RAZISKOVALNA NALOGA

SPLOŠNI KRITERIJ DELJIVOSTI

Avtorja: Jurij Grohar, Matej Kompara

Mentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Področje: SŠ matematika

April, 2020

Škofijska gimnazija Vipava

Povzetek

Kriterij deljivosti je algoritem, s katerim preverimo s pomočjo števk danega naravnega števila n, ali je število n deljivo z danim naravnim deliteljem p. Pri tem lahko uporabimo seštevanje, odštevanje ali množenje majhnih števil. V raziskovalni nalogi smo razvili in utemeljili *splošni kriterij deljivosti*, s katerim lahko za vsako naravno število n in vsak naravni delitelj p preverimo deljivost. Z uporabo tega splošnega kriterija deljivosti smo dokazali znane kriterije za deljivost s števili 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 in 11. Ker sta tako dokaz kot izvedba splošnega kriterija deljivosti za majhna praštevila zelo preprosta, predlagamo, da se v srednješolske učbenike uvrsti te kriterije za preverjanje deljivosti s števili 7, 11, 13, 17 in 19.

Ključne besede: *deljivost, kriteriji deljivosti, splošni kriterij deljivosti, naravna števila*

Abstract

The divisibility criterion is an algorithm that uses the digits of a natural number n to determine whether n is divisible by a natural divisor p. To do so, addition, subtraction or multiplication of low numbers can be used. In the following research paper, a general divisibility criterion is developed and substantiated. It can be used to determine the divisibility for every natural number n and every natural divisor p. The already known criteria for the divisibility by 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 and 11 were proved using this general divisibility criterion. Since the proof and the execution of the general divisibility criterion for low prime numbers are very simple we therefore suggest the inclusion of the criteria to establish the divisibility by 7, 11, 13, 17 and 19 in the secondary school textbooks.

Key words: *divisibility, divisibility criteria, general divisibility criterion, natural numbers*

Zahvala

Zahvaljujeva se profesorju matematike mag. Alojzu Grahorju za idejo in usmerjanje pri ustvarjanju raziskovalne naloge ter pomoč pri iskanju virov, profesorici angleščine Sonji Matelič za prevod povzetka v angleščino in profesorici Bojani Pižent Kompara za jezikovni pregled naloge.

Hvala tudi profesorju dr. Urošu Milutinoviću s Fakultete za matematiko in naravoslovje Univerze v Mariboru za čas, pomoč pri iskanju literature in vzpodbude za raziskovanje.

Kazalo

Vsebina

Kazalo slik

1 Uvod

1.1 Splošno o kriterijih deljivosti

Kriterij deljivosti je algoritem, s katerim lahko s pomočjo števk danega naravnega števila $\boldsymbol{n}$ ugotovimo, ali je število $\boldsymbol{n}$ deljivo z naravnim deliteljem $\boldsymbol{p}$, ne da bi število $\boldsymbol{n}$ delili z deliteljem $\boldsymbol{p}$. Glede na dostopne vire je eden prvih kriterijev zapisan v tako imenovanem Babilonskem Talmudu (500 po Kr.)

»/…/ stotice dajte na stran kot jubilejske cikle in preostanek pretvorite v sabatske cikle (vsak po sedem let), potem ko k temu dodate dve leti za vsako dopolnjeno stoletje; preostanek vam poda številko leta v tekočem sabatskem ciklu« (glej Dickson, začetek XII. poglavja, 1919, prevod M. Kompara).

Ko to prevedemo v matematični jezik, odlomek kaže na to, da za cela števila n, a in b velja: $n = 100a + b$ in $100a + b \equiv 2a + b (mod\ 7)$, saj je $100a + b = 7 \cdot 14a + (2a + b)$. Tu je vsebovan kriterij deljivosti s 7, in sicer postopoma »režemo« dvomestni konec števila n, ki ga prištejemo dvakratniku števila a. Še preprostejši kriterij deljivosti s 7 smo našli v (Tucker, 1889, stran 115 in 116). Uporabljen je tale kriterij:

$$n = 10a + b = 7(a + b) + 3(a - 2b)$$

SOME PROPERTIES OF THE NUMBER 7.

1. MY attention was recently drawn by a pupil to the following property, which will be best illustrated by working out a particular example :

$$\begin{array}{rlr} \text{Let N} = & 342544\,3 & \\ u_2 = & 34253\,8 & i.e.\ u_2 = 342544 - 2 \times 3 \\ u_3 = & 3423\,7 & u_3 = 34253 - 2 \times 8 \\ u_4 = & 340\,9 & u_4 = 3423 - 2 \times 7 \\ & 32\,2 & \text{and so on :} \\ & 2\,8 & \end{array}$$

if any one of the quantities u_2, u_3, u_4, &c., is divisible by 7, then N is so divisible.[1]

$$\begin{aligned} \text{For, let N} &= 10P_1 + p_0 \\ u_2 &= 10P_2 + q_1 \\ u_3 &= 10P_3 + q_2 \\ u_4 &= 10P_4 + q_3 \\ u_{n-1} &= 10P_{n-1} + q_{n-2} \\ u_n &= 10P_n + q_{n-1} \qquad = 7Q, \text{ by hypothesis.} \\ \text{Now, } 10P_1 &= 10^2P_2 + 10(q_1 + 2p_0) \\ 10^2P_2 &= 10^3P_3 + 10^2(q_2 + 2q_1) \\ 10^3P_3 &= 10^4P_4 + 10^3(q_3 + 2q_2) \\ 10^{n-1}P_{n-1} &= 10^nP_n + 10^{n-1}(q_{n-1} + 2q_{n-2}); \\ \therefore N = 10P_1 + p_0 &= 21[p_0 + 10q_1 + \ldots + 10^{n-2}q_{n-2}] \\ &\quad + 10^{n-1}(10P_n + q_{n-1}) \\ &= 21M + 10^{n-1}(7Q) = 7Q^1. \end{aligned}$$

Slika 1: Primer kriterija za deljivost s 7 (Vir: Tucker, 1889, stran 115 in 116)

Podoben kriterij za deljivost s 7 smo zasledili tudi v slovenski reviji Presek (Miloševič, 1982), in sicer $\boldsymbol{n = 10a + b = 7(a + 4b) + 3(a - 9b)}$. Na istem mestu je opisan tudi kriterij za deljivost s 13. V to kategorijo spada tudi Chika's test (glej Chika, 2020), kjer je osnovnošolec Chika Ofili uporabil enakovreden zapis tako Tuckerjevemu kot Miloševičemu. Chika's test je izvedbeno nekoliko lažji, saj množimo s 5 in prištevamo.

$$\boldsymbol{n = 10a + b = 7(a - 2b) + 3(a + 5b)}.$$

Pregledali smo še več virov. Cherniavsky (glej Cherniavsky, 2014) opisuje kriterij deljivosti, poimenovan po avtorju Zbikovskem, Ganzell (glej Ganzell, 2016) opisuje podobno metodo, kot jo obravnavamo v raziskovalni nalogi, McDowell (glej McDowell, internetni portal) je podal zgodovinski pregled in navedel preko 50 drugih naslovov iz obravnavanega področja. Olsen (glej Olsen, 2006) opisuje podobno metodo in poda vrednosti $\boldsymbol{\lambda}$ do 100, podobno tudi Renault (glej Renault, 2006) in Vorob'ev (glej Vorob'ev, 1980).

Od člankov, ki smo jih uspeli pregledati, je naši temi še najbližje članek Antona Suhadolca (glej Suhadolec, 2000, strani 342–343). V tem članku je opisan podoben splošni kriterij, kot ga obravnavamo v raziskovalni nalogi, a le za praštevila. Uporabljena pa je pot preko polinomov.

1.2 Cilj naloge in metode raziskovanja

Glede na to, da smo našli v nam dostopni literaturi opis iterativnega kriterija za deljivost z nekaterimi števili, smo si zamislili, da bi lahko to idejo posplošili. Postavili smo si raziskovalno vprašanje, ali lahko za vsak naravni faktor $\boldsymbol{p}$ zapišemo vsako naravno število $\boldsymbol{n}$ v obliki

$\boldsymbol{n = 10a + b = p \cdot k + q(a - \lambda b)}$, kjer sta si števili $\boldsymbol{p}$ in $\boldsymbol{q}$ tuji (natančne pogoje bomo zapisali kasneje).

Od tod sledi, da je število $\boldsymbol{n}$ deljivo s številom $\boldsymbol{p}$ natanko takrat, ko je s $\boldsymbol{p}$ deljivo število $\boldsymbol{a - \lambda b}$. V naslednjem koraku ponovimo enak postopek s številom $\boldsymbol{n_1 = a - \lambda b}$, torej:

$$\boldsymbol{n_1 = 10a_1 + b_1 = p \cdot k_1 + q(a_1 - \lambda b_1)}.$$

Tako dobimo padajoči niz števil $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n_1 = a - \lambda b}$, $\boldsymbol{n_2 = a_1 - \lambda b_1 \cdots n_k = a_{k-1} - \lambda b_{k-1}}$. Niz končamo, ko dobimo takšno število $\boldsymbol{n_k}$, za katero lahko z lahkoto preverimo deljivost s $\boldsymbol{p}$.

1.2.1 Cilj raziskovalne naloge

Cilj raziskovalne naloge je opisati algoritem, s katerim bomo za vsak naravni delitelj $\boldsymbol{p}$ poiskali število $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Z}$ tako, da bo za vsako naravno število $\boldsymbol{n}$ izpolnjena enakost

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda b}), \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}\,.$$

Če sta $\boldsymbol{p}$ in $\boldsymbol{q}$ tuji si števili, potem sklepamo, da je število $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ deljivo s številom $\boldsymbol{p}$ natanko takrat, ko je s številom $\boldsymbol{p}$ deljivo število $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda b}$.

