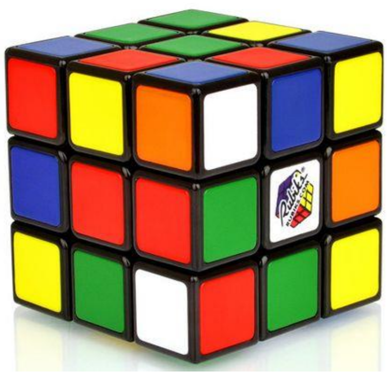
OŠ Brinje Grosuplje
Ljubljanska cesta 40a
1290 Grosuplje

Kombinatorika na Rubikovi kocki

Raziskovalna naloga

Področje: Matematika



Avtor: Žiga Remic, 8. razred
Mentorica: Vesna Jeromen

Grosuplje, marec 2020

KAZALO VSEBINE

KAZALO SLIK

KAZALO GRAFOV

ZAHVALA

Rad bi se zahvalil svoji mentorici, učiteljici Vesni Jeromen, za pomoč, usmeritve in spodbude pri izdelavi raziskovalne naloge ter njeno vztrajnost, potrpežljivost in čas.

Hvala!

POVZETEK

Rubikova kocka je ena izmed najbolj znanih in priljubljenih mehanskih igrač na svetu. Čeprav je na prvi pogled preprosta, skriva veliko ugank. Namen raziskovalne naloge je ugotoviti, kako matematično določiti število vseh možnih postavitev Rubikove kocke.

V raziskovalni nalogi so najprej predstavljene različne vrste Rubikovih kock in njihova zgodovina. Predmet raziskovanja je najbolj znana Rubikova kocka 3 × 3 × 3, ki je tudi podrobneje opisana. Predstavljen je način izračuna možnih postavitev te Rubikove kocke z uporabo kombinatorike v treh različnih primerih. Nato je predstavljena ena izmed univerzalnih formul za izračun možnega števila postavitev Rubikove kocke različnih velikosti. Ta formula je tudi preverjena z uporabo kombinatorike na primerih Rubikovih kock 2 × 2 × 2, 3 × 3 × 3, 4 × 4 × 4 in 5 × 5 × 5.

Ključne besede: Rubikova kocka, kombinatorika, permutacije

1 UVOD

Že pred nekaj časa sem se naučil sestaviti Rubikovo kocko. Od takrat sem se vedno spraševal, zakaj je toliko različnih možnih postavitev kocke in kako bi do tega števila lahko prišel tudi sam. V tej raziskovalni nalogi sem predstavil Rubikovo kocko in raziskoval število možnih postavitev Rubikove kocke v različnih primerih: v običajnem primeru, ko razstavljanje ni dovoljeno, v primeru, ko kocko smemo razstaviti na kockice in v primeru, ko lahko prestavljamo barvne nalepke. Pri tem sem uporabljal kombinatoriko in svoje znanje o sestavljanju kocke.

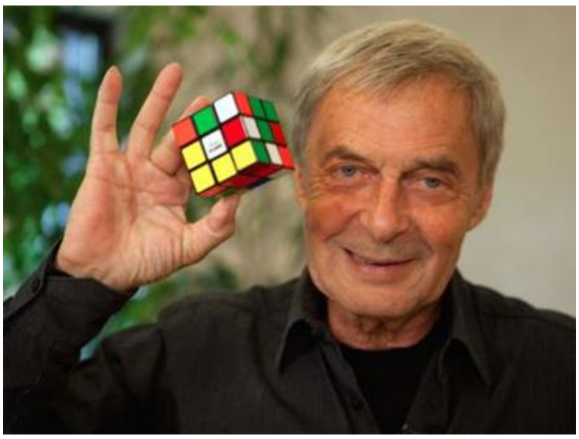
V slovenščini sem na to temo našel le dva vira. Prvi je članek (Lah idr., 2016), ki obravnava število možnih postavitev kocke brez razstavljanja s pomočjo teorije grup, kar močno presega osnovnošolsko matematiko. Pri svojem raziskovanju sem si lahko pomagal z diplomsko nalogo (Kauran, 2016), ki prav tako obravnava postavitve kocke brez razstavljanja, temo pa sem razširil na primere, ko je dovoljeno razstavljanje kocke.

Med samim raziskovanjem pa sem se začel spraševati, ali obstaja splošna formula, s katero lahko izračunamo število možnih postavitev za Rubikove kocke različnih velikosti.

2 TEORETIČNI DEL

2.1 ZGODOVINA RUBIKOVE KOCKE

Rubikova kocka je igrača sestavljanka, ki jo je leta 1974 izumil madžarski kipar in profesor arhitekture Erno Rubik z namenom, da bi njegovi študentje razumeli 3-dimenzionalne probleme.



Slika 1: Erno Rubik.
(Vir: https://frontiersinscience.gatech.edu/)

Sprva poimenovana »Magična kocka« je lahko delala stvari, ki jih svet prej ni videl. Lahko se je obračala in upogibala, a se ni zlomila. Tudi Ernu Rubiku je prvič, ko jo je sestavljal, to vzelo več kot mesec dni. Takrat seveda še ni vedel, kako zelo popularna bo postala njegova »Magična kocka«. Po tem, ko je »Magično kocko« patentiral, se je njena prodaja začela leta 1977. Na Madžarskem je postala popularna v poznih sedemdesetih letih. Ko je Erno Rubik ugotovil njen potencial, jo je predstavil na mnogih sejmih igrač. Leta 1979 jo je opazil specialist za igrače Tom Kremer in dobil vizijo o komercializiranju »Magične kocke«. Leto kasneje je bilo z namenom prodaje kock ustanovljeno podjetje »Ideal Toy Company«. »Magična kocka« je bila pred prodajo preimenovana v Rubikovo kocko. Po tem je Rubikova kocka zaslovela po vsem svetu in kmalu so se začela tekmovanja iz hitrostnega sestavljanja Rubikove kocke. Do danes je bilo prodanih že več kot 350 milijonov Rubikovih kock (Wikipedija, Rubik's cube in Rubik's).

