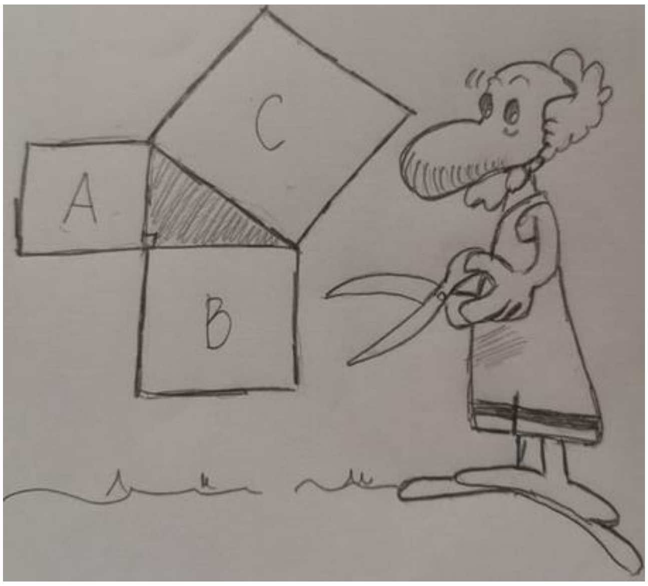
JAVNI VZGOJNOIZOBRAŽEVALNI ZAVOD
OSNOVNA ŠOLA DESTRNIK - TRNOVSKA VAS

PITAGOROV IZREK IN PODOBNOST

Raziskovalno področje: matematika

Raziskovalna naloga



Avtorji: KLARA SUŽNIK, TEJA ČRNKO ŠIREC, ROK VAJNGERL

Mentor: STANKA DROBNAK

Destrnik, 2020

ZAHVALA

Zahvaljujemo se mentorici ge. Stanki Drobnak za pomoč pri izdelavi raziskovalne naloge, ge. Mateji Miklošič in ge. Nini Čeh za lektoriranje ter ge. Jeleni Novak za pregled angleškega prevoda.

KAZALO VSEBINE

KAZALO SLIK

POVZETEK

Zvezo med ploščinami kvadratov nad stranicami pravokotnega trikotnika imenujemo Pitagorov izrek: v pravokotnem trikotniku je ploščina kvadrata nad hipotenuzo enaka vsoti ploščin kvadratov nad katetama.

S pomočjo raziskovalne naloge smo želeli Pitagorov izrek spoznati malo drugače. Z raziskovanjem obravnavane teme smo ugotovli, da lahko kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika zamenjamo s pravilnimi večkotniki, vendar Pitagorov izrek še vedno velja. Želeli smo raziskati, ali obstaja še kakšna druga povezava med liki, ki jih narišemo nad stranicami pravokotnega trikotnika. Ker v 9. razredu pri pouku obravnavamo podobnost, senam je porodila ideja, da bi poskušali s podobnimi liki.

Ugotovili smo, da Pitagorov izrek velja tudi, če nad stranice pravokotnega trikotnika narišemo podobne like. Da smo dokazali, da trditev velja tudi za splošne primere, smo si pomagali s programom GeoGebra in z računanjem.

Ključne besede: Pitagorov izrek, podobnost

SUMMARY:

The relation between the surfaces of squares above the sides of a right triangle is called the Pythagorean theorem: the area of the square which side is the hypotenuse is equal to the sum of the areas of the squares on the other two sides.

With this research paper we wanted to discover the Pythagorean theorem in a different way. By investigating the topic further, we found that the squares above the sides of the rectangular triangle can be replaced with other regular polygons and that the Pythagorean theorem still applies. We wanted to explore if there was any other connection between the shapes we drew above the sides of the right triangle. Because we are 9th-grade students, the idea of trying to make similar shapes quickly came up. We have found that the Pythagorean theorem applies even if similar figures are drawn above the sides of a right triangle. We've done it with the help of Geogebra and calculating. Subsequently, we proved that this also applies to general cases.

Key words: Pythagorean theorem, similar shapes

1 UVOD

Z raziskovalno nalogo smo želeli razširiti svoje znanje iz matematike. Ugotovili smo, da je Pitagorov izrek pogosto predmet raziskav osnovnošolcev. Kljub temu smo se odločili za to temo, saj nismo zasledili prispevka ali raziskovalne naloge, ki bi raziskala temo podobosti, ki se obravnava v 9. razredu.

Že pred našim štetjem je grški matematik Pitagora zapisal izrek, da je vsota ploščin kvadratov nad katetama pravokotnega trikotnika enaka ploščini kvadrata nad hipotenuzo. Velja torej: $c^2 = a^2 + b^2$, če je c hipotenuza, a in b pa kateti.

S pomočjo prispevkov na spletu smo ugotovili, da ta izrek velja tudi za ploščine pravilnih večkotnikov in tudi za polkroge. V naši raziskavi pa smo želeli dokazati, da velja tudi za druge like.

Predvidevali smo, da so liki, za katere ta izrek velja, podobni, to pomeni, da imajo skladne vse istoležne kote ter enako razmerje istoležnih stranic. Našo hipotezo smo se odločili raziskati z pomočjo načrtovanja, računanja in dokazovanja.

1.1 Namen

Namen te naloge je ugotoviti, ali lahko prenesemo Pitagorov izrek v podobnost. To pomeni, ali lahko zamenjamo kvadrate narisane nad katetama, in hipotenuzo s podobnimi liki.

1.2 Metodologija

V raziskovalni nalogi uporabimo naslednje raziskovalne metode:

- delo z viri,
- izračune in
- dokazovanje.

S pomočjo navedenih raziskovalnih metod potrdimo hipotezo. Za risanje geometrijskih slik je bil uporabljen računalniški program za dinamično geometrijo GeoGebra.

1.3 Hipoteza

Zastavili smo si naslednjo hipotezo:
Trdimo, da je kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika mogoče zamenjati s podobnimi liki in da ostane vsota ploščin likov nad katetama še vedno enaka ploščini lika nad hipotenuzo.

