Mladi raziskovalci Slovenije 2020
54. srečanje

Koliko je ulomkov?

Matematika
Raziskovalna naloga

OŠ Bojana Ilicha, Maribor

Avtorja: Aleksander Kalacun,

Črt Cigale

Mentor: Jožef Senekovič

Maribor 2020

KAZALO

Povzetek

Vemo, da je naravnih števil neskončno mnogo. Poznamo tudi racionalna števila. Vsako racionalno število lahko zapišemo z ulomkom ali z decimalno številko, za desetiške ulomke neperiodično, za nedesetiške ulomke periodično. V raziskovalni nalogi raziskujemo, kako periodično decimalno število zapišemo z ulomkom. Zapis ulomka bo najverjetneje odvisen od števila števk v periodi. Raziskati želimo število ulomkov za izbrano periodo. Recimo, koliko nedesetiških ulomkov ima enomestno periodo.

1. Uvod

Matematika je bila dobro razvita veda že v Egiptu 2000 let pred n.št. Celo na takšnem nivoju, kot se ga danes učimo v osnovni šoli in deloma v srednji. Egipčani so matematiko zapisovali in učili s pomočjo problemov - kot primere, ki jih je potrebno posnemati. Matematika je bila predvsem uporabna veda.

Egipčani so uporabljali dva številska sistema - enega za pisanje na kamen, drugega za pisanje na papir. Oba sta bila zasnovana na številu deset. Prvi je uporabljal različne simbole za potence števila deset. Mnogokratnike posamezne potence so nato prikazovali s ponavljanjem ustreznega simbola tolikokrat, kot je bilo treba.

Ahmesovi zapisi matematike ali Rhindov papirus spada med najstarejše ohranjene matematične zapise (Egipt, okrog 1600 pred n.št.). Na njem je napisanih 54 problemov. Podani so izračuni ulomkov, volumnov nekaterih teles (npr. valja). Matematična vsebina papirusa je prepis vsaj 200 let starejšega teksta neznanega avtorja. Svečeniki starega Egipta so hranili take zapise kot posebno skrivnost - v znanju je moč.
V raziskovalni nalogi skozi primere in upoštevanjem lastnosti števil raziskujemo kako zapisati periodična decimalna števila z ulomki. Zato poglejmo, katera znanja potrebujemo, da se raziskovanja lahko lotimo.
Razmerje med delom in celoto imenujemo delež, ki ga običajno zapišemo v obliki ulomka, možen pa je tudi zapis v drugih oblikah. Ulomki so števila. Vsak količnik dveh števil $\frac{a}{b}$, kjer je $a \in IN_0$ in $b \in IN$ je racionalno število. Vemo, da ulomke lahko zapišemo tudi z decimalno vejico. Število levo od vejice predstavlja celi del ulomka, število desno od vejice predstavlja ulomek, ki je manjši od 1. Tako je 3,14 = $3\,\frac{14}{100} = 3\frac{7}{50}$. Števke desno od decimalne vejice bomo imenovali tudi decimalke. Tako ima število 3,14 dve decimalki, saj ima števki na dveh mestih desno od vejice.
Desetiški ulomki so ulomki, ki imajo za imenovalec desetiško enoto (1, 10, 100 …) ali jih lahko razširimo na desetiško enoto. Število 10 ima štiri delitelje, med njimi sta dva delitelja števili 2 in 5. Zato lahko trdimo, da je ulomek desetiški, če lahko imenovalec zapišemo s potencami z osnovo 2 ali 5.
Poglejmo primere.

Ulomek $\frac{7}{25}$ ima imenovalec 25, ki ga zapišemo s potenco 5^2. Če ulomke razširimo s 4, torej 2^2, zapišemo desetiški ulomek $\frac{28}{100}$.

Imenovalec ulomka $\frac{9}{16}$ lahko zapišemo s potenco 2^4. Tudi ta ulomek lahko razširimo, v tem primeru s 5^4 in zapišemo ulomek $\frac{5625}{10000}$.

V primeru ulomka $\frac{13}{40}$ je imenovalec $40 = 2^3 \cdot 5$. Kar pomeni, da moramo ulomek razširiti s 5^2, da dobimo imenovalec oblike $2^3 \cdot 5^3$. Tako je razširjeni ulomek $\frac{325}{1000}$.

Ugotovimo lahko, da vsak ulomek z imenovalcem $2^n \cdot 5^m$, kjer sta $m, n \geq 0$, razširimo s tako potenco števila 2 ali 5, da je stopnja potenc z osnovo 2 in 5 enaka.

Če je recimo imenovalec nekega ulomka oblike $2^3 \cdot 5^2$, razširimo ta ulomek s 5, da dobimo imenovalec oblike $2^3 \cdot 5^3$, kjer sta stopnji potenc enaki.

Vsak desetiški ulomek lahko zapišemo z decimalno številko s končnim številom decimalk.

Primeri.

