Ploščina tetivnega petkotnika

MATEMATIKA

raziskovalna naloga

Avtorici: Katarina Lija Hrastnik, Maja Papa

Mentor: Igor Blažič, dipl. ing.

Somentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Marec 2020

Osnovna šola montessori, Ljubljana

Zahvala

Zahvaljujeva se mentorjema prof. Alojzu Grahorju in dipl. ing. Igorju Blažiču za vso pomoč in namige.

Zahvaljujeva se tudi prof. Justini Bradač za lektoriranje in vse popravke.

Kazalo vsebine

Seznam slik

Seznam tabel

Seznam prilog

Povzetek

V raziskovalni nalogi obravnavamo formulo za ploščino tetivnega petkotnika, izraženo samo z dolžinami stranic. Znani sta Heronova formula za ploščino trikotnika in Brahmaguptova formula za ploščino tetivnega štirikotnika, ki sta nam predstavljali izhodišče za našo raziskavo. S pregledom literature smo ugotovili, da za izračun ploščine tetivnega petkotnika obstaja zapleten postopek, s katerim izračunamo pravo vrednost ploščine (avtorj Robbins), in preprosta približna formula (avtorice Shahbazi), ki je podobna Heronovi in Brahmaguptovi formuli. V raziskovalni nalogi smo izpeljali dokaj preprosto formulo za ploščino tetivnega petkotnika, s katero izračunamo približek ploščine. Od prave vrednosti odstopa manj kot Shahbazijina formula. Novo formulo smo utemeljili s pomočjo programa Geogebra in s primerjavo s ploščino pravilnega petkotnika. Menimo, da je izpeljana formula primerna za uporabo.

Ključne besede: ploščina trikotnika, ploščina tetivnega štirikotnika, ploščina tetivnega petkotnika, Heronova formula, Brahmaguptova formula.

1. Uvod

Temo raziskovalne naloge smo si izbrali zato, ker se nam je zdela zanimiva ideja, da lahko ploščino likov izračunamo samo iz podanih dolžin stranic lika.

Običajno ploščino trikotnika računamo s formulo $p = \frac{o \cdot v_o}{2}$, kjer je o izbrana stranica trikotnika (osnovnica), v_o pa višina na to stranico. Ploščine štirikotnikov računamo po formulah: ploščina kvadrata $p = a^2$, ploščina pravokotnika $p = ab$, ploščina paralelograma $p = a \cdot v_a$ ali $p = b \cdot v_b$, ploščina deltoida $p = \frac{e \cdot f}{2}$, kjer sta e in f diagonali deltoida in ploščina trapeza $p = \frac{a+c}{2} \cdot v$. Opazimo, da sta formuli za ploščino kvadrata in ploščino pravokotnika izraženi samo z dolžinami stranic, pri ostalih pa nastopajo še višina in diagonali.

Pri računanju ploščine večkotnikov pa le te načeloma razdelimo na trikotnike. Vsakemu izmed trikotnikov izračunamo ploščino, vsota ploščin posameznih trikotnikov pa je enaka ploščini lika.

V nalogi smo se omejili na tetivne večkotnike. To so tisti večkotniki, ki jim lahko očrtamo krožnico ali drugače: njihove stranice so tetive krožnice. Obravnavali bomo trikotnik, tetivni štirikotnik in tetivni petkotnik.

1.1. Cilj raziskovalne naloge

Cilj raziskovalne naloge je izpeljati preprosto formulo za ploščino tetivnega petkotnika, ki vsebuje samo dolžine stranic.

1.2. Metode dela

Pri raziskovalni nalogi smo uporabili naslednje metode:

- delo po matematični literaturi in internetnih virih,
- preiskovanje s programom Geogebra,
- matematično sklepanje, računanje in dokazovanje.

2. Ploščina trikotnika – Heronova formula

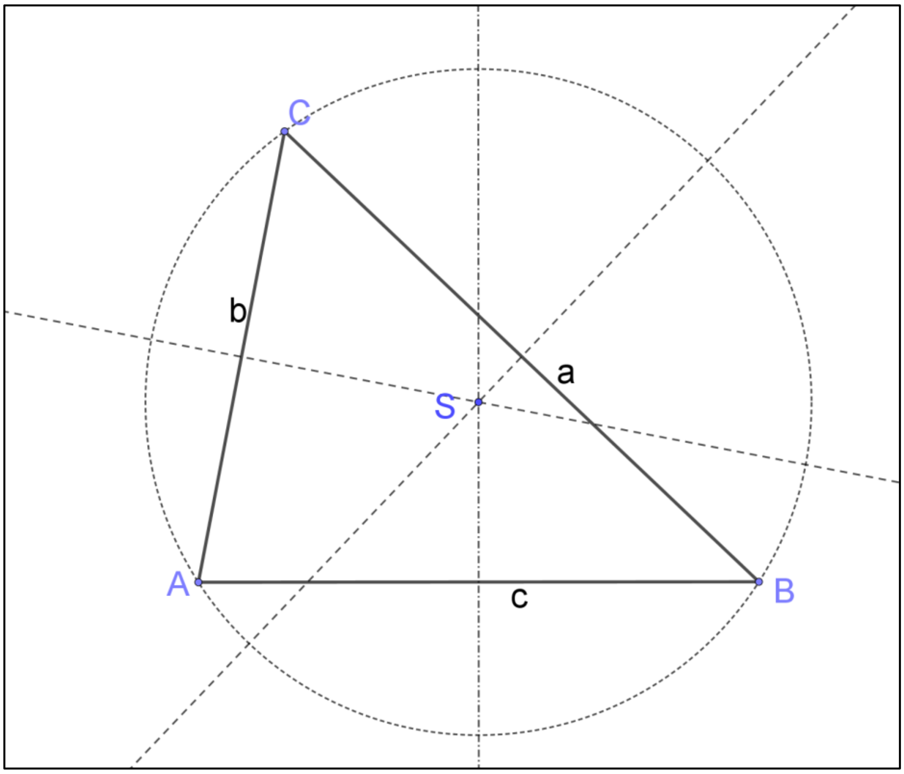
Heronovo formulo (tudi Heronov obrazec) je odkril grški matematik in inženir Heron. Živel je v Aleksandriji med letoma 20 in 100 n. št. Formula je namenjena računanju ploščine trikotnika s podanimi stranicami. Običajno jo zapišemo v naslednji obliki:

$$p_{He}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

v kateri spremenljivka *s* označuje polovični obseg (polobseg) trikotnika.

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

Kot smo zasledili, se formulo (1) lahko dokaže na več načinov. Eden izmed njih je v knjigi *Geometrical Kaleidoscope* (Pritisker, 2017, str. 45), drugi v učbeniku za gimnazije (Škrlec, 2015, str. 223).

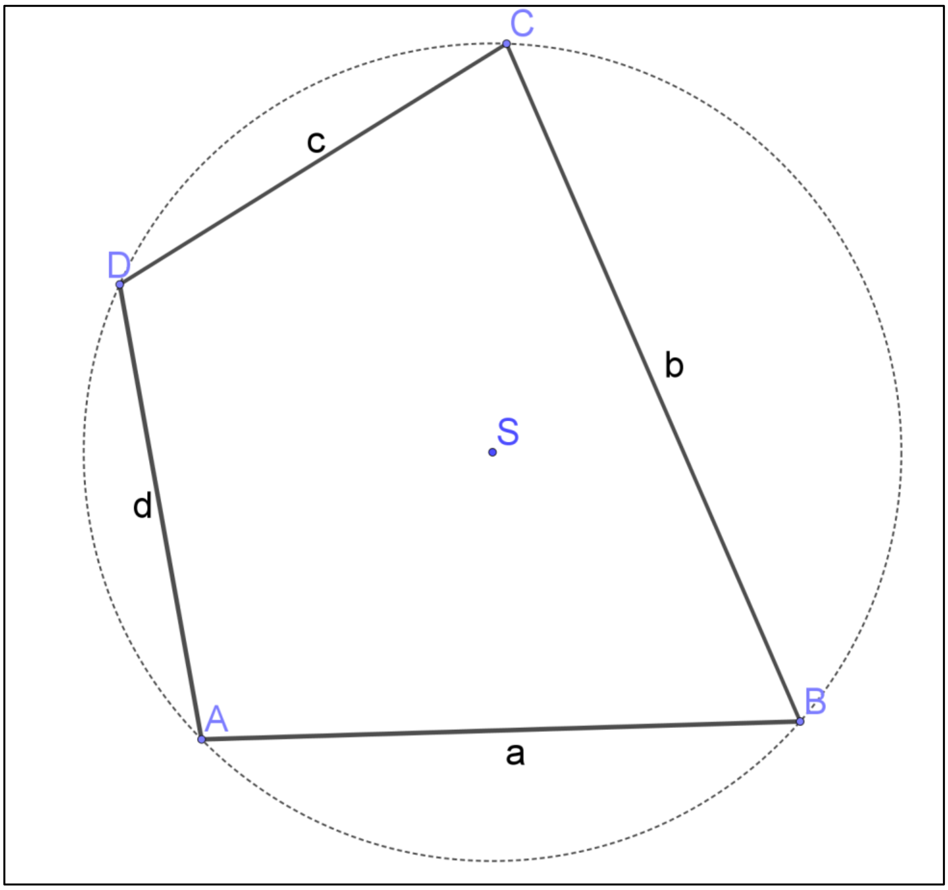


Slika 1: Trikotnik in očrtana krožnica

Vemo, da se vse tri simetrale stranic trikotnika sekajo v skupni točki, ki je središče trikotniku očrtane krožnice (glej *Sliko 1*). Stranice trikotnika so tetive trikotniku očrtane krožnice, zato je vsak trikotnik tetivni.

3. Ploščina tetivnega štirikotnika - Brahmaguptova formula

Brahmagupta (indijski matematik in astronom, 598 - 668) je prvi matematik, ki se je problemov v astronomiji lotil z orodji algebre. Za dolžino leta je v prvem približku predlagal 365 dni, 6 ur, 5 minut in 19 sekund. V delu *Khandakhâdyaka* je približek popravil na 365 dni, 6 ur, 12 minut in 36 sekund.



Slika 2: Tetivni štirikotnik

Brahmagupta je izpeljal formulo za ploščino tetivnega štirikotnika (primer je na *sliki 2*). Formula vsebuje le dolžine stranic:

$$p_{Br}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{2}$$

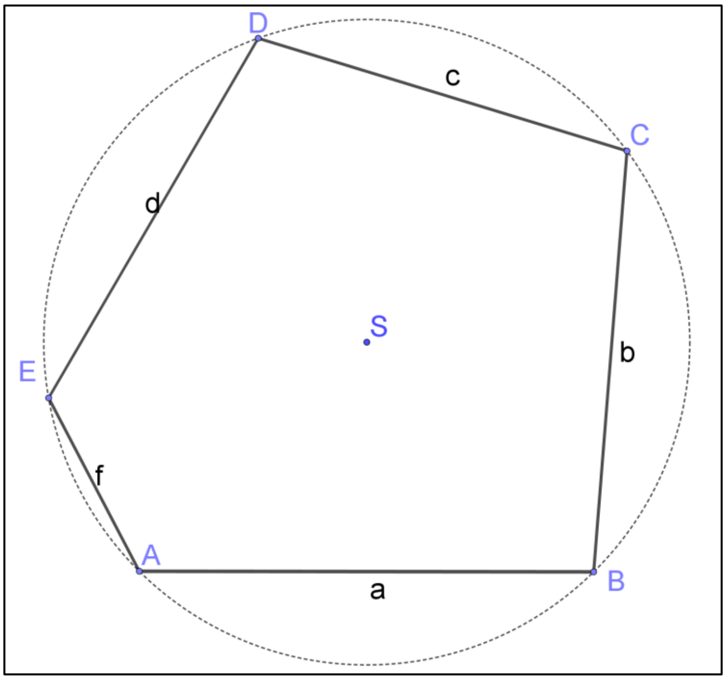
Pri tem *s* označuje polovični obseg (polobseg) tetivnega štirikotnika:

$$s=\frac{a+b+c+d}{2}$$

Dokaz formule (2) je na primer v *Geometrical Kaleidoscope* (Pritisker, 2017, stran 51) in v učbeniku Vega 3 (Škrlec, 2015, str. 225). Če v Brahmaguptovi formuli vzamemo za dolžino četrte stranice 0, dobimo Heronovo formulo, torej je Heronova formula posebni primer Brahmaguptove formule.

4. Ploščina tetivnega petkotnika

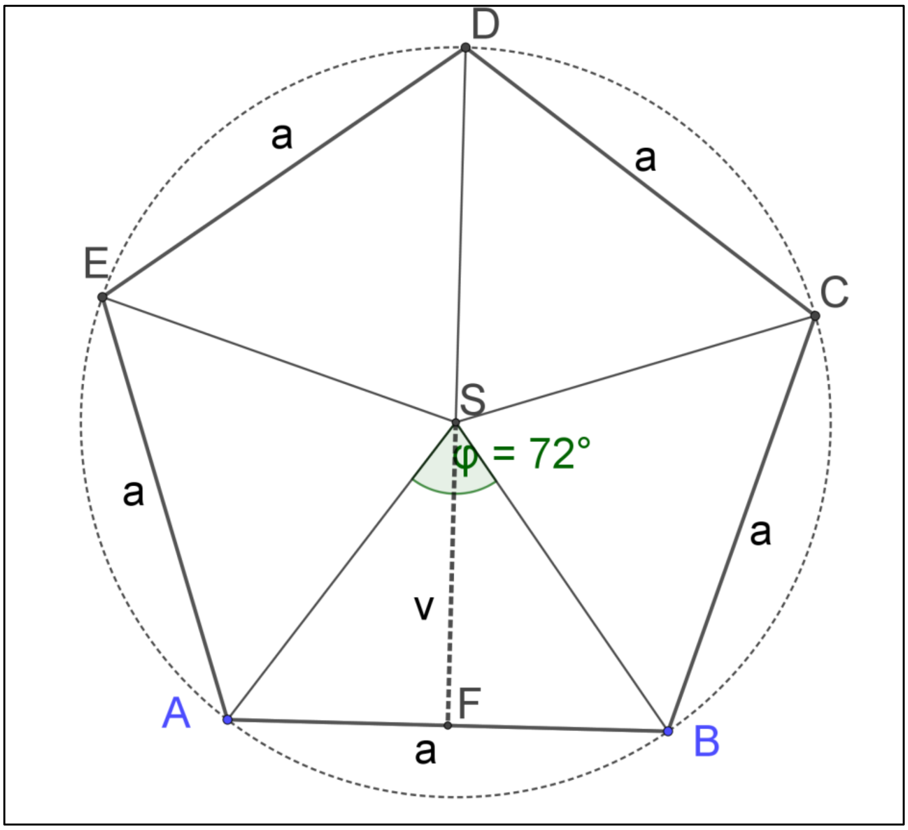
Tetivni petkotnik je petkotnik, ki je včrtan v krožnico. Njegove stranice so tetive očrtane krožnice (primer je na *sliki 3*).



Slika 3:Tetivni petkotnik

4.1. Ploščina pravilnega petkotnika

Pri izpeljavi formule za ploščino tetivnega petkotnika bomo potrebovali tudi formulo za ploščino pravilnega petkotnika. Pravilni petkotnik ima vse stranice enako dolge in je sestavljen iz petih enakokrakih trikotnikov. Seveda je tudi tetivni, saj mu lahko očrtamo krožnico (glej *sliko 4*).



Slika 4: K izpeljavi ploščine pravilnega petkotnika

Pravilni petkotnik je sestavljen iz petih enakokrakih trikotnikov. Ploščina vsakega izmed njih je enaka $\frac{a \cdot v}{2}$, zato je ploščina pravilnega petkotnika, p_{p5}, enaka $p_{p5} = 5 \cdot \frac{a \cdot v}{2}$. Izrazimo še višino v s stranico a. Kot ob vrhu enega enakokrakega trikotnika je enak $\varphi = \frac{360^0}{5} = 72^0$. Zato je kot $< FSB = 36^0$. V pravokotnem trikotniku ΔFBS uporabimo kotno funkcijo tangens:

$$\tan 36^0 = \frac{nasprotna\ kateta}{prile\check{z}na\ kateta} = \frac{\frac{a}{2}}{v} = \frac{a}{2v}$$

Od tu dobimo $v = \frac{a}{2\tan 36^0}$. V tabelah točnih vrednosti kotnih funkcij odčitamo, da je $\tan 36^0 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Tako je $v = \frac{a}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}.}$ in zato je ploščina pravilnega petkotnika, izražena z dolžino stranice a, enaka

$$p_{p5} = \frac{5a^2}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}.} = \dots = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cdot a^2 \qquad (3)$$

Formulo (3) lahko odčitamo tudi iz drugih virov, npr.: https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagon.