2 VSEBINSKI DEL

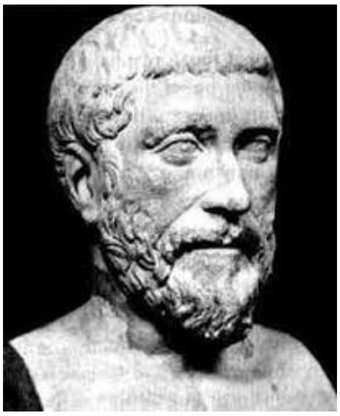
2.1 Grška matematika

Grška matematika se je razvijala od 6. stoletja pred našim štetjem do 5. stoletja našega štetja okoli obale Sredozemlja. Razvoj matematike je potekal v grško govorečih središčih, tako na Siciliji kot v Egiptu. Na splošno velja, da je temeljila na računskih metodah starejše babilonske in egipčanske matematike in je verjetno imela feničanske vplive. Nekateri najbolj znani grški matematiki so bili Pitagora, Evklid, Tales, Aristotel… (Don, 1997)

2.2 Pitagora

Pitagora iz Samosa je bil starogrški filozof. Njegovi politični in religiozni nauki so vplivali na filozofijo Platona, Aristotela in preko njiju tudi na zahodno filozofijo. Zaradi pomankanja zgodovinskih zapisov o njem ne vemo veliko, nekaj zgodovinarjev sploh ne verjame, da je obstajal. Rodil naj bi se okoli leta 570 pred našim štetjem na grškem otoku Samos. Njegov oče je bil trgovec. Pitagora se je matematike učil od Talesa, ki je prinesel matematiko Grkom iz Starega Egipta. Tales je Pitagoru svetoval, naj obišče Egipt, kar je storil, ko je bil star približno 22 let. V Egiptu je živel 22 let in izpopolnjeval svojo matematično in duhovno ideologijo. Egipt je zapustil, ko so ga kot zapornika odpeljali v Babilon. Babilonci so bili takrat verjetno najboljši matematiki na svetu. V Babilonu, kjer je živel približno 12 let, se je učil matematike in vzhodnih duhovnih idej. Star 56 let, je bil Pitagora končno osvobojen. Vrnil se je v Samos, v svojo rojstno hišo. Tam je začel poučevati ljudi svojo filozofijo življenja, ki je temeljila na mešanici njegovih lastnih idej, matematike in mistike iz Starega Egipta in Vzhoda. Po dveh letih je Pitagora zapustil Samos. Preveč ljudi je bilo sovražnih do njegovih novih idej. Preselil se je v mesto Croton, takrat del antične Grčije, zdaj v južni Italiji. Tam je ustanovil Pitagorejsko šolo. (Koncilija, 2011; Hesselnik, 2016; Pythagoreanism,2019)

Pitagorejci so bili v začetku skrivni verski kult. Verjeli so, da je osnova vesolja matematika in da je resnica, skrita v številkah.Nekatera njihova prepričanja so bolj absurdna: da je grešno jesti fižol, da so moški predstavljeni z lihimi številkami, ženske pa s sodimi številkami, da se duše ljudi, ki so ločene od teles, prerodijo v nova človeška ali živalska telesa. Na Pitagoro so gledali kot na nekoga podobnega bogu, saj so trdili, da je imel nadnaravne darove – menili so, da je imel zmožnost pogovora z živalmi, spominjanja prejšnjih življenj, ki jih je živel kot drugi ljudje, napovedovanja potresov, preprečevanja sunka vetra in toče ter umirjanja morskih valov. Rimski zgodovinar Ciceron je dejal, da so Pitagorejci vedno govorili: »Mojster je tako rekel.« Mojster je bil seveda Pitagora. (FamousScientists, 2019; Bragg in dr., 2009; Burkret, 1972)



Slika 1: Pitagora (Vir: http://www2.arnes.si/~mtanko/pitagora.htm)

2.3 Vrste trikotnikov

Trikotnik je lik v ravnini, določen s tremi točkami, ki ne ležijo na isti premici. Ima tri oglišča - A, B in C. Po dogovoru trikotnik pozitivno orientiramo. Ima tri stranice. Vsako stranico označimo s črko, enako črki nasprotiležnega oglišča. Velikost notranjih kotov označimo z grškimi črkami. Kot z vrhom v oglišču A označimo z α, kot z vrhom v oglišču B označimo z β in kot z vrhom v oglišču C označimo z γ.

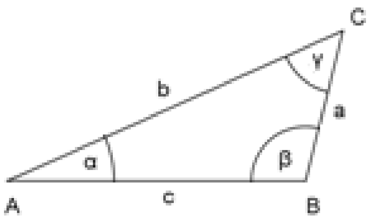
Za dolžine stranic trikotnika velja trikotniško pravilo. Vsota dolžin dveh stranic je večja od dolžine tretje stranice.

Vsota velikosti notranjih kotov trikotnika je 180° zunanjih kotov pa 360°. (Ivanec in dr., 2014)

2.3.1 Delitev glede na dolžine stranic

a) raznostranični trikotnik

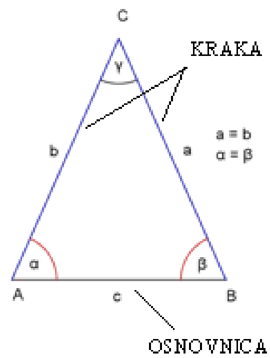
Vse stranice so različno dolge, kar pomeni, da so tudi vsi koti različno veliki (Izobraževalna delavnica, 2006).



Slika 2: Raznostranični trikotnik (Vir: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2006/ura/Friedl/html/vrste_1.htm)

b) enakokraki trikotnik

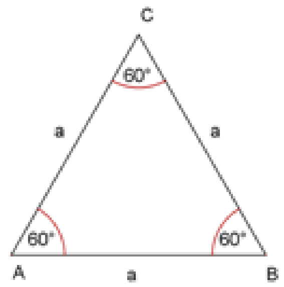
Dve stranici sta enako dolgi. Ti dve stranici imenujemo kraka, tretjo stranico pa imenujemo osnovnica. Kota ob osnovnici sta skladna. Trikotnik je osnosomeren (Izobraževalna delavnica, 2006).



Slika 3: Enakokraki trikotnik (Vir: http://www.educa.fmf.unilj.si/izodel/sola/2006/ura/Friedl/html/vrste_1.htm)

c) enakostranični trikotnik

Vse stranice so skladne, kar pomeni, da so tudi vsi notranji koti skladni in merijo 60°. Iz tega sledi, da vsak zunanji kot meri 120°. Trikotnik je osnosomeren (višina na posamezno stranico sovpada s težiščnico na isto stranico). Pravimo mu tudi *pravilni trikotnik*. Vsak enakostranični trikotnik je enakokrak (Izobraževalna delavnica, 2006).

