

OKTAEDRSKA UGANKA SKEWB DIAMOND IN GRUPE

Področje:

MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

Avtorja:

Jernej Starčič, 1. letnik

Martin Starčič, 3. letnik

GIMNAZIJA BEŽIGRAD

Mentor:

Vilko Domajnko

Ljubljana, 2025

POVZETEK

V nalogi sva raziskovala algebrsko strukturo množice \mathcal{G} , ki jo sestavljajo premiki kombinacijske oktaedrske mehanske igrače Skewb Diamond. Ugotovila sva, da je \mathcal{G} permutacijska grupa, ki je direktni oziroma poldirektni produkt nekaterih njenih podgrup, $\mathcal{G} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times (\mathcal{P} \rtimes \mathcal{O})$, kjer \mathcal{C}_1 in \mathcal{C}_2 predstavljata premike centralnih koščkov, \mathcal{P} spremembe položajev vogalnih koščkov, \mathcal{O} pa premike, ki lahko spremenijo le orientacijo vogalov. Še več, \mathcal{C}_1 in \mathcal{C}_2 sta izomorfni A_4 , podgrupa \mathcal{P} je izomorfna A_6 , podgrupa \mathcal{O} pa $(\mathbb{Z}_2)^5$. Izpeljave in dokazi so narejeni na elementaren način in podkreppljeni s konkretnimi izračuni permutacij določenih premikov. Pokazala sva tudi, da \mathcal{G} vsebuje natanko elemente redov 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 24 in 30 ter poiskala še nekaj njenih podgrup.

KLJUČNE BESEDE

Skewb Diamond, kombinacijske uganke, grupe, podgrupe, poldirektni produkt

ABSTRACT

In the research, we study the algebraic structure of the set \mathcal{G} containing moves of the Skewb Diamond combinatorial octahedral mechanical puzzle. We prove that \mathcal{G} is a permutation group, which is a direct or semidirect product of some of its subgroups, $\mathcal{G} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times (\mathcal{P} \rtimes \mathcal{O})$, where \mathcal{C}_1 and \mathcal{C}_2 rearrange the center pieces, \mathcal{P} changes the positions of the corner pieces, and \mathcal{O} rotates the corners. Moreover, \mathcal{C}_1 and \mathcal{C}_2 are isomorphic to A_4 , subgroups \mathcal{P} and \mathcal{O} are isomorphic to A_6 and $(\mathbb{Z}_2)^5$, respectively. Proofs are presented in an elementary way and confirmed with concrete calculations of permutations of certain moves. We also show that \mathcal{G} contains precisely elements of orders 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 24, 30, and we find some of its subgroups.

KEYWORDS

Skewb Diamond, combinatorial puzzle, permutation groups, subgroups, semidirect product

Vsebina

1. UVOD	5
1.1 HIPOTEZE	5
2. PRIPRAVA	6
2.1 KOMBINACIJSKE MEHANSKE IGRAČE IN OKTAEDRSKA UGANKA	6
2.2 ALGORITMI IN NOTACIJA	7
2.3 PERMUTACIJE	9
2.4 GRUPE	12
3. GRUPE PRI OKTAEDRSKI UGANKI	15
3.1 MNOŽICA PREMIKOV	15
3.2 CENTRI	17
3.3 POLOŽAJ VOGALOV	19
3.4 ORIENTACIJA VOGALOV	20
3.5 GRUPNA STRUKTURA OKTAEDRSKE UGANKE SKEWB DIAMOND	23
3.6 REDI ELEMENTOV V GRUPI OKTAEDRSKE UGANKE SKEWB DIAMOND	27
3.7 PODGRUPE GRUPE OKTAEDRSKE UGANKE SKEWB DIAMOND	29
3.8 DODATNA POTRDITEV IZRAČUNOV V PROGRAMU MATHEMATICA	31
4. ZAKLJUČEK	34
5. VIRI IN LITERATURA	36

Kazalo slik

Slika 1: Vse najine mehanske uganke.	6
Slika 2: Sestavljen Skewb Diamond.....	7
Slika 3: Premešan Skewb Diamond.....	7
Slika 4: Premik R.....	8
Slika 5: Premik L.....	8
Slika 6: Premik U.....	8
Slika 7: Premik U' reši uganko.....	9
Slika 8: Oštevilčene ploskvice Skewb Diamonda	10
Slika 9: Sestavljena uganka premešana s premikom Vi	11
Slika 10: Sestavljena uganka premešana s premikom Ze	11
Slika 11: Dva 2-cikla centrov (4,28)(20,24)	16
Slika 12: Dva 2-cikla centrov (4,28)(20,24) (zadaj).....	16
Slika 13: 3-cikel centrov (20,24,28).....	17
Slika 14: 3-cikel centrov (4,20,28).....	18
Slika 15: 3-cikel vogalov in centrov	19
Slika 16: 3-cikel vogalov in centrov (zadaj)	19
Slika 17: Premik L'WL	20
Slika 18: Obrat dveh vogalov na Skewb Diamondu	21
Slika 19: Obrat dveh vogalov na Pyraminxu.....	21
Slika 20: Obrat sosednjih vogalov	21
Slika 21: Druga stran Skewb Diamonda z izbiro predznakov in oštevilčenimi vogali.....	22
Slika 22: Skewb Diamond z izbiro predznakov in oštevilčenimi vogali (zadaj)	22
Slika 23: Skewb Diamond z označenimi orientacijami in označenimi vogali (zadaj)	22
Slika 24: Skewb Diamond z označenimi orientacijami in označenimi vogali	22
Slika 25: Drugačna izbira predznakov	25
Slika 26: Premik L pri drugačni izbiri predznakov.....	25
Slika 27: Super-obrat.....	27
Slika 28: Super-obrat (zadaj)	27
Slika 29: Izračuni v Mathematici 1	32
Slika 30: Izračuni v Mathematici 2	33

1. UVOD

Kombinacijske mehanske uganke so na videz preproste igrače, sestavljene iz majhnih različno obarvanih koščkov, vrtljivih v več smereh, ki jih želimo spraviti v prvotno stanje. Že skoraj pol stoletja se zanje zanimajo ljudje po vsem svetu in tudi naju so navdušile.

Po več letih reševanja takih ugank, sva se pred štirimi leti odločila narediti raziskovalno nalogo (Starčič, 2022), ki bi sistematično obravnavala algoritme za reševanje mehanskih ugank v obliki platonskih teles, kar nama je tudi uspelo. Že takrat pa sva v literaturi zasledila, da se v stanjih teh ugank skriva še veliko zakonitosti, še več matematike.

Radovedna sva najprej našla knjigi (Singmaster, 1981) in (Bandelow, 1982), kjer so dokaj natančno in sistematično opisane permutacijske grupne strukture premikov Rubikove kocke, Pyraminx, Megaminx in Skewba. Za večino ostalih ugank, med katere sodi tudi oktaedrska, pa je le malo zanesljivih virov, že samo z ustreznimi opisi algoritmov, grupna struktura pa je v najboljšem primeru pomanjkljivo opisana. Vse to je v nama sprožilo željo po novih odkritjih.

Glavno pozornost v nalogi bova namenila morda komu manj znani oktaedrski uganki Skewb Diamond. O algebrski strukturi premikov te uganke (primer 2.3.1) govori le članek (Turner in Gold, 1985, Theorem 1), kjer je opis podan zgolj v okviru skupnega izreka za vse platonske poliedrske uganke. Odločila sva se, da sama prideva do natančnejšega opisa.

Osrednji del naloge je razdelek 3, kjer je obravnavana grupna struktura Skewb Diamonda. Pri njenem opisu sva si pomagala z idejami, ki so bile uporabljene pri študiju Rubikove kocke in Pyraminx (Joyner, 2008, razdelki 11-13), vendar sva morala argumente ustrezno prilagoditi. Še več, dokaze glavnih izrekov 3.2.1, 3.5.1-3.5.3 sva s pomočjo novih algoritmov zapisala v manj abstraktnem jeziku notranjega poldirektnega produkta. Ugotovitve sva podkrepila s konkretnimi izračuni permutacij ustreznih premikov, ki sva jih sproti kontrolirala s programom Mathematica (Wolfram 14.1, 2024). Poiskala sva tudi premike vseh možnih redov (izrek 3.6.1).

Za lažje razumevanje in boljšo preglednost sva besedilo opremila s fotografijami in z grafičnimi prikazi delov ravninskih mrež oktaedrske uganke v določenih stanjih. Fotografije sva posnela sama, grafike pa izrisala s programom GeoGebra (Geogebra GmbH, 2020).

1.1 HIPOTEZE

- 1. Premike, ki vodijo do različnih pozicij Skewb Diamonda, lahko matematično opišemo s permutacijami, povezave med njimi pa z algebrasko strukturo - grupo.**
- 2. Poznavanje matematičnega ozadja oktaedrske uganke nam bo omogočilo boljše razumevanje že znanih algoritmov za reševanje uganke in koristilo pri iskanju novih.**
- 3. Pri raziskavi grupne strukture poldirektnega produkta Skewb Diamonda si lahko pomagamo z ustrezno prilagoditvijo metod, ki so bile uporabljene že pri študiju sorodnih ugank, ter tudi z računalnikom.**
- 4. Dokaze lahko naredimo na elementaren način tako, da vsak korak vizualiziramo s premikom oktaedrske uganke in podkrepimo s konkretnimi izračuni permutacij.**

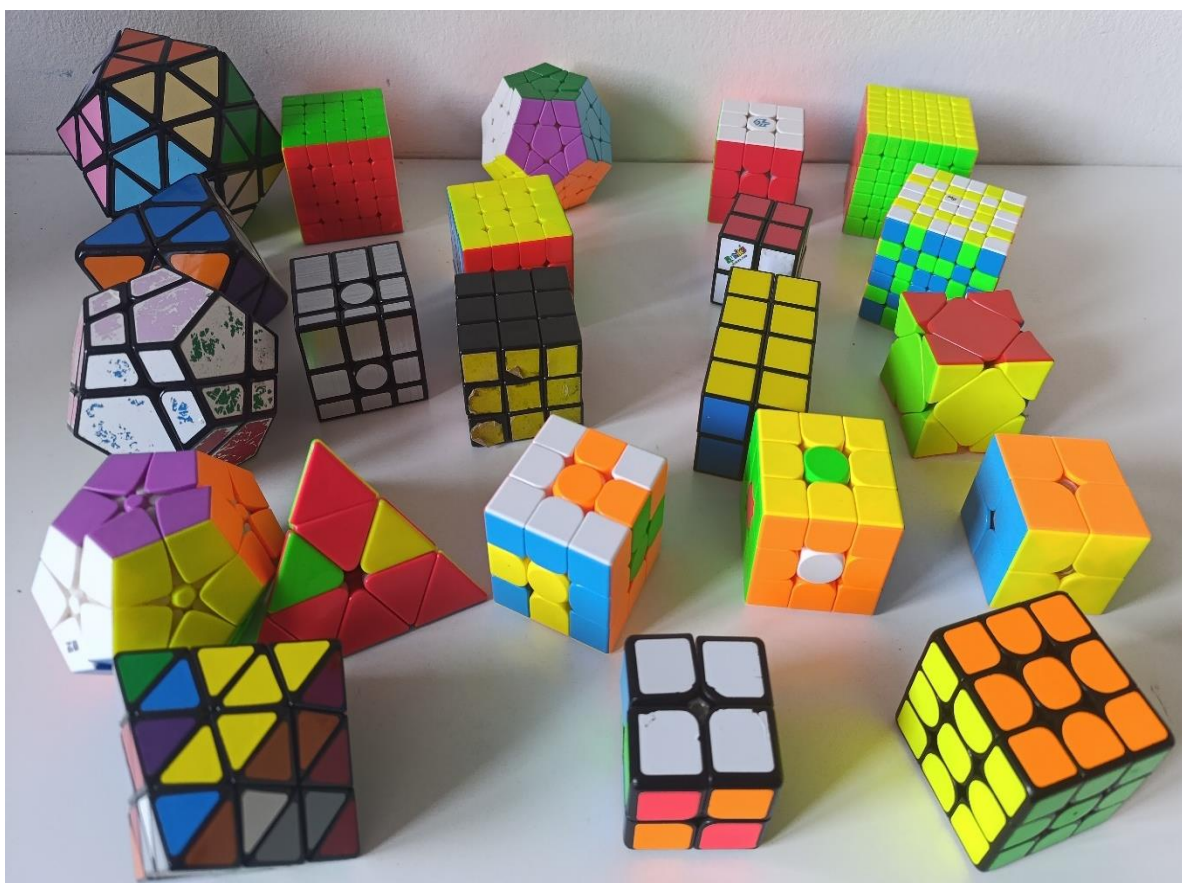
2. PRIPRAVA

Definicije, trditve in opisi pojmov v tem razdelku so splošno znani in jih najdemo v literaturi (Joyner, 2008), (Mullholand, 2021), (Roitman, 2005) in spletu (Wikipedia contributors, 2024).