4.2. Natančna formula tetivnega petkotnika

V članku z naslovom *Areas of Polygons Inscribed in a Circle* je Robbins opisal natančne postopke za izračun ploščine tetivnih večkotnikov (glej Robbins, 1994). Na straneh 228 - 231 je opisan tudi zapleten postopek za izračun ploščine tetivnega petkotnika. Zaradi zapletenosti postopka nismo razumeli. Očitno pa rezultati kažejo na to, da preprosta natančna formula ne obstaja ali pa je še niso opisali in dokazali. Zato smo se odločili, da poiščemo približno formulo za izračun ploščine tetivnega petkotnika.

4.3. Prva približna formula: Shahbazijina formula

4.3.1. Osnovna ideja – upoštevanje merske enote

Pri izpeljavi prve približne formule za ploščino tetivnega petkotnika smo si pomagali s Heronovo ter Brahmaguptovo formulo. Kot vodilo smo vzeli dejstvo, da je osnovna merska enota za merjenje ploščine dolžinska enota na kvadrat (na primer m^2).

$$p_{He}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{(Heronova formula)}$$

$$p_{Br}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \qquad \text{(Brahmaguptova formula)}$$

Ker obe uporabljeni formuli vključujeta kvadratni koren, smo morali paziti, da so enote po končanem računanju pod korenom dolžinska enota na štiri (na primer m^4). Pri Heronovi formuli smo opazili, da je za izračun ploščine trikotnika ulomek pod korenom pomnožen s polobsegom s, s katerim dopolnjuje primanjkljaj dolžinske enote, ki izhaja iz produkta členov, povezanih s stranicami $(s-a)(s-b)(s-c)$ (drugače bi dobili dolžinsko enoto na tri (na primer m^3)). Pri Brahmaguptovi formuli za izračun ploščine tetivnega štirikotnika tega »popravka« ne potrebujemo, ker je produkt členov povezanih s stranicami že pripeljal tudi pravilno mersko enoto - dolžinsko enoto na štiri (na primer m^4).

Če razširimo zapis Brahmaguptove formule za izračun ploščine tetivnega petkotnika, dobimo naslednjo formulo za izračun ploščine tetivnega petkotnika:

$$p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}$$

Po preverjanju z dobljenimi enotami po izračunu ugotovimo, da dobimo rezultat v dolžinskih enotah na peto (na primer m^5). Iz tega sklepamo, da formula potrebuje dopolnitev: deljenje s primerno količino z dolžinsko enoto.

4.3.2. Iskanje vzorca v Heronovi in Brahmaguptovi formuli.

Ko opazujemo zgradbi Heronove in Brahmaguptove formule, opazimo, da imata obe kvadratni koren in obe podobna izraza: Heronova $(s-a)(s-b)(s-c)$, Brahmaguptova pa $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$. Lahko predvidevamo, da bo formula za ploščino tetivnega petkotnika vsebovala izraz $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)$. V čem se omenjeni formuli razlikujeta? Pri Heronovi formuli je izraz $(s-a)(s-b)(s-c)$ pomnožen z s, pri Brahmaguptovi formuli pa z 1:

Heronova formula: $p_{He}=\sqrt{\boldsymbol{s}(s-a)(s-b)(s-c)}$

Brahmaguptova formula: $p_{Br}=\sqrt{\mathbf{1}(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Tako opazimo vzorec $\boldsymbol{s}, \mathbf{1}$, ki ga lahko vzamemo kot začetek zaporedja. Drugi člen dobimo iz prvega tako, da prvi člen delimo z $\boldsymbol{s}$. Če tako nadaljujemo, je tretji člen enak $\boldsymbol{\frac{1}{s}}$.

Tako smo dobili možno formulo za izračun ploščine tetivnega petkotnika:

$$p_{Tpet} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}} \tag{4}$$

pri čemer velja, da je s polovica obsega:

$$s = \frac{a+b+c+d+e}{2}$$

Prvi trije členi omenjenega zaporedja so $s, 1, \frac{1}{s}$. Zaporedje, v katerem je količnik sosednjih dveh vedno enak, imenujemo *geometrijsko zaporedje.* Ko ga nadaljujemo, $s, 1, \frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3}$ ..., dobimo ideje možnih formul za ploščine tetivnih večkotnikov.

4.3.3. Primerjava s pomočjo Geogebre

Izpeljano formulo (4) smo vnesli v Geogebro in jo primerjali z vrednostjo ploščine, ki jo izračuna Geogebra. Hitro smo ugotovili, da ta formula ni natančna, ampak le približna. Odstopanje te formule s pravo vrednostjo smo preverili tako, da smo v programu Geogebra izračunali ploščine pri različnih vrednostih dolžin stranic. Rezultati so zbrani v *Tabeli 1*. V zadnjem stolpcu je izračunana relativna napaka v %: $\frac{p_{Tpet}-pGeo}{pGeo} \cdot 100$. S $pGeo$ je označena ploščina tetivnega petkotnika, ki jo samodejno izračuna program Geogebra, s p_{Tpet} pa formula (4).

