Aksiomatski pristop k večigralski igri Nim

Raziskovalna naloga

Področje: **Matematika**

Avtor: **Gregor Bokal**

Mentorica: **Urška Markun**

Somentor: **Drago Bokal**

Lektura: **Ljudmila Bokal**

Gimnazija Bežigrad

Peričeva ulica 4, 1000 Ljubljana

1. a

Ljubljana 2025

Kazalo

1 Uvod **3**

I Teoretični del **5**

2 Definicija igre Nim **7**
2.1 Igralci 7
2.2 Stanje in poteza 7

3 Vpliv parametrov igre **9**
3.1 Pomen strupenih žetonov 9
3.2 Zmagovalna strategija igre z dvema igralcema 11

4 Odločitvena drevesa **13**

II Eksperimentalni del **17**

5 Brez koalicij **19**

6 S koalicijami **21**
6.1 Vsi na enega 21
6.2 Z dvema neločenima koalicijama 24
6.3 Splošno z dvema koalicijama 29

III Rezultati **35**

7 Razprava in zaključki **37**

Povzetek

Zapletena matematična orodja najlažje razumemo, kadar jih koristno uporabimo na razumljivem primeru. Tak razumljiv primer je tudi matematična igra Nim, ki je znana v številnih različicah. Skupno jim je, da igralci v svoji potezi s polja jemljejo omejeno število žetonov, pri tem pa nekaterih („strupenih“) ne želijo vzeti, saj igralec, ki to stori, izgubi igro.

Za ustrezen temelj igro in igralce definiramo kot matematične strukture, ki jim dodelimo ustrezne aksiome. S to podlago nato dokazujemo številne izreke ter opišemo vpliv parametrov igre na zmagovalno strategijo pri igri z dvema igralcema, kjer je to bolj razumljivo in posledično lažje spoznamo dogajanje v igri.

V eksperimentalnem delu pa začnemo z obravnavo igre Nim, ki jo igra več igralcev. Za lažjo predstavo pri raziskovanju izhajamo iz posebej za ta namen prilagojenih odločitvenih dreves. Ugotovimo, da pri večigralski igri strategija ne temelji zgolj na številu žetonov, pač pa je odvisna tudi od odnosov med igralci. Te odnose najlažje definiramo s koalicijami. Poenostavljeno bi lahko rekli, da so koalicije skupine igralcev, ki si prizadevajo za isti cilj in sodelujejo med seboj.

Izkaže pa se, da ni pomembno le to, koliko igralcev je v koaliciji, temveč tudi, v kakšnem vrstnem redu le-ti pridejo na potezo. V nalogi tako raziskujemo vedno splošnejše primere koalicij. Začnemo z igrami, kjer en igralec igra proti vsem ostalim. Take igre so zelo predvidljive, zato tu veliko ugotovitev tudi dokažemo. Tu pridobljeno znanje nato posplošimo tudi na igre, kjer so najprej na potezi vsi igralci ene koalicije, nato pa vsi igralci druge koalicije. V tem primeru je število igralcev v koaliciji poljubno, vendar pa prihajajo na potezo v točno določenem vrstnem redu. Na koncu pa posplošimo tudi to ter ugotovimo, kako morajo biti igralci manjše od dveh koalicij razporejeni, da imajo največ možnosti za zmago. Tako z raziskovalno nalogo v celoti sežemo na široko področje, ki ponuja še veliko možnosti za nadaljno raziskovanje.

Poglavje 1

Uvod

Nim je preprosta matematična igra jemanja žetonov. Pri njej načeloma velja, da kdor pozna zmagovalno strategijo, lahko v pravih okoliščinah vedno zmaga. Med različnimi matematiki lahko zanjo zasledimo veliko različnih pravil. Najpogosteje se obravnava tako imenovani *Moorov Nim* [5], pri katerem dva igralca jemljeta poljubno število žetonov iz različnih kupov žetonov, izgubi pa tisti, ki ne more izvesti poteze (ker žetonov zmanjka). Obstaja pa tudi enostavnejša različica Nima, znana tudi kot *Igra odštevanja* [7], ki je že bila tema nekaterih slovenskih raziskovalnih nalog [2]. Pri slednji dva igralca v vsaki potezi s polja vzameta ali en ali dva žetona, pri tem pa ne želita vzeti zadnjega, ki je „strupen". Tisti igralec, ki vzame ta žeton, namreč izgubi igro. (Obstajajo tudi načini igranja, pri katerih si igralca želita vzeti zadnji žeton, ali pa lahko vzameta celo več kot dva žetona.)

Ne glede na razlike v pravilih je igra z dvema igralcema dokaj predvidljiva in je mogoče izračunati, kateri igralec lahko v danem primeru zmaga (in kako). Kot rečeno, se večina del posveča Moorovemu Nimu, nekatera pa obravnavajo različne dvoigralske posplošitve [1] (vendar redko pride do posplošitev, ki obravnavajo hkrati Moorov Nim in Igro odštevanja). Bolj pa postane stvar zapletena, če je v igri več igralcev. Tudi o tej temi je napisano veliko literature, vendar predvsem za Moorov Nim [4] (zasledili nismo nobene druge).

V pričujoči raziskovalni nalogi zato (morda eni prvih) raziskujemo večigralsko Igro odštevanja. (V nadaljevanju jo kljub vsemu imenujemo Nim, saj tako kot večina avtorjev uporabljene literature tudi mi zapišemo lastno definicijo zanj.) Igro posplošimo na poljubno število igralcev, število strupenih žetonov (oz. odsotnost le-teh) in tudi na različne omejitve vzetih žetonov na potezo.

V teoretičnem delu, kjer spoznamo vpliv tovrstnih parametrov igre na dogajanje v njej, med drugim poiščemo splošno zmagovalno strategijo za dvoigralsko igro. Pri tej je igralčeva odločitev odvisna le od števila žetonov na polju. Drugače je pri večigralski igri, kjer je pomembnih več dejavnikov. Sklepamo lahko, da so med temi dejavniki tudi odnosi med igralci; če, na primer, dva od treh igralcev sodelujeta, lahko v večini primerov brez težav premagata tretjega. Postavimo lahko torej naslednjo hipotezo: *Pri večigralski igri imajo igralci z več „zavezniki" več možnosti za zmago.*

Cilj naše raziskovalne naloge je pravzaprav poiskati dejavnike, ki so igralcem v večigralskem Nimu pomembni pri odločanju. Ker že slutimo, da so med temi dejavniki tudi odnosi med igralci, se v eksperimentalnem delu, kjer tovrstne igre raziščemo, osredotočamo na vpliv pomoči med igralci ter pod katerimi pogoji lahko zmagajo tudi tisti, ki imajo manj „zaveznikov".

Del I

Teoretični del

Poglavje 2

Definicija igre Nim

Za začetek oblikujmo matematično definicijo igre Nim. Da bomo lahko z njo obravnavali čim več različic igre, pri definiciji upoštevamo vse naslednje parametre:

- r-terica igralcev (P) (r predstavlja število igralcev).
- Število žetonov na polju ($n \in \mathbb{N}_0$).
- Število strupenih žetonov na polju ($s \in \mathbb{N}_0$).
- Največje možno število vzetih žetonov ($m \in \mathbb{N}$).

(Za strupene žetone velja, da jih je mogoče vzeti šele, ko zmanjka nestrupenih.)

Če smo natančni, ugotovimo, da določitev teh parametrov definira le hipno ***stanje*** celotne igre, saj se nekatere od teh vrednosti (npr. število žetonov) med igro spreminjajo. Celotna ***igra*** pa je prehajanje med temi stanji.

2.1 Igralci

Preden dokončno definiramo stanje igre, moramo podrobneje predstaviti r-terico P in igralce nasploh. V splošnem so igralci udeleženci igre, od katerih je odvisen njen potek [3]. Vedenje igralca je odvisno od njegove strategije, ki je posledično ključna za njegovo definicijo. Igralca zato opišemo kot večdimenzionalni vektor. i-ta koordinata tega vektorja predstavlja število žetonov, ki jih tak igralec vzame, ko je na začetku njegove poteze na polju i žetonov. Igralec mora imeti najmanj toliko koordinat, kot je število žetonov na polju v igri (kar v raziskovalni nalogi označujemo z n). Zato rečemo, da je igralec $n + l$ dimenzionalni vektor ($l \in \mathbb{N}_0$).

Definicija 1. ***Igralec*** *$\vec{p}$ je vektor $(a_1, a_2, ...a_{n+l}; \forall i \in \mathbb{N}_{n+l}, a_i \in \mathbb{N}_m)$, pri čemer i-ta koordinata pove, koliko žetonov ta igralec vzame, če je na začetku njegove poteze na polju i žetonov.*

Ker je pomembno, v kakšnem vrstnem redu igrajo igralci, jih ne vključimo v množico, v kateri vrstni red elementov ni pomemben, ampak v r-terico, ki ima elemente urejene. Igralec, ki je na potezi, bo predstavljen kot prvi element, zato se vrstni red z vsako potezo spremeni (igralec na prvem mestu se prestavi na zadnje mesto).

2.2 Stanje in poteza

Zdaj lahko natančno definiramo stanje igre:

Definicija 2. ***Stanje*** *N je 4-terica (P, n, s, m), kjer je P r-terica igralcev, urejenih po vrstnem redu, v katerem bodo prišli na potezo, $n \in \mathbb{N}_0$ število žetonov na polju, $s \in \mathbb{N}_0$ število strupenih žetonov in $m \in \mathbb{N}$ največje možno število vzetih žetonov.*

Ker je pri dokazovanju zmagovalnih strategij treba vedeti tudi, ali je v posameznem stanju sploh možno zmagati, definirajmo tudi, kdaj je stanje ***zmagovalno*** in kdaj ***izgubljivo***:

Definicija 3. *Stanje je* ***zmagovalno*** *natanko tedaj, ko obstaja igralec, ki lahko iz tega stanja pride do zmage ne glede na strategijo preostalih igralcev.*

Definicija 4. *Stanje je* ***izgubljivo*** *natanko tedaj, ko ni zmagovalno.*

Rekli smo, da je igra prehajanje med takimi stanji. Posamezen prehod iz enega stanja v drugega imenujemo ***poteza***. Potezo definiramo kot preslikavo M, ki iz množice vseh možnih stanj (S) slika nazaj v isto množico, pri tem pa igralca, ki je bil na potezi, postavi na zadnje mesto v r-terici P (ki je spodaj predstavljena kot $(\vec{p_1}, \vec{p_2}, \ldots, \vec{p_r})$), na podlagi njegove strategije pa spremeni število žetonov.

Definicija 5. ***Poteza*** *M je preslikava, ki deluje po naslednjih pravilih:*

$$M : S \to S$$

$$M : ((\vec{p_1}, \vec{p_2}, \ldots, \vec{p_r}), n, s, m) \mapsto ((\vec{p_2}, \vec{p_3}, \ldots, \vec{p_r}, \vec{p_1}), n - p_{1,n}, s, m)$$

($\vec{p}_{1,n}$ je število žetonov, ki jih vzame prvi igralec, ko vidi n žetonov.)

Poteze se izvajajo, dokler je število vseh žetonov večje od števila strupenih (kar pomeni, da so na polju še vedno tudi nestrupeni žetoni). Če to ne velja, stanje predstavlja ***konec igre***:

Definicija 6. *Stanje $N = (P, n, s, m)$ predstavlja* ***konec igre****, če je $n \leq s$.*

Običajno igro izgubi igralec, ki vzame strupen žeton. Ker pa dopuščamo možnost, da v igri strupenih žetonov sploh ni, rečemo, da igro izgubi tisti, ki v svoji potezi ne more vzeti nestrupenega žetona (ker nestrupenih žetonov ni več).

Definicija 7. *Igro, ki se konča s stanjem $N = (P, n, s, m)$, za katerega velja $n = s$,* ***izgubi*** *igralec, ki je na* ***prvem*** *mestu v r-terici P.*

Pri igrah s strupenimi žetoni je še zmeraj možno, da igralec ne igra razumno in vzame strupen žeton, čeprav mu ne bi bilo treba. Zato je treba definirati še poraz v tem primeru:

Definicija 8. *Igro, ki se konča s stanjem $N = (P, n, s, m)$, za katerega velja $n < s$,* ***izgubi*** *igralec, ki je na* ***zadnjem*** *mestu v r-terici P.*

Igra je sedaj definirana. Preden pa se lotimo raziskovanja, se dogovorimo še za oznako operacije ***ostanka pri deljenju***, ki se v igri pogosto uporabi. V računalništvu se zanjo navadno uporablja znak %, zato ga uporabimo tudi v naši raziskovalni nalogi:

Definicija 9. *Operacija % je preslikava, ki izračuna celoštevilski ostanek. Torej deluje po naslednjih pravilih:*

$$\% : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$$

$$\% : (ab + v, a) \mapsto v, \text{ kjer } 0 \leq v < a.$$

Velja torej $(ab+v)\%a = v$. Po prednosti je ta operacija enakovredna množenju in deljenju.

Primeri uporabe: $8\%2 = 0$, $10\%3 = 1$, $2\%5 = 2$.

