $\boldsymbol{g(p,0,s) = 0}$

5. $\boldsymbol{r \neq 1 \Rightarrow g(p, r, 0) = 0}$
6. $\boldsymbol{g(p, 1, 0) = 1}$

Dokaz:

Recimo, da se iz zadnjega konca začnemo odločati, ali bomo neko število izbrali, ali ga ne bomo. Če je od leve proti desni vedno vsaj polovica števil izbranih, jih je od desne proti levi vedno vsaj polovica neizbranih. To je ekvivalentno drugemu pogoju.

Najprej poglejmo, do koliko števil smo od desne proti levi prišli. Pri vsakem naslednjem številu smo morali ponoviti rekurzivno formulo, s čemer se je p vsakič zmanjšal za 1. Zato vemo, da smo prišli do $n - p$ števil.

Zdaj pa poglejmo, koliko od teh števil je izbranih. Po isti logiki kot prej toliko, za kolikor se je spremenil r, kar je $\frac{n}{2} - r$. To pomeni, da je neizbranih

$$n - p - \frac{n}{2} + r = \frac{n}{2} - p + r$$

Glede na to ali smo zadnje število izbrali ali ga nismo, dobimo dve možnosti:

1. Smo izbrali število $p - 1$: med števili $0,1,2,3,4, \dots, p - 2$ moramo nabrati $r - 1$ takih števil, da bo njihova vsota $s - p + 1$
   To lahko po definiciji funkcije g naredimo na $g(p - 1, r - 1, s - p + 1)$ načinov.
2. Nismo izbrali števila $p - 1$: med števili $0,1,2,3,4, \dots, p - 2$ moramo nabrati r takih števil, da bo njihova vsota s.
   To lahko po definiciji funkcije g naredimo na $g(p - 1, r, s)$ načinov.

Od tod sledi rekurzivna formula

$$g(p, r, s) \;=\; g(p - 1, r - 1, s - p + 1) \;+\; g(p - 1, r, s)$$

QED

Definicija: Naj bo $j(p, r, s)$ rešitev vprašanja, na koliko načinov lahko med števili $0,1,2,3,4, \dots, p - 1$ izberemo r števil, da bo njihova vsota enaka s in če

$0,1,2,3,\ldots,p-1$ beremo od leve proti desni, je vedno vsaj polovica prebranih števil izbranih.

Definirajmo $h(a,b); \{a,b\} \subset \mathbb{Z}$, da velja:

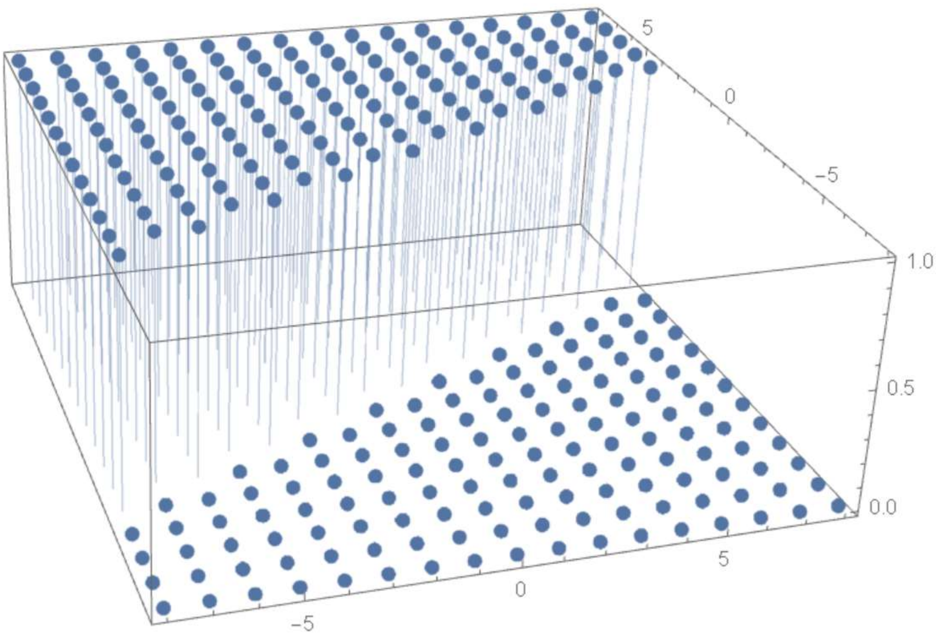
$$h(a,b) = \begin{cases} b \geq \dfrac{a}{2} : \ 1 \\ b < \dfrac{a}{2} : 0 \end{cases}$$