Temu iterativnemu postopku bomo rekli **splošni kriterij deljivosti $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda b}$**.

1.2.2 Metode raziskovanja

Uporabili smo naslednje metode dela:

- delo po strokovni literaturi,
- preiskovanje v matematiki s pomočjo programa Python,
- matematično sklepanje in dokazovanje.

1.3 Linearna diofantska enačba z dvema neznankama

Linearna diofantska enačba z dvema neznankama je enačba oblike

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{c}, \text{ kjer so } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

Rešitev linearne diofantske enačbe je opisana v izreku (Grasseli, 1984, stran 38):

Izrek: *Naj bodo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ cela števila, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ različna od nič in $\boldsymbol{d}$ njun največji skupni delitelj.*

- *Enačba (1) nima nobene celoštevilske rešitve, kadar $\boldsymbol{d}$ ne deli $\boldsymbol{c}$.*
- *Če $\boldsymbol{d}$ deli $\boldsymbol{c}$, ima enačba (1) neskončno celoštevilskih rešitev. Če je par $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ ena izmed celoštevilskih rešitev enačbe (1), potem so vse celoštevilske rešitve te enačbe izražene s formulama:*

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\lambda} - \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{t},$ *ko $\boldsymbol{t}$ preleti vsa cela števila. (Dokaz je prav tam.)*

V posebnem primeru, ko je $\boldsymbol{D(a,b)=1}$, je rešitev $\boldsymbol{x=\mu+b\cdot t}$, $\boldsymbol{y=\lambda-a\cdot t}$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}$,

kjer je $(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda})$ *ena izmed delnih (partikularnih) rešitev enačbe (1). Partikularno (delno) rešitev lahko dobimo z Evklidovim algoritmom, in sicer tako, da iščemo* $\boldsymbol{D(a,b)}$*. Ker smo predpostavili, da sta si števili* $\boldsymbol{a}$ *in* $\boldsymbol{b}$ *tuji, lahko iz pogoja* $\boldsymbol{D(a,b)=1}$ *razvijemo konkretno delno rešitev. Delno rešitev seveda lahko tudi uganemo.*

Primer 1: Poiščimo celoštevilske rešitve diofantske enačbe $\mathbf{11}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{1}.$

V tem primeru lahko delno rešitev uganemo, in sicer $(\mathbf{1},-\mathbf{10})$. Izračunajmo še s pomočjo Evklidovega algoritma. Poiščemo $\boldsymbol{D}(\mathbf{11},\mathbf{1})$. Ker je

$$\mathbf{11=1\cdot 10+1}$$
$$\mathbf{1\cdot 11-10\cdot 1=1},$$

delna rešitev je $(\mathbf{1},-\mathbf{10})$, rešitev enačbe pa $\boldsymbol{x}=\mathbf{1}+\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{y}=-\mathbf{10}-\mathbf{11}\cdot\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}$

Primer 2: Rešimo enačbo: $71x+61y=1$

$$71=61\cdot 1+10$$
$$61=10\cdot 6+1$$

$$\mathbf{1=61-10\cdot 6}$$
$$\mathbf{1=61-(71-61)\cdot 6}$$
$$\mathbf{1=-6\cdot 71+7\cdot 61}$$

Delna rešitev je $(-\mathbf{6},\mathbf{7})$, rešitev enačbe pa $\boldsymbol{x}=-\mathbf{6}+\mathbf{61}\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{y}=\mathbf{7}-\mathbf{71}\cdot\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}$.

Primer 3: Rešimo enačbo: $829x + 819y = 1$

$$829 = 819 \cdot 1 + 10$$
$$819 = 10 \cdot 81 + 9$$
$$10 = 9 \cdot 1 + 1$$

$$\mathbf{1 = 10 - 9}$$
$$\mathbf{1 = 10 - (819 - 10 \cdot 81)}$$
$$\mathbf{1 = 82 \cdot 10 - 819}$$
$$\mathbf{1 = 82 \cdot (829 - 819) - 819}$$
$$\mathbf{1 = 82 \cdot 829 - 83 \cdot 819}$$

Delna rešitev je $(\mathbf{82}, \mathbf{-83})$, rešitev enačbe pa $\boldsymbol{x} = \mathbf{82} + \mathbf{819}\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{y} = \mathbf{-83} - \mathbf{829} \cdot \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}$.

2 Kriterij deljivosti s praštevilom p, $p > 5$

2.1 Prvi način izpeljave kriterija $a - \lambda b$ (»peš«)

Kot je bilo omenjeno že v razdelku 1.1, lahko za manjša praštevila števila $\boldsymbol{p} > \mathbf{5}$ oblikujemo zapis

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda b}).$$

»peš«, na primer:

Deljivost s 7: $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathbf{7}(\boldsymbol{a} - \mathbf{2}\boldsymbol{b}) + \mathbf{3}(\boldsymbol{a} + \mathbf{5}\boldsymbol{b})$. Torej je $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{5}$ in kriterij $\boldsymbol{a} + \mathbf{5}\boldsymbol{b}$. Algoritem izvajamo tako, da število enic $\boldsymbol{b}$ pomnožimo s 5 in prištejemo delu števila brez enic $\boldsymbol{a}$, dokler ne dobimo števila, ki mu z lahkoto preverimo deljivost s 7.

Deljivost s 7: $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathbf{7}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \mathbf{3}(\boldsymbol{a} - \mathbf{2}\boldsymbol{b})$. Torej je $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2}$ in kriterij $\boldsymbol{a} - \mathbf{2}\boldsymbol{b}$. Število enic pomnožimo z 2 in odštejemo od dela števila brez enic.

To je primer, opisan na sliki 1. Opazimo, da se števili λ razlikujeta za 7.

Deljivost z 11: $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathbf{11}\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$. Torej je $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$ in kriterij $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$**.**

2.2 Drugi način izpeljave kriterija $a - \lambda b$ (z rešitvijo diofantske enačbe)

Naj bo dano poljubno praštevilo $p > 5$. Označimo $q = p - 10$. Vzemimo linearno diofantsko enačbo

$$px + qy = 1 \tag{2}$$

Naj bo par (μ, λ) partikularna rešitev enačbe (2). Tedaj je $x = \mu + tq$; $y = \lambda - tp$ rešitev enačbe (2).

Naj bo n naravno število, večje od 10. Število n lahko zapišemo v obliki $n = 10a + b$, kjer je $b \neq 0$. Če je $b = 0$, zapišemo $n = 10^k \cdot m, k > 0, m$ ni večkratnik 10 in vzamemo $n \leftarrow m$.

Ker je (μ, λ) partikularna rešitev enačbe (2), velja $p\mu + q\lambda = 1$.

Pomnožimo to enačbo z b in preoblikujmo v

$$bp\mu + qb\lambda = b$$

$$10a + b = 10a + bp\mu + qb\lambda + pa - pa$$

$$n = pa + bp\mu + qb\lambda - pa + 10a$$

$$n = pa + bp\mu + qb\lambda - a(p - 10)$$

$$n = pa + bp\mu + qb\lambda - qa$$

$$n = p(a + b\mu) - q(a - b\lambda)$$

Iz zadnje enakosti sklepamo, da je število n deljivo s številom p natanko tedaj, ko je s številom p deljivo število $\boldsymbol{a - \lambda b}$ (saj sta $\boldsymbol{p}$ in $\boldsymbol{q}$ tuji si števili).

Število $\boldsymbol{\lambda}$ je del tiste partikularne rešitve enačbe (2), da velja $\boldsymbol{0 < \lambda < p}$.

S tem smo dokazali tudi, da za vsako praštevilo $\boldsymbol{p > 10}$ obstaja paremeter $\boldsymbol{\lambda}$, za katerega velja, da je

$$\boldsymbol{n = 10a + b = p \cdot k + q(a - \lambda b)}.$$

Število $\boldsymbol{n}$ je deljivo z deliteljem $\boldsymbol{p}$ natanko takrat, ko je s $\boldsymbol{p}$ deljivo število $\boldsymbol{a - \lambda b}$. Algoritem izvedemo z zaporednimi iteracijami, ko ponovimo enak postopek s številom

$$\boldsymbol{n_1 = a - \lambda b = 10a_1 + b_1 = p \cdot k_1 + q(a_1 - \lambda b_1)},$$

dokler ne pridemo do števila, za katerega je zelo preprosto ugotoviti, da je deljivo s $\boldsymbol{p}$.

Primer 3: Preverimo, ali je število 4118 deljivo z 71.

Najprej izpeljemo kriterij $a - \lambda b$ za praštevilo 71.

$$71x + 61y = 1$$

$$71 = 61 \times 1 + 10$$
$$61 = 10 \times 6 + 1$$

$$1 = 61 - 10 \times 6$$
$$1 = 61 - (71 - 61) \times 6$$
$$1 = -6 \times 71 + 7 \times 61$$
sledi: $x = -6$; $y \; oz. \; \lambda = 7$

Kriterij za deljivost z 71: $a - 7b$

Izvedemo algoritem:

$$4118$$

$$411 - 7 \cdot 8 = 355$$

$$35 - 7 \cdot 5 = 0$$

Iterativni algoritem poda število 0. Tako smo ugotovili, da je število 4118 deljivo z 71.