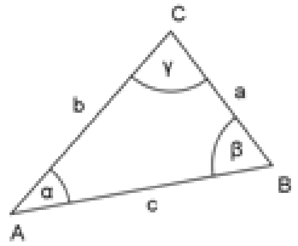


Slika 4: Enakostranični trikotnik (Vir: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2006/ura/Friedl/html/vrste_1.htm)

2.3.2 Delitev glede na velikosti notranjih kotov

a) Ostrokotni trikotnik

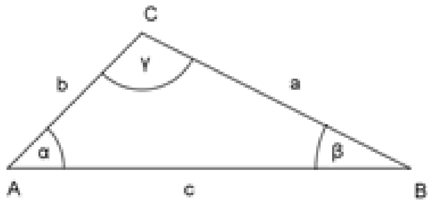
Vsi notranji koti so ostri (merijo manj kot 90°) (Izobraževalna delavnica, 2006).



Slika 5: Ostrokotni trikotnik (Vir: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2006/ura/Friedl/html/vrste_1.htm)

b) Topokotni trikotnik

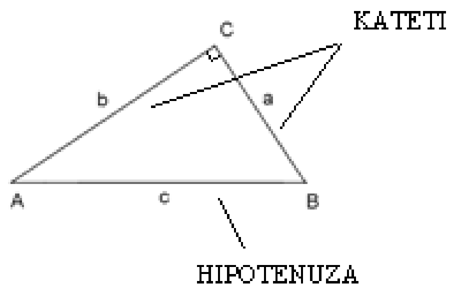
En notranji kot je večji od 90°. Kar pomeni, da ostala dva notranja kota merita manj kot 90° (sta ostra) (Izobraževalna delavnica, 2006).



Slika 6: Topokotni trikotnik (Vir: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2006/ura/Friedl/html/vrste_1.htm)

c) Pravokotni trikotnik

En notranji kot je enak 90° (pravi kot). Pravi kot oklepata kateti, nasproti pravemu kotu pa leži hipotenuza (Izobraževalna delavnica, 2006).



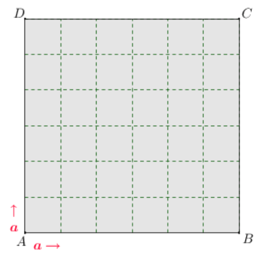
Slika 7: Pravokotni trikotnik (Vir: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2006/ura/Friedl/html/vrste_1.htm)

2.4 Ploščina

Ploščina je mera za velikost geometrijskega lika glede na izbrano mersko enoto. Osnovna enota za ploščino je 1 m^2 in predstavlja del ravnine, ki jo pokriva kvadrat s stranico 1 m. Ploščino lika zapišemo z merskim številom in izbrano ploščinsko enoto. Mersko število nam pove, koliko enotskih kvadratov prekrije lik (Škrlec in dr., 2015).

2.4.1 Kvadrat

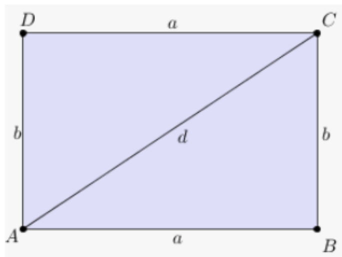
Kvadrat je štirikotnik, ki ima vse stranice enako dolge in vse kote prave. Ploščina kvadrata s stranico a je: $p = a^2$ (Škrlec in dr., 2015).



Slika 8: Kvadrat (Vir: https://eucbeniki.sio.si/vega3/325/index5.html)

2.4.2 Pravokotnik

Pravokotnik je štirikotnik, ki ima vse notranje kote prave. Nasprotni stranici pravokotnika sta vzporedni in enako dolgi. Pravokotnik s stranicama a in b ima ploščino: $p = ab$ (Škrlec in dr., 2015).

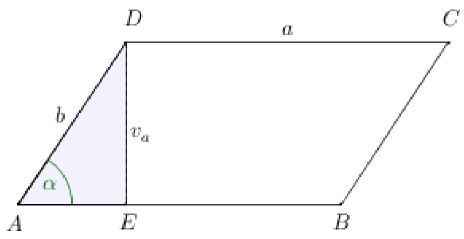


Slika 9: Pravokotnik (Vir: https://eucbeniki.sio.si/vega3/325/index5.html)

2.4.3 Paralelogram

Paralelogram je štirikotnik, ki ima dva para vzporednih stranic. Med paralelograme spadajo kvadrat, pravokotnik, romb in romboid.

Ploščina paralelograma s stranicama a in b ter ustreznima višinama v_a in v_b je enaka: $p = a \cdot v_a = b \cdot v_b$ (Škrlec in dr., 2015).

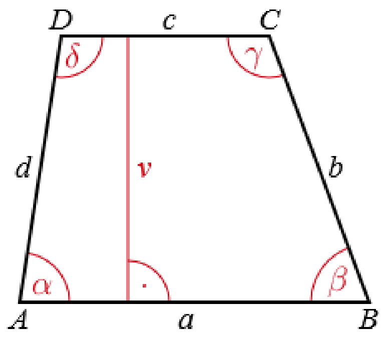


Slika10: Paralelogram (Vir: https://eucbeniki.sio.si/vega3/325/index5.html)

2.4.4 Trapez

Trapez je štirikotnik z vsaj enim parom vzporednih stranic. Vzporedni stranici sta osnovnici, drugi dve pa kraka. Vsota vseh notranjih kotov v trapezu je 360◦, kota ob istem kraku sta suplementarna (njuna vsota je 180◦). Razpolovišči osnovnic povezuje srednjica trapeza.

Ploščina trapeza z osnovnicama a in c ter višino v je enaka: $p = \frac{a+c}{2} \cdot v$ (Škrlec in dr., 2015).



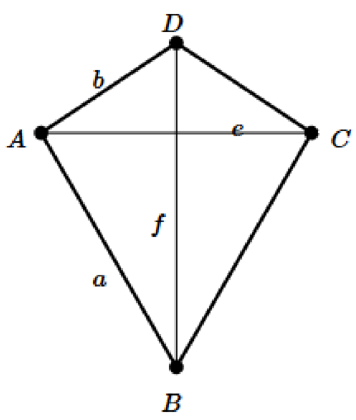
Slika 11: Trapez (Vir: https://www.calculat.org/si/ploscina-obseg/trapez.html)

2.4.5 Deltoid

Deltoid je štirikotnik, ki ima dva para sosednjih skladnih stranic. Diagonali se sekata pravokotno. Ena od diagonal je simetrala lika, druga pa razdeli deltoid na dva enakokraka trikotnika. Deltoidu lahko včrtamo krog.

Ploščino deltoida z diagonalama e in f izračunamo kot $p = \frac{ef}{2}$.

Ploščino vsakega štirikotnika s pravokotnima diagonalama lahko izračunamo z obrazcem: $p = \frac{ef}{2}$ (Škrlec in dr., 2015).