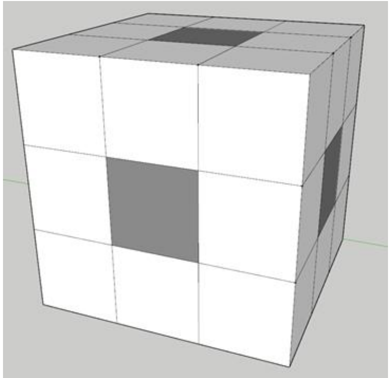
Slika 2: Ena izmed prvih Rubikovih kock.
(Vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik%27s_Cube)

2.2 OPIS RUBIKOVE KOCKE

Originalna Rubikova kocka je kocka velikosti 3 × 3 × 3. To pomeni, da jo v dolžino, širino in višino sestavljajo tri kockice. Skupaj je torej sestavljena iz 26 kockic in jedra, ki drži vse kockice skupaj. Ko je kocka rešena, ima vsaka njena ploskev svojo barvo, torej je na Rubikovi kocki 6 barv. Na vsaki ploskvi je 9 nalepk enake barve, zato je na celotni Rubikovi kocki 54 barvnih nalepk.

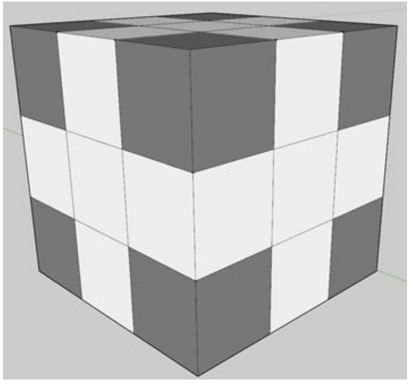
Kockice, ki sestavljajo Rubikovo kocko, imajo svoja imena glede na to, kje v kocki se nahajajo.

Kockice, ki so v središču vsake ploskve, se imenujejo centri Rubikove kocke. Ti imajo samo eno nalepko (vidno ploskev). Skupaj jih je 6.



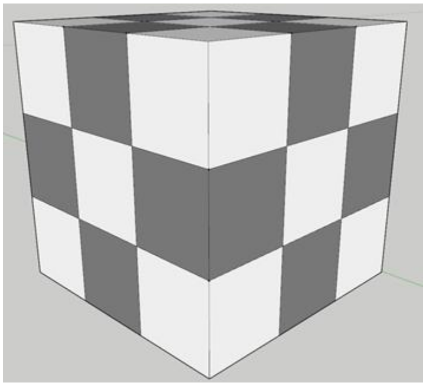
Slika 3: Centri Rubikove kocke

Kockice, ki se nahajajo v kotih Rubikove kocke, se imenujejo koti. Vsak kot ima 3 nalepke (vidne ploskve). Kotov je 8.



Slika 4: Koti Rubikove Kocke

Kockice, ki se nahajajo med dvema sosednjima kotoma, so robovi. Vsak rob ima 2 nalepki (vidni ploskvi). Robov je 12.



Slika 5: Robovi Rubikove kocke

2.3 VRSTE RUBIKOVIH KOCK

Kmalu potem, ko je Rubikova kocka postala slavna, je bilo izumljenih veliko podobnih ugank. Nekaj takšnih primerov so Rubikove kocke drugačnih velikosti in »kocke«, ki so povsem drugačnih oblik.

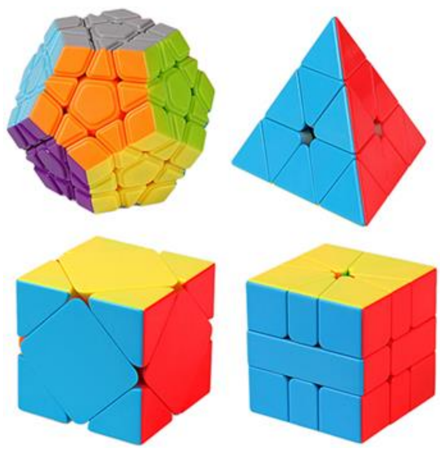
- Različno velike Rubikove kocke:

Originalno Rubikovo kocko v dolžino, širino in višino sestavljajo 3 kockice. Različno velike Rubikove kocke pa so lahko manjše (npr. kocka 2 × 2 × 2) ali pa veliko večje. Največjo Rubikovo kocko v dolžino, širino in višino sestavlja 17 kockic.

Slika 6: Različno velike Rubikove kocke
(Vir: D-FantiX, Moyu Cube Bundle 2x2 3x3 4x4 5x5 Speed Cube Black)

- Rubikove »kocke« različnih oblik:

Poleg Rubikovih kock, ki se od originalne razlikujejo le po velikosti, obstaja še veliko sestavljank, ki so dobile idejo pri originalni kocki, vendar je drugačna tudi njihova oblika. Dve znani taki sta pyraminx in megaminx.



Slika 7: Različne sestavljanke, podobne Rubikovi kocki.
(Vir: https://cubezz.com/)

- Različice Rubikovih kock brez nalepk:

  Danes že skoraj vse vrste kock obstajajo v različici brez nalepk. To pomeni, da na ploskvah nimajo barvnih nalepk, temveč so pobarvane kar ploskve. Take kocke so pogosto malo cenejše, čeprav delujejo povsem enako dobro kot enaki modeli z nalepkami. Jaz imam raje različice z nalepkami, ker lahko nalepke kadarkoli zamenjam, če mi barve niso všeč.

- Tekmovalne različice Rubikovih kock:

  Ker so se kmalu po izumu Rubikove kocke začela tekmovanja iz sestavljanja, je veliko podjetij začelo izdelovati kocke, ki so delovale na enak način kot originalna, le da so bile hitrejše in so se manj zatikale. Zadnje čase so postale popularne Rubikove kocke z magneti, ki poskrbijo, da se ploskve pri obračanju ne ustavijo na sredini obrata.

V raziskovalni nalogi se bom osredotočil predvsem na klasično Rubikovo kocko 3×3×3.