Iskanje parametra λ si poenostavimo s programom v Pythonu, kjer dobimo partikularno rešitev s preizkušanjem (in ne z Evklidovim algoritmom) (glej sliko 2).

```
#Program izpise kriterij deljivosti pri poljubnem prastevilu, vecjem od 10
p=int(input("Vnesi prastevilo, vecje od 10: "))
q=p-10
for x in range(p+1):
    if ((1-q*x)%p)==0:
            print "Kriterij za 10a+b: a -" + str(x) + "b"
            x=p-x
            print "Varianta za 10a+b: a +" + str(x) + "b"
```

Slika 2: Program v Pythonu, ki izračuna parameter λ po drugem načinu v kriteriju $a - \lambda b$ za praštevilo $p > 5$

2.3 Tretji način izpeljave kriterija $\boldsymbol{a - \lambda b}$ (z izračunom)

Vzemimo enačbo $px + qy = 1$ in naj bo (μ, λ) njena partikularna rešitev. Ker je $q = p - 10$, vstavimo q v dano enačbo in dobimo:

$$px + qy = 1$$

$$px + (p - 10)y = 1$$

$$p(x + y) - 10y = 1$$

Označimo $t = x + y$ in sledi:

$$p \cdot t - 10 \cdot y = 1 \tag{3}$$

Dobili smo linearno diofantsko enačbo. Rešljiva je v primeru $D(p, 10) = 1$. To je takrat, ko delitelj p ne vsebuje niti faktorja 2 niti faktorja 5. Pokažimo, da je njena partikularna rešitev enaka $(\mu + \lambda, \lambda)$. Vstavimo v enačbo $p \cdot t - 10 \cdot y = 1$ in dobimo $p\mu + q\lambda = 1$, kar smo postavili na začetku tega poglavja. Rešitev enačbe (3) je torej:

$$t = \mu + \lambda - 10t, \quad y = \lambda - pt; t \in \mathbb{Z}.$$

Iz enačbe (3) izrazimo $y = \frac{p \cdot t - 1}{10}$, vstavimo v $y = \lambda - pt$ in izrazimo λ:

$\lambda = \frac{p \cdot t - 1}{10} + pt$, $t \in \mathbb{Z}$. Ker je parameter λ periodičen s periodo p, lahko postopek določanja λ poenostavimo takole:

Za parameter λ vzamemo eno izmed vrednosti, pri kateri je $p \cdot t - 1, t \in \mathbb{Z}$, večkratnik števila 10. Tako dobljenemu parametru λ pa lahko prištejemo cel večkratnik delitelja p. Očitno je ta postopek bistveno enostavnejši od postopka, ki je opisan v prejšnjem razdelku. Na sliki 3 je program v Pythonu, ko po tretjem načinu določi število λ.

```
p=int(input("Vnesi število večje od 10:"))
for t in range(p+1):
    if ((p*t-1)%10)==0:
        y=int((p*t-1)/10)
        print ("Lambda je enaka" ,y,)
        break
```

Slika 3: Program v Pythonu, ki izračuna parameter λ po tretjem načinu v kriteriju a – λb za praštevila p > 5

2.4 Opis algoritma in primeri

Opisani iterativni kriterij $a - \lambda b$, kjer je $n = 10a + b$, b je število enic, imenujemo *osnovni kriterij deljivosti* $a - \lambda b$. Na sliki 4 so izračunane vrednosti parametra λ za praštevila med 10 in 100.

Sam algoritem poteka takole:

Dano imamo naravno število n in praštevilski delitelj p. Začnemo z $n_0 = n$. Nato nadaljujemo niz $n_0, n_1, n_2 \cdots n_m$, tako da bo za vsak k veljalo, da p deli n_k natanko takrat, ko p deli n_{k+1}. Ustavimo se pri n_m, ki bo tako enostaven, da bo takoj jasno, ali ga p deli ali ne. Na vsakem koraku iteracije zapišemo $n_k = 10a_k + b_k$, kjer je a_k naravno število ali 0, b_k pa števka (zadnja števka, število enic) $b_k \in \{0,1,2 \cdots 9\}$. Naslednje število n_{k+1} v nizu določimo po splošnem kriteriju deljivosti $n_{k+1} = a_{k+1} - \lambda b_{k+1}$, seveda izhajamo iz prejšnjega člena niza n_k. Zamenjavo opravimo, če je $10a_m + b_m > a_m - \lambda b_m \geq 0$. Ustavimo se takrat, ko je $10a_m + b_m \leq a_m - \lambda b_m$ ali ko je $a_m - \lambda b_m < 0$.

Algoritem se ustavi, saj so vsi členi v nizu $\boldsymbol{n_0, n_1, n_2 \cdots n_m}$ naravna števila ali 0 in velja $\boldsymbol{n_0 > n_1, > n_2 > \cdots > n_m}$. Velja namreč: $\boldsymbol{n = 10a + b = p \cdot k + m(a - \lambda b)}$. (Iz enakega razloga se ustavi tudi Evklidov algoritem.) Domnevamo sicer, da bi se lahko niz »zaciklal« v primeru $\boldsymbol{k = 0}$, $\boldsymbol{m = 1}$. Primer: Kriterij za deljivost s 7: $\boldsymbol{a + 5b}$ se »zaciklа« pri $\boldsymbol{n = 49}$.

Primer 4: Ali je število 8641969 deljivo s 7?

Izraz $\frac{7 \cdot t - 1}{10}$ je celoštevilski, če je t = 3. Takrat je njegova vrednost enaka 2, torej je $\lambda = 2$ in kriterij $a - 2\lambda$. Ker je λ periodična s p, bomo raje vzeli:

$a - 2\lambda + 7\lambda = a + 5\lambda$.

Izvedba:

$$\begin{aligned}
&8641969 \rightarrow 864196 + 45 = 864241 \\
&86424 + 5 = 86429 \\
&8642 + 45 = 8687 \\
&868 + 35 = 903 \\
&90 + 15 = 105 \\
&10 + 25 = 35 = 7 \cdot 5
\end{aligned}$$

Število 8641969 je deljivo s 7.

Delitelj praštevilo p	λ	*Delitelj praštevilo* p	λ
11	1	57	17
13	-4	59	-6
17	5	61	6
19	-2	63	-19
21	2	67	20
23	-7	69	-7
27	8	71	7
29	-3	73	-22
31	3	77	23
33	-10	79	-8
37	11	81	8
39	-4	83	-25
41	4	87	26
43	-13	89	-9
47	14	91	9
49	-5	93	-28
51	5	97	29
53	-16	99	-10

Slika 4: Vrednosti parametra λ za praštevila med 10 in 100

3 Kriterij deljivosti $\boldsymbol{a - \lambda b}$ z naravnim številom, večjim od 10

Naj bo dano poljubno naravno število $p > 5$. Označimo $q = p - 10$. Vemo, da je linearna diofantska enačba (1) $px + qy = 1$ rešljiva, ko sta si števili p in q tuji. Ker je $q = p - 10$, si p in q nista tuji, ko je število p deljivo z 2 ali s 5. V primeru, ko je število p večkratnik števila 2 ali 5, ga razcepimo:

$$p = 2^{k_1} \cdot 5^{k_2} \cdot p_1$$

kjer sta k_1 in k_2 nenegativni celi števili, kjer nista hkrati obe enaki 0, p_1 pa ni niti sodo število niti večkratnik števila 5.

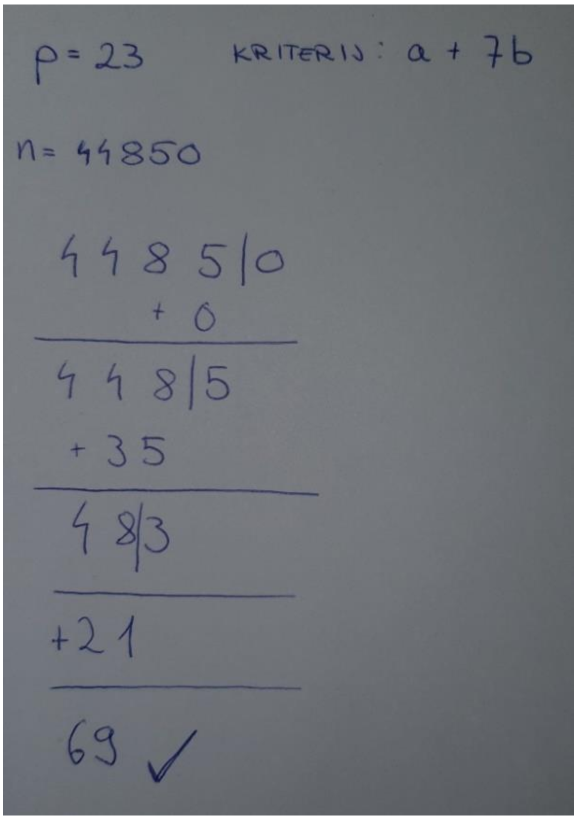
V primeru, da je delitelj p produkt dveh tujih si števil $p = p_x \cdot p_y$, je naravno število n deljivo s številom p natanko takrat, ko je deljivo z obema faktorjema p_x in p_y. Kriterija za deljivost z 2 in s 5 poznamo, zato bomo v takem primeru poiskali kriterij deljivosti za število p_1. Za naravna števila, ki so večja od 10 in je njihova enica enaka 1, 3, 7 ali 9, je algoritem enak kot za praštevila, večja od 10. Algoritem je opisan v razdelku 2.3. S tem smo *osnovni kriterij deljivosti* $(a - \lambda b,\ \ n = 10a + b)$ razširili na vsa naravna števila, ki so večja od 10.

Primer 5: Ali je število 44850 deljivo s številom 1150.

Ker se število 1150 ne konča z 1, 3, 7 ali 9, ga razcepimo: $1150 = 2 \cdot 5^2 \cdot 23$. Deljivost števila preverimo s kriterijem za deljivost z 2: $\mathbf{0} + \boldsymbol{b_0}$ (ali so enice sode), s kriterijem za deljivost s 25: $\mathbf{0} + \boldsymbol{b_1 b_0}$ (dvoštevilčni konec deljiv s 25 in s kriterijem za deljivost s 23. Izpeljimo ga.

Izraz $\frac{23 \cdot t - 1}{10}$ je celoštevilski, če je $t = -3$. Takrat je njegova vrednost enaka -7, torej je $\lambda = -7$ in kriterij $\boldsymbol{a} + \mathbf{7}\boldsymbol{b}$.