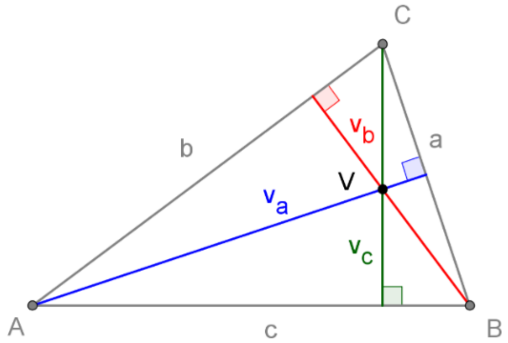


Slika 12: Deltoid (Vir: https://eucbeniki.sio.si/vega3/325/index5.html)

2.4.6 Trikotnik

Ploščino trikotnika z znano stranico in višino nanjo izračunamo kot:

$$p = \frac{c\,v_c}{2} = \frac{a\,v_a}{2} = \frac{b\,v_b}{2}$$ (Škrlec in dr., 2015).



Slika 13: Trikotnik (Vir: https://eucbeniki.sio.si/vega3/325/index5.html)

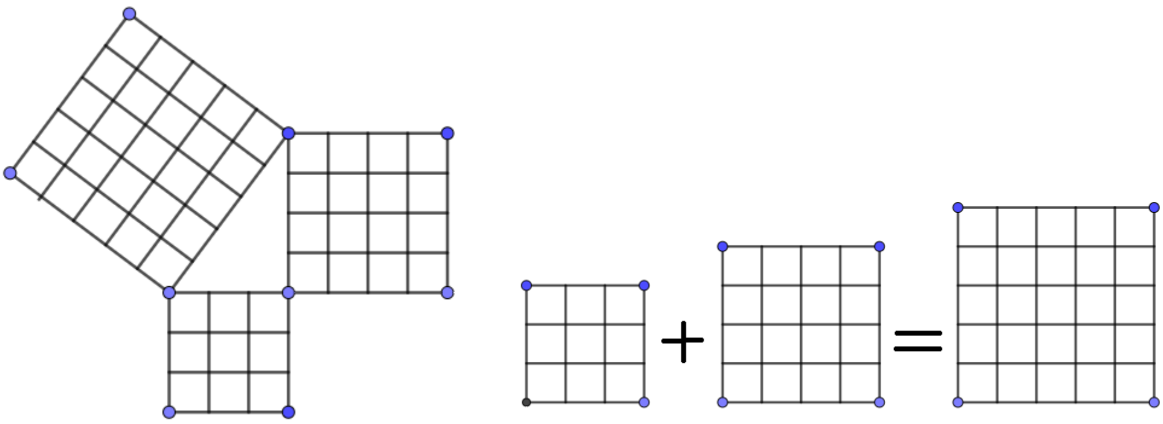
2.5 Pitagorov izrek in njegovi dokazi

Pitagorov izrek je eno od tistih matematičnih znanj, za katere lahko rečemo, da so temeljna. V splošnem ga je prvi dokazal prav Pitagora.

Naj bosta a in b kateti pravokotnega trikotnika, c pa njegova hipotenuza. Tedaj je vsota kvadratov katet enaka kvadratu hipotenuze (Ivanec in dr., 2014).

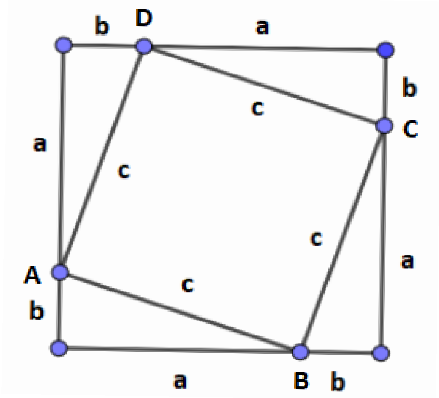
$$a^2 + b^2 = c^2$$

V osnovni šoli Pitagorov izrek potrdimo z pomočjo te slike in računanjem ploščine:


Slika 14: Dokaz Pitagorovega izreka 1 (Vir: Vajngerl, 2020)

To seveda ni splošen dokaz, le potrditev izreka za izbrani trikotnik, ki ima kateti z dolžinama 3 cm in 4 cm, hipotenuza pa meri 5 cm. Seveda bi lahko podobno naredili s katerim od drugih pravokotnih trikotnikov, ki ima celoštevilske dolžine stranic.

2.5.1 Dokaz Pitagorovega izreka s pomočjo štirih enakih pravokotnih trikotnikov



Slika 15: Dokaz Pitagorovega izreka 2 (Vir: Vajngerl, 2020)

Vsak pravokotni trikotnik lahko s tremi njegovimi kopijami sestavimo v kvadrat s stranico (a + b). Lik ABCD ima skladne stranice, zato je lahko romb ali kvadrat. Kot BAD je enak 180°− α – β = 90°, zato je ABCD kvadrat. Izračunajmo ploščino večjega kvadrata na dva načina:

$$(1)\ \ (\mathrm{a}+\mathrm{b})^2$$

$$(2)\ \ 4\cdot\frac{ab}{2}+c^2$$

Nato pa lahko z krajšim računom potrdimo Pitagorov izrek (Ivanec in dr., 2014).

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 = 4\cdot\frac{\mathrm{ab}}{2}+\mathrm{c}^2$$

$$\mathrm{a}^2+2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2 = 2\mathrm{ab}+\mathrm{c}^2$$

$$\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2=\mathrm{c}^2$$

2.6 Pitagorejske trojice

Pitagorejske trojice so trojice naravnih števil, ki ustrezajo Pitagorevemu izreku. To so na primer števila 3, 4, 5, ki so dolžine stranic trikotnika.

Primeri nekaterih manjših Pitagorejskih trojic: (3, 4, 5); (6, 8, 10); (5, 12, 13); (8, 15, 17),…

Na babilonski tablici Plimpton 322, ki je stara skoraj 4000 let, je uporabljenih 15 Pitagorejskih trojk, med drugimi tudi trojka (12709, 13500, 18541) (Križnič, Miklavčič, 2013).

