54. SREČANJE MLADIH RAZISKOVALCEV SLOVENIJE

VEČKOTNIŠKE ZANKE

Raziskovalno področje: Matematika ali logika

Raziskovalna naloga

Šola: OŠ borcev za severno mejo, Maribor

Avtorici: Ela Habjanič in Nika Ornik

Mentor: Alenka Repnik

Maribor, januar 2020

KAZALO

KAZALO SLIK

KAZALO PREGLEDNIC

POVZETEK

Večkotniška zanka je zaprta veriga skladnih pravilnih večkotnikov, kjer se mora vsak večkotnik dotikati natančno dveh drugih. Večkotnika se morata dotikati po celotni stranici. Zanke so lahko različnih velikosti in oblik. V nalogi smo pokazali, kako sta medsebojno povezana zunanji in notranji obseg zanke glede na število večkotnikov, ki zanko sestavljajo ter da oblika zanke ne vpliva na zunanji in notranji obseg. Pokazali smo, da se obrazca za izračun zunanjega in notranjega obsega zank razlikujeta glede na večkotnike, ki sestavljajo zanko ter kako se razlikujejo.

Ključne besede: večkotnik, zanka, večkotniška zanka, obseg, notranji obseg, zunanji obseg

ABSTRACT

A polygon loop is a closed chain of congruent regular polygons where each polygon must touch exactly two others. The polygons must touch across the entire side. The loops can be different sizes and shapes. In this paper, we have shown how the outer and inner circumference of the loop are connected according to the number of polygons that make up the loop, and that the shape of the loop does not affect the outer and inner circumference. We have shown that the forms for calculating the outer and inner circumference differ according to the polygons that make up the loop and how they differ.

Keywords: polygon, loop, polygon loop, circumference, inner circumference, outer circumference

1 UVOD

1.1 Namen in cilj naloge

Namen in cilj naše raziskovalne naloge je predstaviti rezultate lastnih opazovanj in raziskovanj. Pri večkotniških zankah smo raziskovali, ali obstaja povezava med notranjim in zunanjim obsegom glede na število večkotnikov, ki sestavljajo zanko ter ugotavljali, ali obstaja kakšna povezava med obsegi zank iz različnih skladnih pravilnih večkotnikov. Opazovali smo tudi oblike zank in ugotavljali, ali oblika vpliva na zunanji in notranji obseg zank. Naš namen je pokazati, da lahko za vse štirikotniške (šestkotniške, osemkotniške) zanke izračunamo zunanji in notranji obseg zanke glede na število večkotnikov v zanki.

1.2 Hipoteze

Na podlagi raziskovalnih vprašanj smo postavili naslednje hipoteze.

Hipoteza 1: Zunanji obseg večkotniške zanke je odvisen od vrste večkotnikov, ki sestavljajo zanko, in njihovega števila v zanki.

Hipoteza 2: Razlika med zunanjim in notranjim obsegom je pri vseh večkotniških zankah enaka.

Hipoteza 3: Večkotniških zank ne moremo sestaviti iz poljubnega števila pravilnih večkotnikov.

Hipoteza 4: Oblika zanke (ne zgolj število večkotnikov v zanki) vpliva na njen notranji in zunanji obseg.

2 METODOLOGIJA DELA

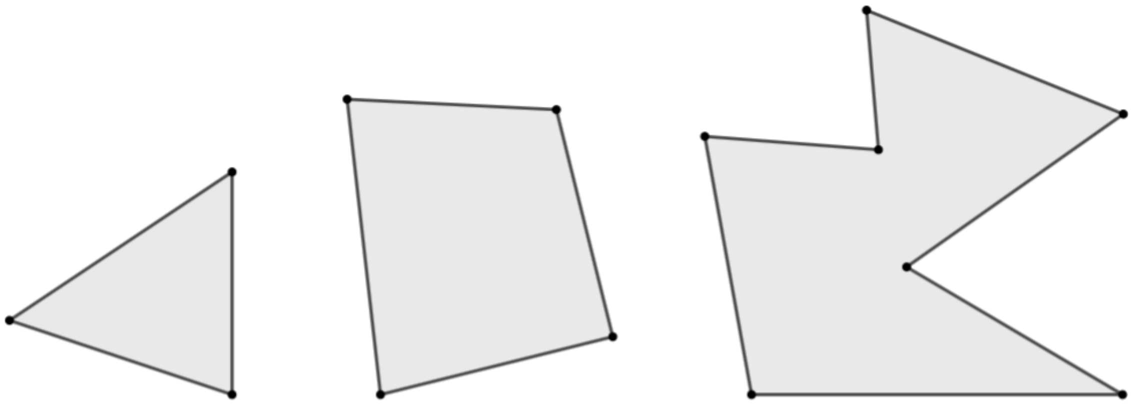
Pri raziskovanju smo uporabili več metod. Predvsem smo se opirali na metodo opazovanja in zbiranja podatkov. Za prikaz rezultatov smo uporabili še metodo grafičnih ponazoritev s pomočjo računalniških skic. V svoje delo smo vključili še metode načrtovanja, računanja in sklepanja.

Kot smo zapisali v ciljih naše naloge, smo raziskovali, ali obstaja povezava med notranjim in zunanjim obsegom večkotniških zank. Raziskovanja smo se lotili sistematično in se najprej lotili raziskovanja štirikotniških zank ter njihovega zunanjega in notranjega obsega. Šele nato smo se lotili tudi šestkotniških zank in kasneje dodali še osemkotniške ter desetkotniške zanke. Razmišljali smo tudi o obliki zank, ki nastanejo iz različnega števila večkotnikov in ali oblika vpliva na zunanji in notranji obseg zanke.

3 VEČKOTNIKI

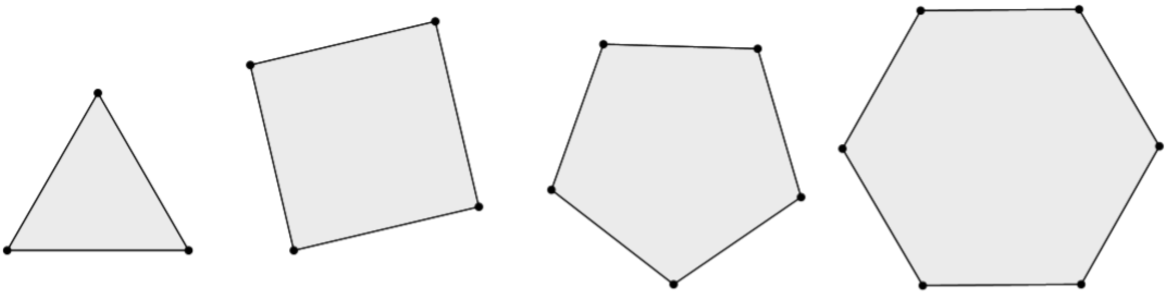
3.1 Kaj so pravilni večkotniki?

Večkotniki so enostavne sklenjene lomljenke, ki tvorijo geometrijske like. Imenujemo jih po številu oglišč (stranic, notranjih kotov, zunanjih kotov).



Slika 1: Večkotniki (vir: avtor)

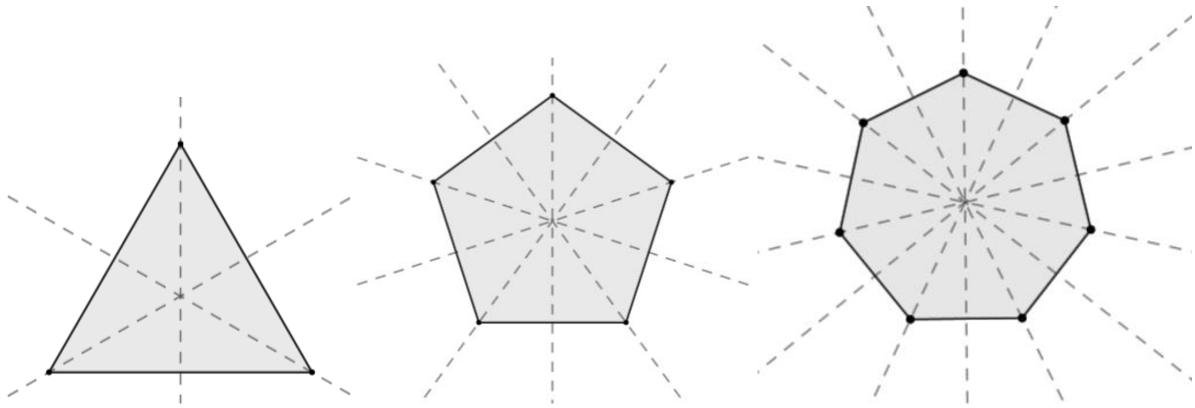
Večkotnik je pravilen, kadar ima vse stranice enako dolge in vse notranje kote skladne.