Izvedimo algoritem: Z 2 je deljivo, saj število enic sodo, s 25 je deljivo, saj je dvoštevilčni konec deljiv s 25, preverimo še deljivost s 23 (glej sliko 5).



Slika 5: Primer izvedbe kriterija za deljivost s 23

4 Dopolnitev osnovnega kriterija deljivosti

4.1 Osnovni kriterij deljivosti $\boldsymbol{a-\lambda b}$ z upoštevanjem dvoštevilčnega konca števila

Če upoštevamo, da je $n = 100a + b,\ b \neq 0,$ vzamemo v izrazu $\frac{p \cdot t - 1}{100}$, $t \in \mathbb{Z}$

za λ eno izmed vrednosti, pri kateri je $pt - 1$ večkratnik števila 100.

Parameter λ lahko premaknemo za periodo $k \cdot p, k \in Z$.

Primer 6: Pri $p = 19$ dobimo $\lambda = 17$ oziroma $\lambda = -2$

4.2 Osnovni kriterij deljivosti $\boldsymbol{a-\lambda b}$ z upoštevanjem triševilčnega konca števila

Če upoštevamo, da je $n = 1000a + b, b \neq 0,$ vzamemo v izrazu $\frac{p \cdot t - 1}{1000}$, $t \in \mathbb{Z}$

za λ eno izmed vrednosti, pri kateri je $pt - 1$ večkratnik števila 1000.

5 Kriterij deljivosti $a - \lambda b$ za prvih enajst naravnih števil

Zapišimo kriterij deljivosti $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda b}$ za prvih enajst naravnih števil.

Uporabili smo oznake:

$\boldsymbol{b}$ za enice (enoštevilčni konec števila $\boldsymbol{n}$),

$\boldsymbol{b_1 b_0}$ za dvoštevilčni konec števila $\boldsymbol{n}$,

$\boldsymbol{b_2 b_1 b_0}$ za trištevilčni konec števila $\boldsymbol{n}$.

$p = 2$: $n = 10a + b = 2 \cdot (5a) + (0 \cdot a + b)$ λ = -1 Kriterij: $0 \cdot a + b$

$p = 3$: $n = 10a + b = 3 \cdot (3a) + (a + b)$ λ = -1 Kriterij: $a + b$

$p = 4$: $n = 100a + b_1 b_0 = 4 \cdot (25a) + (0 \cdot a + b_1 b_0)$ λ = -1 Kriterij: $0 \cdot a + b_1 b_0$

$p = 5$: $n = 10a + b = 5 \cdot (2a) + (0 \cdot a + b)$ λ = -1 Kriterij: $0 \cdot a + b$

$p = 6 = 2 \cdot 3$: Uporabimo kriterija za 2: $0 \cdot a + b$ in za 3: $a + b$

$p = 7$: $n = 10a + b = 7 \cdot (a + b) + 3 \cdot (a - 2b)$ λ = -2 Kriterij: $a - 2b$

$p = 8$: $n = 1000a + b = 8 \cdot (125a) + (0 \cdot a + b)$ λ = -1 Kriterij: $0 \cdot a + b_2 b_1 b_0$

$p = 9$: $n = 10a + b = 9a + (a + b)$ λ = -1 Kriterij: $a + b$

$p = 10$: $n = 10a + b = 10a + (0 \cdot a + b)$ λ = -1 Kriterij: $0 \cdot a + b$

$p = 11$: $n = 10a + b = 11 \cdot a - (a - b)$ λ = 1 Kriterij: $a - b$

6 Splošni kriterij deljivosti – povzetek

Preizkusiti želimo, ali je naravno število n deljivo z naravnim deliteljem $\boldsymbol{p} > \mathbf{1}$.

1. Če je delitelj $\boldsymbol{p}$ liho naravno število, ki ni večkratnik števila 5 (njegove enice so enake 1, 3, 7 ali 9), določimo število $\boldsymbol{\lambda}$ „peš“ ali kot celoštevilsko vrednost izraza $\frac{\boldsymbol{p \cdot t - 1}}{\mathbf{10}}$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}$.
2. Če je število $\boldsymbol{p}$ sodo ali večkratnik števila 5, ga zapišemo v obliki $\boldsymbol{p} = \mathbf{2}^{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{5}^{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{r}$, kjer je število $\boldsymbol{r}$ liho in ni večkratnik števila 5. Deljivost števila $\boldsymbol{n}$ preverjamo posebej z $\mathbf{2}^{\boldsymbol{u}}$ in s $\mathbf{5}^{\boldsymbol{v}}$, za število $\boldsymbol{r}$ pa poiščemo $\boldsymbol{\lambda}$ po postopku v točki 1.
3. Izvajamo zaporedne iteracije splošnega kriterija deljivosti $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda b}$ pri številu $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ toliko časa, dokler ne dobimo števila, pri katerem lahko enostavno preverimo deljivost s $\boldsymbol{p}$.

Opomba: Za $\boldsymbol{\lambda}$ lahko vzamemo tudi $\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$.

Izraz $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda b}$, ki določa iterativni postopek, imenujemo *splošni kriterij deljivosti* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda b}$. V prilogi1 je tabela kriterija $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda b}$ za naravne delitelje $\mathbf{1} < \boldsymbol{p} < \mathbf{100}$.

7 Izpeljava »običajnih« kriterijev deljivosti iz splošnega kriterija deljivosti

Že iz zapisnih primerov se ponuja vprašanje, ali niso znani kriteriji za deljivost s števili 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 in 11 le posebni primeri izpeljanega splošnega kriterija deljivosti.

Pokažimo, da je to res. Vemo, da je število $\boldsymbol{n}$ deljivo s številom $\boldsymbol{p}$ natanko takrat, ko je s številom $\boldsymbol{p}$ deljiv splošni kriterij deljivosti $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda b}$.

Deljivost z 2:

Vzamemo enoštevilčni konec števila: $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Splošni kriterij je $\mathbf{0}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. To pomeni, da je število $\boldsymbol{n}$ deljivo s številom $\mathbf{2}$ natanko takrat, ko je z $\mathbf{2}$ deljivo število $\boldsymbol{b}$, ki je število enic. $\boxed{\text{qed}}$

Deljivost s 3:

Vzamemo enoštevilčni konec števila: $\boldsymbol{n = 10a + b}$. Splošni kriterij je $\boldsymbol{a + b}$. Vzemimo število $\boldsymbol{n = 10a + b = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0}$.

V prvi iteraciji dobimo $\boldsymbol{a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 \quad + a_1 + a_0}$,

v drugi iteraciji $\boldsymbol{a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0}$ in tako naprej,

v zadnji iteraciji imamo $\boldsymbol{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0}$. To pomeni, da je število $\boldsymbol{n}$ deljivo s številom 3 natanko tedaj, ko je s 3 deljiva vsota števk števila $\boldsymbol{n}$.

qed

Deljivost s 4:

Vzamemo dvoštevilčni konec števila: $\boldsymbol{n = 100a + b_1b_0}$. Splošni kriterij je $\boldsymbol{0a + b_1b_0}$. To pomeni, da je število $\boldsymbol{n}$ deljivo s številom $\boldsymbol{4}$ natanko takrat, ko je s $\boldsymbol{4}$ deljivo število $\boldsymbol{b_1b_0}$, ki je dvoštevilčni konec danega števila. qed

Deljivost s 5:

Vzamemo enoštevilčni konec števila: $\boldsymbol{n = 10a + b_0}$. Splošni kriterij je $\boldsymbol{0 \cdot a + b_0}$. To pomeni, da je število $\boldsymbol{n}$ deljivo s številom $\boldsymbol{5}$ natanko takrat, ko je s $\boldsymbol{5}$ deljivo število $\boldsymbol{b}$, ki je število enic.

qed

Deljivost s 6:

Splošni kriterij deljivosti predvideva razcep: $\boldsymbol{6 = 2 \cdot 3}$. Število je deljivo s 6, če je deljivo z 2 in s 3. Uporabimo že izpeljani kriterij za vsak faktor posebej.

qed

Deljivost s 7:

V slovenskih učbenikih za matematiko nismo zasledili zapisanega kriterija. Iz splošnega kriterija za 7 lahko sestavimo dva »uporabna« algoritma: $\boldsymbol{a - 2b}$ **ali** $\boldsymbol{a + 5b}$, ki ju lahko na preprost način uporabimo, na primer prvega:

Ali je število 8641969 deljivo s 7? Uporabimo $a - 2b$

8641969,

864196-18= 864178,

86417-16=86401,

8640-2=8638,

863-16=847,

84-14=70, je deljivo s 7

Deljivost z 8:

Vzamemo trištevilčni konec števila: $n = 1000a + b_2b_1b_0$. Splošni kriterij je $0a + b_2b_1b_0$. To pomeni, da je število n deljivo s številom 8 natanko takrat, ko je z 8 deljivo število $b_2b_1b_0$, ki je trištevilčni konec danega števila.

qed

Deljivost z 9:

Splošni kriterij za deljivost z 9 je: $a + b$, ki je enak kot za deljivost s 3. Dokaz je tudi enak. Število je deljivo z 9 natanko takrat, ko je z 9 deljiva vsota števk danega števila.

qed

Deljivost z 10:

Vzamemo enoštevilčni konec števila: $n = 10a + b$. Splošni kriterij je $0 \cdot a + b$. To pomeni, da je število n deljivo s številom 10 natanko takrat, ko je z 10 deljivo število b, ki je število enic. Torej je število n deljivo z 10, ko je enica enaka 0.

qed

Deljivost z 11:

Vzamemo enoštevilčni konec števila : $n = 10a + b$. Splošni kriterij je $a - b$. Vzemimo število $n = 10a + b = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$.