2.4 REŠEVANJE RUBIKOVE KOCKE

Cilj Rubikove kocke kot uganke je, da jo rešiš. Rubikova kocka je rešena, ko je na vsaki njeni ploskvi le ena barva. Reševanje oziroma sestavljanje Rubikove kocke se razvija od njenega izuma. Vse metode za sestavljanje uporabljajo algoritme, ki so zaporedja določenih premikov oziroma obratov ploskev Rubikove kocke. Pri tem velja, da različne metode uporabljajo različne algoritme. Nekaj znanih metod je: CFOP, Roux in ZZ. (Ruwix, Different Rubik's Cube Solving Methods) Najtežja metoda, ZZ, uporablja kar 493 algoritmov.

Ugotovljeno je bilo (Ruwix, God's Number), da je Rubikovo kocko možno pri katerikoli začetni postavitvi sestaviti z 20 ali manj premiki. To pa je v praksi zelo težko izvedljivo. Zato se število 20 imenuje »božje število« Rubikove kocke.

2.5 KOMBINATORIKA

Kombinatorika je veja matematike, ki obravnava preštevanje vseh možnih postavitev elementov. Obstajajo različni načini razporejanja (npr. permutacije, variacije in kombinacije). Pri določanju števila razporeditev pogosto uporabljamo osnovni izrek kombinatorike (Šparovec idr., 2007).

2.5.1 Osnovni izrek kombinatorike

Če je odločanje sestavljeno iz več faz in so izbire v posameznih fazah neodvisne druga od druge, potem je število možnih postavitev elementov (N) zmnožek možnosti, ki jih imamo v vsaki fazi (n_1, n_2, ...).

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots\ldots \cdot n_k$$

PRIMER: Na koliko načinov se lahko oblečemo, če imamo v omari 2 majici in 3 hlače? Majici lahko izberemo na 2 načina, hlače na 3, ker sta odločitvi nepovezani, je vseh možnosti $2 \cdot 3 = 6$.

2.5.2 Permutacije

Pri permutacijah razporejamo n elementov na n mest in pri tem je vrstni red elementov pomemben.

- Permutacije brez ponavljanja

Če razporejamo same različne elemente, govorimo o permutacijah brez ponavljanja. Število permutacij brez ponavljanja je enako:

$$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,$$

To formulo lahko krajše zapišemo tudi z znakom n!, kar preberemo n fakulteta, pomeni pa:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

PRIMER: Na koliko načinov lahko pobarvamo 6 kvadratkov (razporejenih v vrsti), če imamo na izbiro 6 različnih barv?

Nalogo sem reševal postopno in sam prišel do zgornje formule. Najprej sem ugotovil, koliko možnosti je za 1 kvadratek in 1 barvo (ena možnost), 2 kvadratka in 2 barvi (2 možnosti), 3 kvadratke in 3 barve (z barvanjem sem ugotovil, da je možnosti 6). Pri 4 kvadratkih in 4 barvah sem ugotovil, da moram prejšnje število možnosti pomnožiti s 4, da dobim število možnosti za ta korak. Kasneje sem ugotovil še, da je število možnosti enako zmnožku vseh števil od 1 do števila kvadratkov in barv. Torej je za 6 kvadratkov in 6 barv vseh možnosti:

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6! = 720$$

Ugotovil sem, da lahko 6 kvadratkov s 6 različnimi barvami pobarvamo na 720 načinov.

- Permutacije s ponavljanjem

Če se posamezni elementi ponavljajo večkrat, govorimo o permutacijah s ponavljanjem. Število permutacij n elementov s ponavljanjem, od katerih se eden od elementov ponavlja k_1 - krat, drugi k_2 - krat, tretji k_3 - krat in tako naprej, pri tem pa velja $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = n$, je enako

$$N = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$$

Formulo za število permutacij s ponavljanem sem preskusil na primeru.

PRIMER: Koliko besed lahko sestavimo iz črk A N A N A S, če pri sestavljanju vedno uporabimo vse črke?

Imamo 6 črk, od katerih se A ponovi 3-krat in N ponovi 2-krat, S pa je samo eden. Število možnosti izračunam po formuli:

$$N = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$$

Ugotovil sem, da iz črk A N A N A S lahko naredimo 60 različnih besed.

2.6 VERJETNOST

Verjetnost je razmerje med številom ugodnih izidov in številom vseh možnih izidov. Izračunamo jo na naslednji način:

$$P(A) = \frac{\check{s}tevilo\ ugodnih\ izidov}{\check{s}tevilo\ mo\check{z}nih\ izidov} = \frac{m}{n}$$

Z A označimo dogodek, za katerega verjetnost računamo, P pomeni verjetnost. Spremenljivka m je število ugodnih izidov in n je število vseh možnih izidov. (Šparovec idr., 2007).

PRIMER: V posodi imamo 20 listkov, na katerih so napisana števila od 1 do 20. Kakšna je verjetnost, da v prvem poskusu izvlečemo listek s številom 1?

V tem primeru je m = 1 in n = 20, ker imamo 20 listkov in le na enemu izmed njih je število 1.

$$P(A) = \frac{1}{20} = 5\%$$

Verjetnost (P(A)), da v prvem poskusu izvlečemo listek s številom 1, je ena dvajsetina oziroma 5%.

2.7 RAZISKOVALNA VPRAŠANJA IN HIPOTEZE

Ker sem navdušen nad sestavljanjem Rubikove kocke, sem že pred nekaj leti našel podatek, da je vseh možnih postavitev Rubikove kocke približno 43 trilijonov (angleško quintillion), nisem pa vedel, zakaj jih je ravno toliko. Odločil sem se, da želim to raziskati tudi v primerih, ko lahko kocko razstavimo na kockice oz. odlepimo barvne nalepke.

Pri tem sem si postavil naslednja raziskovalna vprašanja:

- Koliko je vseh možnih postavitev Rubikove kocke, če lahko odlepimo barvne nalepke in jih ponovno nalepimo na poljubno mesto?
- Koliko je vseh možnih postavitev Rubikove kocke, če jo lahko razstavimo na sestavne elemente (kockice) in ponovno sestavimo nazaj?
- Koliko je vseh možnih postavitev Rubikove kocke, če je ne smemo razstaviti ali odlepiti nalepk (nespremenjena Rubikova kocka)?
- Ali obstaja univerzalna formula, po kateri lahko izračunamo število možnih postavitev za Rubikove kocke različnih velikosti (npr. 5 × 5 × 5)?
- Kakšna je verjetnost, da bo možno Rubikovo kocko sestaviti, potem, ko jo naključno spremenimo?