Poglavje 3

Vpliv parametrov igre

3.1 Pomen strupenih žetonov

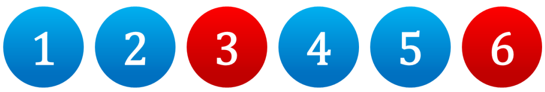
Igra Nim je sedaj definirana z nekaj parametri, ki omogočajo obravnavo njenih številnih različic. Ker ni smiselno, da bi iskali značilnosti vsake različice posebej, si poglejmo, kako ti parametri vplivajo na potek igre. Za lažje razumevanje se sprva omejimo na vse različice za dva igralca, ki jim lahko hitro poiščemo zmagovalno strategijo. Poznavanje teh nam koristi, ker lahko s primerjavo strategij za igre z različnimi parametri prepoznamo njihov vpliv na dogajanje.

Najlažje lahko opazimo, kako na igro vpliva število strupenih žetonov. Primerjajmo dva konkretna primera iger z različnim številom strupenih žetonov (denimo nič in dva). Pri obeh naj bosta v igri dva igralca, ki lahko vzameta največ dva žetona. Na začetku igre naj bo na polju šest žetonov.

Poiščimo najprej zmagovalno strategijo za opisano igro brez strupenih žetonov (pri kateri zmaga tisti igralec, ki vzame zadnji žeton). To najlažje najdemo tako, da igro opazujemo od konca do začetka:

1. Ko je na polju le še en žeton, bo igralec na potezi vzel enega in s tem zmagal.
2. Ko sta na polju dva žetona, bo igralec na potezi zmagal, če vzame dva žetona.
3. Če oba igralca igrata zmagovalno, pri treh žetonih igralec, ki je na potezi, ne more zmagati; če vzame en žeton, bo lahko njegov soigralec vzel dva, če pa vzame dva žetona, bo lahko njegov soigralec vzel enega. To stanje je torej izgubljivo.
4. Če igralec na potezi vidi štiri žetone, lahko zmaga, če vzame en žeton, saj bo tako njegov soigralec v izgubljivem stanju s tremi žetoni.
5. Prav tako lahko igralec zmaga pri petih žetonih, če vzame dva.
6. Stanje s šestimi žetoni pa je spet izgubljivo, saj ne glede na to, koliko žetonov igralec na potezi vzame, njegov soigralec „pristane“ v zmagovalnem stanju.

Opazimo, da če je število žetonov večkratnik števila tri, je stanje izgubljivo, v ostalih primerih pa mora igralec za zmago vzeti toliko žetonov, kot je ostanek pri deljenju števila žetonov s tri.



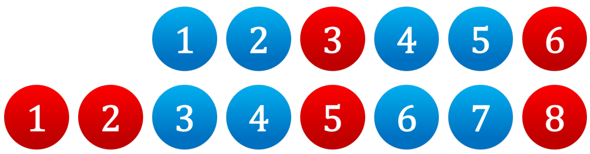
Slika 3.1: Stanja $((\vec{p_1}, \vec{p_2}), n, 0, 2); n \in \mathbb{N}_6$.

Veljavnost tega bi lahko dokazali, vendar si raje poglejmo še primer igre z dvema strupenima žetonoma, in napišimo splošen dokaz.

1. V stanju z le enim žetonom (strupenim) igralec ne more zmagati, saj ne more vzeti nestrupenega žetona. (Do tega pride le, če se igra začne s tem stanjem - v preostalih primerih se igra konča že prej.)
2. Iz istega razloga je izgubljivo tudi stanje z dvema žetonoma.
3. Pri treh žetonih, od katerih sta dva strupena in en nestrupen, lahko igralec zmaga tako, da vzame zadnjega nestrupenega.
4. Prav tako mora za zmago pri štirih žetonih igralec na potezi vzeti zadnja dva nestrupena žetona.
5. Pri petih žetonih pa igralec na potezi ne more zmagati, saj bo ne glede na število vzetih žetonov njegov soigralec v zmagovalnem stanju.
6. Pri šestih žetonih igralec zmaga z vzetjem enega.
7. Pri sedmih žetonih igralec zmaga z vzetjem dveh.
8. Stanje, pri katerem je na polju osem žetonov, pa je spet izgubljivo.

Slika 3.2: Stanja $((\vec{p_1}, \vec{p_2}), n, 2, 2); n \in \mathbb{N}_8$.

Opazimo, da sta prvi dve opisani stanji (pri katerih so na polju le še strupeni žetoni) izgubljivi, pri ostalih pa se ponovi enako zaporedje kot pri igri brez strupenih žetonov.



Slika 3.3: Primerjava konkretnih iger.

Tako ugotovimo, da je za zmagovalno strategijo pravzaprav pomembno le število nestrupenih žetonov. Da bomo lahko pri iskanju splošne zmagovalne strategije iz primera igre brez strupenih žetonov sklepali tudi na vse preostale možnosti, dokažimo naslednjo trditev:

Trditev 1. *Stanje $N = (P, n, s, m)$ je zmagovalno natanko tedaj, ko je zmagovalno tudi stanje $M = (P, n - s, 0, m)$.*

Dokaz. $A \Rightarrow B$:

Predpostavimo, da je stanje $N = (\cdot, n, s, m)$ zmagovalno. To pomeni, da obstaja igralec A, ki iz takega stanja vedno pride do zmage (ne glede na strategije soigralcev).

Tako v stanju N kot M je število nestrupenih žetonov enako (in sicer $n - s$). Ker se igra konča, ko zmanjka nestrupenih žetonov, bo v obeh primerih igre konec, ko se število žetonov zmanjša za $n - s$.

Zaporedje potez, ki tako iz stanja N naredi stanje $(\cdot, s, s, m)$, tudi iz stanja M naredi stanje $(\cdot, 0, 0, m)$. Edina razlika v teh igrah je število strupenih žetonov, ki ostanejo na polju, vendar na jemanje žetonov nimajo drugega vpliva, kot da je zaradi njih število vseh žetonov večje.

Ker po naši predpostavki obstaja igralec $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+l})$, ki vedno zmaga, obstaja tudi tak igralec $\vec{b}$, ki do zmage pride iz stanja M. Od prejšnjega se razlikuje po tem, da ima s koordinat manj, vrednosti preostalih pa so posledično zamaknjene. Opišemo ga lahko kot $\vec{b} = (a_{s+1}, a_{s+2}, ..., a_{n+l})$.

$B \Rightarrow A$:

Predpostavimo, da je stanje $M = (\cdot, n - s, 0, m)$ zmagovalno, torej obstaja igralec $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-s+l})$, ki vedno zmaga. Že v prvem delu dokaza smo razložili, da je za določitev „zmagovalnosti“ stanja pomembno le število nestrupenih žetonov. Ker je to v obeh primerih enako, tudi za stanje N obstaja igralec $\vec{b}$, ki vedno zmaga. Opišemo ga kot $\vec{b} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{s}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-s+l})$.

(Prvih s koordinat predstavlja odločitve v stanjih, ko so na polju le še strupeni žetoni. Ker v takih stanjih ni mogoče zmagati, niti ni pomembno, koliko žetonov igralec takrat vzame. Da je definicija ustrezna, denimo, da takrat igralec vedno vzame en žeton.) □

3.2 Zmagovalna strategija igre z dvema igralcema

Zdaj lahko iz ugotovitev pri igri brez strupenih žetonov sklepamo tudi na ostale igre s strupenimi žetoni. Naslednji parameter igre, ki ga je treba razjasniti, je največje možno število vzetih žetonov. Tudi tu izvedimo primerjavo dveh iger, kjer se le-to razlikuje.

Poznamo že zmagovalno strategijo pri igri brez strupenih žetonov z dvema igralcema, ki lahko vzameta največ dva žetona. Na sliki 3.1 na strani 9 so z rdečo barvo prikazana izgubljiva stanja take igre. Pri njih je ostanek pri deljenju števila žetonov s tri enak nič. V ostalih (zmagovalnih) stanjih pa mora igralec za zmago vzeti toliko žetonov, da bo v izgubljivem stanju njegov soigralec, kar je ravno ostanek pri deljenju števila žetonov s tri.

Poiščimo še zmagovalno strategijo za igro z enakim številom igralcev (dva) in strupenih žetonov (nič), vendar različno omejitvijo števila vzetih žetonov (največ tri).

1. Ko je na polju en žeton, ga igralec vzame in zmaga.

2. Ko sta na polju dva žetona, mora igralec, da zmaga, vzeti oba.

3. Prav tako igralec z vzetjem vseh žetonov zmaga, ko so na polju trije.

4. Če pa igralec vidi štiri žetone, bo po njegovi potezi še zmeraj ostal vsaj en žeton. Ker so vsa stanja, v katera lahko pride njegov soigralec, zmagovalna, je to stanje izgubljivo.

5. V to izgubljivo stanje s štirimi žetoni lahko igralec postavi svojega nasprotnika, če od petih žetonov na polju vzame enega.

6. Enako je, če pri šestih žetonih vzame dva.

7. Pri sedmih žetonih mora za zmago vzeti tri žetone.

8. Pri osmih žetonih pa soigralca spet ne more postaviti v izgubljivo stanje.

Slika 3.4: Stanja $((\vec{p_1}, \vec{p_2}), n, 0, 3); n \in \mathbb{N}_8$.

V tem primeru je za izgubljivost stanja pomemben ostanek pri deljenju števila žetonov s štiri. Če to primerjamo s prejšnjim primerom, ugotovimo, da je v splošnem pomemben ostanek pri deljenju n z $m+1$ (kjer je n število žetonov in m največje možno število vzetih žetonov). Dokažimo to.

Trditev 2. *Naj bo dano stanje $N = ((\vec{p_1}, \vec{p_2}), n, 0, m)$, kjer je $n \in \mathbb{N}_0$ in $m \in \mathbb{N}$. Stanje N je izgubljivo natanko tedaj, ko je vrednost izraza $n\%(m+1) = 0$.*

Dokaz. Trditev dokažimo z matematično indukcijo:

Baza indukcije: Najprej dokažimo, da trditev velja za $n = 0$. Govorimo torej o stanju, ko na polju ni žetonov. Tako stanje je po definiciji izgubljivo. Ker je ostanek pri deljenju števila 0 s katerim koli naravnim številom enak 0, je tudi $0\%(m+1) = 0$. Ekvivalenca torej velja.

Indukcijska predpostavka: Predpostavimo, da pri poljubnem izbranem m trditev velja za vsa naravna števila do vključno n. To pomeni, da imata izjavi „$n\%(m+1) = 0$“ in „Stanje $N = ((\vec{p_1}, \vec{p_2}), n, 0, m)$ je izgubljivo.“ enako logično vrednost za izbran m in vsa števila iz $\mathbb{N}_0$, ki so manjša ali enaka kot n.

Indukcijski korak: Ob tej predpostavki dokažimo, da trditev velja tudi za $n+1$. V tem primeru je na polju en žeton več kot pri stanju z n žetoni. Pri tem moramo potrditi, da lahko veljata ali obe izjavi, ekvivalenco katerih dokazujemo, ali pa nobena od njiju.

$A \Rightarrow B$:

Recimo, da je stanje z $n+1$ žetonom izgubljivo in dokažimo, da velja $(n+1)\%(m+1) = 0$. Uporabimo dokaz s protislovjem. Recimo, da za vrednost izraza $(n+1)\%(m+1) = v$ velja $v > 0$. Ostanek pri deljenju s številom $m+1$ je lahko največ m, torej velja $0 < v \leq m$. Če igralec $\vec{p_1}$ vzame v žetonov, bo njegov soigralec videl $n+1-v \leq n$, kar je po indukcijski predpostavki izgubljivo stanje, saj za ostanek pri deljenju tega števila s številom $m+1$ velja $(n+1-v)\%(m+1) = (n+1)\%(m+1) - v = v - v = 0$. To je protislovje, saj igralec v izgubljivem stanju ne more postaviti svojega soigralca v izgubljivo stanje. Zato velja $(n+1)\%(m+1) = 0$.

$B \Rightarrow A$:

Recimo, da velja $(n+1)\%(m+1) = 0$, in dokažimo, da je stanje z $n+1$ žetonom izgubljivo. Spet uporabimo dokaz s protislovjem. Recimo, da je stanje z $n+1$ žetonom zmagovalno. Torej obstaja tako število žetonov v, ki jih mora igralec $\vec{p_1}$ vzeti, da bo njegov soigralec $\vec{p_2}$ prišel v izgubljivo stanje. Ko pride na potezo igralec $\vec{p_2}$, vidi $n+1-v$ žetonov, kar je manjše ali enako n, saj po pravilih igre velja $0 < v \leq m$. Velja tudi $(n+1-v)\%(m+1) = m+1-v > 0$. Ker za stanja s števili žetonov, ki so manjša ali enaka n, že po indukcijski predpostavki velja, da so izgubljiva le, če je ostanek pri deljenju enak 0 (kar v tem primeru ne drži), pridemo do protislovja. Stanje z $n+1$ žetonom je torej izgubljivo. □

S pomočjo trditve 1 lahko to dokažemo za vsa možna števila strupenih žetonov:

Trditev 3. *Naj bo dano stanje $N = ((\vec{p_1}, \vec{p_2}), n, s, m)$, kjer velja $n, s \in \mathbb{N}_0$ in $m \in \mathbb{N}$. Stanje N je izgubljivo natanko tedaj, ko je vrednost izraza $(n-s)\%(m+1) = 0$.*

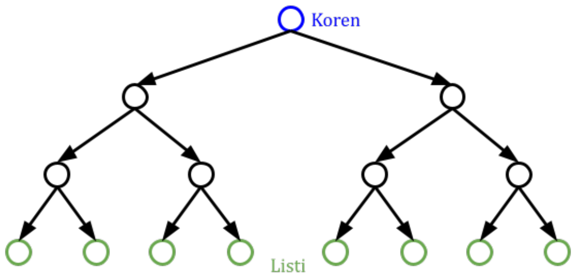
Dokaz. $A \Rightarrow B$: Predpostavljamo, da je stanje $N = ((\vec{p_1}, \vec{p_2}), n, s, m)$ izgubljivo. Trditev 1 pravi, da je posledično izgubljivo tudi stanje $M = ((\vec{p_1}, \vec{p_2}), n-s, 0, m)$. Ker v stanju M ni strupenih žetonov, zanj velja trditev 2. Ta pravi, da so stanja brez strupenih žetonov izgubljiva natanko tedaj, ko je število žetonov na polju (v našem primeru $n-s$) deljivo z $m+1$. Ker vemo, da je stanje M izgubljivo, velja tudi $(n-s)\%(m+1) = 0$.