2.1 KOMBINACIJSKE MEHANSKE IGRAČE IN OKTAEDRSKA UGANKA

Kombinacijske mehanske igrače so matematične uganke, ki so sestavljene iz koščkov, ki jih lahko premikamo v različne pozicije. Veliko takih igrač je v obliki poliedrov (Slika 1). Sestavljene so iz več manjših delov, ki se vrtijo okoli nevidnega jedra. Ploskve uganke so sestavljene iz manjših ploskvic, ki so pobarvane z neko barvo. Vrtenje vsakega dela uganke dovoljuje, da se lahko manjše ploskvice razporedijo na več različnih načinov. Najbolj znana med temi ugankami je Rubikova kocka, mi pa se bomo v nadaljevanju posebej posvetili tisti, v obliki oktaedra.

Ponavadi je cilj take uganke sestaviti ploskve enakih barv. Začne se z naključno (pomešano) kombinacijo, ter se išče določeno (začetno) kombinacijo. Midva se bova v nalogi nekoliko bolj poglobila v povezave med posameznimi pozicijami. Mehanska konstrukcija običajno določa pravila, po katerih je mogoče spremeniti kombinacijo. To vodi do nekaterih omejitev.



Slika 1: Vse najine mehanske uganke.

Oktaedrska uganka ali **Skewb Diamond** je permutacijska uganka v obliki oktaedra, platonskega geometrijskega telesa z 8 trikotnimi ploskvami, 6 oglišči in 12 robovi.

Zgrajen je iz 8 centralnih koščkov (**centrov**) in 6 vogalnih koščkov (**vogalov**), katerih stranske ploskve so različno obarvane. Za razliko od veliko drugih poliedrskih ugank Skewb Diamond nima fiksnih centrov, ampak se ti lahko premikajo. Vsako od ploskev lahko obrnemo za 120 stopinj v katero koli od dveh smeri, pri čemer premaknemo natanko polovico oktaedra. Uganko je izumil Michael Richter leta 1985 (številka patenta DE3333914), izdelovati in prodajati pa jo je začel Uwe Meffert leta 2015.

Izkaže se, da so lahko vogali Skewb Diamonda orientirani na 2 različna načina, premešamo pa ga lahko na $\frac{4! \cdot 6! \cdot 2^5}{4} = 138240$ načinov. Najmanjše možno število potez, da uganko iz poljubnega stanja spravimo v prvotno stanje je 10 (božje število). V nadaljevanju ga bova preučila še z uporabo osnov teorije grup.

Težko je bilo najti vire, ki bi obravnavali to uganko, zato sva morala o njej veliko ugotoviti sama. Pomagala sva si z nekaj knjigami o Rubikovi kocki, s člankom, ki zelo na kratko omenja oktaedrsko uganko, ter z nekaj krajšimi avdio-vizualnimi posnetki v angleščini.

Sestavljen (Slika 2) in premešan (Slika 3) Skewb Diamond:



Slika 2: Sestavljen Skewb Diamond.



Slika 3: Premešan Skewb Diamond.

2.2 ALGORITMI IN NOTACIJA

Algoritem je točno določeno zaporedje korakov za izvedbo nekega postopka (npr. recept). Pomaga nam pri raziskovanju in proučevanju kombinatoričnih ugank.

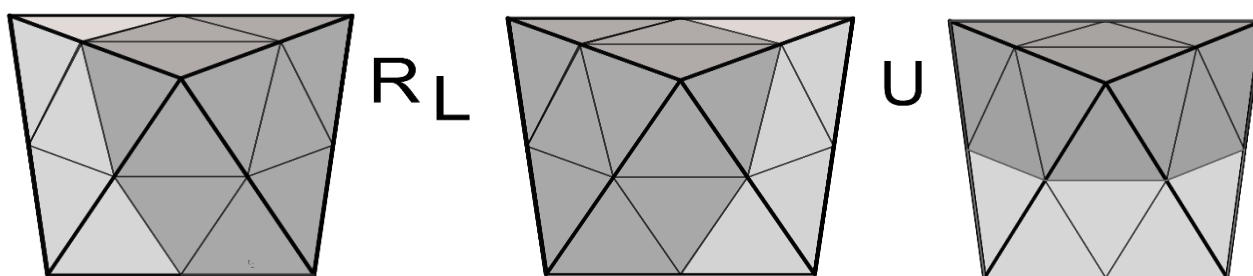
Nekateri algoritmi imajo posebne lastnosti. Npr. **cikel** je algoritem, ki podaja ciklično zamenjavo določenih koščkov, ostali koščki pa ostanejo na svojih mestih.

Za zapisovanje algoritmov je zelo pomembna **notacija**. To je nabor dogovorjenih simbolov (črk), s katerimi opišemo posamezne korake v algoritmu.

David Singmaster (Singmaster, 1981) je vpeljal notacijo za Rubikovo kocko $3 \times 3 \times 3$, ki jo še danes uporabljamo za zapisovanje premikov (algoritmov). Notacija za ostale uganke je podobna.

Osnovni premiki ploskev v smeri urinega kazalca se označujejo v velikimi tiskanimi črkami, ter so kar začetne črke besed v angleščini, ki nam povedo, na katerem mestu je ploskev. Denimo U in L (up oz. left) ustrežata premikoma zgornje oziroma leve ploskve v smeri urinega kazalca (Slika 5 in Slika 6). Za ustrezne premike v nasprotni smeri urinega kazalca pa uporabljamo enake črke z dodatno črtico desno zgoraj, npr. U' in L'. Premiki so lahko sestavljeni iz zaporedja več osnovnih premikov, npr. premik, ki ustreza zaporednima osnovnima premikoma U in L, označimo z UL.

Notacija pri Skewb Diamondu je izbrana na naslednji način. Postavimo ga tako, da sta zgornja in spodnja ploskev vzporedni s podlago, pred seboj imamo sprednjo ploskev obrnjeno z enim ogliščem navzgor, kot prikazujejo spodnje slike.



Slika 4: Premik R.

Slika 5: Premik L.

Slika 6: Premik U.

U (angl. up – zgoraj) = premik zgornje ploskve v smeri urinega kazalca

U' = premik zgornje ploskve v obratni smeri urinega kazalca

R (angl. right – desna) = premik desne ploskve v smeri urinega kazalca

R' = premik desne ploskve v obratni smeri urinega kazalca

L (angl. left – leva) = premik leve ploskve v smeri urinega kazalca

L' = premik leve ploskve v obratni smeri urinega kazalca

D (angl. down – spodaj) = premik spodnje ploskve v smeri urinega kazalca

D' = premik spodnje ploskve v obratni smeri urinega kazalca

Zaradi rotacijske simetrije uganke po dveh zaporednih enakih osnovnih premikih dobimo enako stanje kot z obratnim premikom, npr. $U^2 = UU=U'$, po treh zaporednih istih osnovnih premikih pridemo nazaj v začetno stanje.

Oznake premikov so seveda odvisne od tega, kako je uganka postavljena. Na sliki 7 vidimo stanje uganke, ki ga po premiku U dobimo iz sestavljene uganke z rdečo ploskvijo zgoraj in belo spredaj, z nadaljnjim obratnim premikom U' pa bi jo spet sestavili.



Slika 7: Premik U' reši uganko.

2.3 PERMUTACIJE

Permutacija elementov neke množice je razporeditev teh elementov v določen vrstni red. Vseh šest permutacij elementov množice a, b, c je: $[a, b, c]$, $[a, c, b]$, $[b, a, c]$, $[b, c, a]$, $[c, a, b]$ in $[c, b, a]$.

Dvovrstični zapis je standardna predstavitev permutacije. Naprimer, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ predstavlja permutacijo množice števil $\{1, 2, 3\}$, kjer je zgornja vrstica 1, 2, 3 začetna razvrstitev števil, spodnja vrstica 2, 1, 3 pa končna razvrstitev teh števil. Pri tem je pomembno le, kako so bila zamenjana števila v začetni razvrstitvi. Pomembni so torej stolpci, ne pa njihov vrstni red, npr.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Identiteta ali identična permutacija, označena z **id**, je posebna permutacija, ki ima enaki vrstici – nič se ne spremeni, npr. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Razporeditvi koščkov sestavljene Rubikove kocke ali Skewb Diamonda (v začetnem stanju) pripada take vrste permutacija.

Komponiranje permutacij, ki mu rečemo tudi **produkt**, je operacija, ko 2 permutaciji izvedemo eno za drugo in pridemo do nove permutacije, npr.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Pri prvi permutaciji je 5 pod 1, pri drugi pa je 4 pod 5. Zato je v novi permutaciji 4 pod 1. Pri prvi permutaciji je 3 pod 2, pri drugi pa 2 pod 3. Zato je v novi permutaciji 2 pod 2. Enako

velja za vse ostale. Kompozicija permutacij, ki pripadata neki razporeditvi in premiku, pa pripada razporeditvi po opravljenem premiku.

Pozor, vrstni red je pomemben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Če pogledamo zgornji zapis, vidimo, da je končni rezultat drugačen kot pri prejšnjem množenju. Pri permutacijskih ugankah denimo z izvajanjem dveh potez v obratnem vrstnem redu pridemo v drugačno stanje.

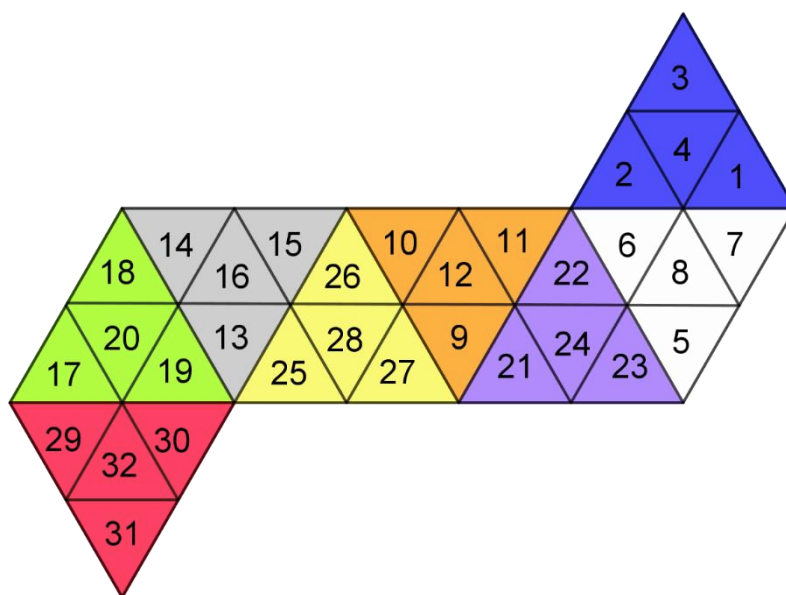
Obratna ali inverzna permutacija (zamenjani vrstici in lahko preurejeni):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Cikel je tista permutacija, pri kateri se nekaj elementov ciklično zamenja med seboj, ostali elementi pa se ne premešajo. Primer: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, kjer je 2 pod 1, 4 pod 2, 5 pod 4 in 1 pod 5 (3 je pod 3 in 6 pod 6). Skrajšan zapis je (1, 2, 4, 5).

Z izrazom cikel pri permutacijski uganki poimenujemo pojav, ko se nekaj koščkov na uganki ciklično zamenja, ostali pa ostanejo na svojem mestu. Poimenujemo jih glede na to, koliko koščkom dani cikel spremeni položaj. Cikel, ki premakne naprimer 3 koščke, imenujemo 3-cikel, tistega, ki pa premakne le 2 koščka, pa 2-cikel. Cikli so pogosto uporabljeni za reševanje mehanskih permutacijskih ugank.

Primer 2.3.1. (permutacijska uganke) Gibljive koščke oziroma ploskvice sestavljene mehanske uganke Skewb Diamond označimo s številkami od 1 do 32 (Slika 8). Potem nam premešana uganke predstavlja neko permutacijo teh števil.



Slika 8: Oštevilčene ploskvice Skewb Diamonda

Katerikoli premik ploskev v smeri urinega kazalca (**osnovni premik**) predstavlja permutacijo ploskvic, ki je sestavljena iz več disjunktnih ciklov:

$M_o = (26,18,22) (15,7,11) (10,14,6) (3,1,2) (16,8,12),$

$V_i = (27,2,17) (9,6,29) (31,11,5) (21,22,23) (12,8,32),$

$Z_e = (25,23,1) (30,5,14) (13,29,7) (19,17,18) (16,32,8),$

$R_d = (25,21,17) (13,9,5) (19,27,23) (30,31,29) (28,24,20),$

$B_e = (11,14,29) (18,23,2) (7,5,6) (1,17,22) (4,20,24),$

$S_i = (13,14,15) (10,30,7) (26,19,1) (3,25,18) (28,20,4),$

$O_r = (9,10,11) (31,15,6) (27,3,22) (21,26,2) (28,4,24),$

$R_u = (25,26,27) (19,3,21) (31,13,10) (30,15,9) (16,12,32).$

Zaporedno vrtenje ploskev Skewb Diamonda pravzaprav predstavlja množenje permutacij ustreznih osnovnih premikov.