a	b	c	d	e	s	$pGeo$	p_{Tpet}	$rel.n.\%$
19,97	12,6	12,19	9,42	12,25	33,215	241,7	244,75	**1,26**
2,01	12,6	12,19	9,42	19,2	27,71	183,04	183,91	**0,47**
17,83	2,36	1,93	17,91	14,15	27,09	158,55	158,89	**0,21**
17,83	4,49	5,68	14,36	14,15	28,255	195,57	196,95	**0,71**
18,81	4,97	4,82	19,99	1,25	24,92	106,93	107,15	**0,21**
2,3	4,05	1,19	6,42	5,69	9,825	23,03	23,17	**0,62**
4,39	4,05	0,67	2,81	7	9,46	20,33	20,42	**0,44**
3	3	3	3	3	7.5	15,5	15,7	**1,3**
8	8	8	8	8	20	110,01	111,14	**1,3**
0,99	0,99	O,99	0,99	0,99	2,475	1,7	1,72	**1,3**

Tabela 1: Primerjava ploščine tetivnega petkotnika po izpeljani formuli s pravo vrednostjo

4.3.4. Primerjava v pravilnem petkotniku

Da dobimo tudi teoretično oceno napake, smo izpeljano formulo primerjali pri pravilnem petkotniku. Upoštevamo $a = b = c = d = e$ ter $s = \frac{a+b+c+d+e}{2} = \frac{5a}{2}$ in dobimo:

$$p_{Tpet} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\frac{5a}{2}-a)(\frac{5a}{2}-a)(\frac{5a}{2}-a)(\frac{5a}{2}-a)(\frac{5a}{2}-a)}{\frac{5a}{2}}} = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

Podrobna izpeljava je v *Prilogi 1.*

Za točno vrednost ploščine pravilnega petkotnika smo vzeli formulo, izpeljano v poglavju 4.1., to je: $p_{p5} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cdot a^2$

$$\frac{p_{Tpet} - p_{p5}}{p_{p5}} \cdot 100 \approx 1.2999\% \approx 1.3\%$$

Potem, ko smo izpeljali to približno formulo, smo v literaturi odkrili članek prof. Shahbazijeve, ki je do enakega rezultata prišla leta 2017 (Shahbazi, 2017). Zato smo izpeljano formulo poimenovali *Shabazijina formula:*

$$p_{Shah} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}} \tag{5}$$

$$s = \frac{a+b+c+d+e}{2}$$

4.4. Druga približna formula: Lija–Majina formula

Ploščina tetivnega petkotnika, izračunana po Shahbazijini formuli, se od prave vrednosti ploščine razlikuje in je nekoliko večja. Zanimalo nas je, kako bi njeno formulo izboljšali.

4.4.1. Izpeljava formule

Formulo smo vtipkali v Geogebro in s poskušanjem (preiskovanjem) iskali primeren faktor, s katerim bi formulo pomnožili. Ta faktor mora biti manjši kot 1 in seveda brez enote. Poskušali smo množiti z $\frac{a}{s}$. Kmalu smo ugotovili, da mora biti ta faktor odvisen od vseh stranic, ne le od ene. Ker je v polobsegu s že vsota stranic, smo poskušali s produktom:

$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{s} \cdot \frac{c}{s} \cdot \frac{d}{s} \cdot \frac{e}{s}$. Ni uspelo. Vedeli smo, da mora biti ta faktor manjši kot ena in smo poskušali z $1 - \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{s} \cdot \frac{c}{s} \cdot \frac{d}{s} \cdot \frac{e}{s}$. S tem faktorjem smo (vsaj praktično) dobili boljši (približni) rezultat, kaže pa tudi, da ni prevelikega odstopanja pri različno dolgih stranicah.

Izpeljano formulo smo poimenovali *Lija–Majina formula* in jo označili z:

$$pLiMa = \left(1 - \frac{abcde}{s^5}\right) \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}} \tag{6}$$

$$s = \frac{a+b+c+d+e}{2}$$

4.4.2. Primerjava s pomočjo Geogebre

Podobno kot prej smo natančnost *Lija–Majine formule* preverjali s pomočjo Geogebre (pri enakih dolžinah stranic). Ugotovili smo, da večje napake od $0{,}26\%$ nismo našli (glej *Tabelo 2*). To potrjuje, da smo *Shahbazijino formulo* izboljšali.

a	b	c	d	e	s	$pGeo$	$pLiMa$	$rel.n.\%$
19,97	12,6	12,19	9,42	12,25	33,215	241,7	242,33	**0,26**
2,01	12,6	12,19	9,42	19,2	27,71	183,04	183.28	**0,13**
17,83	2,36	1,93	17,91	14,15	27,09	158,55	158,66	**0,07**
17,83	4,49	5,68	14,36	14,15	28,255	195,57	195.94	**0,19**
18,81	4,97	4,82	19,99	1,25	24,92	106,93	107,02	**0,09**
2,3	4,05	1,19	6,42	5,69	9,825	23,03	23,06	**0,17**
4,39	4,05	0,67	2,81	7	9,46	20,33	20,35	**0,13**
3	3	3	3	3	7.5	15,5	15,54	**0,26**
8	8	8	8	8	20	110,01	110,29	**0,26**
0,99	0,99	O,99	0,99	0,99	2,475	1,7	1,7	**0,26**

Tabela 2: Primerjava ploščine tetivnega petkotnika po Lija–Majini formuli s pravo vrednostjo

4.4.3. Primerjava v pravilnem petkotniku

V *Lija–Majini formuli* upoštevamo $a = b = c = d = e, s = \frac{a+b+c+d+e}{2} = \frac{5a}{2}$ in vstavimo ter izračunamo.

$$pLiMa = \left(1 - \frac{abcde}{s^5}\right)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}} = \cdots = \frac{27837}{12500} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2.$$

Podrobna izpeljava je v *Prilogi 2*.