$B \Rightarrow A$: Predpostavimo, da je $(n-s)\%(m+1) = 0$. Torej je število $n-s$ deljivo z $m+1$. Če bi v nekem stanju brez strupenih žetonov bilo na polju $n-s$ žetonov, igralca pa bi jih lahko v vzela največ m na potezo, bi bilo po trditvi 2 to stanje izgubljivo. Označimo to stanje z $M = ((\vec{p_1}, \vec{p_2}), n-s, 0, m)$. Trditev 1 nam pove, da če je to stanje izgubljivo, je izgubljivo tudi stanje $N = ((\vec{p_1}, \vec{p_2}), n, s, m)$. □

Poglavje 4

Odločitvena drevesa

Sedaj dobro poznamo vpliv parametrov igre na dogajanje v njej. Obravnava igre z več kot dvema igralcema, ki se ji posvetimo v nadaljevanju, pa je nekoliko bolj zapletena. Delo si zato olajšamo s prikazom možnih stanj in prehodov med njimi v obliki ***odločitvenega drevesa***. To je graf z ***vozlišči*** (ki predstavljajo stanja igre) in ***povezavami*** med njimi (ki predstavljajo poteze). „Izvorno“ vozlišče, iz katerega vodijo povezave v vsa ostala, imenujemo ***koren***, „končna“ vozlišča, iz katerih pa ne vodi nobeno vozlišče, imenujemo ***listi***. Splošen primer binarnega drevesa (za katerega velja, da iz vseh vozlišč (razen listov) vodita dve povezavi) je prikazan na sliki 4.1.



Slika 4.1: Binarno drevo.

Opazimo, da število vozlišč z vsakim dodatnim nivojem eksponentno narašča, kar lahko tudi dokažemo:

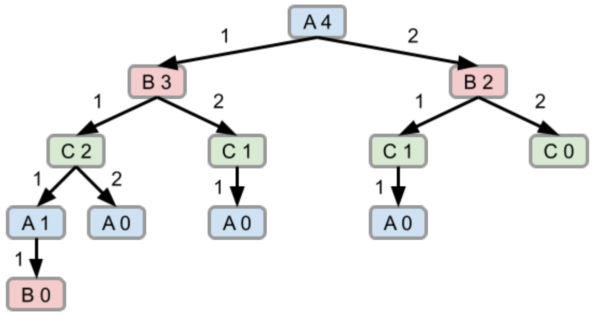
Trditev 4. *Binarno drevo ima na n-tem nivoju 2^n vozlišč ($n \in \mathbb{N}_0$, koren drevesa je v 0-tem nivoju).*

Dokaz. ***Baza indukcije:*** Naj bo $n = 0$. Torej velja $2^n = 2^0 = 1$. Ker ima binarno drevo na začetnem (0-tem) nivoju natanko eno vozlišče (koren), za ta primer trditev drži.

Indukcijska predpostavka: Predpostavimo, da trditev velja za vsa naravna števila do n. To pomeni, da ima binarno drevo na k-tem nivoju 2^k vozlišč ($k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$).

Indukcijski korak: Po indukcijski predpostavki ima binarno drevo na n-tem mestu 2^n vozlišč. Če trditev drži, jih ima na naslednjem nivoju 2^{n+1}. To je res, saj iz vsakega vozlišča na n-tem nivoju vodita dve povezavi v dve novi vozlišči. Le-teh je torej v naslednjem nivoju dvakrat več, kar je $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Trditev torej drži. □

Drevesu, kot je na sliki 4.1, še ne moremo reči *odločitveno* drevo, ker vozlišča in povezave nimajo nobenega pomena. Mi vozlišča uporabimo za prikaz stanj. Po naši definiciji je stanje določeno z igralci (urejenimi po vrstnem redu), številom žetonov na polju, številom strupenih žetonov v igri in največjim možnim številom vzetih žetonov. Ker sta število strupenih žetonov in največje možno število vzetih žetonov v vseh stanjih enaka, na grafu upodobimo le prva dva podatka; s črko označimo igralca na potezi, s številko pa število žetonov. Na tak način lahko narišemo odločitveno drevo za igro Nim, kot je na sliki 4.2, kjer koren predstavlja stanje $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), 4, 0, 2)$ (v igri so torej trije igralci).



Slika 4.2: Odločitveno drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), 4, 0, 2)$.

Čeprav lahko igralci vzamejo dve različni števili žetonov, opazimo dve pomembni razliki; na n-tem nivoju takega drevesa ni nujno 2^n vozlišč, ker iz vozlišč, ki predstavljajo stanja z enim žetonom, vodi le ena povezava. To pomeni, da je na n-tem nivoju takega drevesa *največ* 2^n vozlišč.

Poleg tega pa se izkaže, da lahko vozlišča na istem nivoju predstavljajo enaka stanja. Do poteze, ko igralec $\vec{c}$ vidi en žeton, lahko pridemo tako, da igralec $\vec{a}$ vzame enega in igralec $\vec{b}$ dva, ali pa tako, da $\vec{a}$ vzame dva in $\vec{b}$ enega. Dokažimo, da je za to, katero stanje vozlišče predstavlja, pomembno le, kolikokrat je bila izvedena katera poteza (torej vzetje enega oz. dveh žetonov) ne glede na vrstni red teh potez.

Trditev 5. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ število začetnih žetonov (v stanju, ki ga predstavlja koren) in $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r)$ r-terica igralcev, urejenih po vrstnem redu (v stanju, ki ga predstavlja koren, je na potezi igralec $\vec{p}_1$). Igralci lahko v svoji potezi vzamejo a ali b žetonov.*

Vozlišče, do katerega pridemo iz korena preko x povezav v levo (ki predstavljajo vzetje a žetonov) in y povezav v desno (ki predstavljajo vzetje b žetonov) predstavlja stanje z $n-x\cdot a-y\cdot b$ žetoni, v katerem je na potezi igralec $\vec{p}_i$, kjer je $i = (x + y)\%r + 1$.

Dokaz. Prvi del trditve (da je po x vzetjih a žetonov in y vzetjih b žetonov na polju $n-x\cdot a-y\cdot b$ žetonov) lahko dokažemo s preprostim računanjem. Vedno, ko igralec vzame natanko a žetonov, se spremenljivka x poveča za 1, število žetonov pa zmanjša za a, kadar pa vzame natanko b žetonov, se za 1 poveča spremenljivka y, število žetonov pa se zmanjša za b. Začetno število žetonov (n) se torej x-krat zmanjša za a in y-krat za b. In točno to pravi naša trditev – število žetonov je res enako $n - x \cdot a - y \cdot b$.

Ne glede na to, koliko žetonov igralec v potezi vzame, se natanko ena od spremenljivk x in y poveča za ena. Njuno vsoto lahko zato definiramo kot $k \in \mathbb{N}_0$, ki pravzaprav predstavlja zaporedno število poteze in drugi del trditve (da je po $x + y$ potezah na vrsti igralec $\vec{p}_i$, kjer je $i = (x + y)\%r + 1$) dokažemo z matematično indukcijo:

Baza indukcije: Ko je $k = 0$, ni bila izvedena še nobena poteza. Gre torej za stanje, ki ga predstavlja koren. Na potezi je torej igralec $\vec{p}_1$. To potrjuje tudi naša trditev, saj je $i = (x + y)\%r + 1 = k\%r + 1 = 0\%r + 1 = 0 + 1 = 1$.

Indukcijska predpostavka: Denimo, da trditev velja za vsa naravna števila do vključno k. To pomeni, da je v stanjih, do katerih je mogoče priti po l ($l \leq k$) potezah (torej tistih, ki jih predstavljajo vozlišča na l-tem nivoju odločitvenega drevesa) na potezi igralec $\vec{p}_{l\%r+1}$.

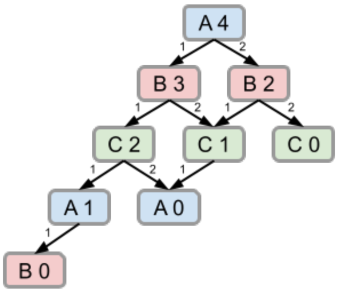
Indukcijski korak: V naslednji potezi se število potez poveča še za 1, torej na $k + 1$. Po indukcijski predpostavki je bil po k potezah na vrsti igralec $\vec{p}_{k\%r+1}$.

- Če je $\vec{p}_{k\%r+1}$ zadnji igralec (torej velja $k\%r + 1 = r$), je po njem spet na potezi prvi igralec. To potrjuje tudi naša trditev: Iz $k\%r + 1 = r$ namreč sledi, da je $k\%r = r - 1$. To je največji možni ostanek pri deljenju z r. $(k + 1)\%r$ je torej 0, $(k + 1)\%r + 1$ pa 1, kar je tudi želen rezultat.

- V vseh ostalih primerih pa je indeks igralca, ki je na vrsti po $k + 1$ potezah za 1 večji od indeksa igralca, ki je na vrsti po k potezah. Tudi naša trditev to potrjuje, saj je v tem primeru razlika indeksov teh dveh igralcev enaka $((k + 1)\%r + 1) - (k\%r + 1) = ((k + 1)\%r) - (k\%r) = (k\%r + 1) - (k\%r) = 1$.

$\square$

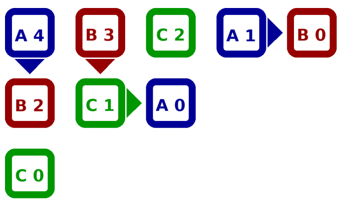
Po tem dokazu si lahko dovolimo, da odločitveno drevo rišemo nekoliko poenostavljeno; v vsakem nivoju rišemo le toliko vozlišč, da so predstavljena vsa različna stanja. S tem dosežemo, da n-ti nivo nima največ 2^n vozlišč, ampak le največ n. Primer tako poenostavljenega drevesa vidimo na sliki 4.3.



Slika 4.3: Poenostavljeno odločitveno drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), 4, 0, 2)$.

Izkaže se, da poenostavljeno odločitveno drevo igre Nim pravzaprav tvori obliko, ki ji rečemo ***mrežni graf*** (ali samo ***mreža***) [6]. Kadar igralci v potezi izbirajo med največ dvema različnima dejanjema (torej iz enega stanja vodita največ dve vozlišči), lahko dogajanje opišemo z nazorno dvodimenzionalno mrežo (v obliki nekakšnega „trikotnika“). Pri obravnavi iger z več igralci se zato osredotočimo na igre, kjer lahko igralci jemljejo le en ali dva žetona (če bi namreč igralci imeli na voljo tri možne poteze, bi bila mreža v obliki nekakšne „piramide“, kar je težko prikazati na papirju).

Da pa ohranimo preglednost tudi pri večjih številih žetonov, v nadaljevanju risanje odločitvenih dreves prepustimo Python programu in drevo še bolj poenostavimo. Da slika ne zavzame preveč prostora, ga tudi nekoliko zasukamo; koren je v zgornjem levem kotu, vozlišča pa si sledijo v desno (vzetje enega žetona) in navzdol (vzetje dveh žetonov). Ker so možni vzetki vedno enaki, jih program niti ne piše, upodobi pa le tiste povezave, ki so za igralca na potezi v obravnavani potezi koristnejše (več o tem kasneje). Zgornje drevo bi torej naš program narisal tako, kot vidimo na sliki 4.4.



Slika 4.4: Še bolj poenostavljeno odločitveno drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), 4, 0, 2)$.

Ko je drevo tako poenostavljeno, ga lahko dodatno nadgradimo tako, da bodo vozlišča prikazovala tudi, v zmago katerega igralca bi ob razumnem igranju vodila igra iz stanja, ki ga vozlišče predstavlja. Spodaj je s psevdokodo opisan algoritem, kako naš Python program to določi. (Ker še ne poznamo dogajanja v igri z več igralci, tu privzamemo, da sta v igri le dva. Bistvene razlike med dvo- in večigralskimi igrami pojasnimo kasneje.)

Algoritem 1 Določanje potencialnega zmagovalca v vsakem stanju.