Slika 9: Sestavljena uganka premešana s premikom V_i



Slika 10: Sestavljena uganka premešana s premikom Z_e

Definicija 2.3.3. Permutacija, ki jo lahko zapišemo kot produkt sodega števila 2-ciklov, je **soda**.

Opomba. Vsako permutacijo lahko sestavimo le z 2-cikli, ki se lahko prepletajo (niso nujno disjunktni).

Trditev 2.3.4. (a) Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov.

(b) Vsaka soda permutacija je produkt (disjunktnih) 3-ciklov.

Kolikšno pa je **število vseh permutacij**? Imejmo množico z n elementi (npr. n koščkov mehanske uganke). Na prvo prosto mesto lahko postavimo katerega koli izmed n elementov

(koščkov), za drugo mesto je le še $n - 1$ možnosti, za tretje mesto $n - 2$ možnosti in tako naprej. Zadnji element je povsem določen. Torej je število permutacij množice z n elementi enako vrednosti računске operacije faktoriele oz. fakulteti, kar označimo z $n!$:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Kaj pa, če imamo kakšne omejitve? Primer: V naslednjih razdelkih bomo videli, da ima Skewb Diamond 8 centrov, ki so razdeljeni v dve skupini po 4, ter se lahko premešajo le znotraj posamezne skupine. Za prvi center ene skupine imamo na voljo 4 mesta, za drugega 3 (saj smo 1 že porabili), za tretjega 2, četrti center pa lahko zasede le edino preostalo mesto. Vseh možnosti je torej $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$. Enako velja tudi za drugo skupino centrov. Skupaj je torej $4! \cdot 4!$ možnosti.

V nalogi se bomo srečali še z enim pojmom, **permutacijami s ponavljanjem**. Primer: Skewb Diamond ima 6 vogalov, pri čemer bomo videli, da je 5 obrnjenih (orientiranih) na kateregakoli izmed 2 načinov, orientacija preostalega pa je s tem natančno določena. Tukaj imamo $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ možnosti.

2.4 GRUPE

Pojem **grupe** je formalno vpeljal Camille Jordan leta 1870, čeprav so bile osnovne ideje v zvezi s tem znane že precej prej. Z grupami lahko matematično opišemo mehanske permutacijske uganke, kot je v našem primeru Skewb Diamond. A najprej moramo spoznati nekaj osnovnih pojmov in definicij.

Definicija 2.4.1. Neprazna množica G z binarno operacijo $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ je grupa, če velja:

- (a) **Asociativnost:** Operacija \cdot je asociativna, to pomeni, da za vse $g, h, k \in G$ velja $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$.
- (b) **Obstoj nevtralnega elementa (identitete):** V množici G obstaja nevtralni element e , t.j. za vsak $g \in G$ velja $e \cdot g = g \cdot e = g$.
- (c) **Obstoj inverza:** Vsak element $g \in G$ ima inverz (označimo g') glede na nevtralni element, to pomeni, za vsak $g \in G$ obstaja $g' \in G$, da je $g \cdot g' = g' \cdot g = e$.

Opomba. Znak \cdot ponavadi izpustimo in namesto $g \cdot h$ zapišemo le gh .

Opomba. Ni težko videti, da je identiteta enolično določena, vsak element v grupi pa ima natanko en inverz. Za poljubna $g, h \in G$ velja tudi $(gh)' = h'g'$.

Če poljubna elementa grupe G **komutirata**, t.j. $gh = hg$ za vse $g, h \in G$, rečemo, da je grupa **komutativna** ali Abelova.

Primeri 2.4.2. Osnovni zgledi grup:

- (a) Racionalna števila \mathbb{Q} brez 0 so grupa za operacijo množenja \cdot .
- (b) Cela števila \mathbb{Z} so grupa za operacijo seštevanja $+$.
- (c) Množica števil $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ je komutativna **grupa ostankov** za seštevanje po modulu n , ki jo označimo jo z \mathbb{Z}_n ; rečemo ji **ciklična grupa** z n elementi.
- (d) Permutacije n elementov so grupa za operacijo komponiranja (množenja), imenuje se **simetrična grupa** in se označi z S_n .
- (e) Permutacije oglišč pravilnega n -kotnika, ki jih dobimo z rotacijami in zrcaljenji, ki ga ohranjajo, predstavljajo **diedrsko grupo** D_n . Naprimer:

$$D_5 = \{\text{id}, (2,5) (3,4), (1,2) (3,5), (1,2,3,4,5), (1,3) (4,5), (1,3,5,2,4), (1,4,2,5,3), \\ (1,5,4,3,2), (1,4) (2,3), (4,2) (5,1)\}.$$

Definicija 2.4.3. Podmnožica H grupe G , ki je sama zase tudi grupa, je **podgrupa** G .

Opomba. Velja, da je H podgrupa grupe G , če je za vse $g, h \in H$ velja $gh \in H$ (zaprtost za podedovano operacijo) ter je inverz vsakega elementa iz H tudi vsebovan v H .

Primer 2.4.4. Videli bomo, da so premiki oktaedrske permutacijske uganke podgrupa ustrezne simetrične grupe.

Definicija 2.4.5. Če sta g, h elementa grupe G , potem element hgh' imenujemo **konjugiranka** elementa g po h .

Primer 2.4.6. Če cikel $(1,2,3)$ konjugiramo z $(2,4)$, se v tem ciklu 2 zamenja s 4:

$$(2,4) (1,2,3) (2,4)' = (2,4,3,1) (4,2) = (1,4,3) .$$

Definicija 2.4.7. Podgrupa H grupe G je **edinka**, če je $ghg' \in H$ za vse $g \in G$ in $h \in H$.

Primer 2.4.8. Množica sodih permutacij n elementov, označena z A_n , se imenuje **alternirajoča grupa** in je podgrupa edinka simetrične grupe S_n .

Definicija 2.4.9. Bijektivna preslikava f , ki G preslika v H tako, da **spoštuje operacijo** med elementi, t.j. $f(gh) = f(g)f(h)$ za vse $g, h \in G$, je **izomorfizem grup**. V tem primeru pravimo, da je G **izomorfna** H .

Primer 2.4.10. Dana je grupa $H = \{\text{id}, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (4,3,2,1)\}$. Elementom $\text{id}, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (4,3,2,1)$ z bijekcijo f zaporedoma priredimo elemente $0, 1, 2, 3$ v \mathbb{Z}_4 . Preverimo

$$f((1,2,3,4)) + f((1,3)(2,4)) = f((1,2,3,4)((1,3)(2,4)))$$

$$1 + 2 = f((4,3,2,1))$$

$$3 = 3.$$

Podobno velja za vse ostale pare elementov, zato sta H in \mathbb{Z}_4 izomorfni.

Definicija 2.4.11. V končni grupi G z enoto e je **red elementa** $g \in G$, z oznako $\text{red}(g)$, enak najmanjšemu naravnemu številu n , za katerega je $g^n = e$.

Opomba. Če je G končna grupa z m elementi, potem red katerega koli elementa grupe G deli m . Posebej je $g^m = e$ za vse $g \in G$.

Primer 2.4.12. Naj bo $G = \{1, a, a^2, \dots, a^{m-1}\}$ grupa reda m . Bijekcija med G in \mathbb{Z}_m , ki a^j priredi j , je izomorfizem grup.

3. GRUPE PRI OKTAEDRSKI UGANKE

V nadaljevanju se bomo posvetili algebrski strukturi množice pozicij (premikov) oktaedrske permutacijske uganke. V literaturi ali na spletu najdemo zelo malo napisanega o algoritmih za reševanje te uganke, o strukturi množice premikov pa še manj.

Na podlagi ugotovitev avdio-vizualnega posnetka na spletu (Penguin, 2014) in spletne strani (Scherphuis, 2021) sva prišla do algoritmov za sestavljanje te uganke, ki sva jih predstavila v jeziku permutacij osnovnih premikov (brez obračanja uganke).

Širše strukture Skewb Diamonda sva se lotila z orodji in prijemi, ki so se uporabili že za študij Rubikove kocke in Pyraminx (Joyner, 2008, razdelki 11-13), (Mullholland, 2021, Theorem 20.2.1), vendar sva jih morala ustrezno prilagoditi. Po obsežnem iskanju literature na temo grupne strukture Skewb Diamonda sva našla le en članek (Gold in Turner, 1985, Theorem 1), pa še tu je obravnava zelo splošna. Našla sva nekaj novih algoritmov in dokaza izrekov 3.5.1 in 3.5.2 zapisala v manj abstraktnem jeziku notranjega (ne zunanega) poldirektnega produkta.

3.1 MNOŽICA PREMIKOV

Oktaeder postavimo tako, da je bela ploskev spodaj, rumena zgoraj, modra spredaj itd. **Zaradi preglednosti in jasnosti** od sedaj naprej med premikanjem Skewb Diamonda **ne bomo več obračali**. Za **osnovne premike** permutacijske uganke Ru, Or, Si, Be in Rd iz primera 2.3.1, (Slika 8), določene z vrtenjem rumene, oranžne, sive, bele in rdeče ploskve, bomo v nadaljevanju uporabljali kar oznake U, L, R, D in B:

$$U = (25,26,27) (19,3,21) (31,13,10) (30,15,9) (16,12,32),$$

$$L = (9,10,11) (31,15,6) (27,3,22) (21,26,2) (28,4,24),$$

$$R = (13,14,15) (10,30,7) (26,19,1) (3,25,18) (28,20,4),$$

$$D = (11,14, 29) (18,23,2) (7,5,6) (1,17,22) (4,20,24),$$

$$B = (25,21,17) (13,9,5) (19,27,23) (30,31,29) (28,24,20).$$

Množico vseh permutacij, ki jih dobimo kot končni produkt permutacij osnovnih premikov (iz primera permutacijske uganke v razdelku 2.3) in njihovih inverzov označimo z \mathcal{G} .

Izrek 3.1.1. Množica premikov oktaedrske uganke \mathcal{G} je podgrupa simetrične grupe S_{32} .

Dokaz izreka 3.1.1. Jasno je, da so permutacije v \mathcal{G} vsebovane v grupi vseh permutacij z 32 elementi S_{32} . Dokazati moramo, da je \mathcal{G} grupa (definicija 2.4.1). To pomeni:

1. **Zaprto za operacijo množenja permutacij.** Vsak element \mathcal{G} je produkt končnega zaporedja osnovnih premikov. Produkt oziroma kombinacija dveh premikov je seveda spet premik, ki je podan s končnim številom osnovnih premikov.

2. **Enota.** $R^3 = \text{id}$ je vsebovana v \mathcal{G} .

3. **Inverz.** Vzemimo zaporedje osnovnih premikov $(x_1 x_2 \dots x_n)$ in pokažimo, da je njegov inverz enak $(x_1 x_2 \dots x_n)' = (x_n' x_{n-1}' \dots x_1')$:

$$(x_1 x_2 \dots x_n) (x_1 x_2 \dots x_n)' = x_1 \dots x_n x_n' x_{n-1}' \dots x_1' = (x_1 \dots x_{n-1}) \text{id} (x_{n-1}' \dots x_1') = \dots = \text{id}$$

in podobno $(x_1 x_2 \dots x_n)' (x_1 x_2 \dots x_n) = \text{id}$.

4. **Asociativnost.** Ta se podeduje iz množice S_{32} . ■

Opomba. Grupa \mathcal{G} ni komutativna, saj $UL \neq LU$ (oziroma $ULU'L' \neq \text{id}$).

$$UL = (2,21,19,22,27,25) (3,26) (4,24,28) (6,31,13,11,9,30) (10,15) (12,32,16),$$

$$U'L' = (2,26,25,22,3,19) (4,28,24) (6,15,30,11,10,13) (9,31) (12,16,32) (21,27).$$

Pomemben algoritem pri sestavljanju poliedrskih ugank je **komutator dveh premikov** P_1 in P_2 : $P_1 P_2 P_1' P_2'$, npr. komutator osnovnih premikov U in L je

$$ULU'L' = (2,27,22,21)(3,25,26,19)(6,9,11,31)(10,30,15,13).$$

Premika **komutirata**, natanko tedaj, ko je njun komutator trivialen (enak identiteti).

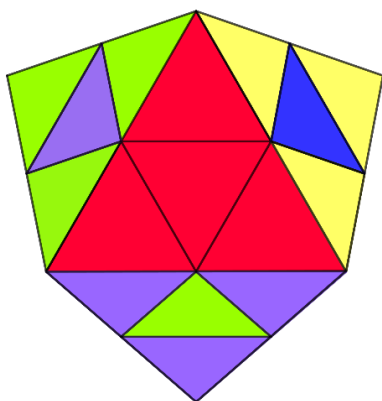
Oglejmo si še en zanimiv primer uporabe komutatorja:

$$RL' = (1,21,2,26,19) (3,25,18,27,22) (4,24) (6,15,13,14,31) (7,9,11,10,30) (20,28)$$

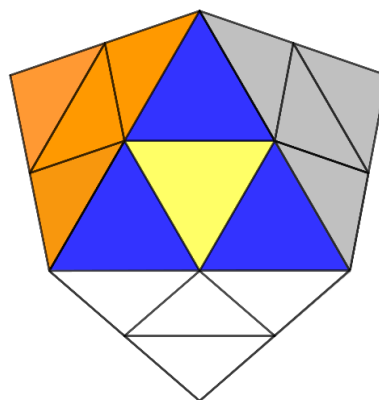
$$R'L' = (1,19,2,21,26) (3,18,25,22,27) (4,20) (6,31,15,14,13) (7,30,11,9,10) (24,28)$$

$$RL'R'L = (1,26,2) (3,22,18) (4,28) (6,14,15) (7,10,11) (20,24)$$

$(RL'R'L)^3 = (4,28) (20,24)$ sta dva disjunktna 2-cikla centrov (Slika 11, Slika 12).