$\frac{1}{10} = 0{,}1$ $\frac{1}{100} = 0{,}01$ $\frac{1}{50} = 0{,}02$ $\frac{1}{4} = 0{,}25$

Desetiški ulomek zapišemo z decimalno vejico na dva načina:

a) z razširitvijo na desetiško enoto, $\frac{1}{50} = \frac{1 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{2}{100} = 0{,}02$,

b) z deljenjem, saj ulomek predstavlja količnik števil, $\frac{1}{50} = 1 : 50$. S pisnim deljenjem zapišemo 1 : 50 = 0,02.

Nedesetiški ulomki so ulomki, kjer se decimalke v decimalnem zapisu ulomka ponavljajo. Kar pomeni, da se ena ali več števk v zapisu ponavlja v nedogled. Nedestiške ulomke zapišemo z decimalno vejico z deljenjem. Zaradi ponavljajočih se ostankov se ponavljajo tudi števke v količniku. Tako je recimo

```
1 : 3 = 0,33...
10
 10
  1...
```

Primeri.

$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}3333333 \ldots = 0{,}\overline{3}$ $\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0{,}999999 \ldots = 0{,}\overline{9}$.

$\frac{4}{7} = 4 : 7 = 0{,}571428574128 \ldots = 0{,}\overline{571428}$.

Nad števko ali skupino ponavljajočih števk naredimo črto, s čimer označimo ponavljanje. Ponavljajoča skupina števk-decimalk, je perioda. V zgornjih prvih dveh primerih sta periodi 3 in 9, v tretjem primeru je perioda 571428. V primeru $0{,}0\overline{3}$ je perioda prav tako števka 3, vendar se začne ponavljati šele na drugi decimalki.
Vsako racionalno število lahko zapišemo z neskončnim periodičnim decimalnim zapisom.

2. Iz decimalnega zapisa v ulomek

Znamo zapisati ulomek z decimalno številko, torej z zapisom z decimalno vejico. Kako pa ugotovimo, kateri ulomek je zapisan, če poznamo decimalno številko? Poglejmo znani primer ulomka $\frac{1}{3}$. Recimo da nas zanima, s katerim ulomkom zapišemo število 0,33333… . Zato zapišemo enačbo $x = 0{,}33333\ldots = 0{,}\overline{3}$.
Levo in desno stran enačbe smemo pomnožiti s poljubnim številom, različnim od 0, a se rešitev enačbe ne spremeni. Tako je

$10x = 3{,}333333\ldots = 3{,}\overline{3}$, upoštevamo, da je

$x = 0{,}33333\ldots = 0{,}\overline{3}$ in levi oziroma desni strani enačbe odštejemo

$10x - x = 3{,}3333\ldots - 0{,}33333\ldots$

$9x = 3$ in tako je

$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Potrdili smo znano enakost $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = 0{,}\overline{3}$.
Levo in desno stran enačbe $x = 0{,}33333\ldots = 0{,}\overline{3}$ bi lahko množili tudi z drugimi števili. Poglejmo primer, ko levo in desno stran množimo s številom 20.

$x = 0{,}\overline{3}$ / $\cdot 20$

$20x = 6{,}\overline{6}$ / odštejemo izraza na levi in desni strani enačbe

$19x = 6{,}\overline{3}\ldots$ /odštejemo še enkrat

$18x = 6$

$x = \frac{1}{3}$.

Število 0,3333… smo zapisali z ulomkom $\frac{1}{3}$, ki je okrajšan ulomek. Okrajšan je zato, ker sta števec in imenovalec tuji si števili, za kateri velja D(1, 3) = 1. Največji skupni delitelj števca in imenovalca je število 1. Ulomek $\frac{1}{3}$ lahko razširimo s katerimkoli naravnim številom in zapišemo drug, vendar ekvivalenten ulomek. Kar pomeni, da ima enako vrednost. Ulomki,

enakovredni ulomku $\frac{1}{3}$ so recimo $\frac{2}{6}, \frac{15}{45}, \frac{27}{81} \ldots$. Vse ulomke lahko zapišemo z decimalno številko 0,33333... . Lahko rečemo, da so vsi ti ulomki v istem velikostnem razredu ulomkov.
V nadaljevanju nas bo zanimalo, s katerimi ulomki zapišemo periodična decimalna števila, ki imajo za periodo natanko eno števko, dve števki, tri števke… . Tako bomo poskušali število teh ulomkov tudi prešteti.

3. Število ulomkov, ki imajo za periodo eno števko

Nadaljujmo s periodičnimi decimalnimi števili, ki imajo za periodo eno števko, na mestu desetin, recimo $0,\overline{1}$. To število zapišemo z ulomkom $\frac{1}{9}$. Poglejmo kako.

x = 0,111... / pomnožimo z 10,

10x = 1,111... / odštejemo x na levi in 0,111… na desni (zaradi enakosti x = 0,111...),

9x = 1 / delimo z 9,

$x = \frac{1}{9}$.