- **Q** naj bo prazna **vrsta** (urejen seznam, ki mu lahko vzamemo element na prvem mestu ali mu dodamo element na zadnje mesto).
- Za vsak **list L** (vozlišče drevesa, ki predstavlja konec igre):
  - **L** obarvamo z barvo **zmagovalca** (igralca, ki ni na potezi. Ker gre za konec igre, igralec na potezi ne more več vzeti nestrupenih žetonov - torej izgubi).
  - **Predhodnike** (vozlišča, ki vodijo v obravnavano vozlišče) vozlišča **L** dodamo na zadnjo mesto vrste **Q**.
- Dokler vrsta **Q** ni prazna:
  - Iz vrste **Q** vzamemo prvi element **E**.
  - Naj bo **N** seznam **naslednikov** vozlišča **E** (torej vozlišč, v katera lahko pridemo iz vozlišča **E** v naslednji potezi).
  - Če vsaj eno od vozlišč seznama **N** obarvano z barvo igralca na potezi, tudi vozlišče **E** obarvamo s to barvo.
  - Če pa vsa vozlišča seznama **N** vodijo v zmago drugega igralca, tudi vozlišče **E** obarvamo z barvo drugega igralca.
  - Če ima vozlišče **E** predhodnike, jih dodamo na konec vrste **Q**.

Dokažimo sedaj, da ta algoritem ustrezno označi polja:

Trditev 6. *Igralec $\vec{a}$, ki je na potezi v stanju N, lahko zmaga, če je vozlišče, ki predstavlja stanje N, po zgornjem algoritmu obarvano z barvo tega igralca.*

Dokaz. Vozlišče, ki predstavlja stanje N, je lahko obarvano z barvo igralca $\vec{a}$ le, če je tudi vozlišče vsaj enega od naslednjih stanj prav tako obarvano z barvo igralca $\vec{a}$. Obstaja torej poteza, ki iz stanja N vodi v neko drugo stanje s tako obarvanim vozliščem.

1. Predpostavimo, da je to naslednje stanje z enako obarvanim vozliščem že konec igre. Igralec, ki je na potezi v takem stanju, izgubi, drugi pa zmaga. Ker je po igralcu $\vec{a}$ na vrsti igralec $\vec{b}$, vemo, da v tem primeru igralec $\vec{a}$ res lahko zmaga.
2. Če pa to naslednje stanje, v katerega lahko pridemo iz stanja N, ni list, pa je vseeno obarvano z barvo igralca $\vec{a}$, lahko zanj naredimo naslednji sklep:
   - Če je bil v prejšnem stanju na potezi igralec a, je zdaj na potezi drugi igralec (b). Ker je vozlišče stanja kljub temu obarvano z barvo igralca a, to pomeni, da so vsa možna naslednja stanja obarvana z barvo igralca a. Vsako od teh stanj lahko spet obravnavamo pod točko 1 ali točko 2.
   - Če je bil v prejšnjem stanju na potezi igralec b, je zdaj na potezi igralec a. Ker je vozlišče stanja obarvano z barvo igralca a, je gotovo vozlišče vsaj enega od naslednjih stanj obarvano z enako barvo. Tudi to naslednje stanje lahko naprej obravnavamo ali pod točko 1 ali pod točko 2.

□

Del II

Eksperimentalni del

Poglavje 5

Brez koalicij

Vemo že, da če Nim igrata dva igralca, zmagovalna strategija temelji zgolj na številu žetonov. Tega ne moremo trditi, kadar je v igri več igralcev. Izkaže se namreč, da so tu zelo pomembni tudi odnosi med igralci. Govorimo o ***koalicijah***. Igralci v koaliciji si prizadevajo, da nihče izmed njih ne izgubi, a več o tem kasneje. Za začetek si poglejmo primer igre s tremi igralci ($\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$), kjer koalicij ni (oz. je vsak v koaliciji le s samim seboj). Denimo, da je na polju za začetek devet žetonov, med katerimi ni strupenih, igralci pa lahko vzamejo največ dva žetona. V nadaljevanju vsako situacijo posebej tudi podrobneje obrazložimo (pri tem igralca na potezi vedno označujemo z $\vec{a}$, igralca, ki pride na potezo po njem, z $\vec{b}$, še naslednjega igralca pa s $\vec{c}$). Za lažjo predstavo lahko ob branju sledimo vozliščem na drevesu s slike 5.1 (ki je na strani 20).

1. Ko igralec $\vec{a}$ vidi en žeton, nima druge možnosti, kot da ga vzame. To stanje torej vodi v poraz naslednjega igralca ($\vec{b}$).

2. Če igralec $\vec{a}$ vidi dva žetona, bo zagotovo zmagal, njegova poteza pa odloča o usodi preostalih dveh igralcev; če vzame dva žetona, bo izgubil naslednji igralec ($\vec{b}$), če pa vzame en žeton, bo zadnjega vzel $\vec{b}$, izgubil pa bo $\vec{c}$.

3. Ko igralec $\vec{a}$ vidi tri žetone, se mu bolj splača vzeti dva žetona. S tem namreč zagotovi poraz igralca $\vec{c}$. Če bi namesto tega $\vec{a}$ vzel en žeton, bi igralec $\vec{b}$ odločal, ali naj izgubi $\vec{a}$ (česar si $\vec{a}$ ne želi) ali naj izgubi $\vec{c}$ (kar lahko doseže že $\vec{a}$ z vzetjem dveh žetonov). Ob razumnem igranju torej to stanje vodi v poraz igralca $\vec{c}$.

4. Tudi pri štirih žetonih na polju se igralcu $\vec{a}$ bolj splača vzeti dva žetona. Če bi namreč vzel enega, bi ob razumnem igranju preostalih igralcev to vodilo v poraz igralca $\vec{a}$, čemur se le-ta izogne, če od štirih žetonov vzame dva. S tem omogoči igralcu $\vec{b}$, da odloči, kdo od igralcev $\vec{a}$ in $\vec{c}$ bo izgubil. Za igralca $\vec{a}$ to sicer še zmeraj ni idealno, vendar vsaj obstaja možnost, da se ga igralec $\vec{b}$ „usmili“.

5. Podobno je pri petih žetonih. Tu se igralcu $\vec{a}$ bolj splača vzeti en žeton, s čimer bo ob razumnem igranju igralca $\vec{b}$ odločanje o izidu igre prepustil igralcu $\vec{c}$. Če bi $\vec{a}$ vzel dva žetona, bi $\vec{b}$ videl tri. Vemo, da se mu v tem stanju bolj splača vzeti dva žetona, kar pa vodi v poraz igralca $\vec{a}$.

6. Več upanja pa igralcu $\vec{a}$ prinaša stanje s šestimi žetoni. Če tu namreč vzame enega, bo igralec $\vec{b}$ videl pet žetonov in ob razumnem igranju omogočil igralcu $\vec{a}$, da izbere poraženca.

   (Vredno je omeniti tudi, da bi ob razumnem igranju preostalih igralcev v tem stanju vzetje dveh žetonov vodilo v odločanje igralca $\vec{c}$.)

7. Do enakega izida pridemo, če $\vec{a}$ pri sedmih žetonih na polju vzame dva.

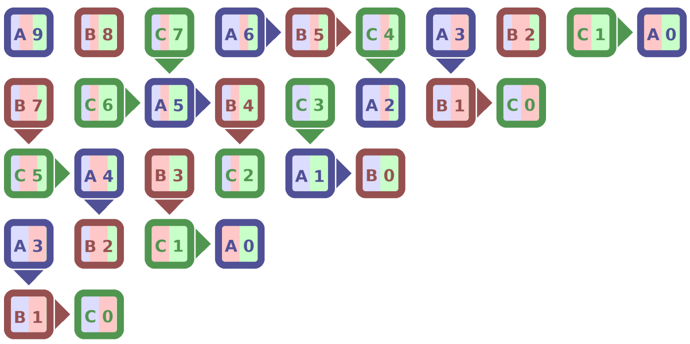
   (V tem primeru bi vzetje enega žetona praviloma vodilo v odločanje igralca $\vec{b}$.)

8. Kadar pa je na polju osem žetonov, praviloma ni pomembno, koliko jih igralec $\vec{a}$ vzame. Če vzame en žeton, jih bo $\vec{b}$ videl sedem, če pa $\vec{a}$ vzame dva žetona, jih bo $\vec{b}$ videl šest. Vemo, da lahko v obeh teh stanjih igralec na potezi sebi omogoči izbor poraženca. Ne glede na odločitev igralca $\vec{a}$ ob razumnem igranju stanje vodi v odločanje igralca $\vec{b}$.

9. Pri devetih žetonih pa prvič opazimo, da so zelo pomembni tudi odnosi med igralci. Če namreč $\vec{a}$ vzame en žeton, jih bo $\vec{b}$ videl osem. Ne glede na njegovo odločitev bo to vodilo v odločanje igralca $\vec{c}$. Če pa igralec $\vec{a}$ vzame dva žetona, jih bo $\vec{b}$ videl sedem, torej lahko zagotovi, da bo o izidu odločal on sam.

   Igralec $\vec{a}$ je torej postavljen pred vprašanje, ali pri odločanju bolj zaupa igralcu $\vec{b}$ ali $\vec{c}$. Jasno pa je, da on sam (igralec $\vec{a}$) ob razumnem igranju gotovo ne bo odločal. Ker v obravnavanem primeru $\vec{a}$ ni v koaliciji z nobenim od drugih igralcev, je stanje z devetimi žetoni zanj neugodno.

Opisana stanja prikazuje tudi že omenjeno drevo na sliki 5.1. Ključne odločitve za vsako število žetonov lahko pravzaprav razberemo že iz zgornje vrstice slike. Ostale vrstice so tu zato, da razumemo posledice odločitev v posameznem stanju.



Slika 5.1: Odločitveno drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), 4, 0, 2)$.

Barve v vozliščih ponazarjajo „ugodnost“ stanja za posameznega igralca. Več kot je na polju žetonov, manj „odločilne“ so odločitve v posameznem stanju, kar razberemo iz skoraj enakih ugodnosti za vse igralce (če bi drevo prikazovalo tudi večje število žetonov, bi bilo to še bolj razvidno).

Poglavje 6

S koalicijami

Zdaj razumemo, zakaj so pri večigralski igri pomembni odnosi med igralci; obstajajo namreč stanja, v katerih mora igralec izbrati, kateremu soigralcu bo „predal svojo usodo“. Veliko bolj je igra predvidljiva, če že vnaprej določimo, kateri igralci med seboj sodelujejo, torej so skupaj v koaliciji.

Pri uvajanju večigralskih koalicij v igro moramo nekoliko spremeniti način določanja zmagovalca. Do sedaj je vedno en igralec izgubil, ostali pa zmagali. Da pa je igralcem znotraj koalicije res v interesu, da si pomagajo med seboj, moramo to definicijo spremeniti. Dogovorimo se, da ko igralec vzame strupen žeton oz. ne more vzeti nestrupenega, izgubi celotna koalicija, v kateri je.

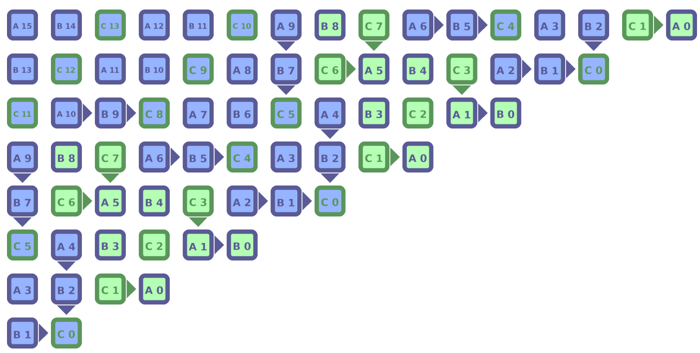
Definicija 10. ***Poraženec*** *je igralec, ki je vzel strupen žeton oz. v svoji potezi ni mogel vzeti nestrupenega.*

Definicija 11. ***Koalicija*** *je skupina poljubnih igralcev v igri, ki niso člani nobene druge koalicije. (Velja tudi, da je vsak igralec član vsaj ene koalicije.) Na koncu igre vsi igralci tiste koalicije, v kateri je poraženec, izgubijo, vsi ostali igralci pa zmagajo.*

V nadaljevanju si pogledamo nekaj zanimivih „pojavov“ pri igri s takimi koalicijami. Pri tem popolnoma razrešimo igro, kjer en igralec igra proti ostalim, v nadaljevanju pa pridemo tudi do vse splošnejših domnev o igri z dvema koalicijama.

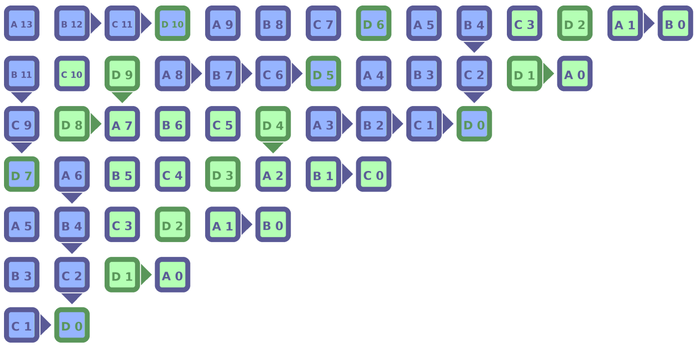
6.1 Vsi na enega

Slika 6.1 prikazuje odločitveno drevo igre s tremi igralci, kjer sta prva dva (modro označena $\vec{a}$ in $\vec{b}$) v koaliciji, z zeleno označeni $\vec{c}$ pa je sam (igralca, ki je v koaliciji le sam s seboj, v nadaljevanju večkrat imenujemo ***posameznik***). Barva polnila se izračuna po algoritmu, opisanem na koncu poglavja o odločitvenih drevesih, s to razliko, da ne gre za barvo potencialnega zmagovalca, pač pa za barvo potencialne zmagovalne koalicije.