Bralec se lahko kaj hitro prepriča, da temu ustreza enačba

$$h(a,b) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|2b - a + 0.1|}{2b - a + 0.1}\right). \tag{26}$$

To enačbo upodablja tudi spodnja grafika.

```
DiscretePlot3D[1/2 (1 + Abs[0.1 - a + 2 b]/(0.1 - a + 2 b)), {a, -8, 8}, {b, -8, 8}]
```



Slika 32 : Grafična predstavitev funkcije h

Izrek 7: **Velja rekurzivna formula**

$$\boldsymbol{j(p,r,s) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{|2r-p-0.1|}{2r-p-0.1}\right)j(p-1,r-1,s-p+1) + j(p-1,r,s)}$$

in začetni pogoji

1. $\boldsymbol{s < 0 \Rightarrow j(p,r,s) = 0}$
2. $\boldsymbol{p < r \Longrightarrow j(p,r,s) = 0}$
3. $\boldsymbol{j(0,r,s) = 0}$
4. $\boldsymbol{j(p,0,s) = 0}$
5. $\boldsymbol{r \neq 1 \Longrightarrow j(p,r,0) = 0}$
6. $\boldsymbol{j(p,1,0) = 1}$

Dokaz:

Vpeljimo v rekurzijo za $g(p,r,s)$ še en faktor, ki bo poskrbel, da bo veljal tudi 2. pogoj, tako da bodo členi, ki ne ustrezajo 2. pogoju pomnoženi z 0, ostali pa z 1.

Dobljena funkcija upošteva oba pogoja in je zato enaka $j(p,r,s)$.

Iskani faktor dobimo iz enačbe (26) za $h(a,b)$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{|2b-a+0.1|}{2b-a+0.1}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\left|2\left(\frac{n}{2}-p+r\right)-(n-p\ )+0.1\right|}{2\left(\frac{n}{2}-p+r\right)-(n-p\ )+0.1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{|2r-p+0.1|}{2r-p+0.1}\right)$$

Ta rezultat zdaj ustavimo v rekurzijo. Seveda moramo to vstaviti le pred tisti člen, ki lahko povzroča premalo neizbranih števil, torej pri kateremu smo število izbrali:

$$j(p,r,s) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{|2r-p-0.1|}{2r-p-0.1}\right)j(p-1,r-1,s-p+1) + j(p-1,r,s).$$

Rekurzijo izvajamo, dokler ne dobimo enega izmed začetnih pogojev. Ker se pri vsakem koraku vsaj ena izmed vrednosti p,r,s zmanjša, se rekurzija vedno ustavi, saj je vsaj eden izmed p,r,s enak 0 ali negativen.

Posledica: **število zidov z N kockami, ki jih definirajo pravilni mostovi z n premiki, je**

$$\boldsymbol{j\left(n,\frac{n}{2},\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}+1-N\right).}$$

7. 4 Najmanj koliko kock je v spodnjem nadstropju zidu iz N kock

Zdaj izračunajmo število vseh zidov z N kockami. Zid je definiran z mostom z n premiki. Najprej moramo ugotoviti, koliko je najmanjše oziroma največje število premikov v mostu, ki določa zid.

Vsak zid iz N kock je znotraj piramide z enakim spodnjim nadstropjem. Zato mora biti v spodnjem nadstropju vsaj toliko kock, kot jih ima najmanjša piramida, v katero še lahko stlačimo N kock.