V prvi iteraciji dobimo $a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 \quad + a_1 - a_0$, v drugi iteraciji $\boldsymbol{a_m \cdot 10^{m-2} + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \cdots + a_2 - a_1 + a_0}$ in tako naprej,

v zadnji iteraciji imamo $\boldsymbol{a_m - a_{m-1} + \cdots - a_2 + a_1 - a_0}$. Dobimo alternirajočo vsoto števk. Zaporedje predznakov je odvisno od števila mest v številu, kar ne vpliva na sam kriterij, saj gre za cela števila. Število je deljivo z 11, kadar je z 11 deljiva alternirajoča vsota števk.

$\boxed{\text{qed}}$

Tako smo dokazali, da so vsi znani kriteriji deljivosti le posebni primeri splošnega kriterija deljivosti $\boldsymbol{a - \lambda b}$.

8 Ocena učinkovitosti splošnega kriterija deljivosti $\boldsymbol{a - \lambda b}$

Pisno deljenje je matematični postopek, pri katerem s preprostimi matematičnimi operacijami izvedemo deljenje izbranega števila n z deliteljem p. Pri tem postopku uporabljamo množenje in seštevanje oziroma odštevanje. Učinkovitost algoritma $a - \lambda b$ bomo ocenili s primerjavo z običajnim deljenjem na primerih. Primerjali bomo število uporabljenih operacij in ocenili težavnost uporabljenih operacij (glede na to, da rešujemo pisno oz. »peš«).

Ali je **2678** deljivo s **7**?
1. $7 \times 3 = 21$
2. $26 - 21 = 5$
3. $8 \times 7 = 56$
4. $57 - 56 = 1$
5. 18 *na pamet vemo, da ni deljivo s* 7.

Primer štetja operacij: 5 operacij; 3 množenja, 2 odštevanji.

Primerjava pisnega deljenja in algoritma na primerih:

Primer 7: $n = 1234567\ ,\ \ p = 7 \qquad \rightarrow \qquad algoritem\ (a - 2b)$

$1234567 \div 7 = 176366, \ldots$
 53
  44
   25
    46
     47

1. $1 \times 7 = 7$	1. $7 \times 2 = 14$
2. $12 - 7 = 5$	2. $123456 - 14 = 123442$
3. $7 \times 7 = 49$	3. $2 \times 2 = 4$
4. $53 - 49 = 4$	4. $12344 - 4 = 12340$
5. $6 \times 7 = 42$	5. $0 \times 2 = 0$
6. $44 - 42 = 2$	6. $1234 - 0 = 1234$
7. $3 \times 7 = 21$	7. $4 \times 2 = 8$
8. $25 - 21 = 4$	8. $123 - 8 = 115$
9. $6 \times 7 = 42$	9. $5 \times 2 = 10$
10. $46 - 42 = 4$	10. $11 - 10 = 1$
11. 47 *na pamet vemo, da ni deljivo s* 7.	11. 1 *na pamet vemo, da ni deljivo s* 7.

6 množenj, 5 odštevanj v obeh primerih.

Primer 8: $n = 37497972, \;\; p = 31 \qquad \rightarrow \qquad algoritem\ (a - 3b)$

$37497972 \div 31 = 1209612$
 64
  29
  297
   189
     37
       62

1. $1 \times 31 = 31$	1. $2 \times 3 = 6$
2. $37 - 31 = 6$	2. $3749797 - 3 = 3749791$
3. $2 \times 31 = 62$	3. $1 \times 3 = 3$
4. $64 - 62 = 2$	4. $374979 - 3 = 374976$
5. $0 \times 31 = 0$	5. $6 \times 3 = 18$
6. $29 - 0 = 29$	6. $37497 - 18 = 37479$
7. $9 \times 31 = 279$	7. $9 \times 3 = 27$
8. $297 - 279 = 18$	8. $3747 - 27 = 3720$
9. $6 \times 31 = 186$	9. $0 \times 3 = 0$
10. $189 - 186 = 3$	10. $372 - 0 = 372$
11. $1 \times 31 = 31$	11. $2 \times 3 = 6$
12. $37 - 31 = 6$	12. $37 - 6 = 31$
13. 62 *na pamet vemo, da je deljivo z* 31.	13. 31 *na pamet vemo, da je deljivo z* 31.

7 množenj in 6 odštevanj v obeh primerih.

Iz primerov vidimo, da je število uporabljenih operacij za določitev deljivosti enako pri pisnem deljenju kot pri uporabi algoritma $a - \lambda b$. Pri preizkušanju na različnih primerih opažamo določene posebnosti:

- Pri deljenju z dvo- ali večmestnimi števili p, ko je istoštevilčni sklop prvih števk v številu n manjši od p in moramo tako za prvi korak deljenja vzeti sklop iz n z eno števko več, kot jih ima p, je število operacij pri pisnem deljenju za 2 manjše kot pri uporabi algoritma $a - \lambda b$.
- Uporaba algoritma $a - \lambda b$ je pri operiranju z velikimi števili p v splošnem enostavnejša kot pisno deljenje, saj moramo na pamet računati z večkratniki λ, ki je manjši od p.
- Algoritem $a - \lambda b$, ki smo ga aplicirali in razvili (v točki 5.) za števili 3 in 9 in z njim dokazali (točka 7.) obstoječe pravilo za določanje deljivosti s tema dvema številoma, je obenem po številu operacij učinkovitejši kot omenjeno pravilo (seštevek števk števila n je deljiv s 3 oziroma z 9.)

Primer 9:

$$n = 4111923672\,, p = 9 \;\; \rightarrow \;\; algoritem\; (a + b)$$

$4 + 1 = 5$

$5 + 1 = 6$

$6 + 1 = 7$

$7 + 9 = 16$

$16 + 2 = 18$

$18 + 3 = 21$

$21 + 6 = 27$

$27 + 7 = 34$

$34 + 2 = 36$, deljivo z 9 (9 seštevanj)

$411192367 + 2 = 411192369$

$41119236 + 9 = 41119245$

$4111924 + 5 = 4111929$

$411192 + 9 = 411201$

$41120 + 1 = 41121$

$4112 + 1 = 4113$

$411 + 3 = 414$

$41 + 4 = 45$, deljivo z 9 (8 seštevanj)

9 Razširitev splošnega kriterija deljivosti $a - \lambda b$ na kriterij $\kappa a - \lambda b$

V (Grinberg, 2014) je izpeljan dvoparametrični kriterij $\boldsymbol{\kappa a - \lambda b}$. Parametra $\boldsymbol{\kappa}$ in $\boldsymbol{\lambda}$ dobimo kot partikularno rešitev ($\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\lambda}$) diofantske enačbe $\boldsymbol{x + 10y = t \cdot p}$, $\boldsymbol{p}$ je dani delitelj, $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{N}$, $|\boldsymbol{\lambda}| \leq \boldsymbol{9}$. Običajno rešimo enačbo pri nekaj začetnih $\boldsymbol{t}$ in izberemo najugodnejšo varianto. Ponavadi (po avtorjevem mnenju) je to varianta z najmanjšimi absolutnimi vrednostmi parametrov ali pa tista z najmanjšim pozitivnim $\boldsymbol{\kappa}$.

Oglejmo si nekaj primerov:

$\boldsymbol{p = 6}$

$\boldsymbol{t = 1}$, $\boldsymbol{x + 10y = 6}$, partikularna rešitev $(\boldsymbol{-4, 1})$ kriterij: $\boldsymbol{-4a + b \to 4a - b}$

$\boldsymbol{t = 2}$, $\boldsymbol{x + 10y = 12}$, partikularna rešitev $(\boldsymbol{2, 1})$ kriterij: $\boldsymbol{2a - b}$

$\boldsymbol{t = 3}$, $\boldsymbol{x + 10y = 18}$, partikularna rešitev $(\boldsymbol{-2, 2})$ kriterij: $\boldsymbol{-2a - 2b \to 2a + 2b}$

…

$\boldsymbol{t = 9}$, $\boldsymbol{x + 10y = 54}$, partikularna rešitev $(\boldsymbol{4, 5})$ kriterij: $\boldsymbol{4a - 5b}$

V poglavju 3 smo ugotovili, da za sode delitelje in večkratnike števila ni enoparametričnega kriterija $\boldsymbol{a - \lambda b}$. Za števila $\boldsymbol{p \leq 20}$ navajamo dvopaarmetrične kriterije, ki jih dobimo z gornjim algoritmom.

4: $\boldsymbol{2a + b}$	14: $\boldsymbol{2a + 3b}$
6: $\boldsymbol{2a - b}$	16: $\boldsymbol{2a - 3b}$
8: $\boldsymbol{2a + b}$	18: $\boldsymbol{2a + 2b}$
12: $\boldsymbol{2a - b}$	

10 Splošni kriterij deljivosti v drugih številskih sestavih

Enako metodo, kot smo jo uporabili v desetiškem sestavu, smo preizkusili tudi v petiškem in šestiškem sestavu. Nekaj rezultatov je prikazanih v nadaljevanju.