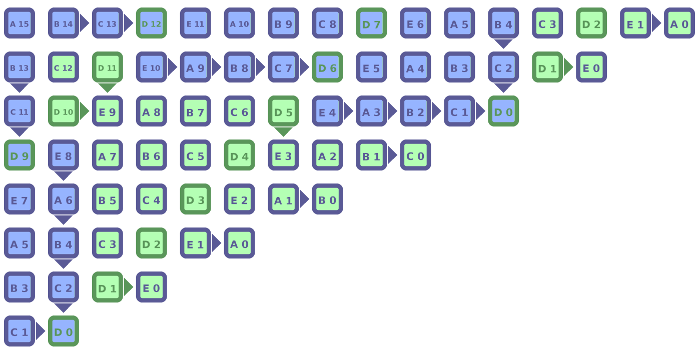


Slika 6.1: Odločitveno drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), 15, 0, 2)$, kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v koaliciji.

Opazimo, da je za razliko od igre brez koalicij tu popolnoma jasno, za katero koalicijo je stanje ugodno in za katero ne. Posameznik (igralec $\vec{c}$) lahko zmaga na dva načina; tako da poraženec postane $\vec{a}$, ali pa tako, da poraženec postane $\vec{b}$. Med stanji, ki predstavljajo konec igre, zato prevladujejo taka, v katerih posameznik zmaga. Toda več kot je žetonov, manj je takih stanj; kadar je na potezi igralec $\vec{c}$, bo ob razumnem igranju izbiral poteze, ki bodo vodile v njegovo zmago (do tega pride enkrat na tri poteze). Ko pa je na potezi kateri od drugih dveh igralcev, se bosta praviloma takim stanjem izogibala (do izogibanja takim stanjem torej pride dvakrat na tri poteze). Opazimo, da če je na polju več kot osem žetonov, ob razumnem igranju preostalih igralcev posameznik sploh ne more zmagati. Enako je tudi, če je vrstni red drugačen (pomembno je namreč le to, koliko igralcev iste koalicije je na potezi zapored, za kar je v obravnavanem primeru le ena možnost). Oglejmo si še nekaj dreves iger, kjer je v eni koaliciji posameznik, v drugi pa vsi ostali (tokrat je posameznik igralec $\vec{d}$):



Slika 6.2: Odločitveno drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}), 13, 0, 2)$, kjer so $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v koaliciji.



Slika 6.3: Odločitveno drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}), 15, 0, 2)$, kjer so $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\vec{e}$ v koaliciji.

Opazimo, da je največje število žetonov, pri katerem lahko posameznik še zmaga, z vsakim novim igralcem v številčnejši koaliciji večje za dva. Dokažimo nekaj trditev, s katerimi to razložimo (ker pri tem vedno obravnavamo enako stanje, ga najprej definiramo):

Definicija 12. *Stanje **prvi proti ostalim** je stanje oblike* $S = ((\vec{i_1}, \vec{i_2}, ...\vec{i_r}), n, s, 2)$ $(r > 2)$, *za katerega velja, da je igralec* $\vec{i_1}$ *v koaliciji sam s seboj, v drugi („večji“) koaliciji pa so vsi ostali igralci (v njej je torej* $r - 1$ *igralcev).*

V nadaljnjih dokazih torej obravnavamo stanje $S = (\cdot, n, s, 2)$, ki ustreza definiciji stanja *prvi proti ostalim*. Ne pozabimo, da je r število igralcev, n število vseh žetonov, s število strupenih žetonov, $n - s$ pa posledično število nestrupenih žetonov.

Trditev 7. *Če je* $0 < n - s < r$, *bo igralec* $\vec{i_1}$ *zagotovo zmagal.*

Dokaz. Če vsak od $r-1$ igralcev v večji koaliciji vzame en žeton, skupaj s polja vzamejo $r-1$ žetonov. V stanju S je na polju $n-s$ nestrupenih žetonov. Po potezi igralca $\vec{i_1}$, jih bo ostalo ali $n-s-1$ ali $n-s-2$. Ker je $n-s<r$, velja tudi $n-s-2<n-s-1<r-1$. V obeh primerih jih bo torej ostalo manj, kot je število igralcev v večji koaliciji. To pomeni, da igralec $\vec{i_1}$ ne bo več prišel na potezo, saj se bo igra prej končala. Ker igro izgubi tisti igralec, ki v svoji potezi ne more vzeti nestrupenega žetona oz. vzame strupenega, igralec $\vec{i_1}$ pa do poteze sploh ne bo prišel, bo zagotovo zmagal. □

Trditev 8. *Če je $0<n-s=r$, bo igralec $\vec{i_1}$ zagotovo zmagal, če in samo če vzame dva žetona.*

Dokaz. Če $\vec{i_1}$ vzame en žeton, bo po njegovi potezi ostalo $n-s-1=r-1$ žetonov. Če vsak od $r-1$ igralcev večje koalicije nato vzame en žeton (torej jih bodo skupaj vzeli $r-1$, kar so pravzaprav vsi nestrupeni žetoni na polju) bo na potezo prišel igralec $\vec{i_1}$. Ta ne bo več mogel vzeti nestrupenega žetona, zato bo igro v tem primeru izgubil.

Če pa $\vec{i_1}$ namesto enega žetona vzame dva, bo zagotovo zmagal; po njegovi potezi jih bo namreč na polju ostalo $n-s-2=r-2$. To število žetonov pa je manjše od števila igralcev v večji koaliciji, zatorej bo žetonov zmanjkalo, še preden bi $\vec{i_1}$ lahko prišel na potezo. To pomeni, da bo zagotovo zmagal. □

Zdaj vemo, da če je na polju od 1 do r nestrupenih žetonov, lahko igralec na potezi zmaga ne glede na odločitve ostalih. Če v igri ne bi bilo večigralskih koalicij, bi rekli, da so ta stanja zmagovalna. V nadaljevanju o njih govorimo kot o ***začetni varni coni***.

Definicija 13. *Stanje $S=((\vec{i_1},\vec{i_2},...\vec{i_r}),n,s,2)$, ki ustreza definiciji stanja prvi na ostale, je v **začetni varni coni** natanko tedaj, ko velja $0<n-s\leq r$.*

Trditev 9. *Če velja $r<n-s<2r$, za to stanje ne obstaja tak igralec $\vec{i_1}$, ki bi zmagal ne glede na ostale igralce.*

Dokaz. V stanju S je na polju $n-s$ nestrupenih žetonov. Po potezi igralca $\vec{i_1}$ jih na polju ostane ali **n - s - 1** ali **n - s - 2**. Po igralcu $\vec{i_1}$ na potezo pride $r-1$ igralcev večje koalicije, ki lahko skupaj vzamejo najmanj $r-1$ (označimo to z a) in največ $2r-2$ (označimo to z b) žetonov (razen seveda, če na polju sploh ni toliko žetonov). Ker velja $r<n-s<2r$, velja tudi $a<$ **n - s - 1** $\leq b$ in $a\leq$ **n - s - 2** $<b$. Ne glede na to, koliko žetonov torej igralec $\vec{i_1}$ vzame v stanju S, jih bodo lahko vsi ostali igralci skupaj vzeli natanko toliko, kot jih ostane in s tem zagotovili poraz igralca $\vec{i_1}$. To pomeni, da za to stanje ne obstaja tak igralec $\vec{i_1}$, ki bi lahko zmagal, saj njegova odločitev nima vpliva na končni izid. □

Imenujmo taka stanja, ki sledijo *začetni varni coni*, ***začetna nevarna cona***:

Definicija 14. *Stanje $S=((\vec{i_1},\vec{i_2},...\vec{i_r}),n,s,2)$, ki ustreza definiciji stanja prvi proti ostalim, je v **začetni nevarni coni** natanko tedaj, ko velja $r<n-s\leq 2r$. (Da je stanje v tej coni, je lahko $n-s$ najmanj $r+1$ in največ $2r-1$. Posledično obstaja $r-1$ različnih števil žetonov, ki jih lahko ima stanje v nevarni coni).*

Trditev 10. *Naj bo $k\in\{1,2\}$. Če je $n-s=2r-1+k$ in igralec $\vec{i_1}$ vzame k žetonov, lahko zmaga ne glede na odločitve ostalih igralcev.*

Dokaz. Če torej $\vec{i_1}$ vzame k nestrupenih žetonov, jih po njegovi potezi ostane $2r-1$. Vemo že, da jih lahko ostali igralci skupaj vzamejo med $r-1$ in $2r-2$. Obe ti števili sta manjši od $2r-1$ (torej niti vsi igralci večje koalicije ne morejo skupaj vzeti vseh nestrupenih žetonov). Po koncu potez vseh teh igralcev spet pride na vrsto igralec $\vec{i_1}$, število nestrupenih žetonov na polju pa je torej lahko od $(2r-1)-(2r-2)=1$ do $(2r-1)-(r-1)=2r-1-r+1=r$. Ker že dokazana trditev 7 pravi, da igralec $\vec{i_1}$ zagotovo zmaga pri vseh številih žetonov od 1 do $r-1$, ob pravi odločitvi pa po trditvi 8 tudi pri r žetonih, vemo, da ima možnost zmagati tudi v obravnavanem. □

V nadaljevanju izvemo, da sta stanji *prvi na ostale* z $2r$ in $2r+1$ nestrupenimi žetoni zadnji taki stanji, v katerih lahko igralec $\vec{i_1}$ še zmaga. Definirajmo ju torej kot ***končna varna cona***.

Definicija 15. *Stanje* $S = ((\vec{i_1}, \vec{i_2}, ...\vec{i_r}), n, s, 2)$*, ki ustreza definiciji stanja prvi na ostale, je v* ***končni varni coni*** *natanko tedaj, ko velja* $n - s \in \{2r, 2r+1\}$*.*

Trditev 11. *Če velja* $n - s > 2r + 1$*, za to stanje ne obstaja tak igralec* $\vec{i_1}$*, ki bi zmagal ne glede na ostale igralce.*

Dokaz. Označimo število žetonov, ki jih igralec $\vec{i_1}$ vzame v svoji potezi s $k \in \{1,2\}$. Po njegovi potezi torej ostane na polju $n - s - k$ nestrupenih žetonov. Vemo že, da jih lahko do naslednje poteze igralca $\vec{i_1}$ ostali igralci skupaj vzamejo med $r-1$ in $2r-2$, torej lahko igralec $\vec{i_1}$ v naslednji svoji potezi vidi število nestrupenih žetonov med $\mathbf{a} = n - s - k - (2r-2)$ in $\mathbf{b} = n - s - k - (r-1)$. Videl bo torej eno od $r-1$ različnih (zaporednih) števil nestrupenih žetonov med $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$.

Podrobneje si poglejmo neenakost, ki je zapisana v trditvi, in iz nje razberimo nekaj o velikosti najmanjšega od teh števil (a, torej $n - s - k - (2r-2)$):

$$\begin{aligned} n - s &> 2r + 1 \\ n - s - k &> 2r + 1 - k \\ n - s - k - (2r-2) &> 2r + 1 - k - (2r-2) \\ a &> 2r + 1 - k - 2r + 2 \\ a &> 3 - k \end{aligned}$$

Ker je $k \in \{1,2\}$, igralec $\vec{i_1}$ v naslednji potezi zagotovo ne bo videl manj kot dveh nestrupenih žetonov. Ker po že dokazanih trditvah obstaja r stanj, ki jih lahko uvrstimo v *začetno varno cono* in sta med njimi tudi stanje z enim in dvema nestrupenima žetonoma, je lahko med stanji, v katera lahko $\vec{i_1}$ pride v naslednji potezi, največ $r-2$ stanj, ki bi mu omogočala zmago. Ker pa lahko $\vec{i_1}$ v naslednji potezi vidi eno od $r-1$ različnih števil nestrupenih žetonov, bo med njimi gotovo vsaj eno tako, ki igralcu $\vec{i_1}$ ne bo zagotavljalo zmage. (Vredno je tudi omeniti, da če bi med možnimi naslednjimi stanji bilo kakšno v *končni varni coni*, med njimi gotovo ne bi bilo nobenega iz *začetne varne cone*; med tema *conama* je namreč še *začetna nevarna cona*, v kateri je $r-2$ različnih stanj z zaporednimi števili žetonov.)