Število kock v piramidi, ki ima v spodnjem nadstropju S kock je

$$N = 1 + 2 + 3 + \cdots + S = \frac{S(S+1)}{2}.$$

Inverzna funkcija je

$$S = \frac{\sqrt{8N+1}-1}{2}.$$

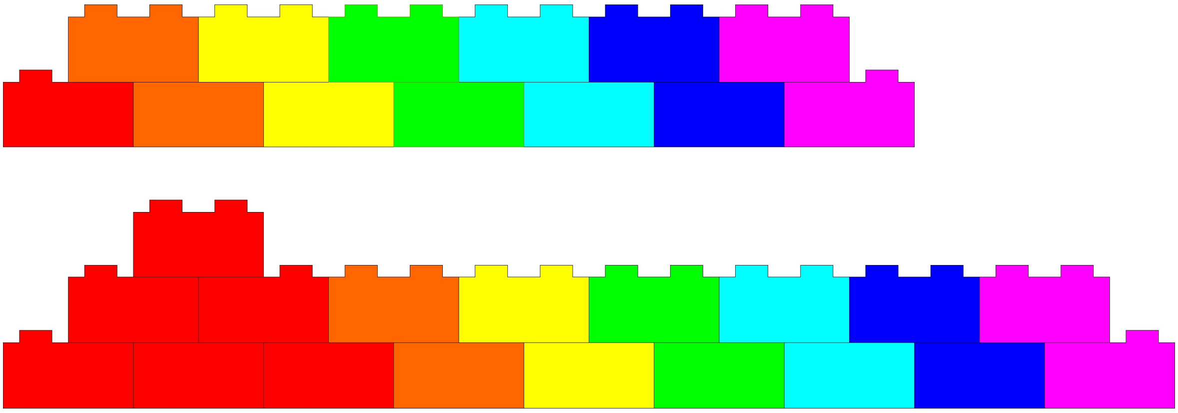
To drži v primerih, ko je S celo število. Zdaj pa razmislimo, kaj se zgodi, če v primeru, ko je S celo število, dodamo še eno kocko. Če smo jih prej ravno še stlačili v neko piramido, bomo zdaj potrebovali piramido s S-jem večjim za vsaj 1. To lahko enostavno uredimo s funkcijo $\lceil x \rceil$ in tako dobimo

$$S_{min}(N) = \left\lceil \frac{\sqrt{8N+1}-1}{2} \right\rceil$$

Iz enačbe 22 sledi

$$n_{min} = 2\left\lceil \frac{\sqrt{8N+1}-1}{2} \right\rceil - 2$$

Očitno je, da največji n dobimo v primerih, kakršna sta na spodnji sliki



Slika 33 : Zidova z največjim n iz 13 in iz 18 kock

Za vsako naslednje liho oziroma sodo število kock dobimo zid z dodajanjem dveh kock, kot kaže zgornja slika.

Zato je za N, ki je liho število

$$n_{max} = N - 1.$$

In za N, ki je sodo število

$$n_{max} = N - 2.$$

To lahko zapišemo v eni enačbi

$$n_{max} = N - \frac{(-1)^N + 3}{2}.$$

O tem, da so možni tudi vsi vmesni sodi n-ji med n_{min} in n_{max} pa se lahko prepričamo tako, da pomislimo, kaj se zgodi, če začnemo z zidom, kot je na sliki 32 in po dve kocki iz desnega konca prestavljamo v višja nadstropja.