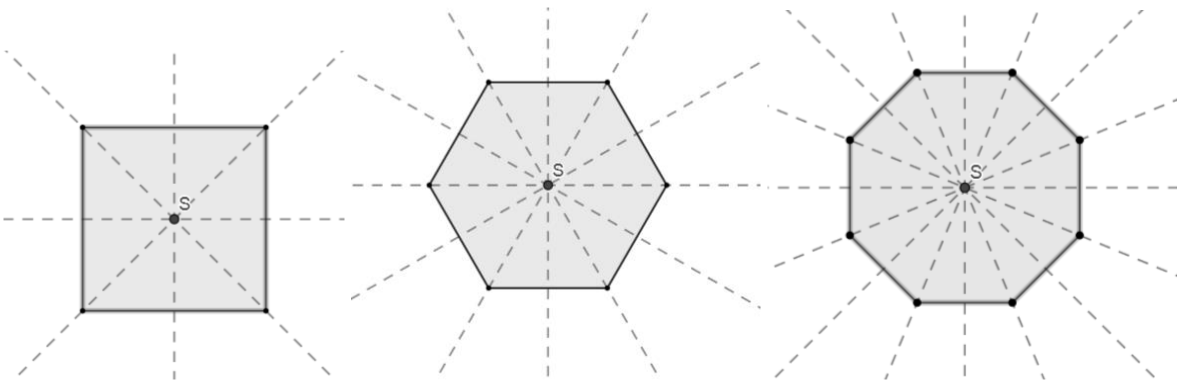
Slika 2: Pravilni večkotniki (vir: avtor)

Pravilni večkotniki imajo torej medsebojno skladne vse stranice in prav tako so medsebojno skladni vsi notranji koti. Vsi pravilni večkotniki so izbočeni (konveksni), torej posamezni notranji kot v poljubnem večkotniku vedno meri manj kot 180°.

Pravilni večkotniki so osno simetrični (somerni), torej obstaja vsaj ena premica, preko katere se pravilni večkotnik preslika sam vase. Še več, pravilni večkotniki imajo natanko toliko simetral kolikor imajo stranic. Pravilni večkotniki s sodim številom stranic so tudi središčno somerni. Obstaja torej točka, čez katero se lik preslika sam vase. Vse simetrale pravilnega večkotnika se sekajo v eni točki, ki jo imenujemo središče (S). Pri pravilnih večkotnikih s sodim številom stranic je ta točka hkrati središče somernosti.



Slika 3: Pravilni večkotniki z lihim številom stranic in njihove somernice (vir: avtor)



Slika 4: Pravilni večkotniki s sodim številom stranic in njihove osi simetrije ter središče somernosti (vir: avtor)

Središče je v pravilnem večkotniku enako oddaljeno od vseh oglišč večkotnika in enako oddaljeno od vseh stranic večkotnika.

Pravilnih večkotnikov je neskončno mnogo. Za vsako naravno število oglišč, ki je večje ali enako 3, obstaja pravilni večkotnik. Dva pravilna n-kotnika sta vedno podobna. Če imata enako dolgo stranico ($a' = a$), sta tudi skladna.

Vsota notranjih kotov večkotnika je: $(n-2)\cdot 180°$.

n – število stranic pravilnega večkotnika

Za poljubni pravilni večkotnik tako velja, da posamezni notranjih kot (α) meri:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Vsota zunanjih kotov večkotnika je vedno 360°. Za poljubni pravilni večkotnik torej velja, da vsak njegov zunanji kot (α_1) meri:

$$\alpha_1 = \frac{360°}{n}$$

Zelo enostaven je tudi razmislek o obsegu pravilnih večkotnikov, s ploščino je nekoliko več težav, a v nadaljnjem raziskovanju smo se osredotočali na obsege in nas ploščina zaenkrat ni toliko zanimala.

Obseg pravilnega večkotnika (a – dolžina stranice pravilnega večkotnika) je $o = n \cdot a$.

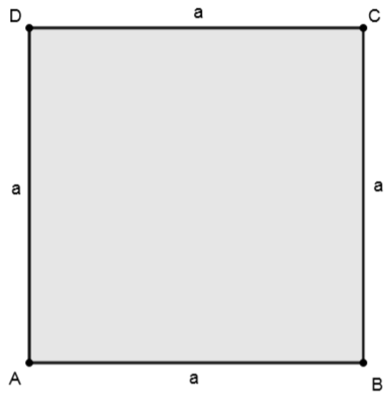
3.2 Pravilni štirikotniki, šestkotniki, osemkotniki in desetkotniki

V nalogi smo za raziskovanje zank iz večkotnikov (več o tem v nadaljevanju) uporabili pravilne štirikotnike, šestkotnike, osemkotnike in desetkotnike, zato le-te tudi nekoliko bolj podrobno predstavljamo.

Se morda sprašujete, zakaj smo izbrali prav večkotnike s sodim številom stranic? Kot smo že zapisali, so le-ti tako osno kot tudi središčno somerni, to pa poenostavi sestavljanje večkotniških zank.

3.2.1 Pravilni štirikotnik

Pravilni štirikotnik je kvadrat. Ima štiri skladne notranje kote in štiri skladne stranice, ki so paroma vzporedne. Vsak notranji kot meri 90°, torej je kvadrat hkrati tudi pravokotnik. Vsak od štirih zunanjih kotov kvadrata prav tako meri 90°. Vsota zunanjih kotov pravilnega štirikotnika je 360°. Prav tako je vsota notranjih kotov pravilnega štirikotnika 360°.



Slika 5: Pravilni štirikotnik – kvadrat (vir: avtor)

Velikost posameznega notranjega in zunanjega kota lahko izračunamo tudi po zgoraj navedenih obrazcih za pravilne večkotnike.

Obseg kvadrata je $o = 4 \cdot a$, za ploščina velja: $p = a^2$.

3.2.2 Pravilni šestkotnik

Pravilni šestkotniki imajo po šest skladnih notranjih kotov (seveda imajo posledično tudi šest skladnih zunanjih kotov) in šest enako dolgih stranic. Posamezni notranji kot pravilnega šestkotnika meri $120°$. To lahko izračunamo s pomočjo obrazca za izračun velikosti notranjih kotov pri pravilnih mnogokotnikih:

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n} =$$

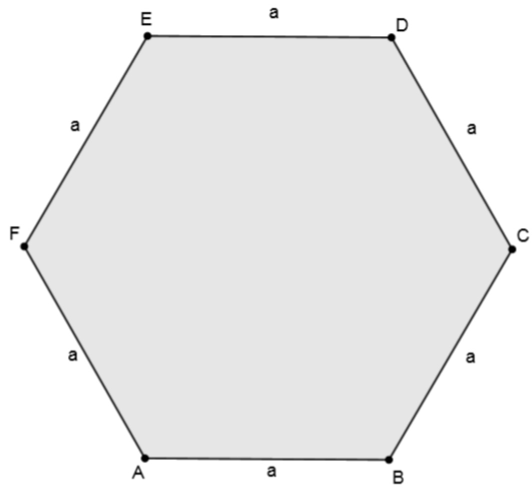
$$\frac{(6-2) \cdot 180°}{6} =$$

$$\frac{4 \cdot 180°}{6} = 120°$$

Vsota zunanjih kotov je (kot pri vseh večkotnikih) $360°$. Iz tega lahko za pravilni šestkotnik izračunamo, da posamezni zunanji kot meri $60°$.

Obseg pravilnega šestkotnika je $o = 6 \cdot a$.

Za ploščino velja: $p = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$.



Slika 6: Pravilni šestkotnik (vir: avtor)

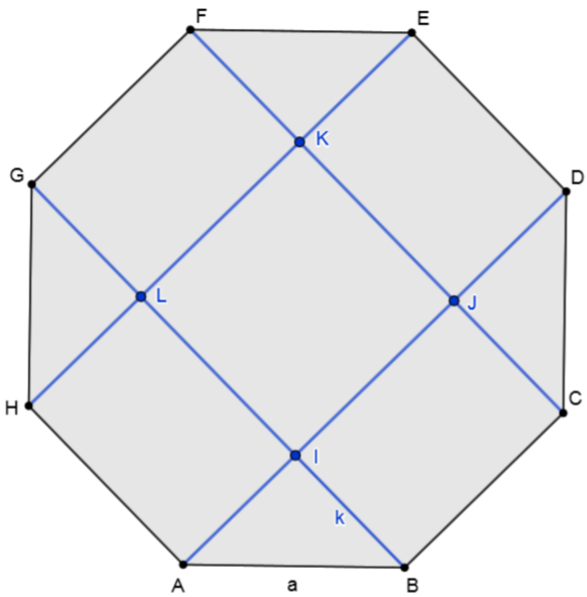
3.2.3 Pravilni osemkotnik

Pravilni osemkotnik ima po osem skladnih notranjih kotov in osem skladnih stranic. Vsak notranji kot pravilnega osemkotnika meri $135°$. Posamezni zunanji kot pa $45°$.