Ker imajo torej ostali igralci v vsakem primeru možnost vzeti toliko žetonov, da $\vec{i_1}$ ne bo mogel zmagati, trditev drži. □

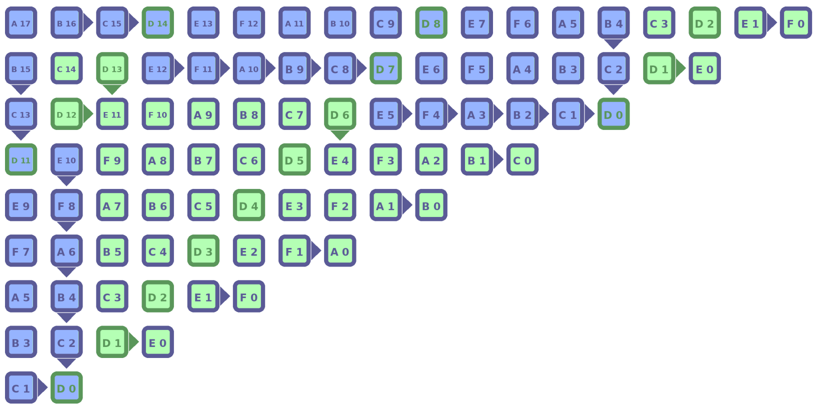
Dokazane trditve opisujejo le stanja, ko je posameznik na potezi. Za ta zdaj vemo, da je največje število nestrupenih žetonov, ki posamezniku omogočajo zmago, enako $2r+1$. Pri igri s tremi igralci je to 7. Drevo na sliki 6.1 pa kaže, da lahko v nekaterih primerih posameznik zmaga tudi, če je na polju osem žetonov. To velja za primere, ko osem (ali splošneje $2r+2$) žetonov vidi igralec, po katerem bo prišel na potezo posameznik. Ker lahko vzame le en ali dva žetona, bo naslednje stanje zagotovo v *končni varni coni* (v konkretnem primeru s tremi igralci to pomeni, da bo posameznik videl šest ali sedem žetonov (zmagovalno stanje)). Čim pa je na polju več kot $2r+2$ nestrupenih žetonov, lahko posameznik zmaga le, če ostali igralci ne igrajo razumno; vedno imajo namreč možnost, da mu preprečijo videnje ustreznih števil žetonov. Če pa je na potezi pri večjem številu žetonov posameznik sam, ne more zmagati, kar dokazuje trditev 11.

6.2 Z dvema neločenima koalicijama

Zdaj podrobno poznamo večigralski Nim z dvema koalicijama, za kateri velja, da je v prvi eden od igralcev, v drugi pa so vsi ostali. V tem razdelku to znanje posplošimo na Nim z dvema koalicijama, ki pa imata tudi drugačna števila igralcev. Ker pa se izkaže, da ni pomembno samo to, koliko je igralcev v koaliciji, pač pa tudi, v kakšnem vrstnem redu pridejo na potezo, koalicijam, ki jih obravnavamo v tem razdelku, pravimo ***neločene koalicije***.

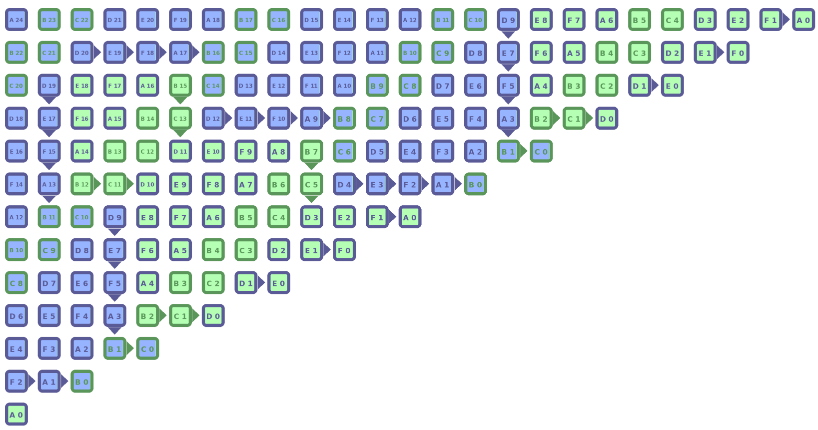
Definicija 16. *Koalicija je* ***neločena*** *natanko tedaj, ko vsi igralci te koalicije pridejo na potezo eden za drugim.*

Ponovno začnimo z opazovanjem generiranih odločitvenih dreves. (Ker so zaradi večjega števila igralcev ta res velika, se osredotočamo le na barvo vozlišč. Kar je pomembnega pri zapisu znotraj vozlišč, poudarimo v veznem besedilu.) Tokrat za izhodišče vzemimo igre s šestimi igralci. Slika 6.4 prikazuje že nekoliko znan primer, kjer en igralec (z zeleno označen $\vec{d}$) igra sam proti ostalim:



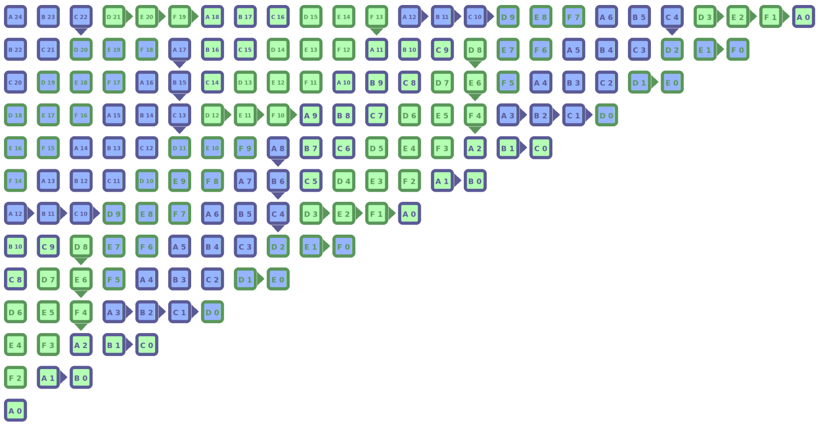
Slika 6.4: Odločitveno drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}), 17, 0, 2)$, kjer je igralec $\vec{d}$ sam v koaliciji.

Sledi pa še nov primer igre, kjer dva igralca ($\vec{b}$ in $\vec{c}$) igrata proti ostalim štirim:



Slika 6.5: Odločitveno drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}), 24, 0, 2)$, kjer sta $\vec{b}$ in $\vec{c}$ sama v koaliciji.

Če sliko 6.4 primerjamo s sliko 6.5, opazimo, da zeleno označena vozlišča tvorijo obliko nekakšne „smreke“. To podrobneje opišemo v nadaljevanju. Pred tem pa si poglejmo še odločitveno drevo, kjer imata obe koaliciji tri igralce:



Slika 6.6: Odločitveno drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}), 24, 0, 2)$, kjer so $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v koaliciji.

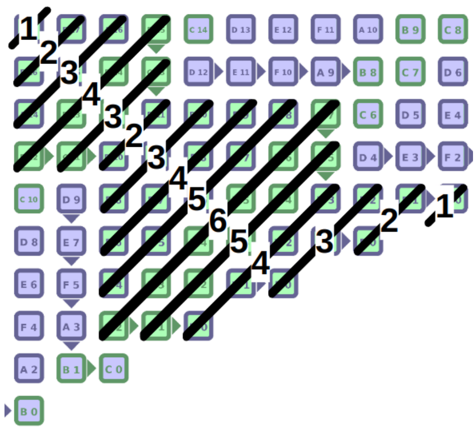
Tudi v tem primeru se posamezen obarvan pas oži in krči, vendar pa je to dogajanje uravnoveševno in posledično ni omejitve, da od nekega števila žetonov dalje ena od koalicij ne more zmagati.

Poskusimo sedaj razumeti, kakšna je oblika prej omenjenih „smrek“. Da bomo lahko strokovno uporabljali ta izraz, ga najprej definirajmo:

Definicija 17. ***Odločitvena smreka*** *(v nadaljevanju samo* ***smreka****) je odločitveno drevo igre Nim z dvema koalicijama, ki pa ne vsebuje vseh vozlišč, kot bi jih običajno odločitveno drevo z istim korenom. Vsebuje le tista vozlišča, ki predstavljajo stanja, za katera obstajajo taki igralci manjše koalicije, ki lahko zmagajo ne glede na odločitve igralcev večje koalicije.*

Definicija 18. ***Dno smreke*** *je tisto vozlišče v smreki, ki je od njenega korena najbolj oddaljeno (na slikah v raziskavi je to skrajno desno vozlišče oz. najnižje od skrajno desnih, če je takih vozlišč več).*

Spomnimo se, da so odločitvena drevesa na obravnavanih slikah poenostavljena; vozlišča, ki so tu prikazana v diagonali, so v izvornem odločitvenem drevesu prikazana v vrsticah (saj se do stanj, ki jih predstavljajo, pride v enakem številu potez). Ob upoštevanju tega poglejmo, koliko različnih stanj, ugodnih za manjšo koalicijo, je v posamezni vrstici konkretne smreke:



Slika 6.7: Razrez smreke po vrsticah.

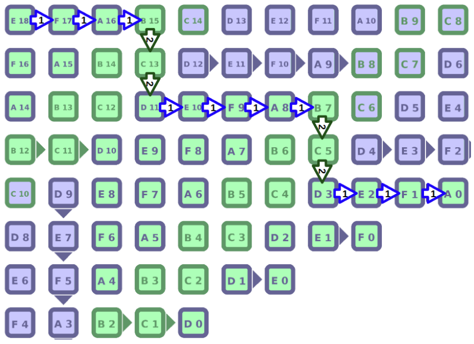
Števila stanj v posamezni vrstici smreke na sliki 6.7 zapišimo od spodnje do zgornje vrstice kot 15-terico $D = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$. Označimo število igralcev v manjši koaliciji z a, število igralcev v večji koaliciji pa z b. V konkretnem primeru je torej $a = 2$ in $b = 4$. Opazimo, da je prvih $a+b$ števil 15-terice D pravzaprav prvih $a+b$ naravnih števil. Gre namreč za stanja, ki ali predstavljajo konec igre z zmago manjše koalicije ali pa vanj vodijo ne glede na odločitve igralcev (v igrah, kjer eden od igralcev igra proti ostalim (torej $1 = a < b$), stanja iz teh vrstic poznamo kot *začetna varna cona*). Vredno je pripomniti, da je v stanjih $(a + b)$-te vrstice (od spodaj) na potezi prvi igralec manjše koalicije. V naslednjih b vrsticah se število vozlišč zmanjšuje za ena. Gre namreč za vrstice, ki predstavljajo stanja, v katerih so na potezi igralci večje koalicije. Za tem sledi še a vrstic, v katerih se to število povečuje (v vsaki vrstici za ena). V stanjih, predstavljenih z vozlišči iz $2(a+b)$-te vrstice, je prav tako na potezi prvi igralec manjše koalicije. V konkretnem primeru je to $2(a+b) = 2(2+4) = 2\cdot 6 = 12$, torej dvanajsta vrstica, v kateri so štiri vozlišča. Če bi jih bilo več kot b, bi se cikel ponovil; b vrstic bi se število manjšalo, nato pa bi se še a vrstic večalo. Ker pa to ne drži, se število vozlišč zmanjša do nič, še preden bi prišli do poteze katerega od igralcev manjše koalicije. Struktura smreke (od spodaj navzgor) je torej naslednja:

1. Prva vrstica ima eno vozlišče (dno).
2. V prvih $a + b$ vrsticah se število vozlišč povečuje.
3. V naslednjih $(a + b)$-tih vrsticah se število vozlišč zmanjša za b in poveča za a.
4. Če je število vozlišč v najvišji že dorečeni vrstici (označimo to število z v) večje od b, se točka 3 ponovi.
5. Če pa je $v < b$, sledi še $v - 1$ vrstic, v katerih se število vozlišč zmanjšuje.

Poiščimo formulo za število vrstic smreke. Če označimo št. ponovitev točke 3 (torej, kolikokrat pride vsak igralec manjše koalicije spet na potezo po prvih $a+b$ potezah) s k, je ta $a+b+k(a+b)+v-1 = (k+1)(a+b)+v-1$. Ker pa za določena a in b obstajata natanko določena k in v, se s tem še ne zadovoljimo. Vemo, da je število vozlišč v $(a + b)$-ti vrstici $a + b$, po vsaki ponovitvi točke 3 pa se to zmanjša za $b - a$. Če bi se to ponavljalo, dokler **je število večje od nič**, bi k lahko določili s celoštevilskim deljenjem: $k = \lfloor \frac{a+b}{b-a} \rfloor$, ker pa se točka 3 ponavlja, dokler **število ni manjše od b**, velja $k = \lceil \frac{a}{b-a} \rceil$. Zdaj lahko izračunamo tudi v; število vozlišč se namreč po k ponovitvah zmanjša z $a + b$ na $a + b - k(b - a)$. Ker vemo, da je po k ponovitvah to manjše od b, je dobljeno število pravzaprav v. Število vrstic smreke je torej enako:

$$
\begin{aligned}
& a+b+k(a+b)+v-1 = \\
= \; & a+b+k(a+b)+(a+b-k(b-a))-1 = \\
= \; & a+b+ka+kb+a+b-kb+ka-1 = \\
= \; & 2a+2b+2ka-1 = \\
= \; & 2(a+b+ka)-1 = \\
= \; & 2(b+a(k+1))-1 = \\
= \; & 2(b+a(1+\lceil \frac{a}{b-a} \rceil))-1
\end{aligned}
$$

Na tej točki se je smiselno vprašati, kaj nam sploh pove število vrstic smreke. Pravzaprav gre za največje možno število potez, po katerih se lahko igra konča v prid manjši koaliciji. Ta podatek nam sam po sebi ne koristi prav veliko, lahko pa ga uporabimo za izračun števila žetonov v stanju, ki ga predstavlja koren smreke. Slika 6.8 prikazuje eno od najdaljših možnih zaporedij potez, ki vodijo v stanja znotraj smreke (in posledično v zmago manjše koalicije). To zaporedje potez povezuje stanja iz vseh vrstic obravnavane smreke. (Ker smo igro definirali kot prehajanje med stanji, to zaporedje potez in stanj imenujemo *najdaljša igra znotraj smreke*).