Slika 11: Dva 2-cikla centrov $(4,28)(20,24)$



Slika 12: Dva 2-cikla centrov $(4,28)(20,24)$ (zadaj)

Daljšje izračune produktov večjega števila permutacij osnovnih premikov se da elegantno izračunati oziroma preveriti kar s pomočjo mehanske igrace Skewb Diamond, kjer na ploskvice napišemo števila od 1 do 32 kot v primeru 2.3.1, nato pa opazujemo, kam se premikajo.

3.2 CENTRI

Opazimo, da so osnovni premiki produkti disjunktnih 3-ciklov ploskvic na nesosednjih ploskvah. Centri se pri tem nujno premaknejo v centre.

Še več, centre lahko razdelimo v dve disjunktni množici tako, da sta centra na sosednjih ploskvah v različnih množicah. V začetnem stanju so centri na pozicijah $A = \{4, 24, 28, 20\}$ in $B = \{8, 12, 16, 32\}$ (primer 2.3.1). Opazimo, da se pri vsakem od osnovnih in zato pri kateremkoli drugem premiku center premakne na pozicijo znotraj teh dveh množic.

Par 2-ciklov centrov $(RL'R'L)^3 = (4,28)(20,24)$ smo v prejšnjem razdelku dobili s trikratnim zaporednim komutatorjem.

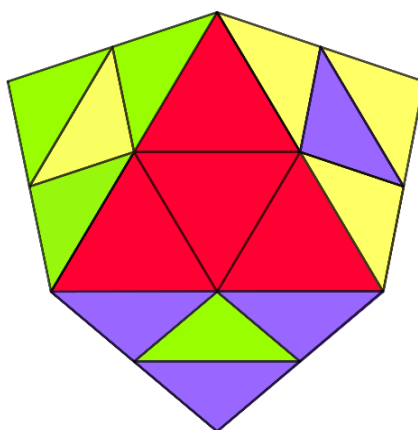
V nadaljevanju si oglejmo še enostavnejši algoritem za premik centrov. Opazimo, da je

$$RL'R'L = (1,2)(3,27)(6,14)(7,11)(9,10)(15,31)(18,22)(20,28,24)(21,26)$$

3-cikel centrov $(20,28,24)$, ter par 2-ciklov vogalov, ki sta predstavljena s paroma po dveh parov množic s po štirimi ploskvicami oziroma pripadajočimi četvericami števil $\{1, 7, 14, 18\}$ in $\{2, 11, 6, 22\}$, ter $\{3,10,15,26\}$ in $\{27,9,31,21\}$.

Primer 3.2.1. Z dvema zaporednima premikoma $RL'R'L'$ dobimo 3-cikel centrov $(20,24,28)$ (Slika 13):

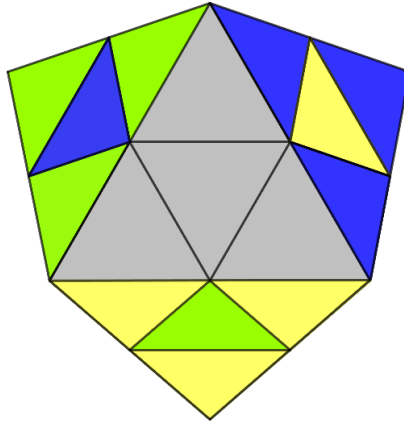
$$T := (RL'R'L')^2 = (20,24,28).$$



Slika 13: 3-cikel centrov $(20,24,28)$

Pokažimo, da je mogoče dobiti prav vse 3-cikle centrov znotraj ene izmed danih množic A ali B. Z enim izmed osnovnih premikov je možno kateri koli center iz dane množice A spraviti v katerega koli od preostalih treh. S konjugiranjem 3-cikla T z osnovnimi premiki dobimo ostale 3-cikle centrov iz množice A. Podobno velja tudi za 3-cikle v množici B. Oglejmo si primer, ko v ciklu T s konjugiranjem s premikom L' center 24 zamenjamo s centrom 4 (Slika 14):

$$L'TL = (4, 20, 28).$$



Slika 14: 3-cikel centrov (4,20,28)

Velja, da 3-cikli generirajo vse sode permutacije (tudi pare 2-ciklov) centrov znotraj množic A in B (trditev 2.3.4 (b)). Lihih permutacij centrov znotraj ene izmed danih množic A ali B pa ni, saj vsi premiki sodo permutirajo centre. Pokažemo lahko smo naslednji izrek:

Izrek 3.2.1. Naj bo \mathcal{G} grupa vseh premikov uganke Skewb Diamond, ter naj bodo v množici $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ natanko vsi tisti premiki, ki ohranijo vogale na svojih začetnih mestih z začetno orientacijo (centre pa permutirajo). Naprej naj zaporedoma množici \mathcal{C}_1 oziroma \mathcal{C}_2 sestavljajo natanko tisti premik iz \mathcal{C} (vogali ostanejo v začetni legi), pri katerih centri ene izmed množic $\{4, 24, 28, 20\}$ oziroma $\{8, 12, 16, 32\}$ ostanejo na svojih začetnih mestih, centri druge množice pa se lahko poljubno sodo permutirajo. Potem velja:

- (a) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{\text{id}\}$.
- (b) Vsak $g \in \mathcal{C}$ lahko enolično zapišemo kot produkt $g = c d$, kjer sta $c \in \mathcal{C}_1$, $d \in \mathcal{C}_2$.
Posebej velja $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2 := \{c d \mid c \in \mathcal{C}_1, d \in \mathcal{C}_2\}$.
- (c) Elementi iz \mathcal{C}_1 komutirajo z elementi iz \mathcal{C}_2 .
- (d) Množici \mathcal{C}_1 in \mathcal{C}_2 sta podgrupi edinki v \mathcal{C}
- (e) Še več, \mathcal{C}_1 in \mathcal{C}_2 sta izomorfnih alternirajočih grupi A_4 (premiku priredimo permutacijo centrov) in sta tudi edinki v \mathcal{G} .

Če za dve podgrupi veljajo lastnosti (a), (b) in (c), se njun produkt imenuje **notranji direktni produkt**. Velja še, da sta lastnosti (c) in (d) ekvivalentni, enakovredni. Torej je \mathcal{C} notranji direktni produkt \mathcal{C}_1 in \mathcal{C}_2 , kar se označuje s $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$.

Pojem podgrupa edinka smo vpeljali v definiciji 2.4.7. Za zgled lastnosti (d) iz izreka konjugirajmo $T = (20,24,28)$ (3-cikel centrov iz množice $\{4, 24, 28, 20\}$) s premikom $R^2 = (1,19,26) (3,18,25) (4,20,28) (7,30,10) (13,15,14)$:

$$R^2 T (R^2)^{-1} = R^2 T R = (4,24,20).$$

Dokaz izreka 3.2.1. Obstoj množic \mathcal{C}_1 in \mathcal{C}_2 , ter lastnost (c) smo utemeljili že pred formulacijo izreka, lastnosti (a), (b), pa takoj odtod sledita.

(d), (e): Ker elementi v \mathcal{C}_1 oziroma \mathcal{C}_2 ohranjajo centre ene izmed množic $\{4, 24, 28, 20\}$ oziroma $\{8, 12, 16, 32\}$, jih ohranjajo tudi njihovi inverzi ter produkti. Torej sta \mathcal{C}_1 oziroma \mathcal{C}_2 podgrupi \mathcal{C} . Posebej, izomorfni sta A_4 (primer 2.4.8.). Vzemimo sedaj poljubna $g \in G$ in $c \in \mathcal{C}_1$. Premik g sodo permutira centre znotraj vsake izmed množic $\{4, 24, 28, 20\}$ in $\{8, 12, 16, 32\}$. Z ustreznim premikom centrov $a = bd$, kjer $b \in \mathcal{C}_1$, $d \in \mathcal{C}_2$, lahko te centre spravimo v začetni položaj, torej premik ga ohrani vse centre. Ker je $a'ca$ premik centrov in ohranja vogale, komutira z ga . Če upoštevamo še, da tudi \mathcal{C}_1 in \mathcal{C}_2 komutirata, naslednji račun pokaže $gcg' \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} gcg' &= gaa'caa'g' = (ga)(a'ca)(a'g') = (ga)(a'ca)(ga)' = (a'ca)(ga)(ga)' \\ &= a'ca = d'b'cbd = (b'cb)(d'd) = b'cb. \end{aligned}$$

Sledi, da je \mathcal{C}_1 edinka v \mathcal{G} . Podobno je tudi \mathcal{C}_2 edinka v \mathcal{G} . ■

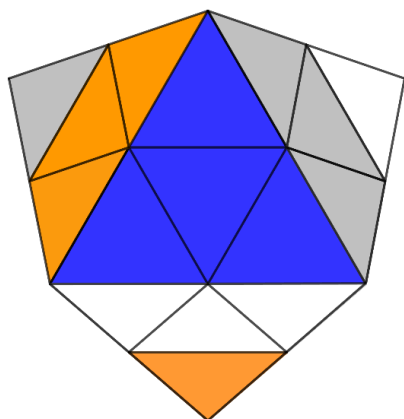
3.3 POLOŽAJ VOGALOV

Vogali so določeni z naslednjimi množicami s po štirimi ploskvicami oziroma pripadajočimi četvericami števil (primer 2.3.1): $\{27,9,21,31\}$, $\{23,5,17,29\}$, $\{13,30,25,19\}$, $\{3, 10, 15, 26\}$, $\{2,22,6,11\}$, $\{1,7,14,18\}$, $\{2,11,6,22\}$ in $\{13,19,25,30\}$. Vogali se pri vsakem premiku seveda preslikajo v vogale.

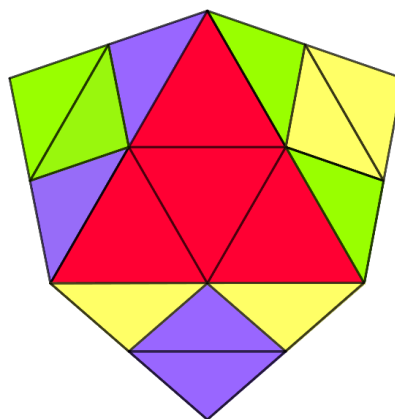
Premik $B = (25, 21, 17) (13, 9, 5) (19, 27, 23) (30, 31, 29) (28, 24, 20)$ je 3-cikel vogalov $\{27,9,21,31\}$, $\{23,5,17,29\}$, $\{13,30,25,19\}$ in 3-cikel centrov $(28, 24, 20)$ (primer 3.2.1). Če za njim naredimo obrat omenjenega 3-cikla centrov $T = (RL'R'L')^2 = (20,24,28)$, dobimo:

Primer 3.3.1. 3-cikel vogalov $\{27,9,21,31\}$, $\{23,5,17,29\}$, $\{13,30,25,19\}$ (Slika 15, Slika 16):

$$\begin{aligned} W := TB &= (20, 24, 28) (25, 21, 17) (13, 9, 5) (19, 27, 23) (30, 31, 29) (28, 24, 20) \\ &= (23,19,27) (21,17,25) (31,29,30) (13,9,5). \end{aligned}$$



Slika 15: 3-cikel vogalov in centrov



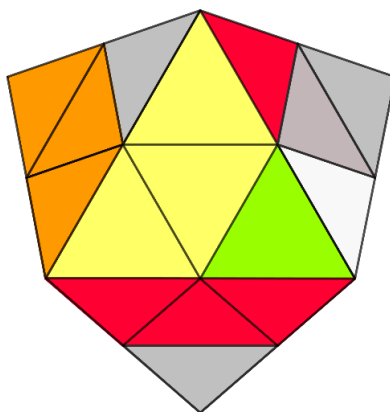
Slika 16: 3-cikel vogalov in centrov (zadaj)

Kako pa dobimo poljuben 3-cikel vogalov? Z enim ali z dvema izmed osnovnih premikov je možno kateri koli vogal spraviti v katerega koli od ostalih petih. Z zaporednim konjugiranjem 3-cikla vogalov W z ustreznimi osnovnimi premiki zato dobimo poljuben 3-cikel vogalov, pri čemer se seveda lahko spremeni orientacija vogalov. Oglejmo si primer (Slika 17):

$$L'W = (2,26,17,25,21)(3,23,19,27,22)(4,28,24)(5,13,9,11,10)(6,15,29,30,31),$$

$$L'WL = (3,23,19)(5,13,10)(15,29,30)(17,25,26).$$

V ciklu W smo s konjugiranjem z osnovnim premikom L vogal $\{27, 9, 31, 21\}$ zamenjali z vogalom $\{3, 10, 15, 26\}$.