Obseg pravilnega osemkotnika je $o = 8 \cdot a$.

Ploščino pravilnega osemkotnika s stranico a dobimo s pomočjo obrazca $p = 2a^2(1 + \sqrt{2})$. Obrazec smo dobili z nekaj truda, predstavljamo, kako smo do tega prišli:

Imamo pravilni osemkotnik $ABCDEFGH$ s stranico a. Povežimo oglišča tako, da dobimo daljice AD, BG, CF in EH. Presečišča teh daljic so oglišča kvadrata $IJKL$, s stranico a.



Slika 7: Pravilni osemkotnik (vir: avtor)

Enakokraki pravokotni trikotniki ABI, CDJ, EFK in GHL so očitno skladni med seboj. Ker je njihova hipotenuza obenem tudi stranica osemkotnika, lahko izračunamo dolžino katete (k) po Pitagorovem izreku:

$$a^2 = 2k^2$$

$$k^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$k = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Ploščino pravilnega osemkotnika $ABCDEFGH$ tako sestavljajo kvadrat s ploščino a^2 in štirje pravokotniki z dolžino a in širino $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ter štirje pravokotni trikotniki s katetama dolžine $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Zato je ploščina pravilnega osemkotnika enaka:

$$p = a^2 + 4a\frac{a\sqrt{2}}{2} + 4\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}$$

$$p = a^2 + 2a^2\sqrt{2} + 2\frac{a^2 \cdot 2}{4}$$

$$p = a^2 + 2a^2\sqrt{2} + a^2$$

$$p = 2a^2 + 2a^2\sqrt{2}$$

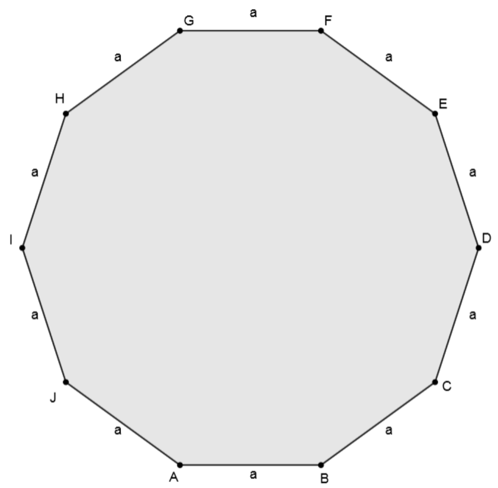
$$p = 2a^2(1 + \sqrt{2}).$$

3.2.4 Pravilni desetkotnik

Pravilni desetkotnik ima po deset skladnih notranjih (in posledično tudi zunanjih) kotov ter deset skladnih stranic. Vsak notranji kot tega lika meri 144°, zunanji pa 36°.

Obseg pravilnega desetkotnika je $o = 10 \cdot a$.

Ploščino pravilnega desetkotnika s stranico a dobimo s pomočjo obrazca za izračun ploščine pravilnega desetkotnika: $p = \frac{5}{2}a^2 \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$. Obrazec smo sicer želeli tudi sami izpeljati, a nam, žal, osnovnošolska matematika pri tem ni zadostovala. Potrebno bi bilo znanje o kotnih funkcijah.



Slika 8: Pravilni desetkotnik (vir: avtor)

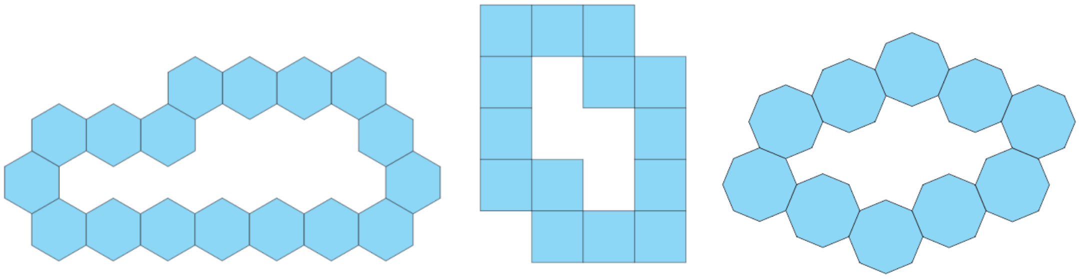
4 VEČKOTNIŠKE ZANKE

Večkotniška zanka je veriga skladnih pravilnih večkotnikov, kjer se vsak večkotnik dotika natanko dveh drugih večkotnikov. Večkotnika se dotikata po celotni dolžini ene stranice.

Število večkotnikov v zanki označimo z m.

m – število večkotnikov v zanki

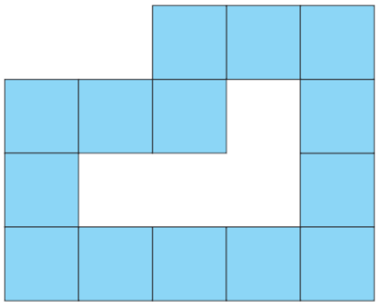
$m \in N$



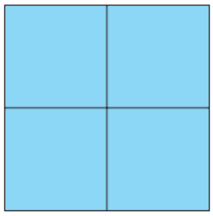
Slika 9: Primeri večkotniških zank (vir: avtor)

4.1 Štirikotniške zanke – zanke iz kvadratov

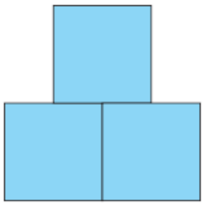
Zanka iz kvadratov je zaprta veriga skladnih kvadratov, kjer se mora vsak kvadrat dotikati natanko dveh drugih kvadratov, in sicer po celotni dolžini stranice.



Slika 10: Štirikotniška zanka (vir: avtor)

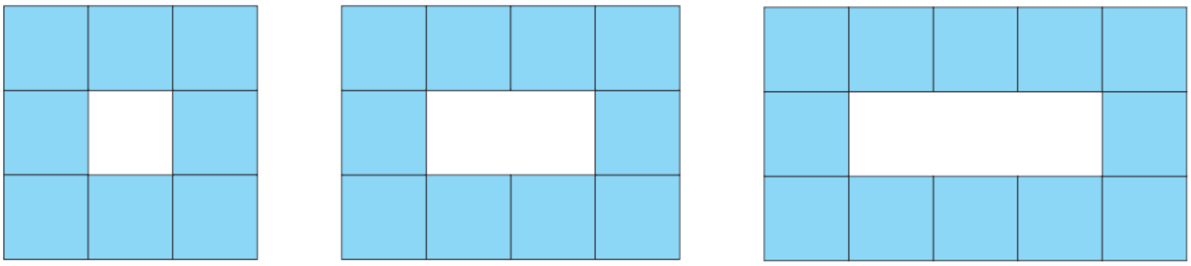


Slika 11: Primer neustrezne štirikotniške zanke, ker se posamezni kvadrati dotikajo več kot dveh drugih kvadratov (vir: avtor)



Slika 12: Še en primer neustrezne štirikotniške zanke, ker se kvadrati ne dotikajo po dolžini celotne stranice (vir: avtor)

»Najmanjšo« štirikotniško zanko lahko sestavimo iz 8 skladnih kvadratov. Če zanko podaljšamo v dolžino, dobimo zanko iz 10 kvadratov. Po več poskusih sestavljanja zanke iz 9 kvadratov ugotovimo, da je takšna zanka nemogoča.



Slika 13: Štirikotniške zanke iz 8, 10 in 12 kvadratov (vir: avtor)

Če tako nadaljujemo z večanjem zanke v dolžino, dobimo štirikotniške zanke s 12, 14, 16 … kvadrati v verigi. Poskušali smo sestaviti tudi zanke drugačnih oblik, a se vedno znova izkaže, da imajo štirikotniške zanke lahko le sodo število likov v zanki.

4.1.1 Razlika med notranjim in zunanjim obsegom štirikotniške zanke

Pri različno oblikovanih štirikotniških zankah smo opazovali zunanji obseg zanke in notranji obseg zanke. Ker zanko sestavlja m kvadratov, je vsota notranjega in zunanjega obsega gotovo $2m$. Vsak kvadrat se dotika dveh drugih kvadratov, torej k notranjemu in zunanjemu obsegu skupno »prispeva« dve stranici. Ker smo število kvadratov v zanki označili z m, velja:

$$o_z + o_n = 2m$$

o_z – zunanji obseg zanke

o_n – notranji obseg zanke

Sprva smo opazovali obsega štirikotniških zank, ki smo jih večali v dolžino (slika 10).

Podatke smo zbrali v preglednici 1 (ob koncu tega poglavja).

Opazili smo, da je razlika med zunanjim in notranjim obsegom zanke vedno enaka 8.