2.7 Podobnost

2.7.1 Splošno

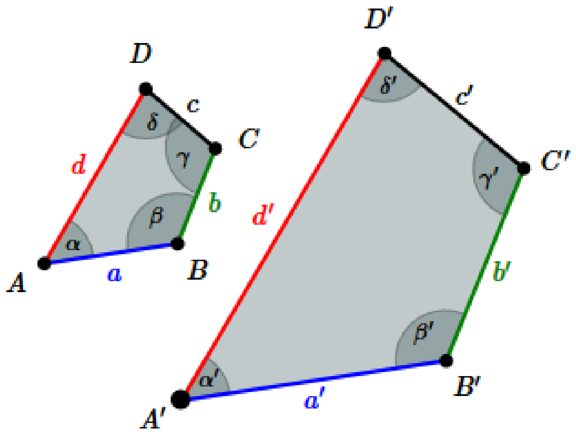
Podobna lika imata enako razmerje vseh istoležnih stranic in enako velike kote. Da je lik A podoben liku B kratko zapišemo tudi: $A \sim B$ (Ivanec in dr., 2014).
Razmerje istoležnih stranic med sliko in originalom podobnih likov imenujemo podobnostni koeficient k. Velja:

$$\mathrm{k}=\frac{\mathrm{a'}}{\mathrm{a}} \quad \text{ali} \quad \mathrm{k}=\mathrm{a'}:\mathrm{a} \quad \text{ali} \quad \mathrm{a'}=\mathrm{k}\cdot\mathrm{a}$$

in $\mathrm{k}=\frac{\mathrm{b'}}{\mathrm{b}}$ ali $\mathrm{k}=\mathrm{b'}:\mathrm{b}$ ali $\mathrm{b'}=\mathrm{k}\cdot\mathrm{b}$, ter enako tudi za ostale stranice lika.

Razmerje obsegov podobnih likov je enako podobnostnemu koeficientu k. o′ : o = k

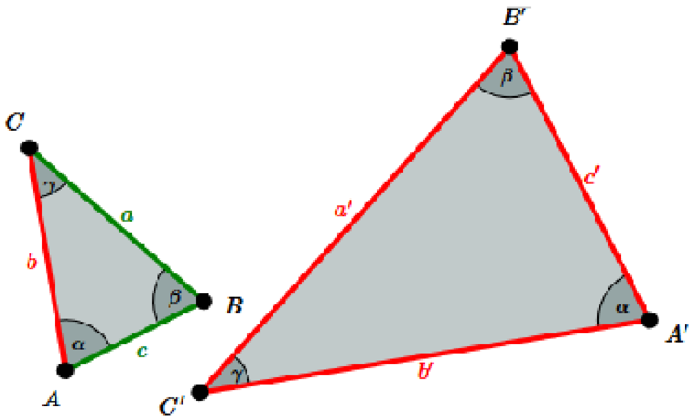
Razmerje ploščin podobnih likov je enako kvadratu podobnostnega koeficienta k^2. $p' : p = k^2$ (Ivanec in dr., 2014).



Slika 16: Podobna lika (Vir: https://eucbeniki.sio.si/vega3/325/index5.html)

2.7.2 Podobni trikotniki

Trikotnika sta podobna, če se ujemata v vseh notranjih kotih in imata dolžine istoležnih stranic v enakem razmerju (Ivanec in dr., 2014).



Slika 17: Podobna trikotnika (Vir: https://eucbeniki.sio.si/vega3/325/index5.html)

Velja:

$$a' : a = b' : b = c' : c = k$$

ali

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

Razmerje istoležnih višin podobnih trikotnikov je enako podobnostnemu koeficientu k.

$$\frac{v'_a}{v_a} = \frac{v'_b}{v_b} = \frac{v'_c}{v_c} = k$$

Velja pa tudi naslednje: $a : v_a = a' : v'_a$, $b : v_b = b' : v'_b$ in $c : v_c = c' : v'_c$ (Ivanec in dr., 2014).

3 RAZISKOVALNI DEL IN REZULTATI

Pri raziskovanju smo vzeli za »osnovo« pravokotni trikotnik s katetama 3 cm in 4 cm, ter hipotenuzo 5 cm. Osredotočili smo se na like, kjer smo lahko enostavno preverili podobnost in izračunali ploščine. Dokazi so bili posledica zaključkov, ki smo jih naredili po rešenih konkretnih primerih.

3.1 Podobni pravokotniki nad stranicami »osnovnega« pravokotnega trikotnika

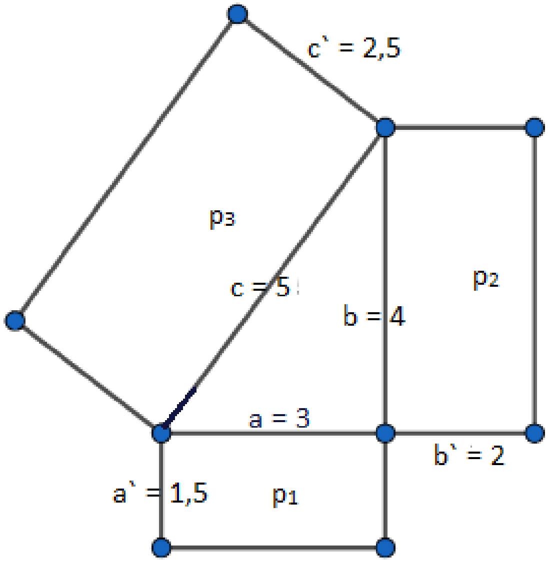
Kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika smo zamenjali s podobnimi pravokotniki. Postopka smo se lotili tako, da smo kvadratom nad stranicami pravokotnega trikotnika širino pomnožili z izbranim faktorjem, preverili, ali so pravokotniki podobni, izračunali ploščine in preverili veljavnost Pitagorovega izreka.

Primer 1:

Kvadratom nad stranicami smo širino pomnožili z $\frac{1}{2}$. Nove širine smo označili z a\`, b\` in c\`.

a) Ali so pravokotniki podobni?

b) Ali velja, da je $p_1 + p_2 = p_3$?



Slika 18: Podobni pravokotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika 1 (Vir: Vajngerl, 2020)

Izračun (na konkretnem primeru):

a) Ker velja:

$a : b = a` : b` = 3 : 4$ in $a : c = a` : c` = 3 : 5$, so pravokotniki podobni.