Slika 17: Premik $L'WL$

Spomnimo se, da 3-cikli vogalov generirajo vse sode permutacije vogalov (trditev 2.3.4 (b)). Lihih permutacij vogalov pa ni, saj osnovni premiki sodo permutirajo vogale.

3.4 ORIENTACIJA VOGALOV

Spomnimo se, da osnovni premiki premaknejo ploskvice samo na nesosednje ploskve. To pomeni, da se lahko vogali zarotirajo na samo en način, le za 180 stopinj. Taki rotaciji bomo rekli **obrat vogala (angl. flip)**.

Idejo za algoritem obrata dveh vogalov dobimo pri obratu dveh robov za Pyraminx, ki je $(R'DRD')(LD'L'D)$. Kot pa bomo videli, ta algoritem pri oktaedrski uganki dodatno naredi še 3-cikel centrov, ki ga je potrebno zato naknadno izničiti.

Zanimiv premik predstavljata dva zaporedna različna komutatorja $(R'DRD')(LD'L'D)$:

$$R'DRD' = (1,22,26) (2,3,18) (4,20) (6,10,7) (11,15,14) (24,28),$$

$$LD'L'D = (1,3,22) (2,18,26) (4,24) (6,7,15) (10,11,14) (20,28),$$

$$(R'DRD')(LD'L'D) = (2,22) (3,26) (4,28) (6,11) (10,15) (20,24).$$

Dobili smo dva disjunktna 2-cikla centrov $S = (4,28)(20,24)$ in obrat vogalov $\{2, 22, 6, 11\}$ in $\{3, 26, 10, 15\}$ (Slika 18, Slika 19).



Slika 18: Obrat dveh vogalov na Skewb Diamondu

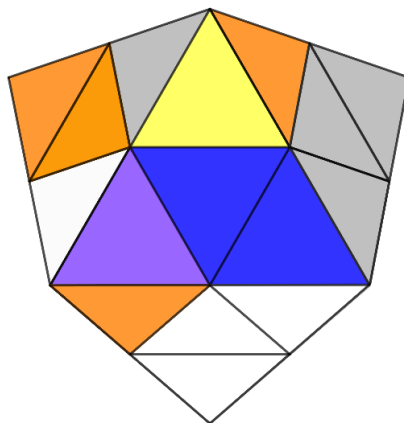


Slika 19: Obrat dveh vogalov na Pyraminxu

Če naredimo sedaj še par disjunktnih 2-ciklov centrov $(RL'R'L)^3 = (4,28)(20,24)$, dobimo:

Primer 3.4.1. Obrat dveh (sosednjih) vogalov $\{10, 3, 15, 26\}$ in $\{2, 6, 11, 22\}$ (Slika 20):

$$(R'DRD') (LD'L'D) (RL'R'L)^3 = (2,22) (3,26) (6,11) (10,15).$$

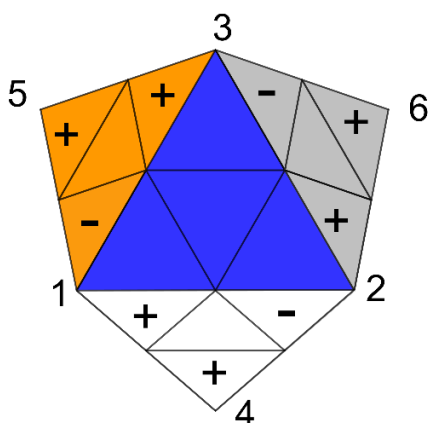


Slika 20: Obrat sosednjih vogalov

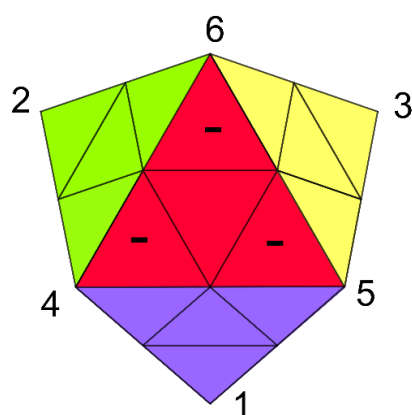
In kako naredimo obrat dveh nasprotnih vogalov? Izberemo vogal, ki je sosednj obema in naredimo dva obrata z njim. Pri tem bo dvakrat preorientiran vogal spet v začetnem stanju, nasprotna dva vogala pa bosta spremenila orientacijo. Jasno je, da z ustreznimi dvojnimi obrati lahko dosežemo katerikoli premik s skupno sodo orientacijo vogalov. Premislimo, da lahko izberemo 5 dvojnih obratov, ki generirajo vse možne premike s skupno sodo orientacijo. Pri premikih se vogali lahko premikajo ali rotirajo. Rotiranje vogalov bomo opisali na naslednji

način. Vogalne ploskvice na namišljeni zgornji ploskvi in ostalih nesosednjih ploskvah bomo označili z znakoma + in – tako, da bosta nasprotni ploskvici vogala nasprotnih predznakov.

Definicija 3.4.2. Vogale oštevilčimo s števili od 1 do 6. **Orientacijo vogalov** pri premiku g bomo opisali s šesterico števil $(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$, ki so lahko enaka 0 ali 1. Priredimo $g_j = 0$ natanko tedaj, ko se predznaka j -tega vogala in vogala, v katerega se z g premakne j -ti vogal, ujemata, v nasprotnem primeru pa je $g_j = 1$.

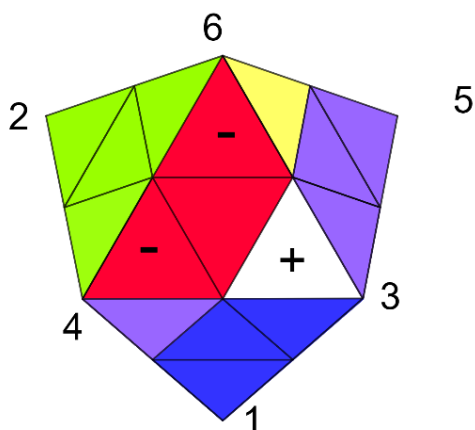


Slika 21: Druga stran Skewb Diamonda z izbiro predznakov in oštevilčenimi vogali

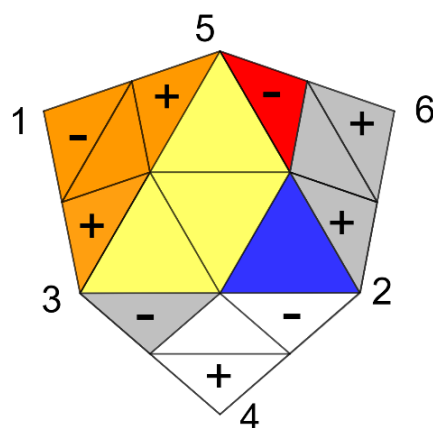


Slika 22: Skewb Diamond z izbiro predznakov in oštevilčenimi vogali (zadaj)

Če na začetku vogalne ploskvice označimo kot na slikah 21 in 22, po osnovnem premiku L dobimo orientacijo $(1,0,1,0,0,0)$ (Slika 23, Slika 24).



Slika 23: Skewb Diamond z označenimi orientacijami in označenimi vogali (zadaj)



Slika 24: Skewb Diamond z označenimi orientacijami in označenimi vogali

Trditev 3.4.3. Za vse $g \in \mathcal{G}$ je $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6$ sodo število (pri kateremkoli številčenju vogalov in katerikoli začetni izbiri orientacije).

Dokaz. Najprej premislimo, da trditev velja za vse osnovne premike ter celo pri katerikoli začetni izbiri plusov in minusov. Pri vsakem osnovnem premiku, ki zavrti eno od ploskev

Skewb Diamonda, oziroma napravi 3-cikel vogalov (primer 3.3.1.), se skupaj nujno zgodi sodo mnogo sprememb predznakov ploskvic vogalov. Dovolj je naprej dokazati, da trditev velja za premik, ki je sestavljen iz dveh osnovnih premikov.

Število $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6$ si lahko predstavljamo kot skupno število sprememb predznakov ploskvic vogalov pri premiku g . Če uporabimo že dokazano trditev za osnovne premike, je število sprememb po prvem osnovnem premiku sodo, take parnosti pa ostane tudi po naslednjem osnovnem premiku. ■

3.5 GRUPNA STRUKTURA OKTAEDRSKE UGANKE SKEWB DIAMOND

Izrek 3.5.1. Naj bo \mathcal{G} grupa vseh premikov oktaedrske uganke, ter naj bodo v množici \mathcal{C} (kot v izreku 3.2.1) natanko vsi tisti premiki, ki ohranijo vogale na svojih začetnih mestih z začetno orientacijo (centre pa permutirajo), v množici \mathcal{V} pa naj bodo natanko tisti premiki, pri katerih centri ostanejo na svojih začetnih mestih, skupna orientacija (permutiranih) vogalov pa je soda. Potem velja:

- (a) $\mathcal{C} \cap \mathcal{V} = \{\text{id}\}$.
- (b) Vsak $g \in \mathcal{G}$ lahko enolično zapišemo kot produkt $g = c v$, kjer $c \in \mathcal{C}$, $v \in \mathcal{V}$. Posebej velja $\mathcal{G} = \mathcal{C} \mathcal{V} := \{c v \mid c \in \mathcal{C}, v \in \mathcal{V}\}$.
- (c) Elementi iz \mathcal{C} komutirajo z elementi iz \mathcal{V} .
- (d) Množici \mathcal{C} in \mathcal{V} sta podgrupi edinki v \mathcal{G} .

Torej je \mathcal{G} notranji direktni produkt \mathcal{C} in \mathcal{V} , oziroma $\mathcal{G} = \mathcal{C} \times \mathcal{V}$.

Lastnost (b) v izreku 3.5.1 ilustrirajmo na osnovnem premiku R , ki ga enolično zapišemo kot produkt 3-cikla centrov c in 3-cikla vogalov v :

$$R = cv, \quad c = (28,4,24), \quad v = (9,10,11) (31,15,6) (27,3,22) (21,26,2).$$

Dokaz izreka 3.5.1. Dobro definiranost množice \mathcal{C} smo utemeljili že v izreku 3.2.1, dobro definiranost \mathcal{V} pa v podrazdelkih 3.3-3.4.

(a) Jasno je identiteta element v $\mathcal{C} \cap \mathcal{V}$. Premiki iz \mathcal{C} ohranjajo vogale, premiki iz \mathcal{V} pa centre. Sledi $\mathcal{C} \cap \mathcal{V} = \{\text{id}\}$.

(b) Vzemimo poljuben premik $g \in \mathcal{G}$. Vemo že, da vsi premiki napravijo sode permutacije dveh disjunktnih množic s po štirimi centri. Z ustreznimi 3-cikli centrov lahko centre, ki jih premakne premik g' , vrnemo v začetno stanje. Torej obstaja tak $d \in \mathcal{C}$, da $g'd$ pusti centre pri miru.

Premislimo, da lahko $g'd$ množimo s takim premikom $v \in \mathcal{V}$, da $g'dv = \text{id}$. Velja namreč, da $g'd$ naredi neko permutacijo vogalov, ki imajo skupno sodo orientacijo (trditev zgoraj). Le-te

bi radi z ustreznim premikom vogalov, ki ohrani centre, vrnili na začetno mesto. V razdelkih 3.3 in 3.4 smo pokazali, da \mathcal{V} vsebuje poljubne 3-cikle vogalov in premike, ki zamenjajo orientacijo dvema vogaloma. Torej je $g'dv = \text{id}$ za nek $v \in \mathcal{V}$, ter $g = dv$. Če bi za kakšne $b, c \in \mathcal{C}$ in $v, w \in \mathcal{V}$ veljalo $cv = bw$, potem bi po krajšem računu in z upoštevanjem (a) sledilo $vw' = c'b = \text{id}$ oziroma $v = w$ in $c = b$, torej enoličnost.

(c) Elementi iz \mathcal{C} premikajo centre in ne vplivajo na premike vogalov, elementi iz \mathcal{V} pa premikajo vogale in ne vplivajo na premike centrov, zato elementi \mathcal{C} komutirajo z elementi \mathcal{V} .