Pri iskanju splošnega obrazca za zunanji obseg smo pri zankah, ki so »rasle« v dolžino, opazili, da kvadrati, ki niso vogalni, vedno prispevajo po eno stranico v zunanji obseg zanke in eno v notranji obseg zanke. Ker se širina zanke ne spreminja, kvadrata ki po širini ležita med vogalnimi kvadrati, vedno enako prispevata k obsegom (po eno stranico k v posameznemu obsegu). Torej razlika v obsegih pri večanju zank nastane le pri kvadratih, ki po dolžini ležijo med vogalnimi kvadrati. Ker pa tudi ti kvadrati prispevajo enako k obema obsegoma (po eno stranico k vsakemu obsegu), lahko razlika med notranjim in zunanjim obsegom nastane zgolj zaradi vogalnih kvadratov. Le-ti pa prispevajo vsak po dve stranici k zunanjemu obsegu, k notranjemu pa nobene. Ker so vogalni kvadrati vedno štirje, je posledično zunanji obseg vedno večji od notranjega za $4 \cdot 2 = 8$.

Zunanji obseg torej sestavlja 8 stranic, ki jih dobimo od vogalnih kvadratov, dve stranici, ki jih prispevata kvadrata, ki ležita po širini med vogalnimi kvadrati, in $(m - 6)$ stranic, ki jih prispevajo kvadrati, ki ležijo med vogalnimi kvadrati po dolžini.

$$o_z = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (m - 6)$$

$$o_z = 10 + m - 6$$

$$o_z = m + 4$$

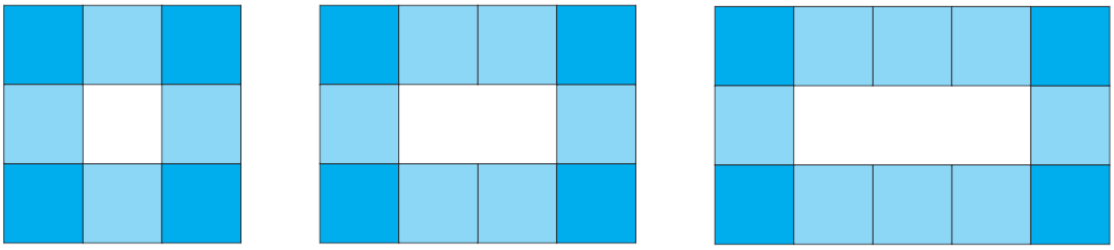
Notranji obseg sestavljata dve stranici, ki jih prispevata kvadrata, ki ležita po širini med vogalnimi kvadrati in $(m-6)$ stranic, ki jih prispevajo kvadrati, ki ležijo med vogalnimi kvadrati po dolžini.

$$o_n = 2 \cdot 1 + (m-6)$$

$$o_n = 2 + m - 6$$

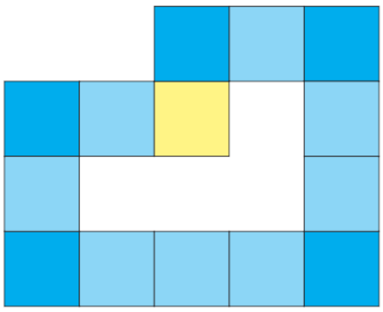
$$o_n = m - 4$$

Oba obrazca samo potrjujeta že prej zapisane ugotovitve, da se zunanji in notranji obseg štirikotniške zanke razlikujeta za 8 in da je vsota obeh obsegov $o_z + o_n = 2m$.



Slika 14: Štirikotniške zanke, ki »rastejo« v dolžino z označenimi vogalnimi kvadrati (vir: avtor)

Seveda nas je zanimalo, ali naše ugotovitve veljajo tudi, kadar zanke niso oblik, kot so zanke na sliki 14. Poglejmo primer nesimetrične zanke iz 14 kvadratov na sliki 15.



Slika 15: Primer nesimetrične štirikotniške zanke iz 14 kvadratov (vir: avtor)

Po dosedanjih ugotovitvah bi moral zunanji obseg meriti $o_z = 14 + 4 = 18$, notranji obseg te zanke pa bi moral biti $o_n = 14 - 4 = 10$. S preprostim preštevanjem lahko to tudi potrdimo.

Smiselno je pogledati zanko na sliki 15 tudi z vidika, koliko posamezni kvadrati »prispevajo« k posameznemu obsegu. Takoj opazimo, da je tokrat 5 vogalnih kvadratov, ki prispevajo po dve stranici k zunanjemu obsegu, vendar pa obstaja en, recimo mu notranji vogalni kvadrat, ki k zunanjemu obsegu ne prispeva nobene stranice. To pa je pravzaprav enakovredno situaciji, ko imamo 4 vogalne kvadrate, ki prispevajo po dve stranici k zunanjemu obsegu in dva kvadrata, ki prispevata vsak po eno stranico k vsakemu od obeh obsegov. Vsi ostali kvadrati, ki niso vogalni, prispevajo po eno stranico k vsakemu od obsegov.

Za zunanji obseg velja torej:

$$o_z = 4 \cdot 2 + (m - 4)$$

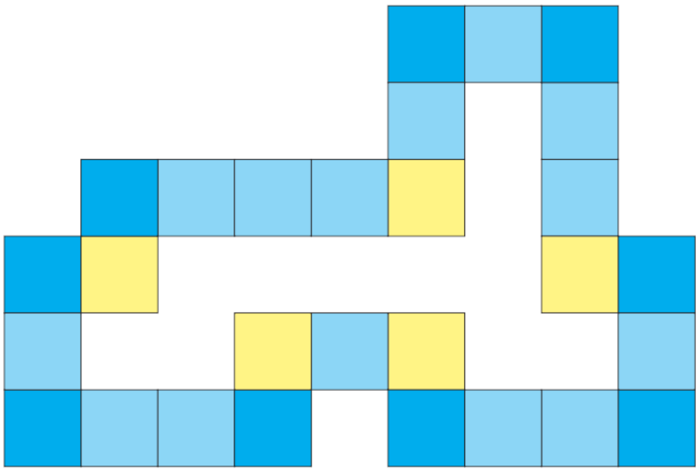
$$o_z = 8 + m - 4$$

$$o_z = m + 4$$

Za notranji obseg pa:

$$o_n = m - 4$$

Gotovo vas zanima, kaj pa v primeru še bolj kompliciranih, večjih zank. Vabimo vas k ogledu slike 16 in verjamemo, da boste tudi sami opazili, da naše splošne ugotovitve še vedno držijo.



Slika 16: Večja nesimetrična štirikotniška zanka (vir: avtor)

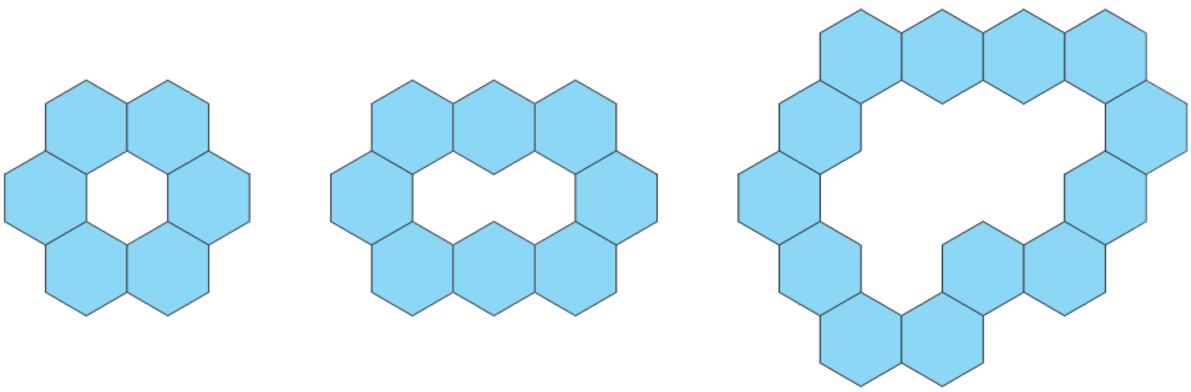
Preglednica 1: Štirikotniške zanke in njihov zunanji in notranji obseg glede na število štirikotnikov v zanki

Število kvadratov v zanki m	Zunanji obseg o_z	Notranji obseg o_n
8	12	4
10	14	6
12	16	8
14	18	10
16	20	12
18	22	14
...		
m	$m+4$	$m-4$

4.2 Šestkotniške zanke

Potem ko smo prišli do razmeroma lepih rezultatov pri štirikotniških zankah, smo se lotili šestkotniških zank.

Šestkotniška zanka je zaprta veriga pravilnih in skladnih šestkotnikov, kjer se mora vsak šestkotnik dotikati natanko dveh drugih. Vsaka sosednja šestkotnika se dotikata po celotni dolžini ene stranice.