Izračunamo še relativno napako:

$$\frac{pLiMa - p_{p5}}{p_{p5}} \cdot 100 \approx 0.2626\%.$$

Ocenjujemo, da smo izpeljali formulo, ki je boljša kot Shahbazijina formula.

4.5. Tretja približna formula: Hrastnik–Papajina formula

Zastavimo si še en cilj: izboljšati *Lija–Majino formulo*.

4.5.1. Izpeljava formule s preiskovanjem

Faktor $1-\frac{abcde}{s^5}$, s katerim množimo Shahbazijino formulo, želimo še malo zmanjšati. To pomeni, da moramo ulomek $\frac{abcde}{s^5}$ nekoliko povečati, to je pomnožiti z nekim številom, ki ga označimo z $\frac{m}{n}$. Formulo oblike

$$\left(1-\frac{m}{n}\cdot\frac{abcde}{s^5}\right)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}}$$

vstavimo v Geogebro in preizkušamo z različnimi ulomki (primer je v *Prilogi 3*). Ker želimo imeti preprosto formulo, se odločimo, da naj bosta števec in imenovalec manjša od 20. Pri nekaterih vrednostih dobimo res boljši približek, na primer pri $\frac{5}{4}$ ali $\frac{14}{11}$. Odločimo se za $\frac{5}{4}$ (zaradi enostavnosti in ker na videz ni bistvene razlike). Tako dobimo formulo, ki jo imenujemo *Hrastnik–Papajina formula*:

$$p_{HP}=\left(1-\frac{5abcde}{4s^5}\right)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}} \tag{7}$$

$$s=\frac{a+b+c+d+e}{2}$$

4.5.2. Izpeljava formule s primerjanjem s ploščino pravilnega petkotnika

Predpostavimo, da bomo ulomek $\frac{abcde}{s^5}$ pomnožili z nekim številom, ki ga označimo z x. Velikost števila x bomo ocenili s primerjavo s ploščino pravilnega petkotnika. Vemo, da je ploščina pravilnega petkotnika enaka $p_{p5} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cdot a^2$.

V izboljšano *Lija-Majino formulo* postavimo, da so vse stranice enake a, $s = \frac{5a}{2}$ in dobimo:

$$\left(1 - x \cdot \frac{abcde}{s^5}\right) \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}} =$$

$$= \left(1 - x \cdot \frac{32}{3125}\right) \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

Ta izraz izenačimo s točno formulo pravilnega petkotnika $p_{p5} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cdot a^2$.

Iz enačbe: $\left(1 - x \cdot \frac{32}{3125}\right) \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cdot a^2$ izračunamo x, tako, da najprej okrajšamo z a^2:

$\left(1 - x \cdot \frac{32}{3125}\right) \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$ nato delimo z $\frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$ in dobimo

$$\left(1 - x \cdot \frac{32}{3125}\right) \approx 0.98716745$$

$$x \approx 1.2532$$

Podrobna izpeljava je v *Prilogi 4.*

Ker iščemo preprosto približno formulo, vzamemo približek $x \approx 1.25$, kar je enako $x = \frac{5}{4}$. Če upoštevamo tri decimalke, dobimo $\frac{1253}{1000}$, pri štirih pa $\frac{12532}{10000}$. Ne dobimo bistvenega izboljšanja, zato (in zaradi enostavnosti formule) predlagamo $x = \frac{5}{4}$.

Tako dobimo formulo (7):

$$p_{HP} = \left(1 - \frac{5abcde}{4s^5}\right)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}}$$

4.5.3. Primerjava s pomočjo Geogebre

Tako kot v prejšnjih dveh primerih naredimo primerjavo z vrednostmi ploščin v Geogebri (glej *Tabelo 3*).

a	b	c	d	e	s	$pGeo$	p_{HP}	$rel.n.\%$
19,97	12,6	12,19	9,42	12,25	33,215	241,7	241,72	**0,01**
2,01	12,6	12,19	9,42	19,2	27,71	183,04	183,12	**0,05**
17,83	2,36	1,93	17,91	14,15	27,09	158,55	158,61	**0,04**
17,83	4,49	5,68	14,36	14,15	28,255	195,57	195,69	**0,06**
18,81	4,97	4,82	19,99	1,25	24,92	106,93	106,99	**0,06**
2,3	4,05	1,19	6,42	5,69	9,825	23,03	23,04	**0,06**
4,39	4,05	0,67	2,81	7	9,46	20,33	20,34	**0,05**
3	3	3	3	3	7.5	15,5	15,5	**0**
8	8	8	8	8	20	110,01	110,01	**0**
0,99	0,99	O,99	0,99	0,99	2,475	1,7	1,7	**0**

Tabela 3: Primerjava ploščine tetivnega petkotnika po Hrastnik–Papajini formuli s pravo vrednostjo

4.5.4. Primerjava v pravilnem petkotniku

Upoštevamo $a = b = c = d = e$, $s = \frac{a+b+c+d+e}{2} = \frac{5a}{2}$ in vstavimo ter izračunamo:

$$p_{HP} = \frac{5553}{2500} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2.$$