Velja pa tudi:

$a` : a = b` : b = c` : c = 1 : 2$

b)

$p_1 = a \cdot a`$	$p_2 = b \cdot b`$	$p_3 = c \cdot c`$
$p_1 = 3 \cdot 1{,}5$	$p_2 = 4 \cdot 2$	$p_3 = 5 \cdot 2{,}5$
$p_1 = 4{,}5\ cm^2$	$p_2 = 8\ cm^2$	$p_3 = 12{,}5\ cm^2$

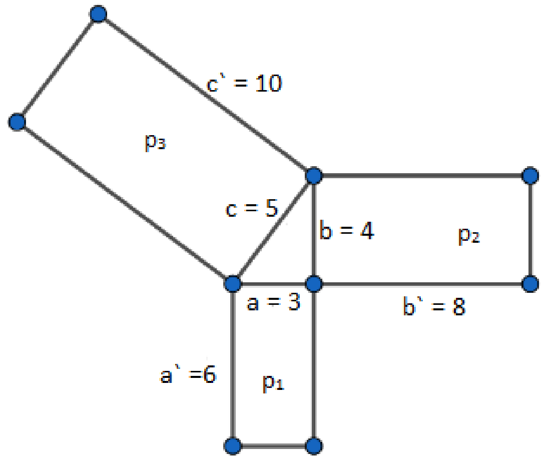
Vidimo, da je: $p_1 + p_2 = p_3$ (saj je 4,5 + 8 = 12,5)

Primer 2:

Kvadratom nad stranicami smo širino pomnožili z 2. Nove širine smo označili z a`, b` in c`.

a) Ali so pravokotniki podobni?

b) Ali velja, da je $p_1 + p_2 = p_3$?



Slika 19: Podobni pravokotniki nad starnicami pravokotnega trikotnika 2 (Vir: Vajngerl, 2020)

Izračun (na konkretnem primeru):

a) Ker velja:

$a : b = a` : b` = 3 : 4$ in $a : c = a` : c` = 3 : 5$, so pravokotniki podobni.

Velja pa tudi:

$a` : a = b` : b = c` : c = 2 : 1$

b)

$p_1 = a \cdot a`$	$p_2 = b \cdot b`$	$p_3 = c \cdot c`$
$p_1 = 3 \cdot 6$	$p_2 = 4 \cdot 8$	$p_3 = 5 \cdot 10$
$p_1 = 18\ cm^2$	$p_2 = 32\ cm^2$	$p_3 = 50\ cm^2$

Vidimo, da je: $p_1 + p_2 = p_3$ (saj je 18 + 32 = 50).

Iz primera 1 in primera 2 v tem razdelku, smo ugotovili, da bi podobno dobili tudi za druge podobne pravokotnike, zato smo se lotili dokaza v splošnem.

Dokaz 1:

Če širino kvadrata pomnožimo s poljubnim pozitivnim realnim številom k, velja:

$$a' : a = b' : b = c' : c = k$$

Od tod pa, da je

$$a' = k \cdot a \text{ in } b' = k \cdot b \text{ in } c' = k \cdot c$$

Zapišimo ploščine in izrazimo a^2, b^2 in c^2:

$$p_1 = a \cdot k \cdot a = a^2 \cdot k \quad \text{in} \quad a^2 = \frac{p_1}{k}$$

$$p_2 = b \cdot k \cdot b = b^2 \cdot k \quad \text{in} \quad b^2 = \frac{p_2}{k}$$

$$p_3 = c \cdot k \cdot c = c^2 \cdot k \quad \text{in} \quad c^2 = \frac{p_3}{k}$$

Iz Pitagorovega izreka $a^2 + b^2 = c^2$ za pravokotni trikotnik s katetama a in b ter hipotenuzo c dobimo:

$$\frac{p_1}{k} + \frac{p_2}{k} = \frac{p_3}{k}$$

$$p_1 + p_2 = p_3$$

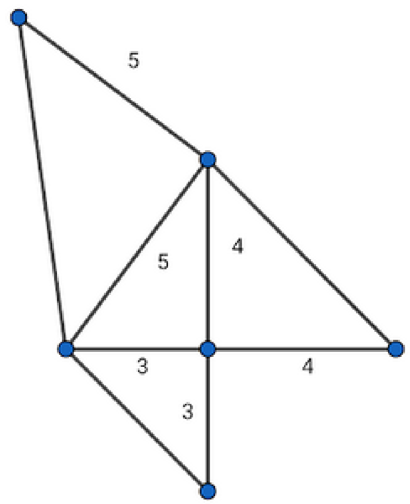
Dokazali smo:
Če narišemo nad stranice pravokotnega trikotnika podobne pravokotnike, je vsota ploščin pravokotnikov nad katetama enaka ploščini pravokotnika nad hipotenuzo.

3.2 Podobni trikotniki nad stranicami »osnovnega« pravokotnega trikotnika

Primer 3:

Kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika smo zamenjali s podobnimi pravokotnimi trikotniki, kjer sta kateti enako dolgi.

a) Ali so pravokotni trikotniki podobni?
b) Ali velja, da je $p_1 + p_2 = p_3$?



Slika 20: Podobni pravokotni trikotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika (Vir: Vajngerl, 2020)

Izračun (na konkretnem primeru):

a) Trikotniki so zagotovo podobni, saj velja enako, kot pri pravokotnikih:
$a : b = a` : b` = 3 : 4$ in $a : c = a` : c` = 3 : 5$, vsi trije pa imajo skladne notranje kote.
Velja pa tudi: $a` : a = b` : b = c` : c = 1 : 1$

b)

$p_1 = \frac{a \cdot a`}{2}$ $\qquad$ $p_2 = \frac{b \cdot b`}{2}$ $\qquad$ $p_3 = \frac{c \cdot c`}{2}$

$p_1 = \frac{3 \cdot 3}{2}$ $\qquad$ $p_2 = \frac{4 \cdot 4}{2}$ $\qquad$ $p_3 = \frac{5 \cdot 5}{2}$

$p_1 = 4{,}5 \text{ cm}^2$ $\qquad$ $p_2 = 8 \text{ cm}^2$ $\qquad$ $p_3 = 12{,}5 \text{ cm}^2$

Vidimo, da je: $p_1 + p_2 = p_3$ (saj je 4,5 + 8 = 12,5).

Po analogiji s pravokotniki zaključimo, da bo veljal Pitagorov izrek tudi, če bomo eno kateto pomnožili ali delili s poljubnim pozitivnim realnim številom. Zato smo se lotili splošnega dokaza.