Slika 17: Šestkotniške zanke (vir: avtor)

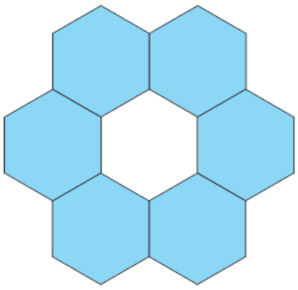
Ker se vsak šestkotnik z dvema stranicama dotika sosednjih šestkotnikov, je jasno, da so preostale 4 stranice del notranjega ali zunanjega obsega.

Velja torej, da je:

$$o_z + o_n = 4m$$

Vsota notranjega in zunanjega obsega šestkotniške zanke je torej enaka štirikratniku števila šestkotnikov, ki zanko sestavljajo ne glede na obliko zanke.

Že na začetku raziskovanja smo opazili, da je najmanjša možna šeskotniška zanka sestavljena iz šestih skladnih pravilnih šestkotnikov. Ugotovili smo, da je nemogoče sestaviti zanko iz sedmih šestkotnikov. Vse sledeče zanke bi bilo možno sestaviti, vendar smo svoje raziskovanje omejili, saj je iz npr. 12 pravilnih skladnih šestkotnikov mogoče sestaviti več različnih oblik zank.



Slika 18: Najmanjša možna šestkotniška zanka (vir: avtor)

4.2.1 Razlika med notranjim in zunanjim obsegom šestkotniške zanke

Kot pri štirikotniških zankah nas tudi pri šestkotniških zankah zanimala povezava med zunanjim in notranjim obsegom zanke.

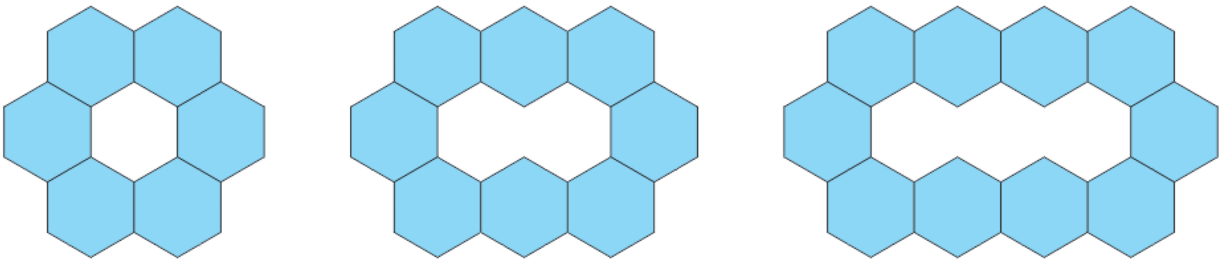
Iskali smo povezavo med številom šestkotnikov v zanki ter njenim zunanjim in notranjim obsegom. Sprva smo se osredotočili na zanke, ki rastejo samo v dolžino.

4.2.1.1 Šestkotniške zanke, ki »rastejo« v dolžino

Za lažje in bolj pregledno raziskovanje smo si zanke razdelili glede na njihovo »rast«, podobno kot smo to naredili pri štirikotniških zankah. Ugotovili smo, da so lahko zanke simetrične ali nesimetrične ter seveda večje ali manjše, glede na število šestkotnikov v zanki.

Zanke, ki »rastejo« v dolžino, so preproste za opazovanje, saj so to simetrične zanke, ki pri rasti v dolžino vedno dobijo dva dodatna šestkotnika. Šestkotniške zanke te oblike lahko sestavimo iz najmanj šestih šestkotnikov, nato pa iz poljubnega sodega števila šestkotnikov.

Šestkotniške zanke te oblike imajo na vsakem svojem koncu po tri šestkotnike, ki prispevajo vsak po tri stranice k zunanjemu obsegu in po eno stranico k notranjemu obsegu – recimo jim vogalni šestkotniki. Med vogalnimi šestkotniki je sodo število šestkotnikov, ki določajo dolžino zanke in k zunanjemu obsegu zanke dodajo po dve stranici in prav toliko tudi k notranjemu obsegu zanke.



Slika 19: Šestkotniške zanke, ki rastejo v dolžino (vir: avtor)

Sprva smo sestavljali manjše zanke in preštevali stranice zunanjega in notranjega obsega, nato pa na podlagi zgornje razlage izpeljali tudi obrazec za izračun zunanjega in notranjega obsega šestkotniške zanke.

Za zunanji obseg tako velja:

$$o_z = 6 \cdot 3 + 2 \cdot (m - 6)$$

$$o_z = 18 + 2m - 12$$

$$o_z = 2m + 6$$

$$o_z = 2(m + 3)$$

Za notranji obseg pa:

$$o_n = 6 \cdot 1 + 2 \cdot (m - 6)$$

$$o_n = 6 + 2m - 12$$

$$o_n = 2m - 6$$

$$o_n = 2(m - 3)$$

Vse podatke smo zbrali v preglednici 2, ki je predstavljena na koncu tega poglavja.

Opazili smo, da se zunanji in notranji obseg šestkotniških zank vedno razlikujeta za 12.

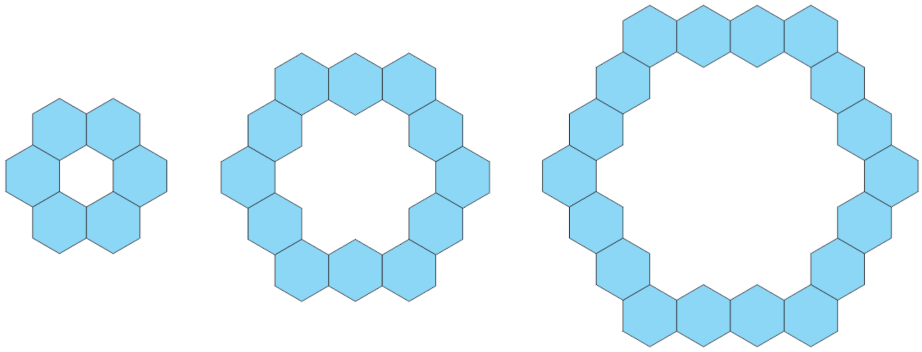
Preglednica 2: Šestkotniške zanke, ki rastejo v dolžino, ter njihov zunanji in notranji obseg glede na število šestkotnikov v zanki

Število šestkotnikov v zanki m	Zunanji obseg o_z	Notranji obseg o_n
6	18	6
8	22	10
10	26	14
12	30	18
14	34	22
...		
100	206	194
...		
m	$2m + 6$	$2m - 6$

Seveda nas je zdaj zanimalo, ali enako velja tudi za šestkotniške zanke drugačnih oblik.

4.2.1.2 Šestkotniške zanke, ki »rastejo« iz sredine – rožice

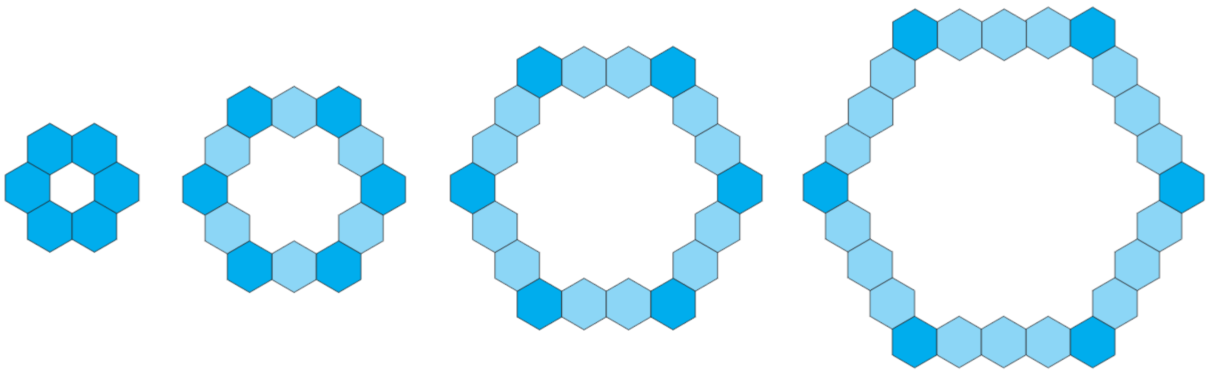
Poglejmo, kako je z zankami, ki rastejo iz sredine, lahko bi rekli tudi v obliki rožice. Tudi to so simetrične zanke.



Slika 20: Šestkotniške zanke, ki »rastejo« iz sredine (vir: avtor)

Izhajajmo iz najmanjše šestkotniške zanke iz šestih šestkotnikov, naslednjo večjo zanko sestavlja 12 šestkotnikov, še naslednjo pa že 18 šestkotnikov. Vsaka naslednja šestkotniška zanka te oblike ima 6 šestkotnikov več od svoje predhodnice. Če povemo še drugače, rožice lahko sestavlja le število šestkotnikov, ki je večkratnik števila 6.

Na sliki spodaj, smo temneje pobarvali tako imenovane vogalne šestkotnike, ki k zunanjemu obsegu prispevajo po tri stranice, k notranjemu obsegu pa po eno stranico. Opazimo lahko, da se število teh vogalnih šestkotnikov ne spreminja, ne glede na velikost rožice.