Podrobna izpeljava je v *Prilogi 5*. Izračunajmo še relativno napako:

$$\frac{pHP - p_{p5}}{p_{p5}} \cdot 100 \approx 0.0033\%.$$

5. Zaključek

Kot cilj raziskovalne naloge smo si postavili, da bomo izpeljali preprosto formulo za ploščino tetivnega petkotnika, ki vsebuje le dolžine stranic. Tega cilja nismo dosegli, pač pa nam je uspelo ugotoviti in utemeljiti formulo, ki izračuna približno vrednost ploščine tetivnega petkotnika. Skozi raziskovalno nalogo smo preko Heronove in Brahmaguptove formule potrdili Shahbazijino formulo, ki nam jo je uspelo še izboljšati. Za merilo natančnosti smo vzeli relativno napako, ki smo jo izračunali s pomočjo Geogebre in s primerjavo s ploščino pri pravilnem petkotniku. Izpeljana formula je

$$p_{HP} = \left(1 - \frac{5abcde}{4s^5}\right)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}},$$

kjer je s enak polovici obsega. Menimo, da je formula dovolj preprosta in dovolj natančna, da bi jo lahko uporabljali tudi v praksi.

Za nadaljnje raziskovanje nam bi bil izziv ugotoviti, ali podobne formule obstajajo za ostale tetivne večkotnike. Konkretno bi lahko na primer iz predpostavke, da je ploščina tetivnega šestkotnika enaka

$$p_6 \approx \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)(s-f)}{s^2}} \tag{8}$$

$$s = \frac{a+b+c+d+e+f}{2}$$

izpeljali formulo, ki bi bila bolj natančna. Podobno bi seveda bilo za vse tetivne večkotnike. (Formula (8) je glede na ugotovitve Shahbazijeve le približna (glej Shahbazi, 2017).)

Seveda pa ostaja odprto vprašanje, ali bi se dalo kako drugače ugotoviti preprosto natančno formulo za ploščino tetivnega petkotnika, izraženo z dolžinami stranic (in tudi za ostale večkotnike).

6. Viri in literatura

Pritisker, B.: *Geometrical Kaleidoscope.* Dover publications, inc. Mineola, New York, 2017.

Robbins, D.P.: *Areas of Polygons Inscribed in a Circle.* Center for Communications Research, Institute for Defense Analyses, Princeton, NJ, 1994. Dostopno na svetovnem spletu na naslovu: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02574377.pdf. Ogledano: 14. 10.2019.

Shahbazi, Z.: *An Extension Of Heron's Formula.* University of Toronto, Toronto, 2017. Dostopno na svetovnem spletu na naslovu: https://www.researchgate.net/publication/316921412_An_Extension_of_Heron's_Formula

Ogledano: 10. 2.2020

Škrlec, M. in drugi: *VEGA 3 i-učbenik za matematiko v 3. letniku gimnazije*. Zavod za šolstvo RS, Ljubljana, 2015. Dostopno na svetovnem spletu na naslovu: https://eucbeniki.sio.si/vega3/index.html Ogledano: 17.10.2019.

7. Priloge

Priloga 1: Izračun ploščine pravilnega petkotnika po Shahbazijini formuli

$$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}{s}} = \qquad a=b=c=d=e$$

$$s=\frac{5a}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\frac{5a}{2}-a\right)\left(\frac{5a}{2}-a\right)\left(\frac{5a}{2}-a\right)\left(\frac{5a}{2}-a\right)\left(\frac{5a}{2}-a\right)}{\frac{5a}{2}}} =$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\frac{5a}{2}-a\right)^5}{\frac{5a}{2}}} =$$

$$=\left(\frac{5a}{2}-a\right)^2\sqrt{\frac{\frac{5a}{2}-a}{\frac{5a}{2}}} =$$

$$=\left(\frac{5a}{2}-\frac{2a}{2}\right)^2\sqrt{\frac{\frac{5a}{2}-\frac{2a}{2}}{\frac{5a}{2}}} =$$

$$=\left(\frac{3a}{2}\right)^2\sqrt{\frac{\frac{3a}{2}}{\frac{5a}{2}}} =$$

$$=\left(\frac{3a}{2}\right)^2\sqrt{\frac{3\cancel{a}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5\cancel{a}}} =$$

$$=\left(\frac{3a}{2}\right)^2\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$pShah = \frac{9}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot a^2$$

Priloga 2: Izračun ploščine pravilnega petkotnika po Lija–Majini formuli

$$pLiMa = \left(1 - \frac{abcde}{s^5}\right) \cdot pShah$$

$$a = b = c = d = e$$

$$s = \frac{5a}{2}$$

$$pLiMa = \left(1 - \frac{a^5}{s^5}\right) \cdot pShah$$

$$pLiMa = \left(1 - \frac{a^5}{\left(\frac{5a}{2}\right)^5}\right) \cdot pShah$$

$$pLiMa = \left(1 - \frac{a^5}{1} \cdot \left(\frac{2}{5a}\right)^5\right) \cdot pShah$$

$$pLiMa = \left(1 - \frac{\cancel{a^5}}{1} \cdot \frac{2^5}{5^5 \cancel{a^5}}\right) \cdot pShah$$

$$pLiMa = \left(1 - \frac{2^5}{5^5}\right) \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

$$pLiMa = \left(\frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{2^5 \cdot 9}{5^5 \cdot 4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cdot a^2$$