10.1 Splošni kriterij deljivosti v petiškem sestavu

$\boldsymbol{p = 2}$: $\boldsymbol{n = 5a + b = 2(2a + b) + (a - b)}$ Kriterij: $\boldsymbol{a - b}$

$\boldsymbol{p = 3}$: $\boldsymbol{n = 5a + b = 3(a + b) + 2(a - b)}$ Kriterij: $\boldsymbol{a - b}$

$\boldsymbol{p = 4}$: $\boldsymbol{n = 5a + b = 4(a + b) + (a - 3b)}$ Kriterij: $\boldsymbol{a - 3b}$

10.2 Splošni kriterij deljivosti v šestiškem sestavu

$\boldsymbol{p = 3}$: $\boldsymbol{n = 6a + b = 3(2a) + b}$ Kriterij: $\boldsymbol{0 + b}$

$\boldsymbol{p = 4}$: $\boldsymbol{n = 6a + b = 4(a + b) + (2a - 3b)}$ Kriterij: $2\boldsymbol{a - 3b}$

$\boldsymbol{p = 5}$: $\boldsymbol{n = 6a + b = 5a + (a + b)}$ Kriterij: $\boldsymbol{a + b}$

11 Pobude za uporabo v osnovni in srednji šoli

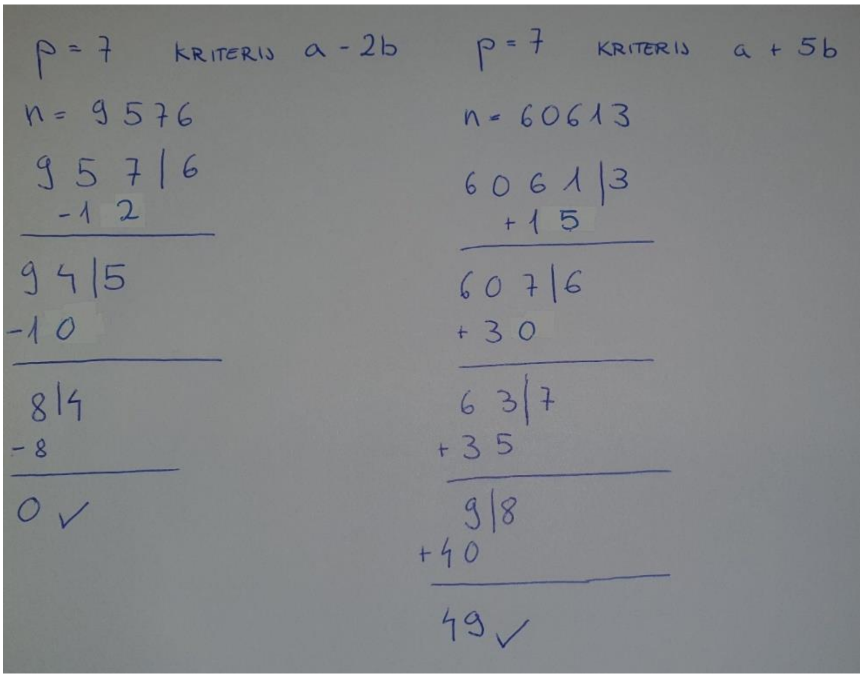
Menimo, da je *opisani splošni kriterij* deljivosti zelo enostaven in dajemo pobudo, da bi ga vključili v slovenske učbenike matematike. Običajni kriteriji seveda ostanejo v obravnavi, z znanimi dokazi. Skupaj z učitelji bi na primer izpeljali kriterij $\boldsymbol{a - \lambda b}$ za praštevili 7 in 11:

$\boldsymbol{p = 7}$: $\boldsymbol{n = 10a + b = 7 \cdot (a + b) + 3 \cdot (a - 2b)}$ Kriterij: $\boldsymbol{a - 2b}$

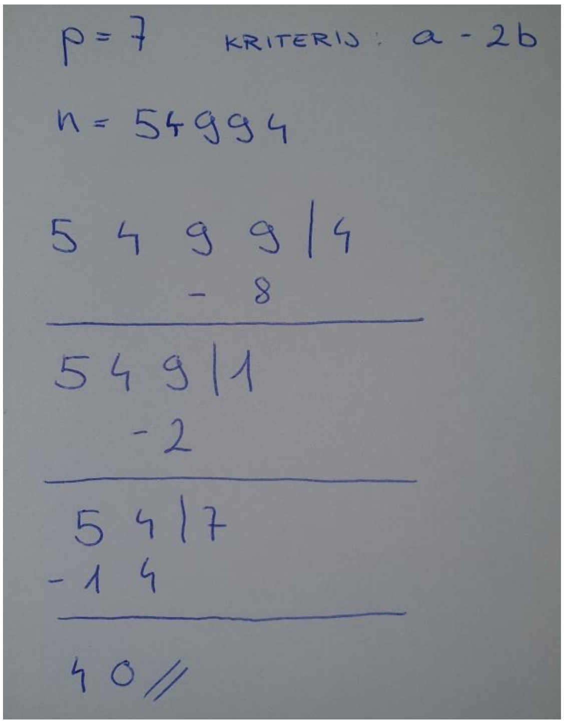
ALI

$\boldsymbol{n = 10a + b = 7 \cdot (a - 2b) + 3 \cdot (a + 5b)}$ Kriterij: $\boldsymbol{a + 5b}$

Primer izvedbe je na slikah 6 in 7.



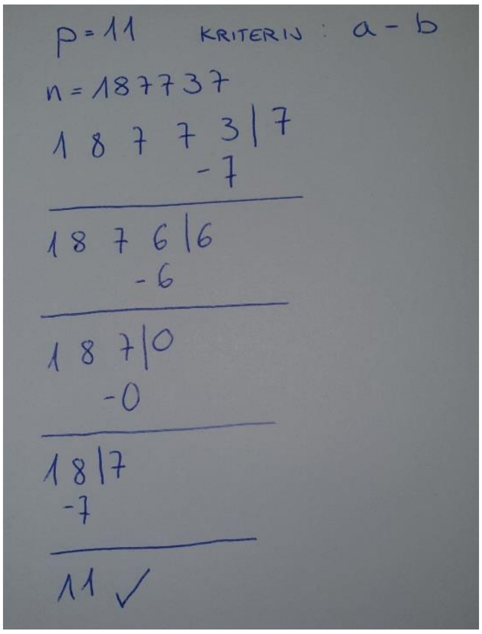
Slika 6: Primer izvedbe kriterija za deljivost s 7



Slika 7: Primer izvedbe kriterija za deljivost s 7 (število ni deljivo s 7)

$\boldsymbol{p = 11}$: $\boldsymbol{n = 10a + b = 11 \cdot a - (a - b)}$ Kriterij: $\boldsymbol{a - b}$

Primer izvedbe je na sliki 8.

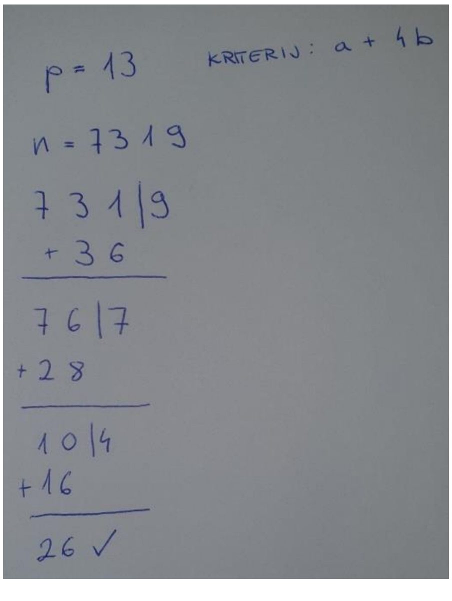


Slika 8: Primer izvedbe kriterija za deljivost z 11

Dijaki (ali osnovnošolci pri krožku) bi potem lahko sami izpeljali kriterije za praštevila 13, 17 in 19:

$\boldsymbol{p = 13}$: $\boldsymbol{n = 10a + b = 13 \cdot (a + b) - 3(a + 4b)}$ Kriterij: $\boldsymbol{a + 4b}$

Primer izvedbe je na sliki 9.

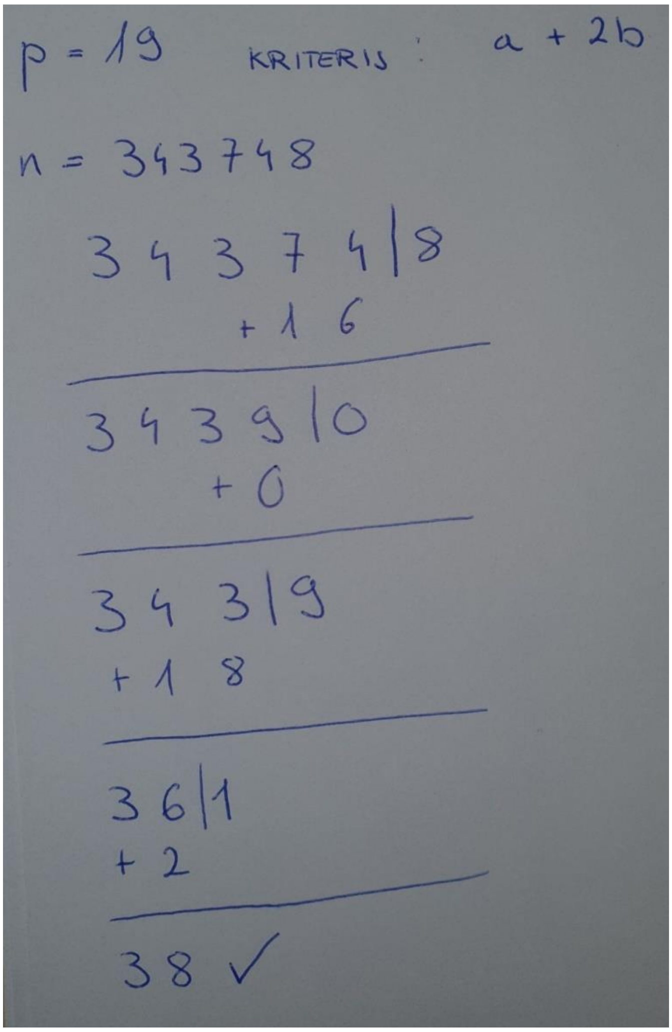


Slika 9: Primer izvedbe kriterija za deljivost s 13

$\boldsymbol{p = 17}$: $\boldsymbol{n = 10a + b = 17 \cdot (a - 2b) - 7(a - 5b)}$ Kriterij: $\boldsymbol{a - 5b}$