Slika 21: Šestkotniške zanke – rožice, z označenimi vogalnimi šestkotniki (vir: avtor)

Torej lahko ugotovimo, da še vedno velja, da zunanji obseg izračunamo:

$$o_z = 6 \cdot 3 + 2 \cdot (m - 6)$$

$$o_z = 18 + 2m - 12$$

$$o_z = 2m + 6$$

$$o_z = 2(m + 3)$$

In notranji obseg:

$$o_n = 6 \cdot 1 + 2 \cdot (m - 6)$$

$$o_n = 6 + 2m - 12$$

$$o_n = 2m - 6$$

$$o_n = 2(m - 3)$$

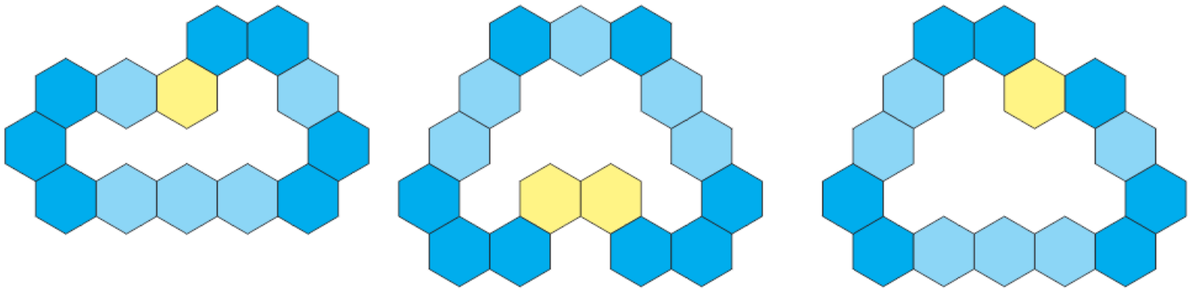
Torej razlike med šestkotniškimi zankami, ki rastejo v dolžino in tistimi, ki rastejo v obliki rožice, ni.

Preglednica 3: Šestkotniške zanke, ki rastejo v obliki rožice, ter njihov zunanji in notranji obseg glede na število šestkotnikov v zanki

Število šestkotnikov v zanki m	Zunanji obseg o_z	Notranji obseg o_n
6	18	6
12	30	18
18	42	30
24	54	42
...		
96	198	186
...		
m	$2m + 6$	$2m - 6$

4.2.1.3 Šestkotniške zanke različnih oblik

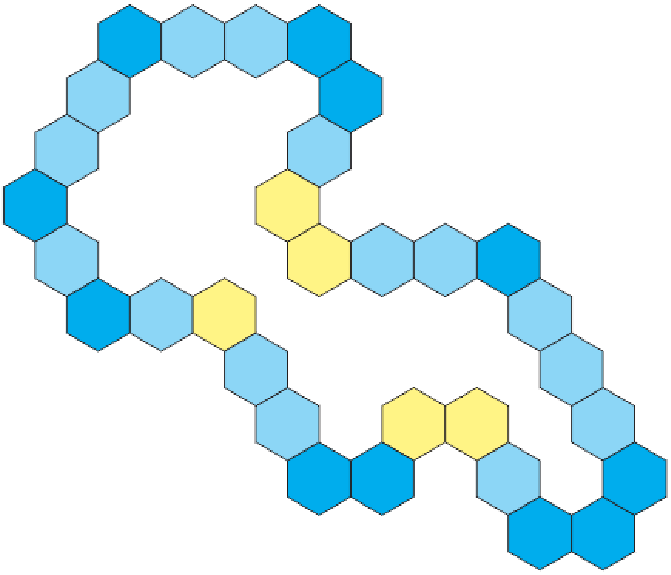
Poglejmo si še nekaj drugačnih šestkotniških zank.



Slika 22: Šestkotniške zanke različnih oblik (vir: avtor)

S sistematičnim sestavljanjem in opazovanjem različnih šestkotniških zank ugotovimo, da se število vogalnih šestkotnikov sicer lahko spreminja, vendar pa se večje število vogalnih šestkotnikov izniči s šestkotniki, ki smo jih že imenovali »notranji vogalni« liki. Na sliki 19 smo jih obarvali svetleje, medtem ko so vogalni pobarvani temneje. Temneje obarvani šestkotniki prispevajo k zunanjemu obsegu po tri stranice, medtem ko svetlejši le po eno in ravno obratno za notranji obseg. Opazimo, da se število vogalnih šestkotnikov poveča ravno za število notranje vogalnih šestkotnikov. Zato ostaja obrazec za zunanji obseg še vedno enak, in sicer je $o_z = 2(m+3)$. Posledično tudi za notranji obseg ostaja $o_n = 2(m-3)$. Razlika med obsegoma je torej za šestkotniške zanke vedno 12, ne glede na njihovo obliko in število šestkotnikov v zanki.

Kot že omenjeno pa je mogoče šestkotniške zanke sestaviti iz poljubnega naravnega števila skladnih pravilnih večkotnikov, le da mora biti to število večje ali enako 6, z izjemo 7 šestkotnikov. Iz 7 šestkotnikov ni mogoče sestaviti šestkotniške zanke.



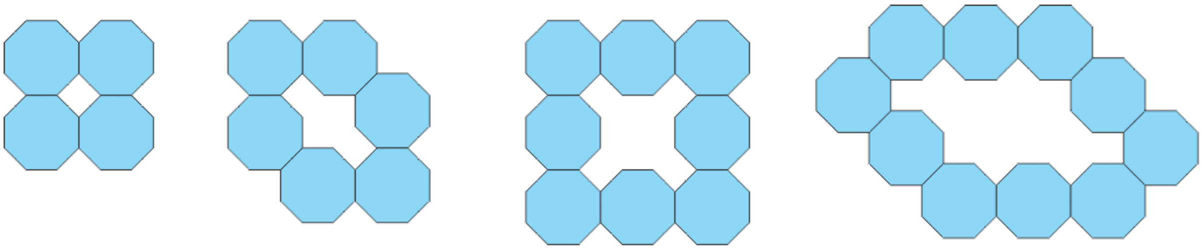
Slika 23: Šestkotniške zanke so lahko zelo velike in razgibane (vir: avtor)

Preglednica 4: Šestkotniške zanke ter njihov zunanji in notranji obseg glede na število šestkotnikov v zanki

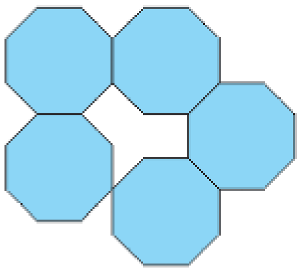
Število šestkotnikov v zanki m	Zunanji obseg o_z	Notranji obseg o_n
6	18	6
8	22	10
9	24	12
10	26	14
11	28	16
…		
24	54	42
…		
100	206	194
…		
m	$2m+6$	$2m-6$

4.3 Osemkotniške zanke

Zanka iz osemkotnikov je prav tako zaprta veriga skladnih pravilnih osemkotnikov, kjer se sme vsak lik v zanki dotikati le dveh drugih. Lika se morata dotikati po celotni stranici.

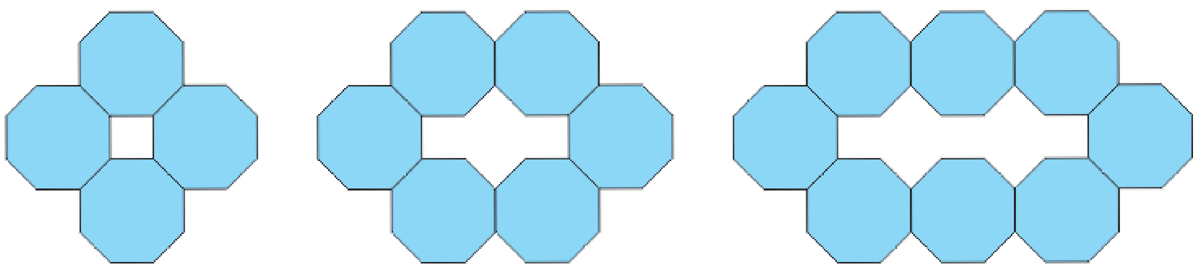


Slika 24: Osemkotniške zanke (vir: avtor)



Slika 25: Neustrezna osemkotniška zanka (vir: avtor)

Osemkotniške zanke so še bolj kompleksne kot šestkotniške, vendar imamo zdaj že nekaj izkušenj. Poglejmo, kako se spreminjata obsega osemkotniških zank, ki rastejo v dolžino.



Slika 26: Osemkotniške zanke, ki »rastejo« v dolžino (vir: avtor)

Osemkotniške zanke, ki rastejo v dolžino, sestavlja vedno sodo število osemkotnikov, najmanjšo možno zanko sestavljajo le štirje osemkotniki.