(d) Ker elementi v \mathcal{C} ohranjajo vogale, jih tudi njihovi inverzi ter produkti. Enako velja za elemente množice \mathcal{V} . Torej sta \mathcal{C} in \mathcal{V} podgrupi \mathcal{G} . Vzemimo poljubne $g \in \mathcal{G}$, $c \in \mathcal{C}$, $v \in \mathcal{V}$. Po dokazanem v (b) vemo, da je $g = dw$ za neka $d \in \mathcal{C}$, $w \in \mathcal{V}$. Potem je

$$gcg' = (dw)c(dw)' = dwcw'd' = dww'cd' = dcd' \in \mathcal{C},$$

$$gvg' = (dw)v(dw)' = dwvw'd' = dwvw'd' = dd'wvw' = wvw' \in \mathcal{V},$$

zato sta \mathcal{C} in \mathcal{V} edinki v \mathcal{G} (definicija 2.4.7). ■

Izrek 3.5.2. Naj bo \mathcal{G} grupa premikov uganke Skewb Diamond, \mathcal{V} pa (kot v izreku 3.5.1) podgrupa natanko tistih premikov, pri katerih centri ostanejo na svojih začetnih mestih. Naprej je \mathcal{P} množica natanko tistih premikov \mathcal{V} , po katerih je orientacija vogalov enaka kot pri identiteti (orientacija $(0,0,0,0,0,0)$), v \mathcal{O} pa so natanko tisti premiki, pri katerih vogali ostanejo na svojem mestu (orientacija ni pomembna), njihova skupna orientacija pa je soda. Potem velja:

- (a) $\mathcal{P} \cap \mathcal{O} = \{\text{id}\}$.
- (b) Vsak $v \in \mathcal{V}$ lahko enolično zapišemo kot $v = p o$, kjer $p \in \mathcal{P}$, $o \in \mathcal{O}$. Posebej velja $\mathcal{V} = \mathcal{P} \mathcal{O} := \{p o \mid p \in \mathcal{P}, o \in \mathcal{O}\}$.
- (c) Množica \mathcal{P} je podgrupa, \mathcal{O} pa je podgrupa edinka v \mathcal{G} . Še več, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \mathcal{O}_3 \times \mathcal{O}_4 \times \mathcal{O}_5$, kjer so $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4, \mathcal{O}_5$ paroma različne podgrupe, ki vsebujejo id in en dvojni obrat vogalov z enim skupnim vogalom.
- (d) Grupa \mathcal{P} je izomorfna alternirajoči grupi A_6 , grupa \mathcal{O} pa $(\mathbb{Z}_2)^5$ (direktni produkt petih podgrup v \mathcal{V} , ki so izomorfne \mathbb{Z}_2).

Če za dve podgrupi veljajo lastnosti (a), (b) in (c), se njun produkt imenuje **notranji poldirektni direktni produkt**. Rečemo, da je \mathcal{V} notranji poldirektni produkt \mathcal{P} in \mathcal{O} , kar označimo z $\mathcal{P} \times \mathcal{O}$.

Za zgled (c) iz izreka 3.5.2 (\mathcal{O} edinka v \mathcal{G}) dvojni obrat vogalov $(2,22) (3,26) (6,11) (10,15) \in \mathcal{O}$ iz primera 3.4.1 konjugirajmo z osnovnim premikom $L = (9,10,11) (31,15,6) (27,3,22) (21,26,2) (28,4,24)$:

$$L (2,22) (3,26) (6,11) (10,15) L' = (9,31) (3,26) (21,27) (10,15) ,$$

Dobimo spet dvojni obrat, ki je prav tako vsebovan v \mathcal{O} .

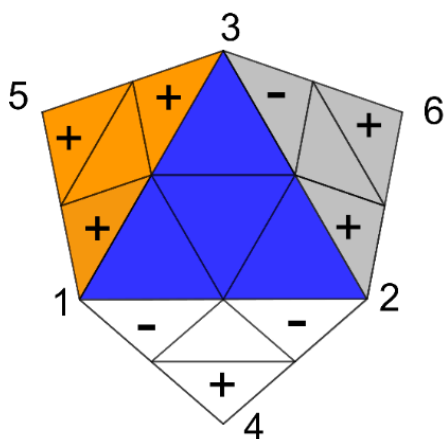
Dokaz izreka 3.5.2. Pokazali smo, da imamo v množici \mathcal{V} premik, ki spremeni orientacijo natanko enemu paru vogalov (primer 3.4.3), pri tem vogalov ne premeša, zato je \mathcal{O} dobro definirana. Po izreku 3.5.1 sledi tudi, da \mathcal{V} vsebuje natanko premike, s katerimi dobimo katerokoli sodo permutacije vogalov, njihova skupna orientacija pa je soda. Z ustreznimi spremembami orientacij dveh vogalov naenkrat pridemo do množice \mathcal{P} .

(a) Jasno je identiteta element v $\mathcal{P} \cap \mathcal{O}$. Premiki iz \mathcal{O} ohranjajo mesta vogalov, premiki iz \mathcal{P} pa njihovo orientacijo. Sledi $\mathcal{P} \cap \mathcal{O} = \{\text{id}\}$.

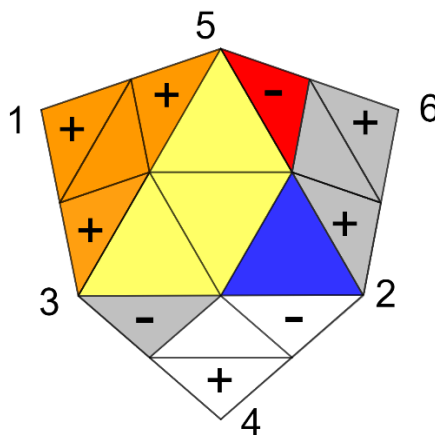
(b) Vzemimo poljuben premik $v \in \mathcal{V}$. Velja, da v in zato v' naredita neki sodi permutaciji vogalov. Le-ti lahko z ustreznim premikom vogalov, vrnemo v prvotno stanje. Zgoraj smo utemeljili, da \mathcal{P} vsebuje 3-cikle vseh vogalov in nobene lihe permutacije vogalov. Pomnožimo sedaj v' s takim premikom $p \in \mathcal{P}$, da $v'p$ spravi vogale v začetno pozicijo. Premik $v'p$ zato naredi tudi sodo orientacijo vogalov, ki jih lahko z zgoraj opisanimi dvojnimi obrati vrnemo v začetno stanje. Torej je $v'po = \text{id}$ za nek $o \in \mathcal{O}$. Sledi, da je $v' = po$.

(c), (d) Jasno je identiteta element \mathcal{P} in \mathcal{O} . Ker elementi v \mathcal{P} ohranjajo orientacijo vogalov, jo tudi njihovi inverzi. Elementi v \mathcal{O} ohranjajo mesta vogalov, zato jih tudi njihovi inverzi. Torej sta \mathcal{P} in \mathcal{O} podgrupi V . Še več, \mathcal{P} je izomorfna A_6 . Jasno je, da z ustreznimi dvojnimi obrati lahko dosežemo katerikoli premik v \mathcal{O} (s skupno sodo orientacijo vogalov). Premislimo, pet dvojnih obratov, ki spremeni orientacijo enemu izbranemu oglišču in po enemu izmed preostalih petih, generira vse možne elemente v \mathcal{O} . Ker so dvojni obrati element reda 2, je \mathcal{O} izomorfna $(\mathbb{Z}_2)^5$.

Vzemimo poljubna $g \in \mathcal{G}$, $o \in \mathcal{O}$. Po izreku 3.5.1 je $g = cv$, kjer c ohranja vogale, premik v permutira vogale. Tudi o ohranja vogale na svojih mestih. Premik $cvov'c'$ najprej s c permutira centre in ohrani vogale, nato p te vogale premeša (centre pusti na miru), zatem o ohrani vogale (in centre) na svojih mestih, potem v' napravi inverzno permutacijo vogalov kot v , ter končno c' vrne centre v začetno stanje. Zato $cvov'c' \in \mathcal{O}$, saj ohrani vogale (in centre) na svojih mestih. Sledi, da je \mathcal{O} edinka v \mathcal{G} . ■



Slika 25: Drugačna izbira predznakov



Slika 26: Premik L pri drugačni izbiri predznakov

Opomba. Množica \mathcal{P} ni enolično določena. Če bi namreč na začetku ploskvicam priredili drugačen razpored znakov + in –, bi dobili drugačno množico \mathcal{P} , seveda, še vedno v skladu s trditvijo 3.4.3. Spomnimo se, da glede na izbiro znakov + in – kot na Slika 23Slika 24, je orientacija vogalov premika L enaka (1,0,1,0,0,0), zato L ne bi bil vsebovan v \mathcal{P} . Pri (drugačni) izbiri znakov kot na Slika 25, pa je orientacija premika L enaka (0,0,0,0,0,0) (Slika 26) in $L \in \mathcal{P}$. Jasno je vedno $id \in \mathcal{P}$.

Izreki 3.2.1, 3.5.1 in 3.5.2 združeni skupaj dajo:

Izrek 3.5.3. Za grupo oktaedrske uganke Skewb Diamond velja $\mathcal{G} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times (\mathcal{P} \times \mathcal{O})$.

Iz izrekov direktno sledi tudi naslednje:

Posledica 3.5.4. (a) Grupo oktaedrske uganke Skewb Diamond \mathcal{G} sestavljajo natanko tiste permutacije ploskvic (koščkov), ki:

- (i) centre na nesodnjih ploskvah sodo premešajo. (Posebej, \mathcal{G} ne vsebuje 2-cikla centrov.)
- (ii) vogale sodo permutirajo, njihova skupna orientacija pa je soda. (Posebej, \mathcal{G} ne vsebuje 2-cikla vogalov ali enega obrata vogala.)

(b) Število vseh različnih premikov \mathcal{G} je enako $|\mathcal{G}| = (4!/2)^2 (6!/2) (2^6/2) = 5^1 2^{13} 3^2$.

Opomba. Za sestavljalce je različnih pozicij $(4!/2)$ -krat manj: $(4!/2)(6!/2)(2^6/2)$, saj zanje ni pomembno, kako so na koncu barvno razporejene ploskve. Te je mogoče premešati na toliko načinov, kot je sodih permutacij štirih nesosednjih ploskev (centrov), torej na $(4!/2)$ načinov.

Na bolj abstrakten način grupno strukturo oktaedrske uganke opiše naslednji izrek.

Izrek 3.5.5. Naj bo $\mathcal{G} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times (\mathcal{P} \times \mathcal{O})$ grupa vseh premikov oktaedrske uganke Skewb Diamond. Poljubni premik $g \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times (\mathcal{P} \times \mathcal{O})$ lahko enolično zapišemo kot $g = cdv$ in ga predstavimo s četverko $(\alpha_c, \gamma_d, \pi_v, \omega_v) \in A_4 \times A_4 \times A_6 \times (\mathbb{Z}_2)^6$, kjer $c \in \mathcal{C}_1$ s permutacijo $\alpha_c \in A_4$ in $d \in \mathcal{C}_2$ s permutacijo $\gamma_d \in A_4$ permutirata vsak po eno od disjunktnih množic centrov, $v \in \mathcal{P} \times \mathcal{O}$ s permutacijo $\pi_v \in A_6$ permutira vogale, šesterica $\omega_v = (v_1, \dots, v_6)$ pa je orientacija vogalov po premiku v . Ta prireditev določa izomorfizem grup \mathcal{G} in $A_4 \times A_4 \times A_6 \times (\mathbb{Z}_2)^{6*}$, kjer je slednja opremljena z operacijo

$$(\alpha, \gamma, \pi, (v_1, \dots, v_6)) \cdot (\beta, \delta, \rho, (w_1, \dots, w_6)) = (\alpha\beta, \gamma\delta, \pi\rho, (v_1, \dots, v_6) + (w_{\pi(1)}, \dots, w_{\pi(6)}));$$

tu $(\mathbb{Z}_2)^{6*}$ vsebuje vse šesterice sodo ničel in enk, ter je izomorfna $(\mathbb{Z}_2)^5$. (Opazimo, da dobimo $(w_{\pi(1)}, \dots, w_{\pi(6)})$, če komponente (w_1, \dots, w_6) permutiramo s π .)

Opomba. Operacija v izreku 3.5.5 je na prvih treh faktorjih $A_4 \times A_4 \times A_6$ definirana po komponentah in določa strukturo **zunanjega direktnega produkta**, v četrti komponenti pa na

operacijo poleg $(\mathbb{Z}_2)^{6^*}$ (oziroma $(\mathbb{Z}_2)^5$) vpliva še A_6 , kar na množici $A_6 \times (\mathbb{Z}_2)^{6^*}$ (oziroma $A_6 \times (\mathbb{Z}_2)^5$) določa strukturo, ki se imenuje **zunanji poldirektni produkt**; označimo z $A_6 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^5$. Če je operacija v celoti definirana po komponentah (kot v tem primeru), ima grupa strukturo **zunanjega direktnega produkta**. Izomorfizem $(\mathbb{Z}_2)^{6^*} \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^5$ pa denimo podaja predpis $(v_1, v_2, \dots, v_6) \rightarrow (v_1, v_2, \dots, v_5, v_1 + v_2 + \dots + v_5)$.

Dokaz izreka 3.5.5. Vzemimo četverki $(\alpha, \gamma, \pi, \omega), (\beta, \delta, \rho, \sigma)$, ki pripadata premikoma g in h . Katera četverka pa potem pripada premiku gh ? Jasno gh permutira vogale kot produkt permutacij vogalov, ki pripadata g in h . Podobno velja tudi za centre. In že imamo prve tri komponente četverice, ki pripada gh : $(\alpha\beta, \gamma\delta, \pi\rho, \dots)$.