Iz vsega povedanega sledi končna formula za število možnih zidov iz N kock

$$\boldsymbol{N \neq 1 \Rightarrow f(N) = \sum_{n=2\left\lceil\frac{\sqrt{8N+1}-1}{2}\right\rceil-2}^{N-\frac{(-1)^N+3}{2}} j\left(n, \frac{n}{2}, \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + 1 - N\right)}$$

$$\boldsymbol{f(1) = 1}$$

8 RAZPRAVA IN ZAKLJUČEK

Ko sem se lotil raziskovanja in si ustvaril pregled nad obsežnostjo primerov, ki so me zanimali, sem si moral postaviti izvedljive cilje. To so bili

- Poiskati število različnih mostov iz danega števila dvodimenzionalnih kock
- Posplošiti problem na večdimenzionalne prostore
- Sprogramirati program za rešitev problema pri velikem številu kock

Cilje sem izpolnil. Naloga je izvirna in pravilnosti rešitev nisem mogel preveriti iz virov, preveril pa sem rešitve na manjšem številu konkretnih primerov. Za zaporedja, ki sem jih našel v bazi OEIS, so rešitve preverjene pri večjem številu primerov. Rekurzivne formule, ki sem jih izpeljal, so sicer drugačne od tistih, ki so v bazi OEIS, dajo pa enake rezultate pri vseh izračunanih vrednostih.

Čeprav sem v dveh dimenzijah obravnaval več posebnih primerov mostov, sem zaradi časovne omejitve pri večdimenzionalnih mostovih prikazal splošno formulo le za osnovno postavitev mostu, ki se začne in konča na enaki višini.

Do najbolj zanimivega rezultata sem prišel v poglavju 5.4, kjer sem ugotovil, da je pri velikem številu kock število možnih postavitev zadnje kocke v mostu povezano z volumnom ortopleksa. Volumen ortopleksa je bil tema moje lanskoletne raziskovalne naloge.

Nalogo sem zaključil s postavitvijo, ki je omejena z mostom in osjo $y = 0$ in sem jo imenoval zid. Tudi tu sem izpeljal formulo, s katero izračunamo število različnih postavitev zidov pri danem številu kock. Izkaže pa se, da je formula tako kompleksna, da celo pri manjšem številu kock računalnik potrebuje veliko časa za izračun.

Naloga ponuja še mnogo možnosti za nadaljnje raziskovanje:

- Ugotavljanje števil zapletenejših postavitev kock daleč presega okvir te raziskovalne naloge. Tudi srednješolsko znanje ne zadošča več za to.

- Raziskoval sem tudi pričakovani vztrajnostni moment naključnega mostu, vendar to ne sodi v kontekst te raziskovalne naloge.

- Nalogo bi lahko razširili še z računanjem pričakovane oddaljenosti zadnje kocke od prve, najmanjšim možnim obsegom postavitve n kock, razširitvijo zadnjih 2 problemov v višje dimenzije in še in še.

9 VIRI IN LITERATURA

[1] Weisstein, Eric W. »Binomial Coefficient.« From MathWorld.URL: http://mathworld.wolfram.com/BinomialCoefficient.html (Citirano 2. 3. 2020)

[2] Faulhaberjeva formula. 2019. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Faulhaber%27s_formula (Citirano 2. 2. 2020)

[3] *Orthoplex.* URL: http://www.paulscottinfo.ipage.com/polyhedra/polytopes/crosspolytopes.html (Citirano 3. 3. 2020)

[4] Binomial Coeficcient. 2019. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient (Citirano 3. 3. 2020)

[5] Kozarski, L., 2014. Catalanova števila. Magistrsko delo. URL: https://repozitorij.uni-lj.si/Dokument.php?id=104518&lang=slv (Citirano 10. 1. 2020)

[6] Konvalinka, M., 2015. Catalanova števila. FAMNITovi matematični izleti URL: https://www.youtube.com/watch?v=hzR_EAaJyXw (Citirano 2. 1. 2020)

[7] Mathologer. 2019. Euler-Maclaurin formula. URL: https://www.youtube.com/watch?v=fw1kRz83Fj0&t=2525s (Citirano 20. 2. 2020)

[8] 3.Blue1Brown. Essence of linear algebra. 2019. URL: https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab (Citirano 15. 2. 2020)

[9] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A002894 (Citirano 2. 3. 2020)

[10] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A291148 (Citirano 2. 3. 2020)

[11] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A001524 (Citirano 2. 3. 2020)