Slika 6.8: Najdaljša igra znotraj smreke.

Vidimo, da vsi igralci večje koalicije v tem primeru vzamejo en žeton, igralca manjše koalicije pa dva. Nekoliko težje bi bilo izračunati, kolikokrat pride na potezo kateri od igralcev večje koalicije, vemo pa točno, kolikokrat pridete na potezo vsak igralec manjše koalicije: $(k+1)$-krat. To pomeni, da je v smreki $a(k+1)$ vrstic s stanji, v katerih je na potezi igralec manjše koalicije. (Za bolj dodočno izražanje se dogovorimo, da vrsticam, v katerih je na potezi igralec manjše koalicije, pravimo **vrstice manjše koalicije**, ostalim pa **vrstice večje koalicije**.) Ker vemo, koliko je vseh vrstic smreke, lahko izračunamo tudi število vrstic večje koalicije:

$$
\begin{aligned}
& (a+b+k(a+b)+v-1)-a(k+1)= \\
= \;& a+b+ak+bk+v-1-ak-a= \\
= \;& b+bk+v-1= \\
= \;& b+bk+(a+b-k(b-a))-1= \\
= \;& b+bk+a+b-k(b-a)-1= \\
= \;& b+bk+a+b-bk+ak-1= \\
= \;& a+ak+2b-1= \\
= \;& a(1+k)+2b-1= \\
= \;& a(1+\lceil\frac{a}{b-a}\rceil)+2b-1
\end{aligned}
$$

Zdaj vemo, kolikokrat pridejo v najdaljši igri znotraj smreke na potezo igralci večje koalicije. Treba je upoštevati, da je med njimi tudi dno smreke, stanje brez nestrupenih žetonov, ki predstavlja konec igre. To pomeni, da se v najdaljši igri znotraj smreke število žetonov $a(1+\lceil\frac{a}{b-a}\rceil)+2b-\mathbf{2}$-krat zmanjša za ena in $a(k+1)$-krat zmanjša za dva. Na začetku take igre (to je v stanju, predstavljenim s korenom smreke) je torej toliko žetonov:

$$
\begin{aligned}
& (a(1+k)+2b-2)+2a(k+1)= \\
= \;& a+ak+2b-2+2ak+2a= \\
= \;& 3a+3ak+2b-2= \\
= \;& 3a(1+k)+2(b-1)= \\
= \;& 3a(1+\lceil\frac{a}{b-a}\rceil)+2(b-1)
\end{aligned}
$$

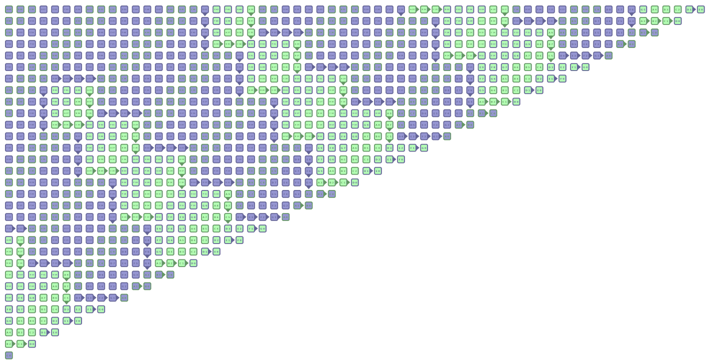
Zapišimo to ugotovitev kot domnevo:

Domneva 1. *Denimo, da je v igri z dvema neločenima koalicijama (pri čemer je v manjši a igralcev, v večji pa b igralcev) na potezi eden od igralcev manjše koalicije. Če je na polju več kot $3a(1+\lceil\frac{a}{b-a}\rceil)+2(b-1)$ nestrupenih žetonov, ob razumnem igranju igralcev večje koalicije manjša koalicija ne more zmagati.*

6.3 Splošno z dvema koalicijama

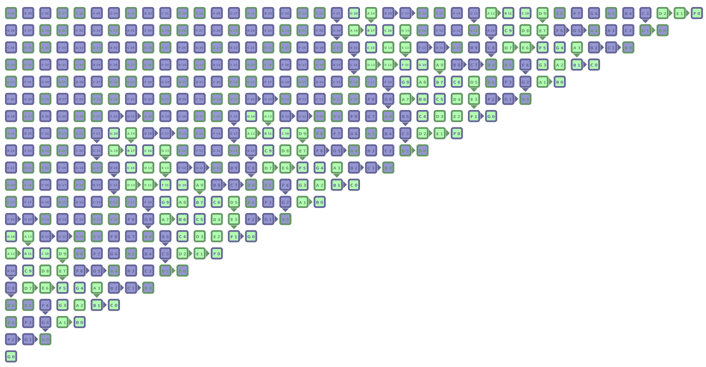
Za povsem splošno razumevanje igre z dvema koalicijama moramo upoštevati le še to, da ne pridejo nujno vsi igralci iste koalicije na potezo eden za drugim, kar smo predpostavili v prejšnjem razdelku. Preučiti je torej treba vpliv vrstnega reda igralcev na možnost za zmago vsake koalicije.

Tudi tokrat začnimo z razmišljanjem ob konkretnih odločitvenih drevesih. Tokrat izhajajmo iz iger s sedmimi igralci, od katerih so trije v eni in štirje v drugi koaliciji. Za lažjo primerjavo med ločenimi in neločenimi koalicijami začnimo z drevesom na sliki 6.9, ki prikazuje igro z neločenima koalicijama.



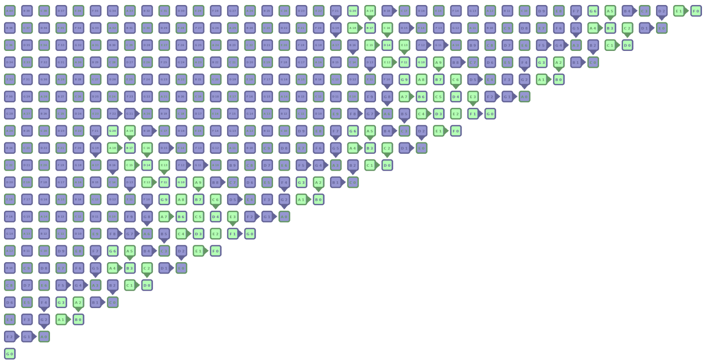
Slika 6.9: Drevo iz stanja $((\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e},\vec{f},\vec{g}),60,0,2)$, kjer so $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v koaliciji.

V primeru z neločenima koalicijama torej obstaja natanko ena smreka (čeprav jih je na sliki mogoče videti več, pravzaprav vsa predstavljajo ista stanja. Med seboj so si ta drevesa različna le po zaporedju potez, s katerimi pridemo do njih). Nekoliko drugače pa je, če sta koaliciji ločeni. Izkaže se, da takrat lahko obstaja več različnih smrek. Nekaj takih primerov vidimo na naslednjih slikah:



Slika 6.10: Drevo iz stanja $((\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e},\vec{f},\vec{g}),50,0,2)$, kjer so $\vec{a}$, $\vec{d}$ in $\vec{e}$ v koaliciji.

V igri, prikazani na sliki 6.10, sta med „deloma manjše koalicije“ dva igralca večje. Tu opazimo dve različni smreki, ki pa imata podobni števili vrstic.



Slika 6.11: Drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}), 40, 0, 2)$, kjer so $\vec{a}$, $\vec{c}$ in $\vec{e}$ v koaliciji.

V primeru s slike 6.11, kjer je med vsakima igralcema manjše koalicije vsaj eden iz večje, pa nastanejo kar tri različne smreke. Vidimo, da za dan vrstni red igralcev obstaja največ toliko različnih smrek, na kolikor „delov“ je manjša koalicija razdeljena („del koalicije“ imenujemo skupino igralcev iste koalicije, ki pridejo na potezo eden za drugim).

Poiščimo sedaj posplošen postopek za izračun števila žetonov v korenu posamezne smreke. Ker bo ta le posplošena različica postopka (oz. formule) iz prejšnjega razdelka, tudi tokrat začnemo pri dnu smreke.

Vsaka smreka ima natanko eno dno. Za stanje, ki ga to predstavlja, velja naslednje:

- Število nestrupenih žetonov je 0, saj to stanje predstavlja konec igre.
- Ker smreka vsebuje le stanja, ki omogočajo zmago manjši koaliciji, je v tem „poraznem“ stanju gotovo na potezi igralec večje koalicije.
- Vemo celo, da je v njem na potezi igralec, ki od igralcev v svojem delu večje koalicije pride na potezo zadnji. V končni fazi igre se namreč ta zaključi v korist manjše koalicije le, če je na polju tako malo nestrupenih žetonov, da na potezo ne bo več prišel noben igralec manjše koalicije. Ker dno smreke predstavlja stanje, do katerega se iz stanja, predstavljenega s korenom smreke, pride v največjem možnem številu potez, je moralo biti to število čim večje možno; torej tolikšno, kot je število igralcev v tem delu večje koalicije. Posledično je v stanje, ko nestrupenih žetonov ni več, prišel zadnji od igralcev tega dela.

Sedaj podrobneje poznamo konec najdaljše igre znotraj smreke. V prejšnjem razdelku smo lahko iz njega sklepali na začetek (stanje v korenu smreke) zgolj z uporabo števila igralcev posamezne koalicije. Tokrat nam to ne zadostuje. Poznati moramo namreč tudi število igralcev v posameznem delu koalicije. Označimo te velikosti delov kot mnogoterico $D = (b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_i, a_i)$ (i je torej polovica vseh delov obeh koalicij). Ker smreko obravnavamo od dna proti vrhu, je vrstni red delov koalicij obrnjen. Vemo že, da se najdaljša igra znotraj smreke konča s potezami igralcev enega od delov večje koalicije (njihovo število je označeno z b_1). Pred njimi je bilo na potezi a_1 igralcev nekega dela manjše koalicije itd.

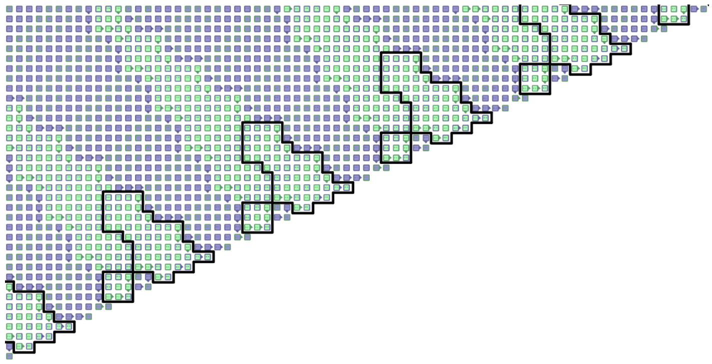
Posplošen postopek izračuna višine smreke je torej naslednji:

1. Prva vrstica ima eno vozlišče (dno).
2. V prvih $b_1 + a_1$ vrsticah se število vozlišč povečuje.
3. V $(b_1 + a_1)$-ti vrstici je posledično $b_1 + a_1$ vozlišč.
4. Naj bo spremenljivka x (indeks naslednjega a-ja in b-ja) enaka 2, v_2 (število vozlišč v trenutni vrstici) pa naj bo enak $b_1 + a_1$.

5. Če je $b_{x\%i}$ večje ali enako v_x, se v naslednjih v_x vrsticah število vozlišč zmanjša do ničle.

6. Če pa je $b_{x\%i}$ manjše kot v_x, se v naslednjih $b_{x\%i} + a_{x\%i}$ vrsticah število oglišč poveča za $a_{x\%i}$ in zmanjša za $b_{x\%i}$. Spremenljivka za število vozlišč v naslednji vrstici, v_{x+1}, je torej enaka $v_x + a_{x\%i} - b_{x\%i}$. Točka 5 oz. 6 se nato ponovi, pri čemer se upošteva za 1 večji x.

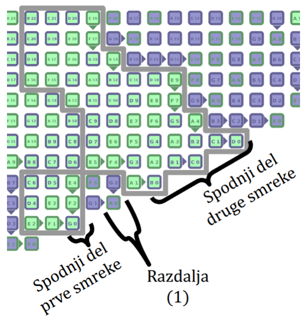
Slabost tega „posplošenega“ postopka je, da deluje le za smreke, ki so „dovolj narazen“. Izkaže pa se, da se lahko smreke tudi združujejo. Slika 6.12 prikazuje primer, kjer sta smreki dovolj skupaj, da se združita v eno (črne črte kažejo obris „izvornih smrek“):



Slika 6.12: Drevo iz stanja $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}), 70, 0, 2)$, kjer so $\vec{a}$, $\vec{e}$ in $\vec{f}$ v koaliciji.