Postavil sem naslednji hipotezi:

- HIPOTEZA 1: Sklepam, da se število možnih postavitev Rubikove kocke povečuje, bolj kot lahko kocko razstavimo, oziroma spremenimo s premeščanjem nalepk.

- HIPOTEZA 2: Število možnih postavitev Rubikove kocke se da izračunati s pomočjo univerzalne formule, ne glede na velikost Rubikove kocke.

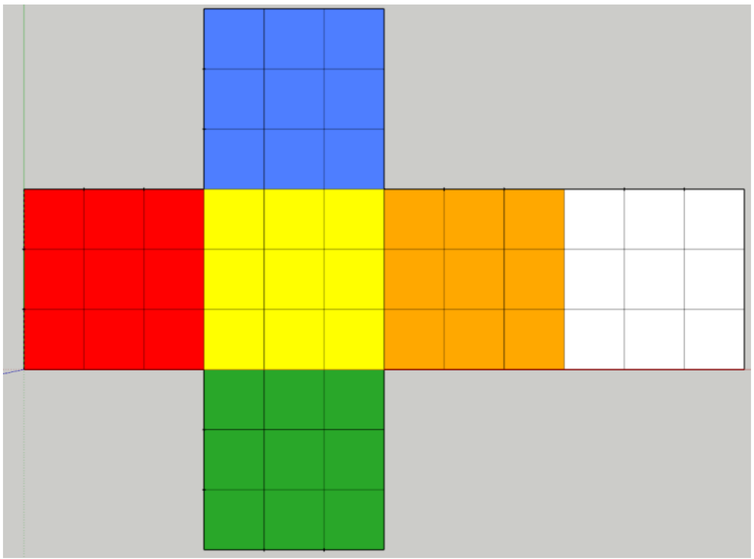
3 EMPIRIČNI DEL

3.1 METODA

Za raziskovanje sem uporabljal znanje kombinatorike. Pri tem sem si pomagal s učbenikom za matematiko za 4. letnik gimnazij, Tempus (Šparovec idr., 2007). Za boljšo predstavo sem si narisal slike mreže Rubikove kocke v programu SketchUp. V primeru, ko kocke ne smemo razstaviti in odlepiti nalepk, sem si pomagal tudi s svojim znanjem o Rubikovi kocki 3 × 3 × 3. Rešitve, do katerih sem prišel, sem preverjal v literaturi.

3.2 ŠTEVILO MOŽNIH POSTAVITEV RUBIKOVE KOCKE, ČE LAHKO ODLEPIMO BARVNE NALEPKE

Rubikova kocka 3 × 3 × 3 ima 54 nalepk, od teh jih je po 9 enake barve. Za boljšo predstavo je tukaj slika mreže Rubikove kocke:



Slika 8: Mreža Rubikove kocke

Če želimo izračunati, koliko je vseh možnih postavitev Rubikove kocke, če odlepimo vse nalepke in jih ponovno naključno nalepimo, uporabimo formulo za permutacije s ponavljanjem. V našem primeru bo n predstavljal število vseh nalepk, k_1 do k_6 pa predstavljajo število nalepk posamezne barve. Torej bo:

$$n = 9 \cdot 6 = 54$$

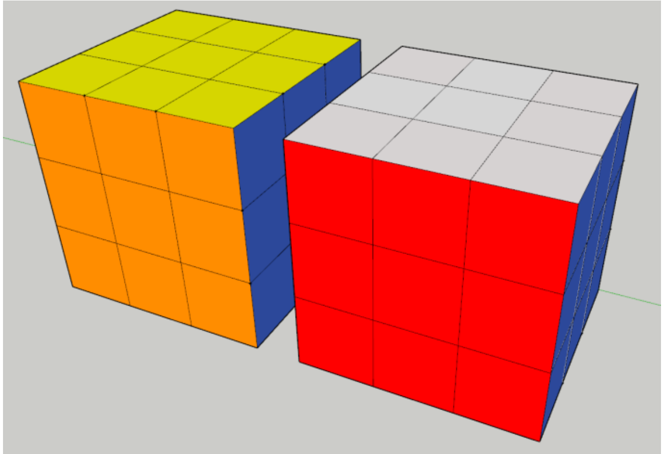
$$k_1 = k_2 = \ldots = k_6 = 9$$

Število vseh možnih postavitev Rubikove kocke izračunamo po formuli za permutacije s ponavljanjem:

$$N = \frac{54!}{9! \cdot 9! \cdot 9! \cdot 9! \cdot 9! \cdot 9!} \doteq 1{,}01 \cdot 10^{38}$$

V resnici pa je možnosti manj, če upoštevamo, da je kocka lahko v različnih orientacijah. Kocko namreč lahko postavimo na 6 različnih ploskev in jo 4-krat zavrtimo za 90°, vendar s tem ne dobimo drugače sestavljene kocke, ampak le drugače orientirano kocko (Slika 9). Vseh različnih orientacij kocke je 24, zato moramo zgornjo formulo deliti s 4 · 6 = 24. Dobimo:

$$N = \frac{54!}{(9!)^6 \cdot 24} \doteq 4{,}21 \cdot 10^{36}$$



Slika 9: Primer različne orientacije rešene Rubikove kocke

3.3 ŠTEVILO MOŽNIH POSTAVITEV RUBIKOVE KOCKE, ČE JO LAHKO RAZSTAVIMO NA KOCKICE

Če kocko lahko razstavimo na 26 manjših kockic in jo ponovno sestavimo, število možnih postavitev izračunamo na naslednji način:

- Centre lahko postavimo na 6! načinov, ker jih je 6 različnih in imamo zanje 6 različnih mest.
- Kote lahko postavimo na 8! načinov, ker jih je 8 različnih in imamo zanje 8 različnih mest. Vsakega od njih lahko še obrnemo na 3 različne načine, ker ima vsak 3 ploskve. Torej je za kote $8! \cdot 3^8$ možnih postavitev.
- Robove lahko postavimo na 12! načinov, ker jih je 12 različnih in imamo zanje 12 različnih mest. Vsakega od njih lahko obrnemo na 2 načina. Torej je za robove $12! \cdot 2^{12}$ možnih postavitev.