10 PRILOGE

Priloga 1: Program za poenostavitev formule (13) za zaporedne dimenzije

```
f[d_, š_] :=
 {
  formule = {n};
  a = n;
  Print[a];
  korakov = 1;
  Do[
   a = Simplify[a + 2 Sum[(a /. n → x), {x, 1, n-1}]];
   Print[   ];

   A = TraditionalForm[Expand[a]];
   Print[A];
   AppendTo[formule, a];
   , {i, d}];

  Print[   ];
  Print[   ];
  Print[   ];

  Do[
   Print[     Table[formule[[i]], {n, 1, š}]]
   , {i, d}]

 }
```

Ta program izpiše točne formule za posamezni d, kot so bile že tabelirane in nato še številske vrednosti za izbrano število n-jev. Na naslednji strani je nekaj izračunanih vrednosti.

$d-1$	$f(d-1,n-1)$
1	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
2	{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
3	{1, 6, 19, 44, 85, 146, 231, 344, 489, 670}
4	{1, 8, 33, 96, 225, 456, 833, 1408, 2241, 3400}
5	{1, 10, 51, 180, 501, 1182, 2471, 4712, 8361, 14 002}
6	{1, 12, 73, 304, 985, 2668, 6321, 13 504, 26 577, 48 940}
7	{1, 14, 99, 476, 1765, 5418, 14 407, 34 232, 74 313, 149 830}
8	{1, 16, 129, 704, 2945, 10 128, 29 953, 78 592, 187 137, 411 280}
9	{1, 18, 163, 996, 4645, 17 718, 57 799, 166 344, 432 073, 1 030 490}
10	{1, 20, 201, 1360, 7001, 29 364, 104 881, 329 024, 927 441, 2 390 004}
11	{1, 22, 243, 1804, 10 165, 46 530, 180 775, 614 680, 1 871 145, 5 188 590}
12	{1, 24, 289, 2336, 14 305, 71 000, 298 305, 1 093 760, 3 579 585, 10 639 320}
13	{1, 26, 339, 2964, 19 605, 104 910, 474 215, 1 866 280, 6 539 625, 20 758 530}
14	{1, 28, 393, 3696, 26 265, 150 780, 729 905, 3 070 400, 11 476 305, 38 774 460}
15	{1, 30, 451, 4540, 34 501, 211 546, 1 092 231, 4 892 536, 19 439 241, 69 690 006}
16	{1, 32, 513, 5504, 44 545, 290 592, 1 594 369, 7 579 136, 31 910 913, 121 040 160}
17	{1, 34, 579, 6596, 56 645, 391 782, 2 276 743, 11 450 248, 50 940 297, 203 891 370}
18	{1, 36, 649, 7824, 71 065, 519 492, 3 188 017, 16 915 008, 79 305 553, 334 137 220}
19	{1, 38, 723, 9196, 88 085, 678 642, 4 386 151, 24 489 176, 120 709 737, 534 152 510}
20	{1, 40, 801, 10 720, 108 001, 874 728, 5 939 521, 34 814 848, 180 013 761, 834 876 008}
21	{1, 42, 883, 12 404, 131 125, 1 113 854, 7 928 103, 48 682 472, 263 511 081, 1 278 400 850}
22	{1, 44, 969, 14 256, 157 785, 1 402 764, 10 444 721, 67 055 296, 379 248 849, 1 921 160 780}
23	{1, 46, 1059, 16 284, 188 325, 1 748 874, 13 596 359, 91 096 376, 537 400 521, 2 837 810 150}
24	{1, 48, 1153, 18 496, 223 105, 2 160 304, 17 505 537, 122 198 272, 750 695 169, 4 125 905 840}
25	{1, 50, 1251, 20 900, 262 501, 2 645 910, 22 311 751, 162 015 560, 1 034 909 001, 5 911 510 010}
26	{1, 52, 1353, 23 504, 306 905, 3 215 316, 28 172 977, 212 500 288, 1 409 424 849, 8 355 843 860}
27	{1, 54, 1459, 26 316, 356 725, 3 878 946, 35 267 239, 275 940 504, 1 897 865 641, 11 663 134 350}
28	{1, 56, 1569, 29 344, 412 385, 4 648 056, 43 794 241, 355 001 984, 2 528 808 129, 16 089 808 120}
29	{1, 58, 1683, 32 596, 474 325, 5 534 766, 53 977 063, 452 773 288, 3 336 583 401, 21 955 199 650}
30	{1, 60, 1801, 36 080, 543 001, 6 552 092, 66 063 921, 572 814 272, 4 362 170 961, 29 653 954 012}