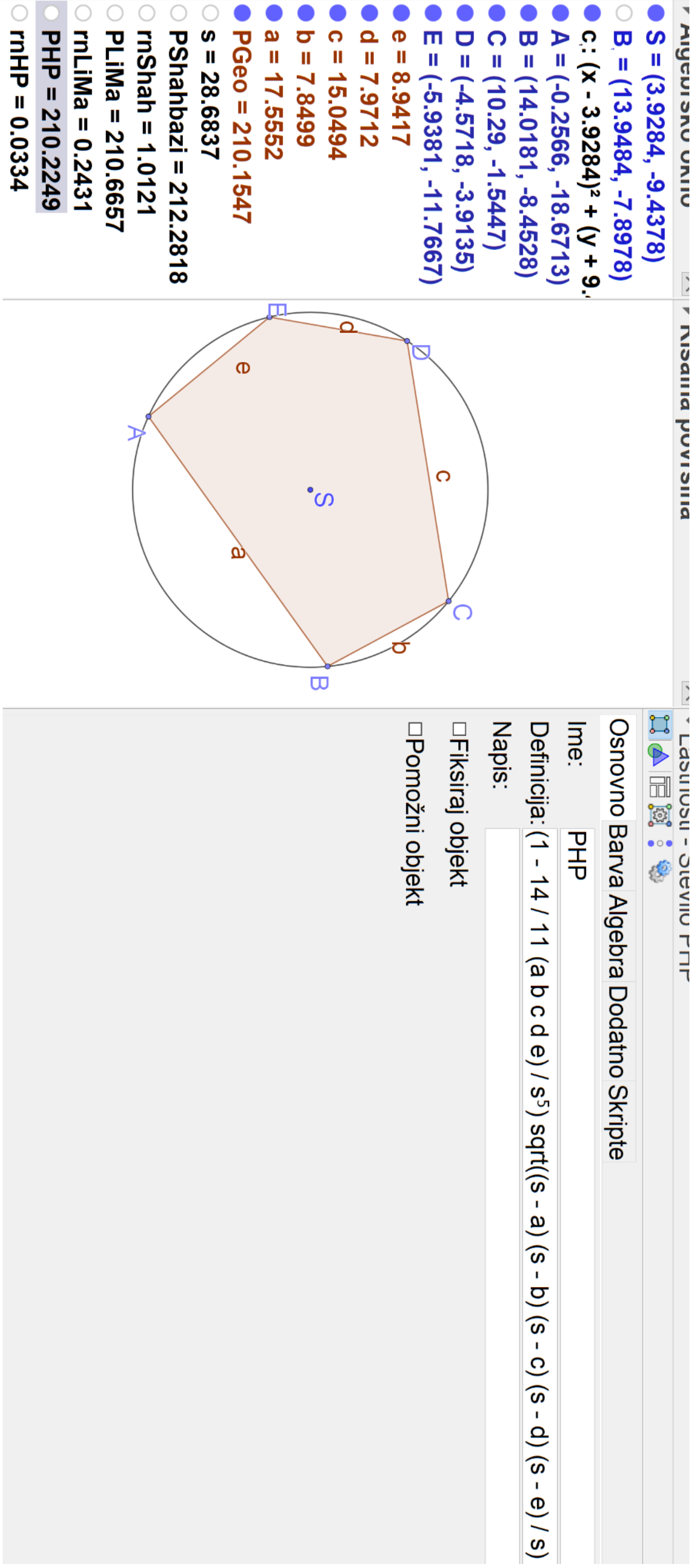
$$pLiMa = \left(\frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{2^3 \cdot 9}{5^5} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cdot a^2$$

$$pLiMa = \left(\frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{8 \cdot 9}{5^5} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cdot a^2$$

$$pLiMa = \left(\frac{28125 - 288}{12500}\right) \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

$$pLiMa = \left(\frac{27837}{12500}\right) \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

Priloga 3: Pogled izračuna (preiskovanja) v programu GeoGebra



Priloga 4: Izpeljava faktorja za izboljšanje Lija–Majine formule

$$\left(1-\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e}{5^5}\cdot x\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{5}(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\cdot a^2$$

$$\left(1-\frac{a^5}{\left(\frac{5a}{2}\right)^5}\cdot x\right)\cdot\frac{9}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot a^2=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\cdot a^2$$

$$\left(1-\frac{a^5}{1}\cdot\left(\frac{2}{5a}\right)^5\cdot x\right)\cdot\frac{9}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\cancel{a^2}=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\cdot\cancel{a^2}$$

$$\left(1-\frac{2^5}{5^5}\cdot x\right)\cdot\frac{9}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$$

$$\left(1-\frac{2^5}{5^5}\cdot x\right)=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot 9}$$

$$\left(1-\frac{2^5}{5^5}\cdot x\right)=\frac{6{,}88190960234}{6{,}9713702316}$$

$$-\frac{2^5}{5^5}\cdot x=0{,}98716745481-1$$

$$x=\frac{-0{,}01283254519}{-\frac{32}{3125}}$$

$$x=-0{,}01283254519\cdot\left(-\frac{3125}{32}\right)$$

$$x\doteq 1{,}2531782412$$

$$x\doteq\frac{5}{4}$$

Priloga 5: Izračun ploščine pravilnega petkotnika po Hrastnik–Papajini formuli

$$pHP = \left(1 - \frac{abcde}{S^5} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot p\ Shah$$

$$pHP = \left(1 - \frac{a^5}{S^5} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot p\ Shah$$

$$pHP = \left(1 - \frac{2^5}{5^5} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

$$pHP = \left(1 - \frac{2^3}{5^4}\right) \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

$$pHP = \left(\frac{9}{4} - \frac{2^3 \cdot 9}{5^4 \cdot 4}\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

$$pHP = \left(\frac{9}{4} - \frac{2 \cdot 9}{5^4}\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

$$pHP = \left(\frac{9}{4} - \frac{18}{5^4}\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

$$pHP = \left(\frac{5625}{2500} - \frac{72}{2500}\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$

$$pHP = \frac{5553}{2500} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a^2$$