Ugotovimo, da za periodično število 0,2222… velja enakost $0{,}222\ldots = \frac{2}{9}$. Sklepamo, da lahko periodično decimalno število oblike 0,x... zapišemo z ulomkom $\frac{x}{9}$, kjer je x števka od 0 do 9. V kolikor je pred periodo enega števila še n neponavljajočih števk 0, imenovalec pomnožimo s potenco 10^n. Poglejmo primer za 0,006666… . V tem primeru sta pred ponavljajočo se števko 6 dve ničli, torej n = 2. Levo in desno stran množimo z 10^2, tako je

100x = 0,666… Po znanem postopku zapišemo

1000x = 6,666… z odštevanjem leve in desne strani zapišemo

900x = 6, kar pomeni da je iskani ulomek $x = \frac{6}{900}$. Gre za neokrajšani ulomek. Po krajšanju s 6 zapišemo ulomek $\frac{1}{150}$.

Ponuja se ideja, da bi recimo periodično decimalno število 0,000777… zapisali z ulomkom s števcem 7 in imenovalcem 9000. Preverimo idejo.

Levo in desno stran enačbe x = 0,000777… množimo najprej s 1000 (zaradi tistih treh ničel), zapišemo 1000x = 0,777… . Nato levo in desno stran enačbe še množimo z 10, tako da je 10000x = 7,777…. Z odštevanjem leve in desne strani zapišemo

9000x = 7, kar pomeni da je $x = \frac{7}{9000}$.

Pokazali smo, da naša ideja drži. Vsako decimalno število, v katerem je *n* ničel do periode in je *k* ponavljajoča se števka (npr. 0,00..*kkkk*….), lahko zapišemo z ulomkom $\frac{k}{9 \cdot 10^n}$.

Zapišimo sedaj periodična decimalna števila, ki imajo eno števko za periodo, vendar takoj za decimalno vejico v preglednico (Tabela 1).

Tabela 1

DECIMALNO ŠTEVILO	ULOMKI
$0,\overline{1}$	$\frac{1}{9}$
$0,\overline{2}$	$\frac{2}{9}$
$0,\overline{3}$	$\frac{3}{9}$
$0,\overline{4}$	$\frac{4}{9}$
$0,\overline{5}$	$\frac{5}{9}$
$0,\overline{6}$	$\frac{6}{9}$
$0,\overline{7}$	$\frac{7}{9}$
$0,\overline{8}$	$\frac{8}{9}$
$0,\overline{9}$	$\frac{9}{9}$

Zapisali smo torej devet ulomkov z imenovalcem 9. Če bi upoštevali da je z ulomkom zapišemo tudi število 0, torej $\frac{0}{9}$, je teh ulomkov deset. Lahko razmišljamo tudi tako, da je na mestu desetin v številu $0,\bar{a}$ lahko deset različnih števk in s tem deset različnih ulomkov. Preseneti zadnja enakost, kjer je $0,\overline{9} = \frac{9}{9}$.

Kar pomeni, da je periodično decimalno število 0,999999…. = 1.

Da je 0,999... = 1 lahko pokažemo na več načinov. Mi bomo to pokazali s pomočjo vrst.

V matematiki vrsto dobimo, ko seštevamo člene zaporedja. Primer vrste je lahko naslednja vsota:

$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$.

Posamezen člen vrste lahko zapišemo v obliki a_k, kjer k predstavlja indeks (zaporedno številko) člena v vrsti. Prvi člen vrste a_0 bi tako bilo število 1, drugi člen vrste $a_1$bi bil ulomek $\frac{1}{10}$, tretji člen a_2 bi bil ulomek $\frac{1}{100}$ ter četrti člen ulomek $\frac{1}{1000}$.

Vrsto v primeru lahko torej zapišemo kot:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}=a_0+a_1+a_2+a_3$$

Vidimo, da se pri zgornjem zapisu indeks spreminja od 0 do 3. V matematiki lahko takšno zaporedje (vsoto) zapišemo elegantneje z uporabo simbola sigma Σ. Poleg njega moramo navesti še simbol za indeks (npr. *k*) ter začetni (npr. 0) in končni (npr. 3) indeks.

Našo vrsto tako zapišemo v obliki:

$a_0+a_1+a_2+a_3=\sum_{k=0}^{3} a_k$.

Pri našem primeru ni težko videti, da lahko posamezen člen a_k izrazimo kot $(\frac{1}{10})^k$in to vrsto lahko zapišemo v obliki:

$\sum_{k=0}^{3} a_k=\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{10}\right)^k$.

V matematiki ločimo med različnimi vrstami. Tako poznamo končne in neskončne vrste. Pri končni vrsti med seboj seštejemo končno število členov (npr. 4), pri neskončni pa je teh členov neskončno mnogo. Za slednje za končni indeks navedemo simbol za neskončnost ∞.

Če naš primer končne vrste spremenimo v neskončno vrsto, dobimo:$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k$.