Tudi tu lahko razdelimo osemkotnike v zanki na »vogalne«, ki k zunanjemu obsegu zanke prispevajo po štiri stranice ter k notranjemu obsegu dve stranici. Poleg vogalnih so tu še takšni, ki k zunanjemu obsegu prispevajo pet stranic in k notranjemu le eno (imenovali jih bomo krajni osemkotniki) in nazadnje še tiste, ki prispevajo tako k zunanjemu kot notranjemu obsegu po tri stranice.

Vsaka zanka, ki raste le v dolžino, ima po dva krajna osemkotnika. Za vogalne osemkotnike se izkaže, da je njihovo število enotno pri vseh zankah, ki rastejo v dolžino, razen najmanjše možne zanke. Slednjo sestavljajo le štirje osemkotniki. Za vse večje zanke pa velja, da imajo poleg dveh krajnih še štiri vogalne osemkotnike. Osemkotnikov, ki prispevajo enako k zunanjemu in notranjemu obsegu zanke, je v osemkotniških zankah $m-6$, za $m>6$.

S sestavljanjem, opazovanjem in štetjem hitro ugotovimo, da se obsega razlikujeta za 16, kar smo nekako pričakovali. Že pri štirikotniških zankah se obsega razlikujeta za dvakratnik števila stranic večkotnika (8), enako je pri šestkotniških zankah (12).

Glede na prejšnje ugotovitve pričakujemo tudi, da je zunanji obseg osemkotniške zanke $o_z = 3m + 8$.

Razmislimo: vsota zunanjega in notranjega obsega osemkotniške zanke je $o_z + o_n = 6m$, saj se vsak osemkotnik dotika dveh drugih, njegovih preostalih 6 stranic pa pripade enemu od obeh obsegov.

Za zunanji obseg nasploh velja:

$$o_z = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot (m-6)$$

$$o_z = 26 + 3m - 18$$

$$o_z = 3m + 8$$

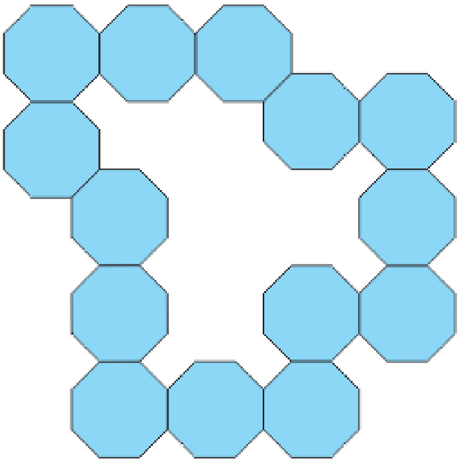
Iz vsote obeh obsegov in zadnje ugotovitve dobimo notranji obseg:

$$o_n = 6m - o_z$$

$$o_n = 6m - (3m + 8)$$

$$o_n = 3m - 8$$

Oba splošna obrazca veljata tudi za najmanjšo možno osemkotniško zanko.



Slika 27: Osemkotniška zanka, nesimetrična (vir: avtor)

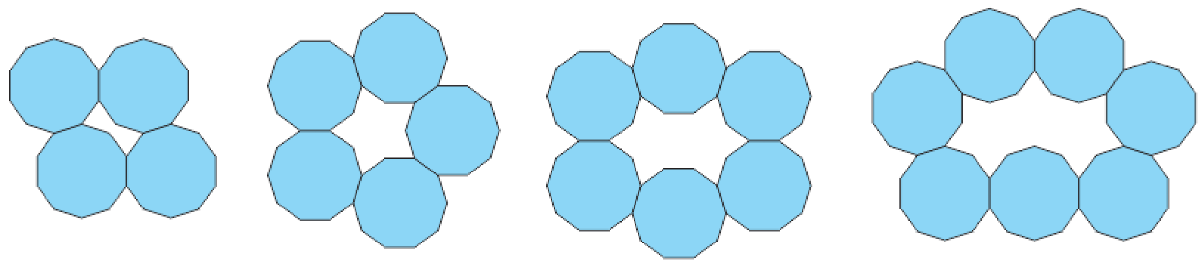
Na sliki zgoraj je osemkotniška zanka, ki jo sestavlja 14 osemkotnikov. S preprostim preštevanjem hitro ugotovimo, da naša splošna obrazca za zunanji in notranji obseg veljata tudi zanjo. Res pa je, da je tukaj delitev osemkotnikov na tiste, ki k posameznemu obsegu prispevajo določeno število stranic nekoliko bolj komplicirana.

Preglednica 5: Osemkotniške zanke ter njihov zunanji in notranji obseg glede na število osemkotnikov v zanki

Število osemkotnikov v zanki m	Zunanji obseg o_z	Notranji obseg o_n
4	20	4
6	26	10
8	32	16
10	38	22
12	44	28
…		
100	308	292
…		
m	$3m+8$	$3m-8$

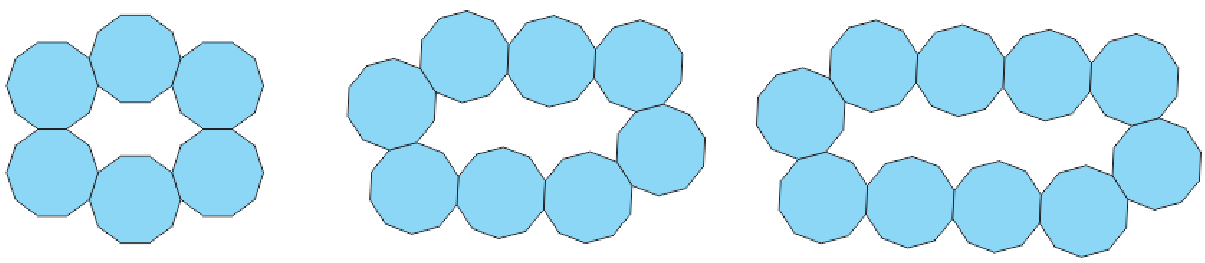
4.4 Desetkotniške zanke

Zdaj že gotovo veste, kaj so desetkotniške zanke. To so zanke iz zaprte verige večkotnikov, ki jo sestavljajo pravilni desetkotniki. Najmanjša možna zanka je sestavljena iz štirih desetkotnikov. Za razliko od prejšnjih večkotniških zank je ta edina, ki jo lahko sestavlja poljubno število likov, vendar mora biti le-to večje ali enako štiri. Ker se desetkotniki v zanki dotikajo sosednjih likov z dvema stranicama, preostalih osem stranic pripade notranjemu ali zunanjemu obsegu. Vsota notranjega in zunanjega obsega je tako enaka $o_n + o_z = 8m$. Razlika med notranjim in zunanjim obsegom je v tem primeru vedno 20, ne glede na število desetkotnikov v zanki ali njeno obliko.



Slika 28: Desetkotniške zanke (vir: avtor)

Podatke zbrane z opazovanjem in preštevanjem stranic zunanjega in notranjega obsega smo zbrali v preglednici 6, ob koncu poglavja.



Slika 29: Desetkotniške zanke, ki rastejo v dolžino (vir: avtor)

Poglejmo nekaj desetkotniških zank, ki rastejo v dolžino, na sliki 29. Vidimo, da lahko desetkotnike razdelimo v tri skupine:

- tiste, ki k notranjemu obsegu prispevajo 2 stranici, k zunanjemu pa 6;
- tiste, ki k notranjemu obsegu prispevajo 3 stranice, k zunanjemu pa 5;
- tiste, ki k notranjemu obsegu prispevajo 4 stranice in k zunanjemu 4.

Desetkotniki iz prve skupine so štirje v vsaki v dolžino rastoči zanki, po dva desetkotnika sta iz druge skupine, vsi ostali pa iz tretje skupine (njihovo število je odvisno od števila desetkotnikov v zanki).

Za zunanji obseg torej velja:

$$o_z = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot (m-6)$$

$$o_z = 24 + 10 + 4m - 24$$

$$o_z = 4m + 10$$

Za notranji obseg lahko podobno dobimo:

$$o_n = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (m-6)$$

$$o_n = 8 + 6 + 4n - 24$$

$$o_n = 4m - 10$$

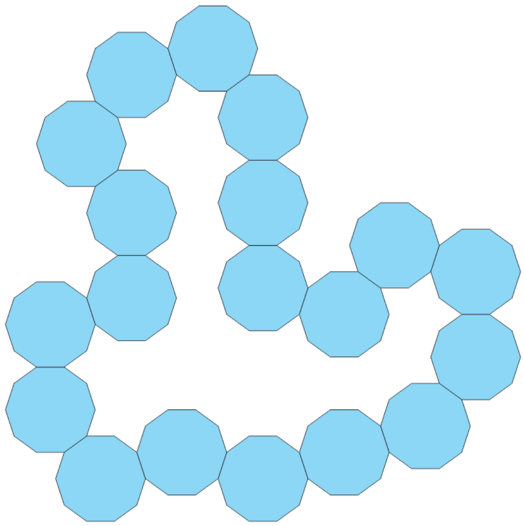
Z izračunom razlike obeh obsegov dobimo:

$$o_z - o_n = 4m + 10 - (4m - 10)$$

$$o_z - o_n = 4m + 10 - 4m + 10$$

$$o_z - o_n = 20$$

Preizkusite, ali naše trditve veljajo tudi na večjih, nesimetričnih zankah, kot je ta na spodnji sliki.