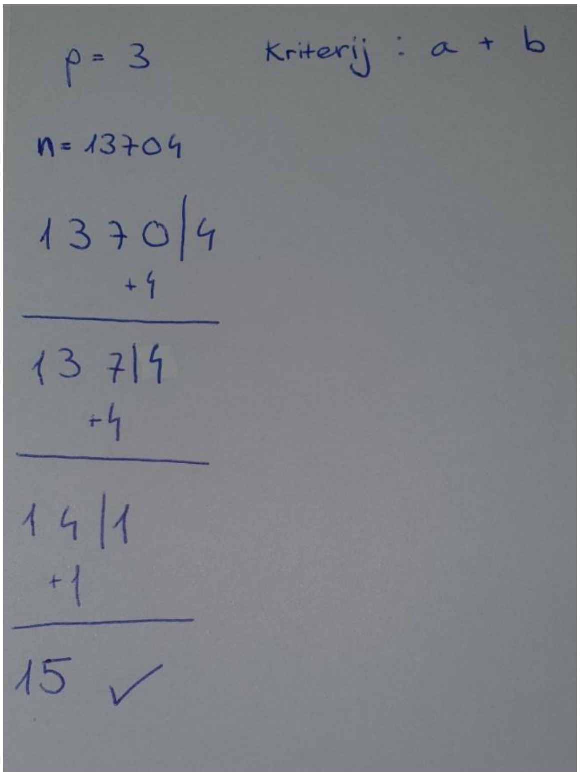
$\boldsymbol{p = 19}$: $\boldsymbol{n = 10a + b = 19 \cdot (a + b) - 9(a + 2b)}$ Kriterij: $\boldsymbol{a + 2b}$

Na sliki 10 je primer izvedbe kriterija za deljivost z 19.

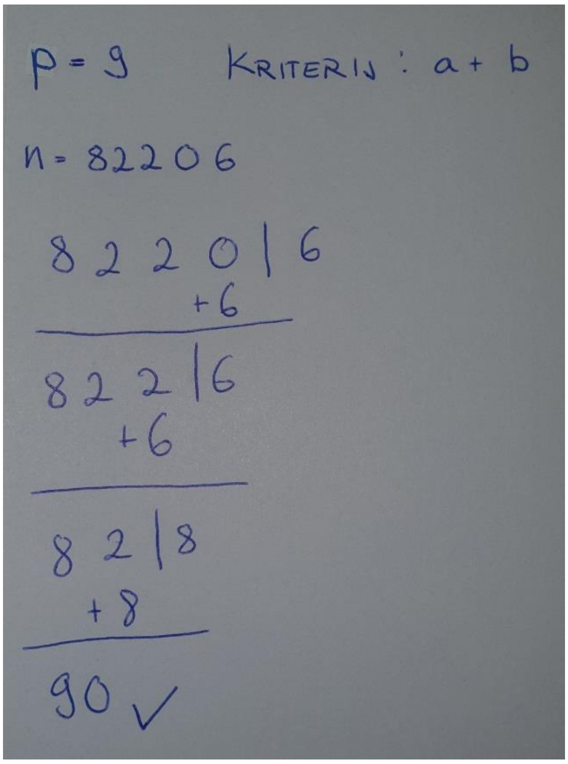


Slika 10: Primer izvedbe kriterija za deljivost z 19

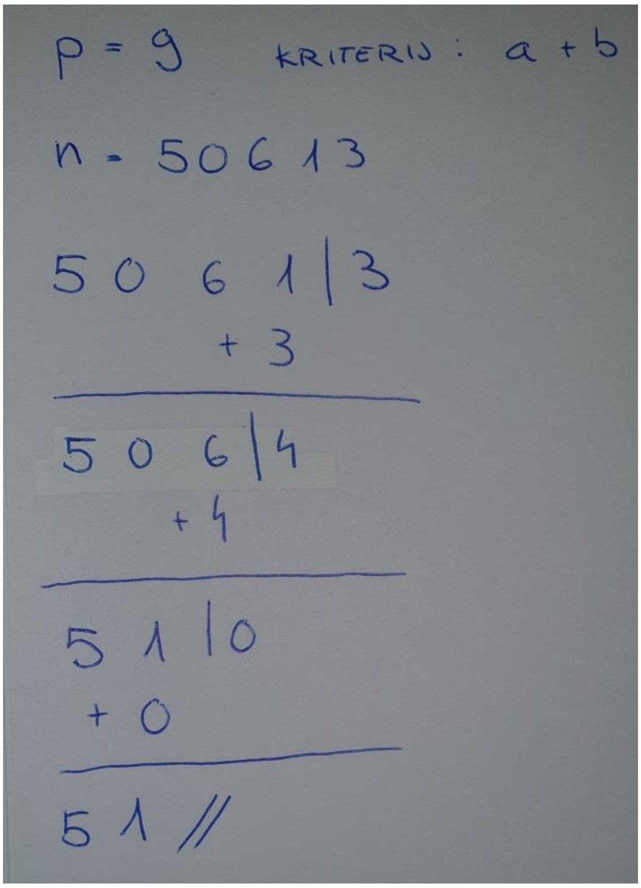
Kriterija za deljivost s 3 in za deljivost z 9 lahko raziščemo še nekoliko drugače. Najprej ju izpeljemo, nato pa preverimo (vsaj na primerih), ali obstaja povezava z znanimi kriteriji za deljivost s 3 (glej sliko 11) in 9 (glej sliki 12 in 13).



Slika 11: Primer izvedbe kriterija za deljivost s 3



Slika 12: Primer izvedbe kriterija za deljivost z 9



Slika 13: Primer izvedbe kriterija za deljivost z 9 (število ni deljivo z 9)

Za posamezno praštevilo lahko izpeljejo več različic in opazujejo, v čem so si podobne in kako bi iz ene prešli v drugo (za isto praštevilo). Za vsak primer bi lahko sestavili naloge in se pogovorili tudi o smiselnosti teh kriterijev za večja praštevila.

Učenci bi lahko po nekaj vajah sami sestavili poenostavljeni praktični postopek, s katerim ugotovimo, ali je naravno število $\boldsymbol{n}$ deljivo z naravnim $\boldsymbol{p}$.

> Prvi korak: Najprej številu $\boldsymbol{n}$ »odrežemo« ničle (če so) in zapišemo ustrezni delitelj 10, 100, 1000....
>
> Drugi korak: Če se število $\boldsymbol{p}$ konča na 1, 3, 7, ali 9, izvedemo postopek $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\lambda b}$ tolikokrat, da sami ugotovimo deljivost. Če ne poznamo števila $\boldsymbol{\lambda}$, ga izračunamo tako, da v izraz $\frac{\boldsymbol{p \cdot t-1}}{\boldsymbol{10}}$ vstavljamo $\boldsymbol{t}=\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}$, ..., dokler ne dobimo celega števila.
>
> Tretji korak: Če je število $\boldsymbol{p}$ sodo ali ima enice enake 5, izpostavimo faktorja 2 ali 5 tolikokrat, kot je največ možno. S faktorjem, ki ostane, naredimo drugi korak.

12 Zaključek

V raziskovalni nalogi smo izpeljali preprost algoritem – poimenovali smo ga *splošni kriterij deljivosti* – s katerim za vsako naravno število $\boldsymbol{n}$ in za vsak naravni delitelj $\boldsymbol{p}$ preverimo, ali je dano število $\boldsymbol{n}$ deljivo z deliteljem $\boldsymbol{p}$. Če je število $\boldsymbol{n}$ oblike $\boldsymbol{n = 10^k \cdot m}$, kjer je $\boldsymbol{k > 0, k} \in \mathbb{N}$ in $\boldsymbol{m}$ ni večkratnik števila $\mathbf{10}$, vzamemo $\boldsymbol{n} \leftarrow \boldsymbol{m}$. Prav tako tudi delitelj $\boldsymbol{p}$ zapišemo v obliki $\boldsymbol{p = 2^u \cdot 5^v \cdot r}$, kjer število $\boldsymbol{r}$ ni niti sodo niti večkratnik števila $\mathbf{5}$ in za preverjanje deljivosti vzamemo $\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{r}$.

Za števila $\boldsymbol{n}$, ki imajo neničelne enice, in delitelje $\boldsymbol{p}$, ki niso niti soda števila niti večkratniki števila $\mathbf{5}$ (njihove enice so 1, 3, 7, 9), je postopek preverjanja deljivosti naslednji.

1. Število $\boldsymbol{n}$ zapišemo v obliki $\boldsymbol{n = 10a + b}$.

2. V izrazu $\frac{p \cdot t-1}{10}$ izberemo tak $t \in \mathbb{Z}$, da je vrednost izraza celo število. Izbrano vrednost označimo z λ. Za λ lahko vzamemo tudi vrednost $\lambda + \mathrm{kp}, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$. Tako dobimo splošni kriterij $a - \lambda b$.

3. Iteracijo $\boldsymbol{a - \lambda b}$ ponavljamo toliko časa, dokler ne dobimo števila, ki mu preprosto določimo deljivost s $\boldsymbol{p}$.

Deljivost z delitelji oblike $\boldsymbol{p = 2^u \cdot 5^v \cdot r, u, v > 0}$ preverjamo tako, da preverjamo deljivost z vsakim faktorjem posebej.

V nalogi smo dokazali, da za vsak naravni lihi delitelj $\boldsymbol{p}$, ki ni večkratnik števila 5 (ali za števila z enicami 1, 3, 7 in 9) obstaja tak parameter λ, da je število $\boldsymbol{n = 10a + b}$ deljivo s $\boldsymbol{p}$ natanko takrat , ko je s $\boldsymbol{p}$ deljivo število $\boldsymbol{a - \lambda b}$. Prav tako smo dokazali, da je parameter λ periodičen s periodo $\boldsymbol{p}$. Za $\boldsymbol{\lambda}$ lahko vzamemo katerokoli število oblike $\boldsymbol{\lambda + k.p, p} \in \mathbb{Z}$. Oboje je utemeljeno z rešljivostjo linearne diofantske enačb z dvema neznankama.