Po osnovnem izreku kombinatorike dobimo število možnih postavitev elementov tako, da med seboj pomnožimo števila možnih postavitev centrov, kotov in robov, vendar moramo zmnožek še deliti s 24, ker je možnih 24 orientacij kocke.

$$N = \frac{6! \cdot 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{24} \doteq 1{,}56 \cdot 10^{22}$$

3.4 ŠTEVILO MOŽNIH POSTAVITEV RUBIKOVE KOCKE BREZ RAZSTAVLJANJA

Če Rubikove kocke ne smemo razstaviti niti odlepiti nalepk, število možnih postavitev izračunamo na naslednji način:

- Vsak center je ves čas le na svojem mestu, zato je možna postavitev centrov le na 1 način. Kote in robove vrtimo okoli centrov.
- Kote lahko postavimo na 8! načinov. Pri tem lahko vsakega obrnemo na 3 načine, s tem da zadnjega ne moremo obračati neodvisno od ostalih. Zato je vseh možnih postavitev za kote $8! \cdot 3^7$.
- Robove lahko postavimo na 12! načinov. Pri tem lahko vsakega obrnemo na 2 načina, s tem da zadnjega ne moremo obračati neodvisno od ostalih. Zato je vseh možnih postavitev za robove $12! \cdot 2^{11}$.

Ponovno po osnovnem izreku kombinatorike med seboj pomnožimo števila možnih postavitev centrov, kotov in robov. Pri izračunu je treba upoštevati še, da dveh kotov ali robov ne moremo zamenjati med sabo, ne da bi pri tem vplivali na sosednja kota ali robova. Zato je potrebno zmnožek možnosti za postavitev posameznih centrov, robov in kotov deliti z 2. Tokrat ni potrebe po deljenju s številom 24, saj so zdaj centri vsak na svojem (enem) mestu in ne more priti do različnih orientacij.

$$N = \frac{1 \cdot 8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{11}}{2} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \doteq 43 \cdot 10^{18}$$

Število vseh možnih postavitev Rubikove kocke je približno 43 trilijonov.

3.5 UNIVERZALNA FORMULA ZA POLJUBNO VELIKO RUBIKOVO KOCKO

Zanimalo me je, če obstaja univerzalna formula za izračun možnih postavitev Rubikove kocke, ne glede na njeno velikost ob tem, da kocke ne spreminjamo. Na spletu sem našel formulo, ki jo je naredil Chris Hardwick (Speedcubing, Number of combinations to the Rubik's Cube and variations):

$$\frac{\left(24 \cdot 2^{10} \cdot 12!\right)^{n \bmod 2} \cdot 7! \cdot 3^6 \cdot (24!)^{\left\lfloor \frac{n^2-2n}{4} \right\rfloor}}{(4!)^{6\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor}}$$

Pri tem je n velikost Rubikove kocke (za Rubikovo kocko 3 × 3 × 3 je n = 3, za 4 × 4 × 4 je n = 4, itd.), oglati oklepaji pomenijo celi del števila v oklepaju (brez decimalk), mod 2 pa pomeni ostanek pri deljenju z 2.

Formulo sem s svojim znanjem kombinatorike in znanjem o Rubikovih kockah preveril za kocke 2 × 2 × 2, 3 × 3 × 3, 4 × 4 × 4 in 5 × 5 × 5. Število možnih postavitev Rubikove kocke je za vse velikosti Rubikove kocke določeno po osnovnem izreku kombinatorike: med seboj pomnožimo števila možnih postavitev centrov, kotov in robov.

3.5.1 Število možnih postavitev Rubikove kocke 2 × 2 × 2

Število možnih postavitev Rubikove kocke 2 × 2 × 2 je po univerzalni formuli iz spleta enako:

$$\frac{1 \cdot 5\,040 \cdot 729 \cdot 1}{1} = 3\,674\,160 \doteq 3{,}7 \cdot 10^6$$

Izračun sem preveril s svojim izračunom z uporabo kombinatorike:

- Kocka 2 × 2 × 2 nima centrov in robov, temveč ima le kote.
- Za kote veljajo enaka pravila kot pri klasični Rubikovi kocki. Postavi se jih lahko na 8! načinov, vsak je lahko obrnjen na 3 načine, zadnjega pa ne moremo obračati neodvisno od ostalih. Vseh možnih postavitev za kote je $8! \cdot 3^7$.

Ker Rubikova kocka 2 × 2 × 2 nima centrov, moramo število možnih postavitev za kote deliti z 24 (možnih 24 orientacij). V primerjavi s kocko 3 × 3 × 3, kocka 2 × 2 × 2 nima robov, zato koti, ko jih premikamo, ne vplivajo na robove in obratno. Zaradi tega ni potrebe po deljenju s številom 2.

Račun za število možnih postavitev Rubikove kocke 2 × 2 × 2 je:

$$\frac{8! \cdot 3^7}{24} = 3\,674\,160 \doteq 3{,}7 \cdot 10^6$$

V primerjavi z možnimi postavitvami Rubikove kocke 3 × 3 × 3 je možnih postavitev kocke 2 × 2 × 2 veliko manj. Razlog za veliko manjše število možnih postavitev kocke 2 × 2 × 2 je, da ta nima robov in centrov. Rezultat sem preveril tudi na spletu (AoPS online, Rubiks cube).

3.5.2 Število možnih postavitev Rubikove kocke 3 × 3 × 3

Število možnih postavitev Rubikove kocke 3 × 3 × 3 je po univerzalni formuli iz spleta enako:

$$\frac{11\,771\,943\,321\,600 \cdot 5\,040 \cdot 729 \cdot 1}{1} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \doteq 43 \cdot 10^{18}$$

Rezultat je enak kot v poglavju 3.4, kar pomeni, da univerzalna formula s spleta drži tudi za Rubikovo kocko 3 × 3 × 3.