Za nas je posebej zanimiva neskončna geometrijska vrsta, kjer je $a_k=r^k$. V kolikor je 0 < r < 1, namreč velja enakost:

$\sum_{k=0}^{\infty} r^k=\frac{1}{1-r}$.

Vidimo, da lahko izračunamo vsoto neskončne vrste, ki smo jo uporabili v primeru:

$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$.

Pridobljeno znanje uporabimo na našem prvotnem problemu.

0,999... lahko zapišemo z naslednjo vrsto, kjer vsak člen predstavlja posamezno števko

0,999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ... = $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots=$

Izpostavimo ulomek $\frac{9}{10}$,

$=\frac{9}{10}(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots)$

Vrsto v oklepaju nadomestimo z rezultatom, ki smo ga izračunali že zgoraj in dobimo končni rezultat:

$0{,}999\ldots=\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots\right)=\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}=1.$

Zapisani dokaz enakosti 0,9999… = 1 že presega osnovnošolska znanja matematike, vendar se nam je problem enakosti zdel tak pomemben, da smo dokaz enakosti poiskali v virih.

4. Število ulomkov, ki imajo za periodo dve števki

V nadaljevanju na primerih poglejmo, kako zapišemo z ulomkom periodično decimalno število, ki ima ponavljajoči se števki na mestih desetin in stotin. Tako je recimo število $0,\overline{13}$. Uporabimo že poznani postopek zapisa enačbe, $x=0,\overline{13}=0{,}131313131\ldots$. Levo in desno stran enačbe množimo s 100 (ker je perioda dvomestna), tako dobimo

$100x=13{,}131313131\ldots$ odštejemo levi in desni strani obeh enačb,

$99x=13$, kar pomeni, da je iskani ulomek $x=\frac{13}{99}$.

Poskusimo še s številom $x=0,\overline{78}=0{,}7878787\ldots$.

$100x=78{,}7878787\ldots$

$99x=78$, kar pomeni, da je iskani ulomek $x=\frac{78}{99}$. Seveda lahko ta ulomek krajšamo s 3 in zapišemo $\frac{26}{33}$.

Glede na vse opravljene primere sklepamo, da lahko periodično število oblike $0,\overline{ab}$, kjer sta a in b števki od 0 do 9, zapišemo z ulomkom $\frac{ab}{99}$. Ta ulomek seveda v primeru, da števec in imenovalec nista tuji si števili, še okrajšamo.

Za primer izberimo a = 9 in b = 1. Iskani ulomek je tako $\frac{91}{99}$. Pravilnost lahko preverimo z računalom. Pri tem se zavedamo, da računalo zadnje izpisano decimalko zaokroži in se izpiše število 0,9191919191919192.

Koliko pa je takih ulomkov?

Za število $0,\overline{ab}$ dobimo

a) pri izbiri a = 0, b = 0 celo število 0.

b) pri izbiri $b \in \{1, 2, 3 \ldots 9\}$ in $a = 0$ dobimo števila $0,\overline{01}, 0,\overline{02} \ldots 0,\overline{09}$.

Poglejmo za primer $x = 0,\overline{02} = 0{,}020202 \ldots$. Po spoznanem lahko to število zapišemo z ulomkom $\frac{2}{99}$. Po vrsti gre torej za ulomke $\frac{1}{99}, \frac{2}{99}, \frac{3}{99}, \frac{4}{99}, \frac{5}{99}, \frac{6}{99}, \frac{7}{99}, \frac{8}{99}, \frac{9}{99}$.

Ulomkov je torej 9. Število $0,\overline{00} = 0,\overline{0} = 0$ je deseto število, ki pa je že upoštevano med števili z eno števko v periodi.

c) pri izbiri $b \in \{0, 1, 2, 3 \ldots 9\}$ in $a = 1$ dobimo števila $0,\overline{10}$, $0,\overline{11}$, $0,\overline{12} \ldots 0,\overline{19}$.

Število $0,\overline{10} = 0{,}101010 \ldots$ in ni desetiški ulomek.

Število $0,\overline{11} = 0,\overline{1}$, kar že poznamo. Zapišemo ga z ulomkom $\frac{1}{9}$.

Število $x = 0,\overline{12} = 0{,}121212 \ldots$. Enačbo najprej množimo z 10, zapišemo

$10x = 1{,}21212 \ldots$. Zato množimo še z 10 in zapišemo

$100x = 12{,}1212 \ldots$ odštejemo levi in desni strani enačb, tako dobimo

$99x = 12$ ali z ulomkom $x = \frac{12}{99}$.