Preostane premisliti, kako je z orientacijo vogalov (u_1, \dots, u_6) po premiku gh , če poznamo orientaciji vogalov $\omega = (v_1, \dots, v_6)$ in $\sigma = (w_1, \dots, w_6)$ po premikih g in h . Denimo, da g vogal 1 premakne v vogal i , t.j. $i = \pi(1)$. Sprememba (ohranitev) orientacije vogala 1 po premiku gh je vsota (možne) spremembe orientacije vogala 1 po premiku g in (možne) spremembe orientacije vogala $i = \pi(1)$ (kamor g premakne vogal 1) glede na premik h . Sledi $u_1 = v_1 + w_i = v_1 + w_{\pi(1)}$ in podobno nato za ostale komponente. ■

3.6 REDI ELEMENTOV V GRUPI OKTAEDRSKE UGANKE SKEWB DIAMOND

Oglejmo si sedaj nekaj zanimivih algoritmov in njihove rede:

(a) $\text{red}(\mathbf{R}) = 3$.

(b) $\text{red}((\mathbf{R}'\mathbf{D}\mathbf{L})^3) = 2$,

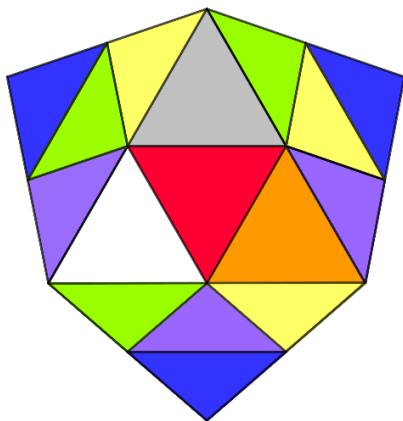
$$\mathbf{R}'\mathbf{D}\mathbf{L} = (1,19,2,18,25,22) (3,23,21,26,17,27) (4,28,20) (5,31,15,29,9,10)$$

$$(6,7,30,11, 14,13),$$

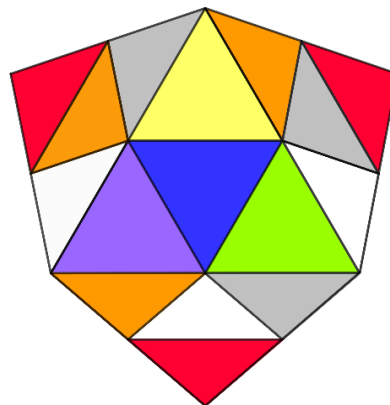
$$(\mathbf{R}'\mathbf{D}\mathbf{L})^3 = (1,18) (2,22) (3,26) (5,29) (6,11) (7,14) (9,31) (10,15) (13,30) (17,23)$$

$$(19, 25) (21, 27),$$

Torej je $(\mathbf{R}'\mathbf{D}\mathbf{L})^3$ obrat vseh vogalov ali **super-obrat** (angl. **super-flip**) (Slika 27, Slika 28).



Slika 27: Super-obrat



Slika 28: Super-obrat (zadaj)

(c) red $(ULU'L') = 4$.

Dokazali smo $ULU'L' = (2,27,22,21) (3,25,26,19) (6,9,11,31) (10,30,15,13)$.

Sledi $(ULU'L')^2 = (3,26) (6,11) (9,31) (10,15) (13,30) (19,25) (21,27)$.

Premik $ULU'L'$ predstavlja dva disjunktna 2-cikla vogalov $\{2,22,6,11\}$, $\{27,9,21,31\}$ in $\{3, 10, 15, 26\}$, $\{13,19,25,30\}$, premik $(ULU'L')^2$ pa naredi 4 obrate istih vogalov.

(d) red $((RL')^2) = 5$.

$RL' = (1,21,2,26,19) (3,25,18,27,22) (4,24) (6,15,13,14,31)(7,9,11,10,30)(20,28)$,

$(RL')^2 = (1,2,19,21,26) (3,18,22,25,27) (6,13,31,15,14) (7,11,30,9,10)$.

Premik $(RL')^2$ je 5-cikel vogalov.

(e) red $(RL'R'L) = 6$.

Dokazali smo, da je $(RL'R'L)^2 = (20,24,28)$ 3-cikel centrov.

(f) red $(RLB) = 8$.

$(RL)B = (1,2,17,25,18,22,23,19) (3,21,26,27) (5,13,14,6,29,30,7,11) (9,10,31,15)$.

Premik RLB predstavlja 4-cikel in 2-cikel vogalov z obratoma.

(g) red $(RL) = 15$,

$RL = (1,2,21,26,19) (3,25,18,22,27) (6,31,15,13,14) (7,11,9,10,30) (20,24,28)$.

(h) red $(RLD) = 10$.

$(RL)D = (1,18) (2,21,26,19,17,22,27,3,25,23) (4,20) (5,6,31,15,13,29,11,9,10,30)$

$(7,14) (24, 28)$.

(i) Red $(LU') = 12$,

$LU' = (2,3,22,26) (4,24,28) (6,10,11,15) (9,13,31,30)(12,16,32) (19,21,25,27)$.

(j) red $(LBD') = 24$,

$LB = (2,17,25,21,26) (3,22,23,19,27) (4,20,28) (5,13,9,10,11) (6,29,30,31,15)$,

$LBD' = (1,22,18,2) (3,17,25,21,26,23,19,27) (5,13,9,10,29,30,31,15) (6,14,11,7)$

$(20, 28, 24)$.

(k) red (U L D) = 30,

UL = (2,21,19,22,27,25) (3,26) (4,24,28)(6,31,13,11,9,30)(10,15)(12,32,16) ,

(UL)D = (1,17,22,27,25,18,23,2,21,19) (3,26) (5,6,31,13,14,29,11,9,30,7) (10,15)
(12,32,16) (20,24,28).

Izrek 3.6.1. Množica redov vseh elementov v grupi oktaedrske uganke Skewb Diamond \mathcal{G} je $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 24, 30\}$. Posebej, red največjega elementa je 30.

Dokaz izreka 3.6.1. Po izreku 3.5.1 je poljubni element g grupe oblike $g = cdv$ in $g^n = (cdv)^n = c^n d^n v^n$, kjer v ohranja centre, c permutira eno od disjunktnih množic centrov, d pa drugo. Red g bo zato najmanjši skupni večkratnik redov elementov c, d, v .

Vsak od elementov c, d je bodisi 3-cikel (reda 3) bodisi produkt disjunktnih 2-ciklov (reda 2).

Ker v sodo permutira vogale kot produkt disjunktnih ciklov, vsaj en od premikov v, v^2, v^3, v^4, v^5 vogale postavi na začetno mesto, njihovi kvadrati pa po potrebi poskrbijo za začetno orientacijo. To pomeni, da je red elementa v eno izmed števil 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10.

Torej je red elementa grupe \mathcal{G} lahko le eno izmed števil 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 24, 30. Elemente teh redov smo poiskali pred izrekom. ■

Opomba. Elementi maksimalnega reda 30 so premiki $g = cv$, kjer je c 3-cikel centrov, v pa je tak 5-cikel vogalov, da v^5 postavi vogale na svoja mesta, vendar ne z začetno orientacijo (npr. na štirih vogalih cikla ohrani začetno orientacijo, ostalima dvema vogaloma pa zamenja orientaciji). Jasno $v^{10} = \text{id}$, zato je v reda 10 in $g = cv$ reda 30.

3.7 PODGRUPE GRUPE OKTAEDRSKE UGANKE SKEWB DIAMOND

Spomnimo se, da je \mathcal{C}_1 (izomorfna \mathcal{C}_2) iz izreka 3.2.1 grupa permutacij centrov (z začetno orientacijo), ki je izomorfna A_4 . Znano je, da so do izomorfizma natančno njene prave netrivialne podgrupe $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, (\mathbb{Z}_2)^2$. Poiščimo še primere njenih predstavitev podgrup v \mathcal{C}_1 :

- (a) \mathbb{Z}_2 : Podgrupa, ki vsebuje id in par disjunktnih 2-ciklov centrov.
- (b) \mathbb{Z}_3 : Podgrupa, generirana z enim 3-ciklom centrov.
- (c) $(\mathbb{Z}_2)^2$: Podgrupa, ki vsebuje vse tri pare 2-ciklov centrov in id.

Grupa \mathcal{P} iz izreka 3.5.2 je podgrupa sodih permutacij vogalov (z začetno orientacijo), izomorfna A_6 . Ta vsebuje podgrupo sodih permutacij štirih vogalov, izomorfno A_4 , zato

podobno kot zgoraj tudi znotraj nje najdemo podgrupe, ki so izomorfne \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_3 , $(\mathbb{Z}_2)^2$. Označimo vogale z $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$. Še druge podgrupe:

- (d) \mathbb{Z}_5 : Ciklična grupa, generirana z enim 5-ciklom vogalov z začetno orientacijo.
- (e) $(\mathbb{Z}_2)^3$: Podgrupa, generira z ustreznimi tremi pari 2-ciklov vogalov: $\{\text{id}, (V_1, V_2)(V_3, V_4), (V_1, V_4)(V_3, V_2), (V_1, V_3)(V_4, V_2), (V_1, V_4)(V_5, V_6), (V_3, V_2), (V_5, V_6)\}$.
- (f) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$: Podgrupa generirana s 3-ciklom vogalov (V_1, V_2, V_3) in 2-ciklov (V_5, V_6) .
- (g) S_4 (vsebuje tudi S_3): Podgrupa, sestavljena iz sodih permutacij vogalov V_1, V_2, V_3, V_4 , ter produktov lihih permutacij vogalov V_1, V_2, V_3, V_4 in 2-cikla preostalih dveh vogalov (V_5, V_6) .
- (h) D_5 (diedrska grupa): Grupa, ki jo generirata par 2-ciklov vogalov $(V_2, V_5)(V_3, V_4)$ in 5-cikel $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$.

Na koncu imamo še podgrupo \mathcal{O} iz izreka 3.5.2, ki je grupa permutacij, ki ohranja pozicije vogalov in sodost njihove orientacije, izomorfna je $(\mathbb{Z}_2)^5$.

- (i) $(\mathbb{Z}_2)^5$ (vsebuje $(\mathbb{Z}_2)^4$, $(\mathbb{Z}_2)^3$, $(\mathbb{Z}_2)^2$, \mathbb{Z}_2): Podgrupa vseh dvojnih obratov vogalov.

Realiziramo pa lahko tudi poljubne (pol)direktne produkte podgrup v \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{P} in \mathcal{O} . Tako dobimo naprimer še podgrupe, ki so izomorfne:

- (j) $(\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_2)^2 \times ((\mathbb{Z}_2)^3 \times (\mathbb{Z}_2)^5) = (\mathbb{Z}_2)^4 \times (\mathbb{Z}_2)^3 \times (\mathbb{Z}_2)^5$,
- (k) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times ((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \times (\mathbb{Z}_2)^5) = (\mathbb{Z}_3)^2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \times (\mathbb{Z}_2)^5$,
- (l) $(\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_3)^3 \times (\mathbb{Z}_5 \times (\mathbb{Z}_2)^5)$,
- (m) $(\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_3)^3 \times (D_5 \times (\mathbb{Z}_2)^5)$,
- (n) $(\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_2)^2 \times (S_4 \times (\mathbb{Z}_2)^5) = (\mathbb{Z}_2)^4 \times (S_4 \times (\mathbb{Z}_2)^5)$.

Elementi, katerih rede smo izračunali v prejšnjem razdelku, pa nam do izomorfizma natanko podajajo oziroma generirajo še nekaj novih cikličnih podgrup:

- (o) $\mathbb{Z}_{30}, \mathbb{Z}_{24}, \mathbb{Z}_{20}, \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4$.
- (p) **Center grupe**, t.j. (podgrupa) množica elementov, ki komutirajo z vsemi elementi grupe, vsebuje le super-obrat in id, ter je izomorfna \mathbb{Z}_2 .

Utemeljitev: Noben od premikov centrov ne komutira z vsemi ostalimi premiki centrov in podobno velja tudi za premike vogalov. Za različna števila a, b, c, d namreč velja, da produkt disjunktnih ciklov $(a, b, \dots) \dots (\dots)$ ne komutira s 3-ciklom (b, c, d) , saj dobimo potem $((a, b, \dots) \dots (\dots))(b, c, d) = (a, c, \dots)(b, d, \dots)$ in $(b, c, d)((a, b, \dots) \dots (\dots)) = (a, b, \dots)(c, d, \dots) \dots (\dots)$. Zaradi enakega razloga netrivialni premiki, ki ohranjajo pozicije vogalov in ohranijo orientacijo enega izmed vogalov, denimo V_6 , ne komutirajo z dvojnimi obrati vogala V_6 in enega od ostalih vogalov, ki spremeni orientacijo.