V nam dostopni in pregledani literaturi smo zasledili uporabo izpeljanega *splošnega kriterija deljivosti* $\boldsymbol{a - \lambda b}$ v konkretnih primerih deliteljev, posplošitve, dvoparametrične (Grinberg, 2014) pa ne. Ugotovili smo, da je literature s področja deljivosti zares ogromno: od samostojnih knjig, člankov v raznih revijah in v delih, ki obravnavajo lastnosti naravnih števil. Veliko dostopov je za nas omejenih, velikokrat je potrebna registracija preko akademskih krogov. Ne moremo trditi, da splošni kriterij deljivosti $\boldsymbol{a - \lambda b}$, ki smo ga obravnavali v raziskovalni nalogi, ni že kje izpeljan in opisan.

Posebna odlika izpeljanega *splošnega kriterija deljivosti* je, da gre za algoritem, ki deluje za vse naravne delitelje po enakem principu, ključni parameter $\boldsymbol{\lambda}$ pa si lahko izračuna vsak sam po zelo enostavnem postopku.

Obravnavano temo bilo mogoče še poglobiti. Opazili smo, da se algoritem včasih »zacikla« (na primer pri 49 s kriterijem $\boldsymbol{a + 5\lambda}$). Raziskati bi bilo potrebno, pri katerih pogojih se to zgodi. Prav tako smo opazili, da dobimo enak splošni kriterij za različne delitelje. Zanimivo bi bilo raziskati možne povezave. Zanimivo bi bilo tudi raziskati, kako je s potrebnim številom operacij pri istem delitelju z različnimi $\boldsymbol{\lambda}$.

13 Viri in literatura

Cherniavsky, Y., Mouftakhov, A.: *Zbikowski's Divisibility Criterion.* The College Mathematics Journal, Vol. 45, No. 1 (2014).

Dickson, L. E.: *History OF THE Theory OF Numbers. Divisibility and Primality (Vol. 1).* Dover Publications, Inc. Mineola, New York (1919, 2005).

Ganzel, S.: *Divisibility test, Old and New*. Dostopno na: https://www.researchgate.net/publication/313279661_Divisibility_Tests_Old_and_New. (2016) Obiskano: 15. 2. 2020.

Graseli, J.; *Diofantske enačbe.* DMFA, Ljubljana, 1984.

Grinberg, A.A., Luryi, S.: *General Divisibility Criteria.* University of Stony Brook, 2014. Dostopno na naslovu: https://www.researchgate.net/publication/259844855_General_Divisibility_Criteria. Obiskano 20. 11. 2019.

McDowell E.L. (Berry College): *Divisibility Tests: A History and User's Guide.* Dostopno na naslovu: https://www.maa.org/book/export/html/1395519. Obiskano 23. 10. 2019

Miloševič, D.: *Kriteriji deljivosti s 7 in 13*. Presek, letnik 9 (1981/1982). DMFA, Ljubljana, 1982. Dostopno na naslovu: http://www.presek.si/9/9-1-Milosevic-Petek.pdf. Obiskano 15. 10. 2019.

Ofili, C.: *Chika's test.* Westmister Under School. 2020. Dostopno na: https://www.westminsterunder.org.uk/chikas-test/. Obiskano 1. 10. 2019.

Olsen, A.: *Divisibility tests*. Mathematics teacher, 2006. Dostopno na naslovu: file:///C:/Users/Uporabnik/Documents/Kriteriji%20deljivosti/MT%20Vol%20100,%20Aug%2006.pdf. Dostopano: 15. 2. 2020.

Renault. M.: *Stupid Divisibility Tricks 101 Ways to Stupefy Your Friends.* Math Horizons, Vol. 14, No. 2 (2006).

Suhadolc. A.: *Kriteriji deljivosti s praštevili.* Presek, letnik 27, 1999/2000. DMFA. Ljubljana, 2000. Dostopno na naslovu: http://www.presek.si/27/1423-Suhadolc.pdf. Ogledano: 25. 2. 2020.

Tucker, R.: *Some properties of the number 7*. Nature 40, Nature Publishig Group, maj 1889, stran 115 in 116. Dostopno na naslovu: https://www.nature.com/articles/040115a0.pdf Obiskano: 25. 10. 2019.

Vorob'ev, N.N.: *Criteria for Divisibility*. University of Chicago. Chicago, London, 1980.

14 Priloge

Priloga 1: Splošni kriterij deljivosti $a - \lambda b$ za naravna števila do 100

Delitelj	λ	$n = 10a + b$	Alternativa	Razcep	$n = 100a + b_1 b_0 \dots$
2	-1	$\boldsymbol{0a + b}$			
3	-1	$\boldsymbol{a + b}$	$a - 2b$		
4	-1				$0a + b_1 b_0$
5	-1	$\boldsymbol{0a + b}$			
6				$6 = 2 \cdot 3$	
7	2	$\boldsymbol{a - 2b}$	$a + 5b$		
8	-1				$0a + b_2 b_1 b_0$
9	-1	$\boldsymbol{a + b}$			
10	-1	$\boldsymbol{0a + b}$			
11	1	$\boldsymbol{a - b}$	$a + 10b$		
12				$12 = 4 \cdot 3$	
13	-4	$\boldsymbol{a + 4b}$	$a - 9b$		
14				$14 = 2 \cdot 7$	
15				$15 = 5 \cdot 3$	
16	-1				$0a + b_3 b_2 b_1 b_0$
17	5	$\boldsymbol{a - 5b}$			
18				$18 = 2 \cdot 9$	
19	-2	$\boldsymbol{a + 2b}$			
20	-1				$0a + b_1 b_0$
21	2	$\boldsymbol{a - 2b}$		$ali\ 3 \cdot 7$	
22				$22 = 2 \cdot 11$	
23	-7	$\boldsymbol{a + 7b}$			
24				$24 = 8 \cdot 3$	
25	-1				$0a + b_1 b_0$
26				$26 = 2 \cdot 13$	
27	8	$\boldsymbol{a - 8b}$			
28				$18 = 2 \cdot 9$	
29	-3	$\boldsymbol{a + 3b}$			
30				$30 = 5 \cdot 2 \cdot 3$	
31	3	$\boldsymbol{a - 3b}$			
32	-1				$0a + b_3 b_2 b_1 b_0$
33	-10	$\boldsymbol{a + 10b}$		$ali\ 3 \cdot 11$	
34				$14 = 2 \cdot 7$	
35				$35 = 5 \cdot 7$	
36				$36 = 4 \cdot 9$	
37	11	$\boldsymbol{a - 11b}$			
38				$38 = 2 \cdot 19$	
39	-4	$\boldsymbol{a + 4b}$		$ali\ 3 \cdot 13$	
40	-1				$0a + b_2 b_1 b_0$
41	4	$\boldsymbol{a - 4b}$			
42				$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$	

43	-13	$\boldsymbol{a+13b}$	$a-30b$		
44				$44=4\cdot 11$	
45				$45=5\cdot 9$	
46				$46=2\cdot 23$	
47	14	$\boldsymbol{a-14b}$			
48				$48=16\cdot 3$	
49	-5	$\boldsymbol{a+5b}$			
50	-1				$0a+b_1b_0$
51	5	$\boldsymbol{a-5b}$			
52				$52=4\cdot 13$	
53	-16	$\boldsymbol{a+16b}$			
54				$54=2\cdot 27$	
55				$55=5\cdot 11$	
56				$56=8\cdot 7$	
57	17	$\boldsymbol{a-17b}$			
58				$58=2\cdot 29$	
59	-6	$\boldsymbol{a+6b}$			
60				$60=4\cdot 5\cdot 3$	
61	6	$\boldsymbol{a-6b}$			
62				$62=2\cdot 31$	
63	-19	$\boldsymbol{a+19b}$		$ali\ 3\cdot 21$	
64	-1				$0a+b_3b_2b_1b_0$
65				$65=5\cdot 13$	
66				$66=2\cdot 33$	
67	20	$\boldsymbol{a-20b}$			
68				$68=2\cdot 9$	
69	-7	$\boldsymbol{a+7b}$		$ali\ 3\cdot 23$	
70				$70=2\cdot 5\cdot 7$	
71	7	$\boldsymbol{a-7b}$			
72				$72=8\cdot 9$	
73	-22	$\boldsymbol{a+22b}$			
74				$74=2\cdot 37$	
75				$75=25\cdot 3$	
76				$76=4\cdot 19$	
77	23	$\boldsymbol{a-23b}$	$a+100b$	$ali\ 7\cdot 11$	
78				$78=2\cdot 39$	
79	-8	$\boldsymbol{a+8b}$			
80	-1				$0a+b_3b_2b_1b_0$
81	8	$\boldsymbol{a-8b}$			
82				$82=2\cdot 41$	
83	-25	$\boldsymbol{a+25b}$			
84				$84=4\cdot 21$	
85				$85=5\cdot 17$	
86				$86=2\cdot 43$	
87	26	$\boldsymbol{a-26b}$			
88				$88=8\cdot 11$	
89	-9	$\boldsymbol{a+9b}$			

90				$90 = 2 \cdot 5 \cdot 9$	
91	9	$\boldsymbol{a - 9b}$	$a + 100b$		
92				$92 = 4 \cdot 23$	
93	-28	$\boldsymbol{a + 28b}$		$ali\ 3 \cdot 31$	
94				$94 = 2 \cdot 47$	
95				$95 = 5 \cdot 19$	
96				$96 = 32 \cdot 3$	
97	29	$\boldsymbol{a - 29b}$			
98				$98 = 2 \cdot 49$	
99	-10	$\boldsymbol{a + 10b}$		$ali\ 9 \cdot 11$	
100	-1				$0a + b_2 b_1 b_0$