Dokaz 2:

Če kateto pravokotnega trikotnika pomnožimo s poljubnim pozitivnim realnim številom k, velja:

$$a' : a = b' : b = c' : c = k$$

Iz tega sledi, da je:

$$a' = k \cdot a \text{ in } b' = k \cdot b \text{ in } c' = k \cdot c$$

Zapišimo ploščine in izrazimo a^2, b^2 in c^2:

$$p_1 = \frac{a \cdot k \cdot a}{2} = \frac{a^2 \cdot k}{2} \quad \text{in} \quad a^2 = \frac{2p_1}{k}$$

$$p_2 = \frac{b \cdot k \cdot b}{2} = \frac{b^2 \cdot k}{2} \quad \text{in} \quad b^2 = \frac{2p_2}{k}$$

$$p_3 = \frac{c \cdot k \cdot c}{2} = \frac{c^2 \cdot k}{2} \quad \text{in} \quad c^2 = \frac{2p_3}{k}$$

Iz Pitagorovega izreka $a^2 + b^2 = c^2$ za pravokotni trikotnik s katetama a in b, ter hipotenuzo c, dobimo:

$$\frac{2p_1}{k} + \frac{2p_2}{k} = \frac{2p_3}{k}$$

$$2p_1 + 2p_2 = 2p_3$$

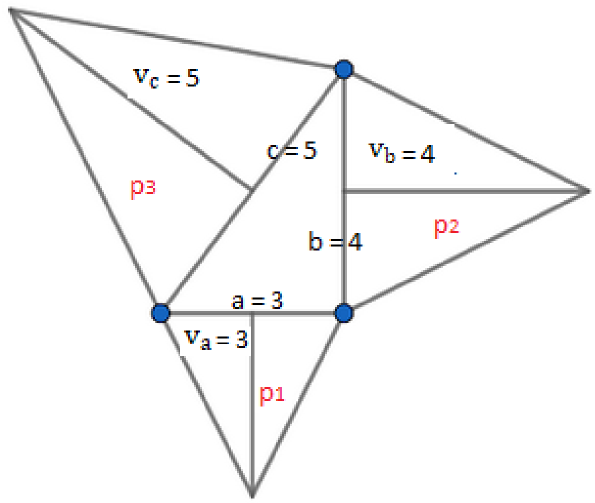
$$2(p_1 + p_2) = 2p_3$$

$$p_1 + p_2 = p_3$$

Dokazali smo:
Če narišemo nad stranice pravokotnega trikotnika podobne pravokotne trikotnike, je vsota ploščin pravokotnih trikotnikov nad katetama enaka ploščini pravokotnega trikotnika nad hipotenuzo.

Primer 4:

Kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika smo zamenjali s podobnimi enakokrakimi trikotniki, kjer je višina enaka osnovnici.



Slika 21: Podobni enakokraki trikotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika (Vajngerl, 2020)

Po analogiji iz primerov 1, 2, in 3 smo zaključili, da so takšni trikotniki podobni, saj velja:

$a : b = v_a : v_b = 3 : 4$ in $a : c = v_a : v_c = 3 : 5$. Vsi trije imajo skladne notranje kote.

Velja pa tudi: $a : v_a = b : v_b = c : v_c = 1 : 1$.

Računanje ploščin potrdi veljavnost Pitagorovega izreka za opisan primer:

$$p_1 = \frac{a \cdot v_a}{2} \qquad p_2 = \frac{b \cdot v_b}{2} \qquad p_3 = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

$$p_1 = \frac{3 \cdot 3}{2} \qquad p_2 = \frac{4 \cdot 4}{2} \qquad p_3 = \frac{5 \cdot 5}{2}$$

$$p_1 = 4{,}5 \text{ cm}^2 \qquad p_2 = 8 \text{ cm}^2 \qquad p_3 = 12{,}5 \text{ cm}^2$$

Vidimo, da je: $p_1 + p_2 = p_3$ (saj je 4,5 + 8 = 12,5).

Po analogiji s pravokotniki in pravokotnimi trikotniki primerov 1, 2 in 3, zaključimo, da bo veljal Pitagorov izrek tudi, če bomo višino pomnožili ali delili s poljubnim pozitivnim realnim številom. Zato smo se lotili splošnega dokaza.

Dokaz 3:

Najprej izrazimo višine: $v_a = k \cdot a$ in $v_b = k \cdot b$ in $v_c = k \cdot c$

Ko vstavimo namesto višin zgornje enakosti, dobimo enak zaključek dokaza, kot v primeru 3.

$$p_1 = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot k \cdot a}{2} = \frac{a^2 \cdot k}{2} \quad \text{in} \quad a^2 = \frac{2p_1}{k}$$

$$p_2 = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{b \cdot k \cdot b}{2} = \frac{b^2 \cdot k}{2} \quad \text{in} \quad b^2 = \frac{2p_2}{k}$$

$$p_3 = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot k \cdot c}{2} = \frac{c^2 \cdot k}{2} \quad \text{in} \quad c^2 = \frac{2p_3}{k}$$

Iz Pitagorovega izreka $a^2 + b^2 = c^2$ za pravokotni trikotnik s katetama a in b, ter hipotenuzo c, dobimo:

$$\frac{2p_1}{k} + \frac{2p_2}{k} = \frac{2p_3}{k}$$

$$2p_1 + 2p_2 = 2p_3$$

$$2(p_1 + p_2) = 2p_3$$

$$p_1 + p_2 = p_3$$

Ker v vsakem trikotniku izračunamo ploščino z isto enačbo, je zaključek enostaven: Pitagorov izrek velja, če narišemo nad stranice pravokotnega trikotnika podobne trikotnike. V vseh primerih je vsota ploščin podobnih trikotnikov nad katetama enaka ploščini podobnega trikotnika nad hipotenuzo.

3.3 Podobni liki nad stranicami »osnovnega« pravokotnega trikotnika

Svojo tezo smo želeli dokazati še z ostalimi liki. Hitro smo spoznali, da bo ta korak še težji, saj bi že pri trapezu, s katerim smo svoj dokaz začeli, potrebovali tri podatke za izračun ploščine. Zelo podobno bi bilo pri ostalih večkotnikih, zato smo za dokazovanje raje uporabili drugo lastnost podobnosti. Razmerje ploščin podobnih likov je enako kvadratu podobnostnega koeficienta k^2.

$$p' : p = k^2 \quad \text{in} \quad p' = k^2 \cdot p$$

Označimo z a najkrajšo kateto v pravokotnem trikotniku in s p_1 ploščino lika nad njo, z b drugo kateto in s p_2 ploščino lika nad njo, s c hipotenuzo in s p_3 ploščino lika nad njo. Potem lahko zapišemo, da je stranica b za faktor $\frac{b}{a}$ – krat daljša od a, stranica c pa za $\frac{c}{a}$ – krat daljša od stranice a. Velja torej:

$$b = \frac{b}{a} \cdot a \quad \text{in} \quad c = \frac{c}{a} \cdot a$$

Zapišimo ploščini likov nad stranicama b in c: $p_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot p_1$ in $p_3 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot p_1$