3.5.3 Število možnih postavitev Rubikove kocke 4 × 4 × 4

Nadaljeval sem s preverjanjem univerzalne formule za Rubikovo kocko 4 × 4 × 4:

$$\frac{1 \cdot 5\,040 \cdot 729 \cdot 3{,}84 \cdot 10^{47}}{191\,102\,976} \doteq 7{,}4 \cdot 10^{45}$$

Ponovno sem to število preveril s svojim izračunom z uporabo kombinatorike:

Rubikova kocka 4 × 4 × 4 ima 24 centrov, na vsaki ploskvi 4. Lahko jih postavimo na 24! načinov, vendar je potrebno to število deliti s $(4!)^6$, saj je ploskev 6 in na vsaki po 4 enaki centri.

- Rubikova kocka 4 × 4 × 4 ima 8 kotov, ki jih lahko postavimo na 8! načinov. Vsakega lahko obrnemo na 3 načine, razen zadnjega, ki ga ne moremo obračati neodvisno od drugih. Vseh možnih postavitev za kote je $8! \cdot 3^7$.
- Na Rubikovi kocki 4 × 4 × 4 je 24 robov. Postavimo jih lahko na 24! načinov. Ne moremo jih obrniti, saj to preprečuje mehanizem kocke.

Centri take Rubikove kocke niso fiksirani (nimajo vsak svojega mesta), zato je ponovno potrebno deljenje s številom 24, zaradi možnih orientacij kocke. V primerjavi z Rubikovo kocko 3 × 3 × 3 ni potrebe po deljenju s številom 2, saj se robov ne da obračati zaradi mehanizma kocke. Izračun možnih postavitev Rubikove kocke 4 × 4 × 4 je:

$$\frac{24! \cdot 8! \cdot 3^7 \cdot 24!}{(4!)^6 \cdot 24} \doteq 7{,}4 \cdot 10^{45}$$

Pričakovano je možnih postavitev Rubikove kocke 4 × 4 × 4 veliko več kot za Rubikovo kocko 3 × 3 × 3.

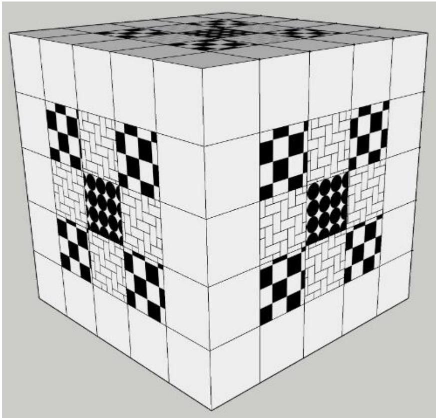
3.5.4 Število možnih postavitev Rubikove kocke 5 × 5 × 5

Odločil sem se, da bom univerzalno formulo preveril še za Rubikovo kocko 5 × 5 × 5, ker ima ta, za razliko od kock 4 × 4 × 4 in 2 × 2 × 2, fiksne centre kot kocka 3 × 3 × 3. Število možnih postavitev Rubikove kocke 5 × 5 × 5 po univerzalni formuli s spleta je:

$$\frac{11\,771\,943\,321\,600 \cdot 5\,040 \cdot 729 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{71}}{36\,520\,347\,436\,056\,576} \doteq 2{,}83 \cdot 10^{74}$$

Ponovno sem to število preveril s svojim izračunom možnih postavitev z uporabo kombinatorike:

- Rubikova kocka 5 × 5 × 5 ima 54 centrov. Od tega jih je 6, ki so v središču vsake ploskve in so fiksni. Preostalih 48 centrov je sestavljenih iz dveh skupin po 24 centrov, ki se razlikujeta v mehanizmu kocke. Od 24 centrov v vsaki skupini so na vsaki ploskvi po 4 enake barve. Vsako skupino 24 centrov lahko postavimo na 24! načinov, to število pa je potrebno deliti s $(4!)^6$, ker so v vsaki skupini po 4 centri enake barve, možnih barv pa je 6.



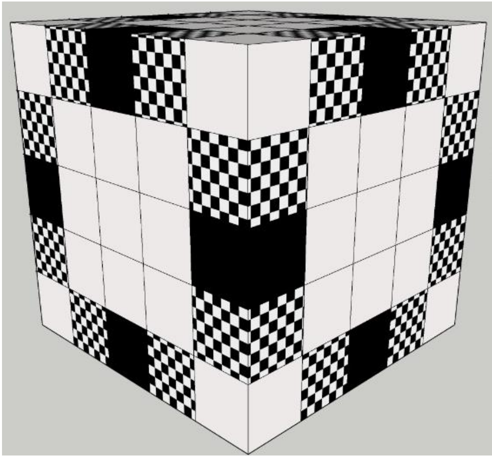
Slika 10: Različni centri Rubikove kocke 5 × 5 × 5 (centri na sredini so fiksni, ostali pa so lahko na mestu z enakim vzorcem)

Možnih postavitev za vse centre je:

$$\frac{24! \cdot 24!}{(4!)^6 \cdot (4!)^6}$$

- Za kote velja enako kot pri vseh predhodnih Rubikovih kockah. Vseh možnih postavitev za kote je $8! \cdot 3^7$.

- Robov na kocki 5 × 5 × 5 je 36. Od tega jih je 24 zunanjih in 12 notranjih.



Slika 11: Različni robovi Rubikove kocke 5 × 5 × 5 (notranji in zunanji robovi)

- Za zunanje robove velja enako kot za robove pri Rubikovi kocki 4 × 4 × 4. Notranji mehanizem kocke preprečuje, da bi bili obrnjeni, postavimo jih lahko na 24! načinov. Notranji robovi so takšni kot pri Rubikovi kocki 3 × 3 × 3. Postavimo jih lahko na 12! načinov in vsakega razen zadnjega lahko obrnemo na 2 načina. Vseh možnih postavitev za vse robove je $24! \cdot 12! \cdot 2^{11}$.