Slika 30: Desetkotniška zanka iz 19 desetkotnikov (vir: avtor)

Preglednica 6: Desetkotniške zanke ter njihov zunanji in notranji obseg glede na število desetkotnikov v zanki

Število desetkotnikov v zanki m	Zunanji obseg o_z	Notranji obseg o_n
4	26	6
5	30	10
6	34	14
7	38	18
8	42	22
9	46	26
10	50	30
...		
m	$4m + 10$	$4m - 10$

4.5 Posplošitve

Pri formulah za računanje notranjih obsegov za različne zanke smo opazili vzorec.

Preglednica 7: Zbrani obrazci za zunanji in notranji obseg obravnavanih večkotniških znak (m je število večkotnikov v zanki)

n-kotnik	Zunanji obseg o_z	Notranji obseg o_n
4	$m+4$	$m-4$
6	$2m+6$	$2m-6$
8	$3m+8$	$3m-8$
10	$4m+10$	$4m-10$

Z metodo induktivnega sklepanja smo prišli do splošnih obrazcev za zunanji in notranji obseg večkotniške zanke. Za večkotniško zanko, ki jo sestavlja m n-kotnikov velja, da je zunanji obseg $o_z = \frac{(n-2)}{2}m + n$ in notranji obseg $o_n = \frac{(n-2)}{2}m - n$.

Tako lahko izpeljemo obrazce za zunanji in notranji obseg pri zankah, ki jim nismo posvečali veliko pozornosti (petkotniške, sedemkotniške, devetkotniške zanke in zanke, ki so sestavljene drugih pravilnih večkotnikov).

Po naših ugotovitvah je torej zunanji obseg pri petkotniških zankah enak $o_z = \frac{3}{2}m + 5$, notranji pa $o_n = \frac{3}{2}m - 5$. Za sedemkotniške zanke velja $o_z = \frac{5}{2}m + 7$ in $o_n = \frac{5}{2}m - 7$.

Iz splošnega obrazca tako dobimo obrazce za računanje zunanjega in notranjega obsega v zankah, ki so sestavljene iz poljubnih pravilnih likov. Število pravilnih likov v zankah pa, kot smo ugotavljali že v nalogi, ni poljubno in je odvisno od n-kotnikov, ki zanke sestavljajo.

Splošni obrazec smo preverili na nekaj posameznih primerih, vabimo pa vse radovedneže in pogumneže, da ovržejo ali potrdijo naše trditve.

5 ZAKLJUČEK

Večkotniške zanke so sestavljene iz skladnih pravilnih večkotnikov (n-kotnikov, n je število stranic večkotnika). Vsak pravilni n-kotnik v zanki se mora dotikati natančno dveh drugih skladnih n-kotnikov. Raziskovali smo zanke sestavljene iz pravilnih večkotnikov, ki imajo sodo število stranic. Raziskovanje smo omejili na zanke, ki jih sestavljajo štirikotniki, šestkotniki, osemkotniki in desetkotniki. Kaj pa sploh so pravilni večkotniki? Pravilni večkotniki oziroma mnogokotniki so liki, ki imajo določeno število skladnih stranic in prav toliko skladnih notranjih (in tudi zunanjih) kotov.

Najprej smo se lotili raziskovanja štirikotniških zank. Ko smo si zanke iz kvadratov bolje ogledali in jih preučili, smo ugotovili, da je najmanjša možna zanka sestavljena iz osmih pravilnih štirikotnikov. Opazili smo, da lahko te verige sestavlja le sodo število kvadratov. Število večkotnikov v zanki smo označili s črko m. Ukvarjali smo se z razliko med notranjim in zunanjim obsegom zanke. Zunanji obseg je vsota števila vseh stranic, ki jih posamezni večkotniki prispevajo k zunanjosti verige, notranji obseg pa je vsota števila stranic, ki so v zankini notranjosti. Očitno je, da ker se posamezni lik z dvema stranicama dotika sosednjega, lahko večkotnik k notranjemu ali zunanjemu obsegu prispeva $n-2$ stranic. Iz tega ugotovimo, da sta zunanji in notranji obseg zanke odvisna od števila stranic večkotnikov, ki sestavljajo zanko, s čimer smo potrdili našo prvo hipotezo. Izkaže se, da je vsota zunanjega in notranjega obsega pri štirikotniških zankah enaka $2m$. Razlika med zunanjim in notranjim obsegom je pri štirikotniških zankah vedno enaka osem. Iz tega smo izpeljali obrazec za izračun posameznega obsega, in sicer zunanji obseg izračunamo po obrazcu $o_z = m + 4$, notranji pa po obrazcu $o_n = m - 4$.

Naslednje zanke, ki smo jih raziskovali, so bile šestkotniške zanke, saj smo se odločili, da se bomo ukvarjali le z zankami, ki jih sestavljajo večkotniki s sodim številom stranic. Najmanjša zanka, ki jo je možno narisati, je sestavljena iz šestih šestkotnikov. Ker se vsak lik z dvema stranicama dotika sosednjih šestkotnikov, je jasno, da so preostale štiri stranice del zunanjega ali notranjega obsega. Velja torej, da je vsota zunanjega in notranjega obsega enaka $4m$. Obravnavali smo več različnih vrst šestkotniških zank in pri vseh ugotovili, da je razlika med zunanjim in notranjim obsegom vedno enaka 12. Iz zbranih ugotovitev dobimo obrazce za računanje posameznega obsega, in sicer velja za zunanji obseg $o_z = 2m + 6$, za notranji obseg pa $o_n = 2m - 6$. Ko smo opazili, da je razlika med zunanjim in notranjim obsegom pri šestkotniški zanki drugačna od tiste pri štirikotniških zankah, smo lahko ovrgli drugo hipotezo, vendar se je izkazalo, da je razlika zunanjega in notranjega obsega pri zankah iz iste vrste večkotnikov konstantna.

Nato smo se lotili osemkotniških zank. Najmanjšo možno osemkotniško zanko sestavljajo le štirje liki. K notranjemu ali zunanjemu obsegu posamezen osemkotnik prispeva po šest stranic, zato lahko sklepamo, da je vsota zunanjega in notranjega obsega v tem primeru enaka $6m$. Razlika med notranjim in zunanjim obsegom je vedno 16. Po krajšem razmisleku smo iz tega izluščili, da lahko zunanji obseg izračunamo po obrazcu $o_z = 3m + 8$, notranjega pa po obrazcu $o_n = 3m - 8$.

Na koncu smo se soočili še z desetkotniškimi zankami. Tudi pri desetkotniških zankah, kot pri osemkotniških zankah, je najmanjša možna zanka sestavljena iz štirih likov. Ugotovimo, da vsak posamezni desetkotnik prispeva 8 (to je $n - 2$) stranic k zunanjemu ali notranjemu obsegu, torej velja $o_z + o_n = 8m$. Razlika števila stranic med obsegoma pa znaša dvajset. Za desetkotniške zanke tako velja, da je zunanji obseg enak $o_z = 4m + 10$, za notranji obseg pa $o_n = 4m - 10$.

Že takoj ob začetku raziskovanja je bilo jasno, da večkotniških zank ne moremo sestaviti iz poljubnega števila pravilnih večkotnikov. To se je izkazalo že pri štirikotniških zankah, ki so lahko sestavljene le iz sodega števila kvadratov, najmanjšo štirikotniško zanko pa sestavlja osem pravilnih štirikotnikov, kar pomeni, da smo lahko kar hitro potrdili našo tretjo hipotezo.

Kasneje smo pri podrobnem opazovanju notranjega in zunanjega obsega posameznih zank ugotovili, da oblika zanke ne vpliva na nobenega izmed obsegov in tako ovrgli še zadnjo predpostavko.

6 VIRI

Regular Hexagon Loops (problem). Na: NRICH [online], University of Cambridge. [datum ogleda: 8. 10. 2019]. Dostopno na: https://nrich.maths.org/11206

Berk J., Draksler J., Robič M.

Skrivnosti števil in oblik 8 (2. izdaja). Ljubljana, Rokus Klett, 2013.

Steward, D.

Regular Hexagon Loops. Objavljeno 23. 5. 2012 [datum ogleda: 8. 10. 2019]. Dostopno na: https://donsteward.blogspot.com/2012/05/hexagon-loops.html