Naraščajoče **zaporedje podgrup** $\{\text{id}\} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{O} \subset \mathcal{G} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times (\mathcal{P} \times \mathcal{O})$ nam podaja teoretično podlago za osnovni **algoritem sestavljanja** oktaedrske uganke: najprej uredimo vogale, nato še centre. Bolj učinkovitega algoritma, natančnejše, ustreznega padajočega zaporedja podgrup med \mathcal{G} in $\{\text{id}\}$, med katerimi bi prehajali z malo premiki, žal nisva našla. Algoritmi za učinkovito sestavljanje uganek namreč temeljijo na tem, da je potrebno v določeno stanje priti s čim manj premiki.

3.8 DODATNA POTRDITEV IZRAČUNOV V PROGRAMU MATHEMATICA

Narava osnovnih premikov oktaedrske uganke je bila povod za njihov opis s permutacijami (primer 2.3.1). Pri obravnavi grupne strukture uganke Skewb Diamond je bilo zato večkrat potrebno za nek znan algoritem izračunati njegovo pripadajočo permutacijo. Obratno pa lahko do novih ugotovitev, kot je naprimer red elementa ali podgrupe, pridemo tudi s pomočjo računanja permutacij raznih kombinacij osnovnih premikov.

V obeh primerih se da daljše izračune produktov večjega števila permutacij elegantno preveriti s pomočjo računalnika, denimo z matematičnim programom **Wolfram Mathematica**. (Wolfram 14.1, 2024)

Najprej pojasnimo, katere ukaze se da uporabiti in kako delujejo, nato pa sledijo še izračuni nekaterih premikov iz prejšnjih razdelkov (sliki 29 in 30). Ukazi:

(a) **Cycles**[[*cikel 1*, *cikel 2*, ...]] predstavlja produkt disjunktnih ciklov *cikel 1*, *cikel 2*, ...

(b) **InversePermutation**[*perm*] predstavlja inverzno permutacijo dane permutacije *perm*.

(c) **PermutationProduct**[*perm*₁, *perm*₂, ...] zmnoži permutacije *perm*₁, *perm*₂, ...

(d) **PermutationOrder**[*perm*] izračuna red permutacije *perm*.

Sedaj pa si oglejmo, kako izgleda uporaba omenjenih ukazov v nekaterih primerih, ki so pojavili že tekom naloge.

```

In[1]:= U = Cycles[{{25, 26, 27}, {19, 3, 21}, {31, 13, 10}, {30, 15, 9}, {16, 12, 32}}]
Out[1]= Cycles[{{3, 21, 19}, {9, 30, 15}, {10, 31, 13}, {12, 32, 16}, {25, 26, 27}}]

In[2]:= R = Cycles[{{13, 14, 15}, {10, 30, 7}, {26, 19, 1}, {18, 3, 25}, {28, 20, 4}}]
Out[2]= Cycles[{{1, 26, 19}, {3, 25, 18}, {4, 28, 20}, {7, 10, 30}, {13, 14, 15}}]

In[3]:= R' = InversePermutation[R]
Out[3]= Cycles[{{1, 19, 26}, {3, 18, 25}, {4, 20, 28}, {7, 30, 10}, {13, 15, 14}}]

In[4]:= U' = InversePermutation[U]
Out[4]= Cycles[{{3, 19, 21}, {9, 15, 30}, {10, 13, 31}, {12, 16, 32}, {25, 27, 26}}]

In[5]:= L = Cycles[{{9, 10, 11}, {31, 15, 6}, {27, 3, 22}, {21, 26, 2}, {28, 4, 24}}]
Out[5]= Cycles[{{2, 21, 26}, {3, 22, 27}, {4, 24, 28}, {6, 31, 15}, {9, 10, 11}}]

In[6]:= L' = InversePermutation[L]
Out[6]= Cycles[{{2, 26, 21}, {3, 27, 22}, {4, 28, 24}, {6, 15, 31}, {9, 11, 10}}]

In[7]:= PermutationProduct[R, L]
Out[7]= Cycles[{{1, 2, 21, 26, 19}, {3, 25, 18, 22, 27},
               {6, 31, 15, 13, 14}, {7, 11, 9, 10, 30}, {20, 24, 28}}]

In[8]:= PermutationProduct[U, R', U', R', U, R', U', R', U, R', U', R']
Out[8]= Cycles[
        {{1, 18}, {3, 26}, {7, 14}, {9, 31}, {10, 15}, {13, 30}, {19, 25}, {21, 27}}]

In[9]:= PermutationProduct[U, L]
Out[9]= Cycles[{{2, 21, 19, 22, 27, 25}, {3, 26},
               {4, 24, 28}, {6, 31, 13, 11, 9, 30}, {10, 15}, {12, 32, 16}}]

In[10]:= PermutationProduct[U', L']
Out[10]= Cycles[{{2, 26, 25, 22, 3, 19}, {4, 28, 24},
                {6, 15, 30, 11, 10, 13}, {9, 31}, {12, 16, 32}, {21, 27}}]

In[11]:= PermutationProduct[U, L, U', L']
Out[11]= Cycles[{{2, 27, 22, 21}, {3, 25, 26, 19}, {6, 9, 11, 31}, {10, 30, 15, 13}}]

In[12]:= PermutationProduct[U, L, U', L', U, L, U', L']
Out[12]= Cycles[
        {{2, 22}, {3, 26}, {6, 11}, {9, 31}, {10, 15}, {13, 30}, {19, 25}, {21, 27}}]

In[13]:= PermutationProduct[R, L', R', L']
Out[13]= Cycles[{{1, 2}, {3, 27}, {6, 14}, {7, 11},
                {9, 10}, {15, 31}, {18, 22}, {20, 28, 24}, {21, 26}}]

In[14]:= PermutationProduct[R, L', R', L', R, L', R', L']
Out[14]= Cycles[{{20, 24, 28}}]

In[15]:= PermutationProduct[U, L', U', L, U, L', U', L, U, L', U', L]
Out[15]= Cycles[{{2, 19, 22, 25}, {3, 27, 26, 21}, {6, 13, 11, 30}, {9, 15, 31, 10}}]

```

Slika 29: Izračuni v Mathematici 1

```
In[16]:= PermutationProduct[R, L', R', L]
Out[16]= Cycles[{{1, 26, 2}, {3, 22, 18}, {4, 28}, {6, 14, 15}, {7, 10, 11}, {20, 24}}]

In[17]:= PermutationProduct[R, L', R', L, R, L', R', L, R, L', R', L]
Out[17]= Cycles[{{4, 28}, {20, 24}}]

In[18]:= PermutationOrder[PermutationProduct[R, L]]
Out[18]= 15

In[19]:= PermutationOrder[PermutationProduct[R, L']]
Out[19]= 10

In[20]:= PermutationOrder[PermutationProduct[L, U']]
Out[20]= 12
```



Slika 30: Izračuni v Mathematici 2

4. ZAKLJUČEK

Želja po odkrivanju matematike, ki se skriva v oktaedrski uganki, naju je prignala skoraj čez vse izzive. V celoti sva potrdila prvo, tretjo in četrto hipotezo, pri drugi pa sva dobila delno potrditev. Podrobnejši zapis ugotovitev podajava v nadaljevanju:

1. Po pričakovanju sva odkrila, da se v oktaedrski uganki Skewb Diamond za premiki skriva matematični koncept grupe (izrek 3.1.1), ter s tem potrdila prvo hipotezo.

2. Drugo hipotezo sva delno potrdila s tem, da sva našla nekaj novih zanimivih premikov oziroma množic premikov (podgrup). To so denimo cikli in obrati vogalnih koščkov, npr. dvojni obrat $(R'DRD')$ $(LD'L'D)$ $(RL'R'L)^3$ (primer 3.4.1), ter podgrupe, npr. diedrska grupa D_5 , ciklična grupa \mathbb{Z}_{30} in kompleksnejša grupa $(\mathbb{Z}_3)^2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes (\mathbb{Z}_2)^5$.

Bolj učinkovitih od že znanih algoritmov za sestavljanje oziroma natančneje, ustreznega zaporedja podgrup med grupo vseh premikov \mathcal{G} (končno stanje) in trivialno grupo $\{\text{id}\}$ (začetno stanje), med katerimi bi prehajali z majhnim številom osnovnih premikov, pa žal nisva našla.

3. Tudi tretja hipoteza se je izkazala za pravilno. Spoznala sva, da je grupna struktura oktaedrske uganke v smislu direktnega in poldirektnega produkta grup podobna strukturam ostalih znanih ugank, Pyraminx, Rubikove kocke, Megaminx, vendar pa se od njih precej razlikuje v gradnikih produkta in povezavah med njimi. Ta pomembna ugotovitev, da je grupa enaka $\mathcal{G} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times (\mathcal{P} \rtimes \mathcal{O})$ in izomorfná $A_4 \times A_4 \times A_6 \rtimes (\mathbb{Z}_2)^5$, je povzeta v izrekih 3.5.3 in 3.5.5. Zadovoljstvo je še toliko večje, saj sva konkretne račune in prilagoditve dokazov opravila sama.

Glede na ugotovljeno sva prepričana, da bova s pridobljenim znanjem znala opisati tudi grupno strukturo nekoliko večje oktaedrske uganke: Face-turning octahedron, ki tudi še ni nikjer eksplicitno opisana. Veva namreč že, da imamo tam 2-cikle centrov dveh disjunktnih množic, 3-cikel robov, dvojni obrat robov, skupno sodo orientacijo robov po vseh premikih, oglišča pa se obnašajo kot pri Skewb Diamondu (King, 2020).

4. Izkazalo se je, da se da grupno strukturo uganke Skewb Diamond dobro opisati zgolj ob poznavanju osnovnega koncepta oziroma definicije grupe (izreki 3.2.1, 3.5.1, 3.5.2). Nobenih abstraktnih izrekov o delovanjih grup in zapletene splošne definicije zunanjšega poldirektnega produkta nismo potrebovali, za razliko od (Joyner 2008, Theorem 11.2.3, 13.4.2). Z navedenimi konkretnimi izračuni, preverjenimi s programom Mathematica (Wolfram 14.1, 2024), pa postanejo ugotovitve še bolj razumljive. S pomočjo Mathematice sva denimo našla enostaven premik reda 8 (4-cikel in 2-cikel vogalov z obratoma):

$RLB = (1,2,17,25,18,22,23,19) (3,21,26,27) (5,13,14,6,29,30,7,11) (9,10,31,15).$

Raziskovanje Skewb Diamonda je bilo zabavno. Ponekod sva se zaradi pomanjkanja doslednih in sistematičnih virov morala krepko potruditi, a veselje ob rešenih izzivih je poplačalo ves vložen trud.

Skewb Diamond je lahko izvrsten didaktični pripomoček. Osnovne algebrske koncepte, kot so permutacijska grupa, podgrupa edinka, poldirektni produkt in drugo, lahko nazorno predstavimo z ustreznimi premiki uganke.

Ostalo nama je še veliko matematičnih izzivov, povezanih z mehanskimi ugankami, naslednja je, kot rečeno, na vrsti uganka Face-turning Octahedron.

5. VIRI IN LITERATURA

Bandelow, C. *Inside Rubik's Cube and Beyond*. Boston: Birkhäuser, 1982.

Geogebra GmbH. (2020) Geogebra 6.0.609.0. Linz, Avstrija. Dostopno na naslovu : <https://www.geogebra.org>

Joyner, D. *Adventures in group theory: Rubik's Cube, Merlin's machine, and Other Mathematical Toys*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2008. ISBN 0801890136.

King, C. (2020) The Complexity Dynamics of Magic Cubes and Twisty Puzzles. Pridobljeno 20. januarja 2024. Dostopno na naslovu: <https://www.dhushara.com/cubes/cubes.pdf>

Mulholland, J. *Permutation-puzzles*. Samozaložba, 2021. Pridobljeno 10. januarja 2025. Dostopno na naslovu: <http://www.sfu.ca/~jtmulhol/math302/notes/permutation-puzzles-book.pdf>

Penguin D. (13. april 2014) How to Solve a Skewb Diamond: Simple Tutorial!, Dr. Penguin^3. (videoposnetek). Pridobljeno 3. januarja 2024. Dostopno na naslovu: <https://www.youtube.com/watch?v=R2wrbJJ3izM&t=52s> (6:49)

Rotman, J. J. *First course in abstract algebra*. (3rd Edition). University of Illinois at Urbana-Champaign, 2005.

Scherphuis J. (2022) Skewb Diamond Jaap's puzzle page, Pridobljeno 10. januarja 2022. Dostopno na naslovu: <https://www.jaapsch.net/puzzles/diamond.html>

Singmaster, D. *Notes on Rubik's Magic Cube*. New Jersey: Enslow Publishers, 1981.

Starčič J., Starčič M. (2022). Čarobni platonski poliedri, Raziskovalna naloga, dostopno na https://zbirke.zotks.si/2022/resources/OS_matem_1028.pdf

Turner E.C., Gold, K. F. Rubik's Groups, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 92, 1985, 617-629.

Wikipedia contributors. (7. februar 2024). Skewb Diamond, Wikipedia, The free Encyclopedia. Pridobljeno 30. maja 2024. Dostopno na naslovu: https://en.wikipedia.org/wiki/Skewb_Diamond

Wolfram Research, Wolfram Mathematica 14.1, 2024.