Tokrat so središčni centri fiksirani, zato ni potrebe po deljenju s 24 zaradi orientacij. Ker je 12 robov takšnih, da se lahko obrnejo, je potrebno še deljenje s številom 2. Število možnih postavitev Rubikove kocke 5 × 5 × 5:

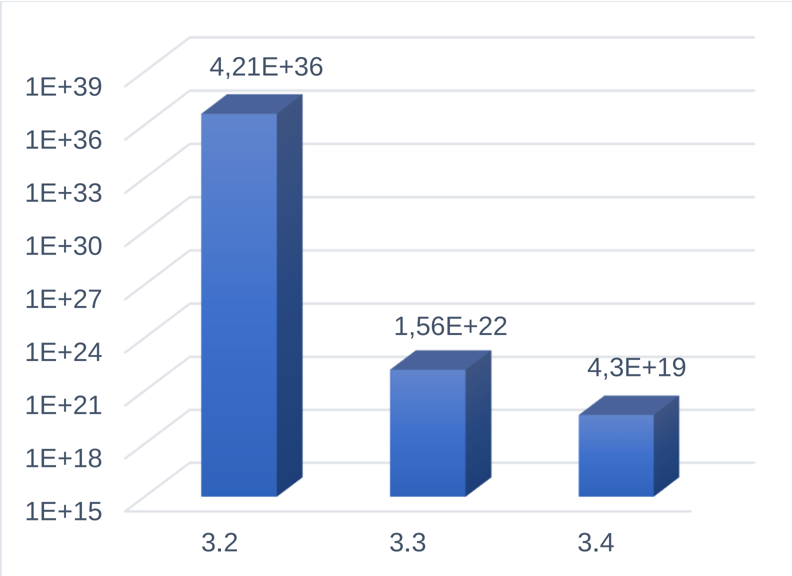
$$\frac{8! \cdot 3^7 \cdot 24! \cdot 12! \cdot 2^{11} \cdot 24! \cdot 24!}{(4!)^6 \cdot (4!)^6 \cdot 2} \doteq 2{,}83 \cdot 10^{74}$$

Rubikova kocka 5 × 5 × 5 ima $2{,}83 \cdot 10^{74}$ možnih postavitev. Ponovno povsem nepredstavljivo število, kar seveda ni presenečenje.

4 REZULTATI IN RAZPRAVA

HIPOTEZA 1 je potrjena, saj se število možnih postavitev Rubikove kocke v različnih primerih spreminja, in sicer:

- Če odlepimo in ponovno nalepimo nalepke (poglavje 3.2), je število možnih postavitev Rubikove kocke $4{,}21 \cdot 10^{36}$,
- Če kocko razstavimo in ponovno sestavimo (poglavje 3.3), je število možnih postavitev Rubikove kocke $1{,}56 \cdot 10^{22}$,
- Če Rubikovi kocki ne odlepimo nalepk in je ne razstavimo (poglavje 3.4), je število možnih postavitev Rubikove kocke $4{,}3 \cdot 10^{19}$.



Graf 1: Prikaz števila možnih postavitev Rubikove kocke v različnih primerih (poglavja 3.2, 3.3, 3.4).

Na grafu 1 se lahko dobro opazi velike razlike med števili možnih postavitev Rubikove kocke 3 x 3 x 3 – to število pada, čim manj smemo kocko spremeniti.

Tako velike razlike so pričakovane. V primeru, če kocko spreminjamo, se največkrat zgodi, da popolnoma porušimo pravila, ki sicer veljajo zanjo. V nadaljevanju je navedenih nekaj primerov, ki se lahko zgodijo, če odlepimo in ponovno nalepimo nalepke:

- Na nespremenjeni Rubikovi kocki, so nalepke na centrih v 6 različnih barvah. Veljajo tudi pravila, kakšne so barve sosednjih centrov (npr. center z belo nalepko ima za sosednje centre centre s nalepkami oranžne, zelene, rdeče in modre barve). Pri prestavljanju nalepk se lahko zgodi, da centri nimajo več nalepk v 6 različnih barvah in da dobi center z nalepko neke barve sosednji center z nalepko barve, ki prej ni bila sosednja barva prvega centra (npr. center z belo nalepko dobi sosednji center z nalepko rumene barve).
- Robovi imajo na svojih dveh vidnih ploskvah običajno nalepke, ki so enake barve kot barve nalepk dveh sosednjih si centrov. Če kocki prestavimo nalepke,

se lahko to pravilo poruši. V takem primeru bi npr. lahko na robu bili nalepki rumene in bele barve.
- Pri kotih veljajo podobna pravila kot pri robovih. Na njihovih treh vidnih ploskvah so nalepke v enakih treh barvah kot so barve nalepk poljubnih treh sosednjih si centrov. Če kocki prestavimo nalepke, se lahko zgodi, da sta npr. na istem kotu nalepki rumene in bele barve, kar sicer pri nespremenjeni kocki ni mogoče.

V nadaljevanju je navedenih še nekaj primerov, ki se lahko zgodijo, če kocko spremenimo tako, da jo le razstavimo in ponovno sestavimo:

- Za centre velja enako, kot v primeru, če kocki prestavimo nalepke, le da so centri vedno v 6 različnih barvah.
- Barve na robovih se nikoli ne spremenijo in so vedno enake barvam poljubnih dveh sosednjih si centrov. Vseeno pa lahko robove obrnemo ali pa postavimo, kot jih ne bi mogli brez razstavljanja kocke.
- Ponovno velja za kote podobno kot za robove. Barve njihovih vidnih ploskev ostajajo nespremenjene, lahko pa so obrnjeni ali postavljeni, kot sicer pri nespremenjeni kocki ni mogoče.

Tako velike razlike med primeri iz poglavij 3.2, 3.3 in 3.4 se pojavijo prav zaradi kršenja pravil, ki sicer veljajo za Rubikovo kocko. Pri tem je možno kocko bolj spremeniti, če prestavimo nalepke (poglavje 3.2), kar poveča število možnih postavitev Rubikove kocke.

Rubikovo kocko je možno rešiti le, če je ne spreminjamo, oziroma jo spremenimo tako, da postavitev njenih nalepk ustreza eni izmed 43 trilijonov postavitev iz poglavja 3.4.