Priloga 2: Program za izračun števila zidov iz N kock

```
G[p_, r_, s_] :=
 Which[
  (s > 0 ∧ p > r - 1 ∧ p > 0 ∧ r > 0),
  1/2 (1 + Abs[2 r - p - 0.1]/(2 r - p - 0.1)) G[p - 1, r - 1, s - p + 1] + G[p - 1, r, s],
  s < 0, 0,
  s == 0, If[r == 1, 1, 0],
  p == 0, 0,
  r == 0, 0,
  p < r, 0]
```

$$\texttt{Polnih}[N\_] := \sum_{n=2\,\mathrm{Ceiling}\left[\frac{\sqrt{8N+1}-1}{2}\right]-2}^{N-\frac{(-1)^N+3}{2}} \frac{(-1)^n+1}{2} * G\left[n, \frac{n}{2}, \frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}+1-N\right]$$

```
Seznam[n_] := {
  seznam = {};
  Do[
   AppendTo[seznam, Polnih[i]]
   , {i, n}];
  Print[seznam]}
```

Spodaj je nekaj izračunanih vrednosti.

1,1,0,1,0,1,1,1,2,2,4,4,7,9,13,19,25,38,51,75,104,149,211,298,426,600,857,1211,1724,

2444,3471,4930,6995,9940,14104,20038,28444,40397,57362,81453,115675,164250,

233262,331227

Priloga 3: Program za risanje kock v tridimenzionalnem prostoru

```
Končnapolja[c_] := {

  Kvadratek[n_, y_, z_, grafike_] := {
    p = Polygon[{
       {0, y    , z    },
       {0, y + 1, z    },
       {0, y + 1, z + 1},
       {0, y    , z + 1}
      }];
    G = Prepend[grafike, Graphics3D[{Cyan, p}]]
   };


   n = c;
   G = {};
   y = {};
   z = {};


   Do[
    y = Join[y, Range[-k, k, 2]];,
    {k, 0, n - 1}];
```

```
 Do[
  Do[

   z = Join[z, {n - k}];

   , {l, k}]
  , {k, 0, n}];


 Do[
  Kvadratek[n, y[[i]], z[[i]], G];
  , {i, n (n - 1)/2}];
 Do[
  Kvadratek[n, y[[i]], -z[[i]] + 2, G];
  , {i, (n - 1) (n - 2)/2}];

Show[G]

}

Dmost[seznam_] := {
  Kocka[x_, y_, z_, grafike_] := {
    k = Graphics3D[{Red, Cuboid[
        {x,     y,     z    },
        {x + 2, y + 1, z + 1}
       ]}];
    G = Prepend[grafike, k]
   };

  n = 1 + Length[seznam];
  G = {};
  y = 0;
  z = 1;
  Y = {0};
  Z = {1};
```

```
 Do[
  a = seznam[[i]];
  Which[
   a == 1, y--,
   a == 2, y++,
   a == 3, z--,
   a == 4, z++
  ];

  Y = Prepend[Y, y];
  Z = Prepend[Z, z]
  , {i, n - 1}];

 Do[
  Kocka[i - 1, Y[[i]], Z[[i]], G]
  , {i, n}];

 Show[G]
}
```

```
Naključen[n_] := {
   naključna = RandomInteger[{1, 4}, n - 1];
   Show[Končnapolja[n + 1], Dmost[naključna], Boxed → False],
   Show[Dmost[naključna], Boxed → False]
  }
```