Poglejmo še primer števila $x = 0,\overline{19} = 0{,}19191 \ldots$. Po množenju leve in desne strani z 10 in še enkrat z 10 (torej s 100) zapišemo

$100x = 19{,}191919 \ldots$ po odštevanju pa

$99x = 19$ ali $x = \frac{19}{99}$,

Sklepamo, da števila $0,\overline{10}$, $0,\overline{11}$, $0,\overline{12} \ldots 0{,}1\overline{19}$ po vrsti zapišemo z ulomki $\frac{10}{99}$, $\frac{11}{99}, \frac{12}{99}, \frac{13}{99}, \frac{14}{99}, \frac{15}{99}, \frac{16}{99}, \frac{17}{99}, \frac{18}{99}, \frac{19}{99}$.

Zapišemo deset ulomkov. Izmed teh je en ulomek $\frac{11}{99} = \frac{1}{9}$, kar je število z eno števko v periodi.

č) Pri izbiri $b \in \{0, 1, 2, 3 \ldots 9\}$ in $a = 2$ dobimo števila $0,\overline{20}$, $0,\overline{21}$, $0,\overline{22} \ldots 0,\overline{29}$.

Iz prejšnjih primerov lahko sklepamo, da bo pot računanja tovrstnega ulomka enaka. Utemeljimo na preizkusu:

$x = 0,\overline{26}$

$100x = 26,\overline{26}$

$99x = 26$

$0,\overline{26} = \frac{26}{99}$.

Tako potrdimo, da so periodična števila od $0,\overline{20}$ do $0,\overline{29}$ enaka kot $\frac{20}{99}, \frac{21}{99}, \frac{22}{99}, \frac{23}{99}, \frac{24}{99}, \frac{25}{99}, \frac{26}{99}, \frac{27}{99}, \frac{28}{99}, \frac{29}{99}$. Tudi teh ulomkov je deset. En med njimi je že znan, saj smo z njim zapisali število z eno števko v periodi, to je $\frac{22}{99}=\frac{2}{9}$. Tak postopek velja za vsa periodična števila, ki imajo za a števko od 1 do 9 in za b prav tako katerokoli števko od 1 do 9.

Iz zapisanih primerov lahko ugotovimo, kako izračunamo število vseh ulomkov. Periodično število $0,\overline{ab}$ ima lahko na mestu desetin deset števk in na mestu stotin prav tako deset števk, a, b $\in\{0,\ 1,\ 2\ldots9\}$. Ker je 10 · 10 = 100, je tako 100 različnih števil s periodo z dvema števkama. Če upoštevamo možnost a = b, takih možnosti je 10 in te možnosti odštejemo, je vseh ulomkov 90.

4.1 Cikli z dolžino periode 2

Ulomka $\frac{36}{99}$ in $\frac{63}{99}$ zapišemo s številoma $0,\overline{36}$ in $0,\overline{63}$. Če pogledamo decimalke na nekem poljubnem mestu, težko ugotovimo katero izmed števil gledamo, saj je $0,\overline{36}=$ 0,3636…363636… in $0,\overline{63}=0{,}6363\ldots363636\ldots$.

Zapišemo lahko da je $10\cdot0,\overline{36}=3,\overline{63}=3+0,\overline{63}$. Pri zapisu z ulomki to pomeni, da je $10\cdot0,\overline{36}=10\cdot\frac{36}{99}=\frac{360}{99}=3+\frac{63}{99}$. Tako lahko vsako periodično številko z dvema števkama v periodi oblike $0,\overline{ab}$ z množenjem z 10 zapišemo s periodično številko $0,\overline{ba}$, kjer je $10\cdot0,\overline{ab}=a,\overline{ba}=a+0,\overline{ba}$. Ker nas zanima samo perioda decimalnega števila, poimenujemo števili $0,\overline{36}$ in $0,\overline{63}$ kot števili s cikličnima periodama. V vsakem ciklu sta dva ulomka. Tako je v številu $0,\overline{ab}$, na mestu a lahko deset števk in na mestu b prav tako deset števk, torej je skupaj 10^2 možnosti. Ko odštejemo primere v katerih je a = b, teh je 10, dobimo 90 ulomkov. Teh 90 ulomkov je razdeljenih v 45 ciklov, v vsakem sta dva ulomka.

Poglejmo še primer števil $0,\overline{57}$in $0,\overline{75}$. Za števili velja, da je $10\cdot0,\overline{57}=5,\overline{75}$, oziroma $10\cdot\frac{57}{99}=\frac{570}{99}=5+\frac{75}{99}$.

5. Število ulomkov, ki imajo za periodo tri števke

Tudi v primeru decimalne številke, ki ima za periodo 3 števke, lahko sklepamo, da na vsaki decimalki zapišemo eno od desetih števk. Prikažimo nekaj primerov števil v tabeli (tabela 2). Pri tem so a, b in c števke na posameznih decimalkah in so lahko 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, in 9.

V primeru $x=0,\overline{254}$ množimo levo in desno stran enačbe s 1000,

$1000x = 254,\overline{254}$, po odštevanju strani je

$999x = 254$, kar pomeni da je $x = \frac{254}{999}$.