Iz prve enačbe izrazimo b^2, iz druge pa c^2:

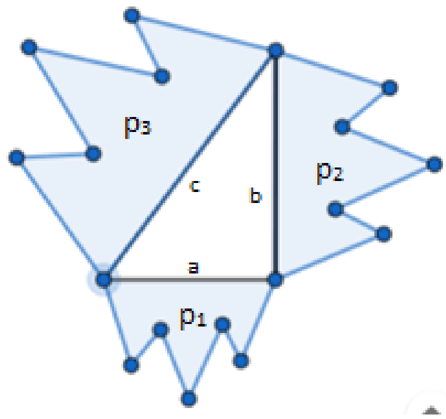
$$b^2 = \frac{a^2\, p_2}{p_1} \quad \text{in} \quad c^2 = \frac{a^2\, p_3}{p_1}$$

Če velja Pitagorov izrek: $a^2 + b^2 = c^2$, potem velja naslednje:

$$a^2 + \frac{a^2\, p_2}{p_1} = \frac{a^2\, p_3}{p_1} \qquad / \cdot p_1$$

$$a^2 p_1 + a^2 p_2 = a^2 p_3 \qquad / : a^2$$

$$p_1 + p_2 = p_3.$$



Slika 22: Poljubni podobni liki nad stranicami pravokotnega rikotnika. (Vajngerl, 2020)

Dokazali smo:

Če nad stranice pravokotnega trikotnika narišemo poljubne podobne like, velja, da je vsota ploščin likov nad katetama enaka ploščini lika nad hipotenuzo. S tem smo tudi potrdili našo hipotezo.

4 ZAKLJUČEK

Pitagorov izrek je eden najpomembnejših izrekov v ravninski geometriji. V raziskovalni nalogi smo preverili ali lahko kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika zamenjamo s poljubnimi podobnimi liki in Pitagorov izrek še vedno velja.

Dokazovanja hipoteze smo se lotili po delih. V prvem delu smo ponovili Pitagorov izrek in poiskali zanimivosti o Pitagori, zgodovini Pitagorovega izreka, poiskali dokaze izreka ter informacije o pitagorejskih trojicah. Ponovili smo tudi o trikotnikih, ploščini likov in podobnosti, saj smo našteto potrebovali za dokazovanje naše hipoteze.

V drugem delu smo začeli raziskovati in potrjevati postavljeno hipotezo. Grafične prikaze in primere smo podkrepili z računanjem konkretnih primerov in z dokazi. Dokazali smo, da lahko kvadrate zamenjamo ne samo s podobnimi trikotniki in štirikotniki, temveč tudi z drugimi podobnimi liki. S tem smo hipotezo potrdili. Svoje poznavanje Pitagorovega izreka smo razširili in se naučili osnove dokazovanja. Zelo dobro smo se seznanili tudi s programom GeoGebra, saj smo z njim narisali večino slik, ki so sestavni del raziskovalne naloge.

Pri izpeljavah dokazov smo razmišljali tudi širše in se spraševali, ali bi lahko svojo raziskavo še razširili na druga področja. Ker se pri pouku matematike ukvarjamo z geometrijskimi telesi, se je sama po sebi ponudila ideja o "osnovnem" telesu tristrani prizmi, katere osnovna ploskev je pravokotni trikotnik, ter o prizmah, ki jih dodajamo k njenim stranskim ploskvam. Zastavljali smo si naslednja vprašanja: S katero količino pri prizmi bi preverjali Pitagorov izrek? Katere prizme bi dodajali? Ali bi lahko dodajali piramide? Ali bi lahko in kako bi definirali podobne prizme oz. piramide? Odgovori na ta vprašanja se bodo morda pojavili v kateri drugi raziskovalni nalogi.

5 VIRI

Bragg, M., Cuomo, S.,Connor, J., Stewart, I. (2009). *In Our Time*.[video posnetek]. Dostop: https://www.bbc.co.uk/sounds/play/b00p693b (22. 1. 2020)

Burkret, W. (1972). *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Harvard University Press Cambridge, Massachusetts.

Don, A. (1997). *The Orgins of Greek Mathematics*. Dostop: https://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/greekorg/greekorg.html (25. 1. 2020)

Izobraževalna delavnica. (2006). Univerza v Ljubljani, FMF. Oddelek za matematiko in mehaniko. Dostop: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2006/ura/Friedl/html/vrste_1.htm (25. 1. 2020)

FamousScientists.org. Pythagoras. (2019). Dostop: https://www.famousscientists.org/pythagoras/ (22. 12. 2019)

Gorše Pihler, M., Bence Virag, T., Šabader, R., Tratar, J., Bajramović, N., Mahnič, B., … Lešnik, V. (2014). *Matematika 9*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dostop: https://eucbeniki.sio.si/mat9/903/index.html (25. 1. 2020)

Hesselnik, K. (2016). *Mystic Minds Philosophical Ponderings and Religious Information*. Dostop: http://mystic-minds.net/blog/pythagoras/ (22. 12. 2019)

Ivanec, D., Janežič, T., Pustavrh, S., Zmazek, V., Mohorčič, A., Špolad, M., … Jericijo, O. (2014).*Vega 2*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dostop: https://eucbeniki.sio.si/vega2/244/index3.html (12. 1. 2020)

Koncilija, F. (2011). *Pitagora in njegova šola*. Časnik. Dostop: https://www.casnik.si/pitagora-in-njegova-sola/ (22. 12. 2019)

Knižnič, J., Miklavčič, R. (2013). *Množenje in razstavljanje pitagorejskih trojic*. Vipava. Dostop: http://sgv.splet.arnes.si/files/2018/06/MNO%C5%BDENJE-IN-RAZSTAVLJANJE-PITAGOREJSKIH-TROJIC.pdf (12. 1. 2020)

Pev, M., Mahnič, B., Bence Virag, T., Gorše Pihler, M., Lešnik, V., Šabeder, R., … Hauptman, A. (2014). *Matematika 8*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dostop: https://eucbeniki.sio.si/mat8/843/index3.html (12. 1. 2020)

Pythagoreanism Wikipedia. (2019). Dostop: https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoreanism (22. 12. 2019)

Strnad, M. (2013). *Stičišče 8*. Ljubljana: Jutro.

Strnad, M. (2015). *Stičišče 9*. Ljubljana: Jutro.

Škrlec, M., Repija Rauter, I., Pustavrh, S., Jericijo, O., Zmazek, V., Ivanec, D., Mohorčič, A. (2015). *Vega 3*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dostop: https://eucbeniki.sio.si/vega3/3310/index.html (25. 1. 2020)