Zato sem se začel spraševati, kakšna je verjetnost, da v primerih iz poglavij 3.2 in 3.3 po spremembi Rubikove kocke dobimo postavitev nalepk, pri kateri je možno rešiti Rubikovo kocko. Ugotovil sem sledeče:

- V primeru, če odlepimo in ponovno naključno nalepimo nalepke (poglavje 3.2), je verjetnost, da v prvem poskusu dobimo eno izmed 43 trilijonov možnih postavitev nespremenjene Rubikove kocke (poglavje 3.4):

  $$\frac{4,3 \cdot 10^{19}}{4,21 \cdot 10^{36}} \doteq \frac{1}{9,8 \cdot 10^{16}}$$

  Zato lahko rečemo, da je praktično nemogoče, da bi po naključnem lepljenju nalepk bilo možno rešiti Rubikovo kocko.

- V primeru, če kocko razstavimo in ponovno naključno sestavimo (poglavje 3.3), je verjetnost, da Rubikovo kocko lahko rešimo (dobimo eno izmed 43 trilijonov možnih postavitev Rubikove kocke iz poglavja 3.4):

  $$\frac{4,3 \cdot 10^{19}}{1,56 \cdot 10^{22}} \doteq \frac{1}{363} \doteq 0,28\%$$

Sicer je verjetnost veliko večja kot v primeru iz poglavja 3.2, vendar je malo verjetno (0,28%), da bi po prvem naključnem sestavljanju kocke prišel do primera, kjer bi jo bilo možno rešiti.

- V primeru iz poglavja 3.4 je Rubikovo kocko vedno možno rešiti.

V HIPOTEZI 2 sem si zastavil, da obstaja univerzalna formula, po kateri se da izračunati število možnih postavitev Rubikove kocke, ne glede na njeno velikost. Našel sem več formul, po katerih naj bi bilo možno izračunati število možnih postavitev Rubikove kocke, ne glede na njeno velikost. Izbral sem formulo, ki jo je naredil Chris Hardwick:

$$\frac{\left(24\cdot 2^{10}\cdot 12!\right)^{n \bmod 2}\cdot 7!\cdot 3^{6}\cdot (24!)^{\left\lfloor \frac{n^2-2n}{4} \right\rfloor}}{(4!)^{6\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor}}$$

Formulo sem s pomočjo kombinatorike preveril za Rubikove kocke velikosti 2 × 2 × 2, 3 × 3 × 3, 4 × 4 × 4 in 5 × 5 × 5. V teh primerih se je univerzalna formula izkazala za pravilno. Žal pa univerzalne formule ne morem preveriti še za čisto vse ostale velikosti Rubikove kocke, ker jih je preveč in se s povečevanjem velikosti kock povečuje tudi zapletenost računa. Za preverjanje pravilnosti formul imam premalo matematičnega znanja. Ker ne morem preveriti univerzalne formula na primerih vseh Rubikovih kock, HIPOTEZE 2 na žalost ne morem potrditi. Sedaj mi je izziv, da bi nekoč, ko bom imel dovolj matematičnega znanja, poskusil narediti svojo univerzalno formulo, po kateri bi lahko izračunal število možnih postavitev Rubikove kocke, ne glede na njeno velikost.

5 ZAKLJUČEK

Ugotovil sem, da ima Rubikova kocka $3 \times 3 \times 3$ $4{,}3 \cdot 10^{19}$ možnih postavitev. V primerih, če Rubikovo kocko lahko spreminjamo, se število možnih postavitev povečuje. Bolj kot jo spreminjamo, bolj se povečuje število možnih postavitev.

V primeru, če kocko spremenimo tako, da jo razstavimo na kockice in naključno sestavimo nazaj (poglavje 3.3), je možnih postavitev $1{,}56 \cdot 10^{22}$. V primeru, če kocko še bolj spremenimo in sicer tako, da odlepimo vse nalepke in jih naključno nalepimo nazaj (poglavje 3.2), je možnih postavitev $4{,}21 \cdot 10^{36}$. Zaradi tega je HIPOTEZA 1 potrjena.

Obstaja več univerzalnih formul za izračun števila možnih postavitev Rubikovih kock, ne glede na njihovo velikost. Izbrano formulo sem z uporabo kombinatorike preveril na primerih Rubikovih kock $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$ in $5 \times 5 \times 5$. Rezultat je pravilen, vendar ob trenutnem znanju matematike nobene od univerzalnih formul nisem mogel preveriti tako, da bi lahko potrdil, da veljajo za vse ostale različno velike Rubikove kocke. HIPOTEZE 2 zato nisem mogel potrditi.

Moja raziskovalna naloga se mi zdi pomembna za razumevanje, kako pridemo do števila možnih postavitev Rubikove kocke. V prihodnosti si želim še bolj podrobno raziskati univerzalno formulo za izračun možnih postavitev Rubikove kocke, ne glede na njeno velikost, in nekoč narediti svojo univerzalno formulo. Navdušen sem tudi nad programiranjem in v prihodnosti bi lahko naredil tudi program ali spletno stran, ki bi s pomočjo univerzalne formule izračunala število možnih postavitev različno velikih Rubikovih kock.

6 LITERATURA

AoPS Online, *Rubiks cube.* (Obiskano 27. 2. 2020) Dostopno na spletnem naslovu: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Rubiks_cube

Berk, J., Draksler, J., in Robič, M. (2014). Skrivnosti števil in oblik 9. (Obiskano 29. 2. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: https://www.dlib.si/details/URN:NBN:SI:DOC-6TOX35SQ

Kauran, M. (2016). *Rubikove kocke*. Diplomsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo.

Lah, M., Boršić, S. in Drofenik, K. (2016). *(Ne)rešljiva Rubikova kocka in grupe*. MaRS 2016. (Obiskano 23. 2. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: http://mars.dmfa.si/wp/mars2016/wp-content/uploads/2015/12/Nere%C5%A1ljiva-Rubikova-kocka-in-grupe.pdf

Rubik's. (Obiskano 25. 2. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: https://www.rubiks.com/en-eu/about

Speedcubing, *Number of combinations to the Rubik's Cube and variations* (Obiskano 23. 2. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: http://www.speedcubing.com/chris/cubecombos.html

Šparovec, J., Kavka, D., Pavlič, G. in Rugelj, M. (2007). *TEMPUS = Čas: matematika za 4. letnik gimnazij*. Ljubljana: Modrijan založba.

Wikipedija, *Rubik's cube.* (Obiskano 25. 2. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik%27s_Cube