Tabela 2

a	*b*	c	ulomek
0	0	1	$\frac{1}{999}$
0	0	2	$\frac{2}{999}$
0	0	3	$\frac{3}{999} = \frac{1}{333}$
0	4	0	$\frac{40}{999}$
5	0	0	$\frac{500}{999}$
0	5	6	$\frac{56}{999}$
6	0	7	$\frac{607}{999}$
7	8	0	$\frac{780}{999}$
7	8	9	$\frac{789}{999}$

Poljubno periodično število $0,\overline{abc}$ lahko zapišemo z ulomkom $\frac{abc}{999}$. Nekatere ulomke sicer še lahko okrajšamo, če števec in imenovalec nista tuji si števili. V primeru da je $a = b = c$ zapišemo periodično decimalno številko z eno periodo. Recimo $0,\overline{333} = 0,\overline{3}$. Takih možnosti je 10. Lahko sklepamo, da na vsaki decimalki zapišemo eno od desetih števk. Torej je to $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ ulomkov. Ko odštejemo decimalne številke z eno števko v periodi, je vseh ulomkov skupaj $10^3 - 10 = 990$.

5.1 Cikli z dolžino periode 3

Podobno kakor v prejšnjem poglavju lahko razmišljamo o ciklih za periodična decimalna števila s tremi števkami v periodi. Gre za števila oblike $0,\overline{abc}$. Število $0,\overline{123}$ lahko zapišemo z ulomkom $\frac{123}{999}$. Če število $0,\overline{123}$ množimo z 10, dobimo število $1,\overline{231} = 1 + 0,\overline{231}$. Vrstni red števk v periodi je zamenjan, oziroma premaknjen za eno mesto v levo. Zapis z ulomki je $10 \cdot \frac{123}{999} = \frac{1230}{999} = 1 + \frac{231}{999}$.

Če število $0,\overline{123}$ množimo s 100, dobimo število $12,\overline{312} = 12 + 0,\overline{312}$. Vrstni red števk v periodi je spet premaknjen za eno mesto v levo. Zapis z ulomki je $100 \cdot \frac{123}{999} = \frac{12300}{999} = 12 + \frac{312}{999}$.

Gre za ciklično zamenjavo števk (premiki v levo), kjer zapišemo števila $0,\overline{123}$, $0,\overline{231}$, $0,\overline{312}$, oziroma ulomke $\frac{123}{999}, \frac{231}{999}, \frac{312}{999}$. Poudarimo, da število $0,\overline{132} = \frac{132}{999}$ spada v skupino še z dvema številoma in to $0,\overline{321} = \frac{321}{999}$ in $0,\overline{213} = \frac{213}{999}$, torej v drugačen cikel števil.

Razdelitev v cikle velja tudi v primerih, ko sta dve izmed treh števk enaki. Tako za število $0,\overline{122} = \frac{122}{999}$, ki ga množimo z 10, dobimo $10 \cdot \frac{122}{999} = \frac{1220}{999} = 1 + \frac{221}{999}$. Če število $0,\overline{122} = \frac{122}{999}$ množimo s 100, dobimo $100 \cdot \frac{122}{999} = \frac{12200}{999} = 12 + \frac{212}{999}$.

Že prej smo ugotovili, da dobimo 990 ulomkov s periodo dolžine 3. Teh 990 ulomkov je razdeljenih v 330 ciklov, v vsakem so trije ulomki.

6. Število ulomkov, ki imajo za periodo 4 ali več števk

Glede na ugotovitve, lahko periodično decimalno številko glede na število decimalk v periodi zapišemo z ulomkom na naslednji način.

- Štiri števke v periodi števila $0,\overline{abcd} = \frac{abcd}{9999}$.

Ker je na vsaki decimalki lahko 10 različnih števk, je število vseh možnosti $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$. Upoštevamo možnosti ponavljanja števk in s tem zapisa z manj števkami v periodi. Tako bomo odšteli vse možnosti, ko je recimo $0,\overline{2323} = 0,\overline{23}$. Takih možnosti je 100. Med njimi so tudi že možnosti ko so vse števke enake. Tako je ulomkov s štirimi števkami v periodi $10^4 - 10^2 = 9900$. To je $9900: 4 = 2475$ ciklov.

- Pet števk v periodi števila $0,\overline{abcde} = \frac{abcde}{99999}$.

Ker je na vsaki decimalki lahko 10 različnih števk, je število vseh možnosti $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$. Upoštevamo možnosti ponavljanja števk in s tem zapisa z manj števkami v periodi. Ker je 5 praštevilo, bomo odšteli samo možnosti, ko je recimo $0,\overline{33333} = 0,\overline{3}$. Takih možnosti je samo 10. Tako je ulomkov s petimi števkami v periodi $10^5 - 10 = 99990$. Zaradi petih števk v periodi je to $99990: 5 = 19998$ ciklov.

- Šest števk v periodi števila $0,\overline{abcdef} = \frac{abcdef}{999999}$.

Ker je na vsaki decimalki lahko 10 različnih števk, je število vseh možnosti $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$. Upoštevamo možnosti ponavljanja števk in s tem zapisa z manj števkami v periodi. Ker je 6 sestavljeno število, lahko oblikujemo števila s po tremi števkami v periodi, npr. $0,\overline{123123} = 0,\overline{123}$. Takih števil je 10^3. Prav tako lahko zapišemo števila s po dvema števkama v periodi, npr. $0,\overline{121212} = 0,\overline{12}$. Takih ulomkov je 10^2. Pri tem smo v obeh primerih dvakrat odšteli ulomke kot so $0,\overline{222222} = 0,\overline{2}$ (s tremi ali s po dvema števkama v periodi). Tako je ulomkov s šestimi števkami v periodi $10^6 - 10^3 - 10^2 + 10^1 = 998910$. Zaradi šest števk v periodi je to $998910 : 6 = 166485$ ciklov.

- Sedem števk v periodi števila $0,\overline{abcdefg} = \frac{abcdefg}{9999999}$.

Ker je na vsaki decimalki lahko 10 različnih števk, je število vseh možnosti $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7$. Upoštevamo možnosti ponavljanja števk in s tem zapisa z manj števkami v periodi. Ker je 7 praštevilo, bomo odšteli samo možnosti, ko je recimo $0,\overline{33333} = 0,\overline{3}$. Takih možnosti je samo 10. Tako je ulomkov s petimi števkami v periodi $10^7 - 10 = 9999990$. Zaradi sedmih števk je to $9999990 : 7 = 1428570$ ciklov.

- Osem števk v periodi števila $0,\overline{abcdefgh} = \frac{abcdefgh}{99999999}$.

Ker je na vsaki decimalki lahko 10 različnih števk, je število vseh možnosti $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$. Upoštevamo možnosti ponavljanja števk in s tem zapisa z manj števkami v periodi. Ker je 8 sestavljeno število, lahko oblikujemo števila s po štirimi števkami v periodi, npr. $0,\overline{12341234} = 0,\overline{1234}$. Takih števil je 10^4. Prav tako lahko zapišemo števila s po dvema števkama v periodi, npr. $0,\overline{12121212} = 0,\overline{12}$, vendar so ta števila in tudi vsa števila, kjer je vseh osem števk enakih, že vsebovana v skupini s po štirimi števkami v periodi. Tako je ulomkov z osmimi števkami v periodi $10^8 - 10^4 = 99990000$. Zaradi osmih števk v periodi je to $99990000 : 8 = 12498750$ ciklov.

Ugotovimo, če je število števk v periodi praštevilo p, je število ulomkov s katerimi zapišemo periodične decimalne številke $10^p - 10^1$. Število ciklov je $(10^p - 10^1) : p$.

Če je število števk v periodi sestavljeno število s, je število ulomkov odvisno od razcepa sestavljenega števila na prafaktorje. Recimo za število, ki ima $s = 10 = 2 \cdot 5$. Vseh možnih ulomkov je 10^{10}. Odštejemo tiste s krajšimi periodami. To sta možnosti s periodo dolžine 2 (praštevilo 2 v razcepu) in s periodo dolžine 5 (praštevilo 5 v razcepu). V obeh primerih dvakrat odštejemo možnost, ko so vse števke enake, zato prištejemo 10. Ulomkov z dvema števkama v periodi je 10^2, ulomkov s petimi števkami v periodi je 10^5. Število ulomkov, ki jih želimo prešteti je $10^{10} - 10^5 - 10^2 + 10^1$.

Formula za število ulomkov (Peter Petek, 1996).

Naj bo $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ z razcepom periode na praštevila.

Označimo števila $q_1 = \frac{n}{p_1}$, $q_2 = \frac{n}{2}$, …, $q_k = \frac{n}{p_k}$

$q_{12} = \frac{n}{p_1 \cdot p_2}$, $q_{13} = \frac{n}{p_1 \cdot p_3}$, …, $q_{(k-1)k} = \frac{n}{p_{(k-1)} \cdot k}$

$\ldots q_{ijm} = \frac{n}{p_i \cdot p_j \cdot p_m} \ldots$

Število vseh ulomkov izračunamo s formulo

$10^n - 10^{q_1} - 10^{q_2} - \cdots - 10^{q_k} + 10^{q_{12}} + \cdots + 10^{q_{(k-1)k}} - \cdots - 10^{q_{ijm}} - \cdots$.

Poglejmo na zgledih delovanje formule.

Naj bo $n = 6$. Dolžina periode je iz šestih števk. Zato je $n = 2 \cdot 3$, praštevili sta $p_1 = 2$ in $p_2 = 3$. Zato sta $q_1 = \frac{6}{2} = 3$ in $q_2 = \frac{6}{3} = 2$. Izračunamo še $q_{12} = \frac{6}{6} = 1$. Število ulomkov je torej $10^6 - 10^3 - 10^2 + 10^1 = 998910$, kar je 166485 ciklov. Izračunali smo enake vrednosti kot že zgoraj.

V naslednjem primeru naj bo $n = 10$. Potem je $n = 5 \cdot 2$, praštevili sta $p_1 = 2$ in $p_2 = 5$. Izračunamo $q_1 = \frac{10}{5} = 2$, $q_2 = \frac{10}{2} = 5$ in $q_{12} = \frac{10}{10} = 1$. Število ulomkov je tako

$10^{10} - 10^5 - 10^2 + 10^1 = 9999899910$, kar je 999989991 ciklov.

V zadnjem primeru naj bo $n = 30$, torej gre za število s 30 števkami v periodi. Število 30 razcepimo na produkt $n = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Praštevila v razcepu so $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$. Stopnje vseh potenc v razcepu so 1, tako je $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Najprej izračunamo $q_1 = \frac{30}{2} = 15$, $q_2 = \frac{30}{3} = 10$ in $q_3 = \frac{30}{5} = 6$. Izračunamo še $q_{12} = \frac{30}{6} = 5$, $q_{13} = \frac{30}{10} = 3$, $q_{23} = \frac{30}{15} = 2$, $q_{123} = \frac{30}{30} 1$.

Število ulomkov je tako $10^{30} - 10^{15} - 10^{10} - 10^3 + 10^5 + 10^3 + 10^2 - 10 =$

= 999 999 999 999 998 999 990 000 100 090.

Kar je 33 333 333 333 333 299 999 666 670 003 ciklov.

7. Ugotovitve

V raziskovalni nalogi »Koliko je Ulomkov?« smo se vprašali po povezavi med ulomki in periodičnimi decimalnimi števili. Obravnavali smo samo pozitivne ulomke manjše od 1. Ulomek je količnik. Vemo, da ima pri nedesetiških ulomkih pri deljenju števca z imenovalcem količnik neskončno mnogo decimalk. Pri tem se lahko ponavlja ena, dve ali poljubno število števk. Ponavljajoči skupini števk rečemo perioda. Vprašali smo, kako bi načrtno prišli do želenega ulomka iz periodičnega števila in obratno. Raziskovati smo začeli periodična števila z eno ponavljajočo se decimalko. Nato smo raziskovanje razširili na določanje ulomkov iz periodičnega števila z dvema števkama v periodi. Raziskali smo povezavo med cikličnimi ulomki (kot sta recimo $0,\overline{32} = \frac{32}{99}$ in $0,\overline{23} = \frac{23}{99}$). S sistematičnim preizkušanjem smo lastnosti preverili tudi na periodičnih decimalnih številih z več števkami v periodi. Ugotovili smo, kako z ulomkom zapišemo periodično decimalno število oblike $0,\overline{a_1 a_2 \ldots a_k} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{10^k - 1}$, kjer so $a_1, a_2, \ldots, a_k$ števke v periodi.

Preštevali smo ulomke, s katerimi zapišemo periodična decimalna števila. Z metodo poskušanja smo prešteli ulomke za decimalna števila s periodo dolžine 8. V virih smo poiskali in zapisali splošno formulo za izračun števila ulomkov iz decimalnih periodnih števil in izračun ciklov za poljubno število števk v periodi.

Pri raziskovanju smo naleteli na fascinantno ugotovitev, da je periodično decimalno število $0,\overline{9} = 0{,}99999\ldots$ enako številu 1. Kar pomeni, da lahko število 1 (celo število) zapišemo s približkom. V virih smo poiskali dokaz za to trditev.
Svet matematičnih izrazov in števil je neskončen in zanimiv, zato predstavlja neskončen vir zanimivih tem za raziskovanje.

8. Družbena odgovornost

Z raziskovalno nalogo avtorjaslediva osrednjemu cilju Strategije razvoja Slovenije 2030, ki je zagotoviti kakovostno življenje za vse. Med strateškimi usmeritvami tega strateškega dokumenta so učenje za in skozi vse življenje ter visoka stopnja sodelovanja, usposobljenosti in učinkovitega upravljanja. Raziskovalna naloga je nastala v sodelovanju, izmenjavi idej in izkušenj ter iskanju ustreznih virov. V delo sva vložila veliko znanja, dela in inovativnosti, podkrepljenimi z izkušnjami in znanjem mentorja.

Z inovativnostjo, ustvarjalnostjo in spreminjanjem idej v dejanja se bova tudi v prihodnje uspešno soočala z izzivi in prispevala k blaginji Slovenije.

9. Viri

[1] http://www.fpp.edu/~milanb/tpmeh/matematicne%20metode/Predavanje06.pdf (11.1.2020)

[2] https://sl.wikipedia.org/wiki/Geometrična_vrsta (11.1.2020)

[3] https://www.purplemath.com/modules/howcan1.htm (11.1.2020)

[4] Peter Petek, Teta Amalija šteje ulomke, Prispevki k poučevanju matematike, stran 11., 12. . Maribor, založba Rotis, 1996.