To „združevanje smrek“, ki je za igralce manjše koalicije sicer dobro, bi nam zelo otežilo delo pri iskanju tistega „mejnega števila žetonov“, ki manjši koaliciji še omogoča zmago. Zato namesto tega raje poiščimo nekaj razumljivejšega in uporabnejšega: način, kako morajo biti igralci razporejeni, da pride do čim več združevanja smrek (in posledično večjega „mejnega števila“).

Najprej moramo razumeti, kdaj se dve smreki združita. En pogoj za to je vsekakor ustrezna razdalja med smrekama, zato jo natančneje definirajmo.



Slika 6.13: Razdalja med smrekama.

Na sliki 6.13 je prikazano, kako se razdalja odraža pri slikovnem prikazu drevesa. Gre pravzaprav za število vozlišč med „spodnjima deloma smrek“.

Definicija 19. ***Spodnji del smreke*** *so tista vozlišča smreke, ki predstavljajo stanje brez nestrupenih žetonov (konec igre).*

Zdaj lahko tudi natančneje definiramo, kdaj je smreka „združena“:

Definicija 20. *Smreka je* ***izvorna*** *natanko tedaj, ko za vse igralce, ki so na potezi v enem od stanj, predstavljenih z vozlišči spodnjega dela smreke, velja, da pridejo na potezo eden za drugim.*

Definicija 21. *Smreka je* ***združena*** *natanko tedaj, ko ni izvorna.*

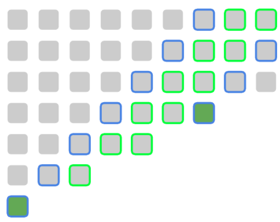
Ker vsa vozlišča smreke prikazujejo stanja, v katerih lahko zmaga manjša koalicija, je pri vsakem stanju, predstavljenim v spodnjem delu smreke, na potezi eden od igralcev večje koalicije. Vmesna vozlišča, število katerih je razdalja med smrekama, pa predstavljajo stanja, v katerih je na potezi eden od igralcev dela manjše koalicije, ki pride na potezo med igralci teh delov večje koalicije.

Definicija 22. ***Oddaljenost smrek*** *je enaka številu igralcev, ki pridejo na potezo po igralcih, ki so na potezi v stanjih, predstavljenimi s spodnjim delom ene smreke, in pred igraci, ki so na potezi v stanjih, predstavljenimi s spodnjim delom druge smreke.*

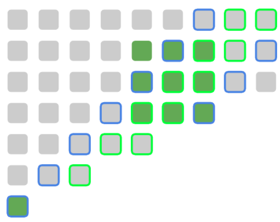
Definicija 23. *Ker igralci prihajajo na potezo v krogu (torej po zadnjem pride spet na potezo prvi), lahko za vsaki dve smreki izračunamo dve oddaljenosti med njima.* ***Razdalja med smrekama*** *naj bo zato najmanjša oddaljenost med njima.*

Eksperimentalno je mogoče preveriti, da je ob zadostnem številu igralcev združitev dveh smrek možna pri kakršni koli razdalji, vendar mora biti za to vrstni red igralcev ustrezen. Poskusimo ročno tvoriti odločitveno drevo, znotraj katerega se združita dve smreki z razdaljo $r = 2$ in iz tega izpeljimo splošen pogoj za združitev smrek.

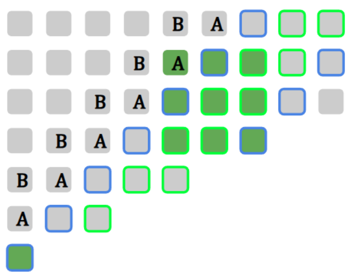
1. korak: Najprej z zeleno označimo skrajno desno vozlišče dna leve smreke in skrajno levo vozlišče dna desne smreke (razdalja med njima je r, konkretno 2). Ker sta vozlišči v smreki, je v njunih stanjih na potezi igralec večje koalicije in posledično tudi v vseh stanjih, predstavljenih z vozlišči v isti vrstici (oz. diagonali). Ker je razdalja enaka najkrajši oddaljenosti, so v vseh vmesnih stanjih na potezi igralci manjše koalicije (kar označimo z zeleno obrobo).



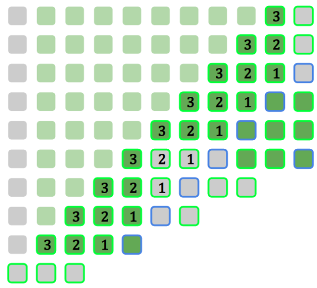
2. korak: Že zdaj lahko v smreko (vozlišča z zelenim polnilom) zagotovo dodamo tudi stanja, v katerih je na potezi bodisi igralec manjše koalicije (vozlišča z modro obrobo) in ima možnost zmagati, bodisi kateri koli igralec, ki bo ne glede na svojo odločitev omogočil igralcem manjše koalicije, da zmagajo.



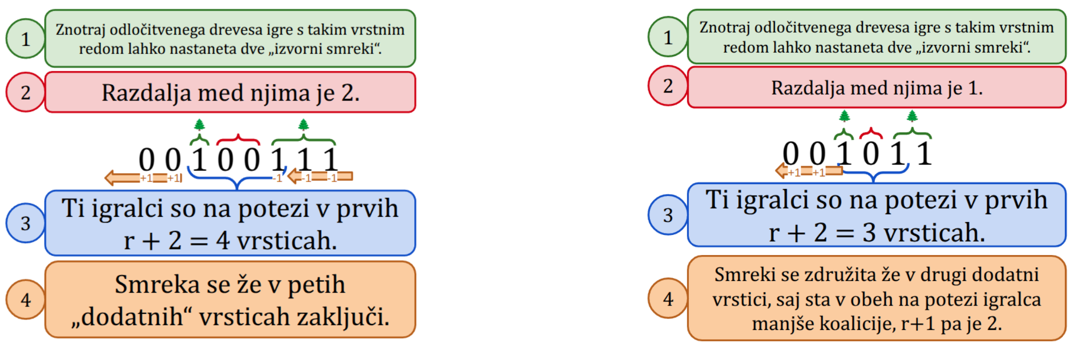
3. korak: Vsaj ena od naslednjih r vrstic (na sliki označenih s črkami) mora, da se smreki združita, predstavljati stanja, v katerih je na potezi igralec manjše koalicije. Do tu narisana smreka na desni ima namreč $2r+1$ vrstic (dno z 1 vozliščem, r vrstic, v katerih se število vozlišč povečuje, in r vrstic, v katerih se zmanjšuje). V (z modro označeni) $(r+2)$-ti vrstici (v kateri je na potezi igralec večje koalicije) je torej r vozlišč (gre namreč za prvo vrstico, v kateri se število vozlišč začne zmanjševati). Če bi vse od naslednjih r vrstic predstavljale stanja, v katerih so na potezi igralci večje koalicije, bi se v vsaki od njih število vozlišč smreke zmanjšalo za 1 in na koncu prišlo do 0. Smreka bi se torej zaključila, še preden bi se združila s sosednjo.



4. korak: Ne glede na razporeditev naslednjih igralcev, se bosta nastajajoči smreki v naslednjih vrsticah ožili ali širili. Da čim prej pridemo do minimalnega števila, za koliko se morata smreki razširiti, denimo, da so v vseh vrticah, ko smreki še nista združeni, na potezi igralci manjše koalicije. Izkaže se, da se to zgodi po treh (oz. splošneje $r+1$) vrsticah. Do združenja smrek bi prišlo tudi, če bi bile med temi naslednjimi vrsticami tudi vrstice večje koalicije. Pomembno je le, da je na neki točki število vrstic manjše koalicije za tri večje od števila vrstic večje koalicije in da do tega pride, preden se smreka zaključi.



Zaključimo lahko, da se dve smreki, razdalja med katerima je r, združita, če ima desna izvorna smreka poleg spodnjih $r+2$ vrstic še nekaj „dodatnih“ vrstic. To so vrstice, ki se začnejo z $(r+3)$-to in končajo s tako, za katero velja, da je med vsemi „dodatnimi“ vrsticami od najnižje do obravnavane, vrstic manjše koalicije za $r+1$ več kot vrstic večje koalicije. Sliki 6.14a in 6.14b prikazujeta, kako lahko to razberemo že iz vrstnega reda igralcev, kjer 0 predstavlja igralca manjše koalicije, 1 pa igralca večje koalicije:



(a) Prvi primer.

(b) Drugi primer.

Slika 6.14: Prepoznavanje združitve smrek.

Sedaj, ko podrobneje poznamo pogoje za združevanje smrek, se vrnimo k našemu vprašanju: Kako morajo biti igralci razporejeni, da bo „mejno število žetonov“ čim večje? Vzemimo primer igre, kjer so v manjši koaliciji štirje igralci, v večji pa jih je pet. V tem primeru do združitve smrek pride pri treh različnih vrstnih redih:

- 000101111, kjer se združita smreki, ki imata v spodnjem delu ali eno ali štiri vozlišča,
- 000110111, kjer se združita smreki, ki imata v spodnjem delu ali dve ali tri vozlišča ter
- 001010111, kjer se združijo kar tri smreke.

Seveda obstajajo tudi drugi vrstni redi, ker pa prihajajo igralci na potezo v krogu, lahko vse vrstne rede, ki jih lahko iz enega pridobimo zgolj s premikanjem prvega igralca na zadnje mesto, smatramo za en vrstni red.

Ker vsaka združitev smrek bistveno poveča „mejno število“, ima manjša koalicija največjo možnost za zmago v tretjem primeru, kjer se združijo tri smreke. Postavimo lahko torej naslednjo domnevo:

Domneva 2. *V igri z dvema koalicijama, kjer ima manjša a in večja b igralcev, je „mejno“ število žetonov, ki manjši koaliciji še omogoča zmago največje, če je vrstni red igralcev naslednje oblike:*

$$D = (0, 0, \underbrace{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0}_{a-2}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{b-a+2})$$

(0 predstavlja igralca manjše koalicije, 1 pa igralca večje.)

Tudi če ta domneva ne velja, pa lahko po vsem raziskanem predvidevamo naslednje:

Domneva 3. *V igri z dvema koalicijama, kjer ima manjša a in večja b igralcev obstaja število v, za katerega velja, da če je na polju več kot v nestrupenih žetonov, manjša koalicija ob razumnem igranju ne more zmagati.*

Del III

Rezultati

Poglavje 7

Razprava in zaključki

Zaključimo lahko, da pričujoča raziskovalna naloga odpira široko področje najrazličnejših variacij igre Nim. Že obravnava najpreprostejših, ki jih igrata dva igralca, prinese bralcem poznavanje splošne zmagovalne strategije, ki temelji zgolj na številu žetonov. Vendar pa je bistven del raziskovalne naloge usmerjen v raziskavo igre z več igralci.

V tem primeru je splošno zmagovalno strategijo nekoliko težje najti, saj se konkretni primeri lahko zelo razlikujejo. To, v katerih stanjih je sploh mogoče zmagati, pa lahko zdaj izračunamo z opisanim algoritmom za označevanje vozlišč v odločitvenem drevesu. Pravilnost njegovega delovanja tudi dokažemo.

Za pravilno se izkaže tudi naše uvodno sklepanje, da so v večigralskih igrah pomembni odnosi med igralci. Na začetku eksperimentalnega dela namreč spoznamo, da je igra, v kateri si igralci ne morejo zaupati, dokaj kaotična. V nadaljevanju zato obravnavamo vse splošnejše primere, kjer so igralci razvrščeni v dve koaliciji, za katere lahko tudi potrdimo zastavljeno hipotezo (če ima igralec več zaveznikov (torej je v večji koaliciji) ima več možnosti za zmago).

Cilj raziskovalne naloge pa je tudi najti pogoje, pod katerimi lahko zmagajo igralci manjše koalicije. Za igre, pri katerih so v eni koaliciji vsi igralci razen enega, dokažemo, kdaj točno lahko posameznik zmaga: to je v stanjih ***začetne varne cone*** in stanjih ***končne varne cone***, ki jih kot take definiramo in dokažemo pravilnost njihove razvrstitve. Pri tem spoznamo tudi na prvi pogled nenavadno dejstvo; več kot ima posameznik nasprotnikov, lažje zmaga.

Poleg števila žetonov in odnosov med igralci pa najdemo še en pomemben dejavnik pri določitvah v večigralskih igrah — vrstni red igralcev. Če je v obeh koalicijah več kot en igralec, obstaja veliko različnih možnih razvrstitev. Najpodrobneje si ogledamo tisto, pri kateri najprej pridejo na potezo vsi igralci ene, nato pa vsi igralci druge koalicije. Tu pridemo do sklepa, da če je v igri več kot $3a(1 + \lceil \frac{a}{b-a} \rceil) + 2(b-1)$ žetonov, igralci manjše koalicije ob razumnem igranju igralcev večje koalicije ne morejo zmagati (a je število igralcev manjše in b število igralcev večje koalicije).

Rezultati obravnave povsem splošnih primerov dveh koalicij pa niso tako oprijemljivi. Osredotočimo se namreč na pogoje za „združitev smrek“, ki prispeva k čim večjemu „mejnemu številu žetonov“. S tem znanjem nato pridemo do „idealne razporeditve igralcev“, pri kateri ima manjša koalicija največ možnosti za zmago. Tako številne ugotovitve zadnjega dela raziskovalne naloge, v katerem so (še) nedokazane domneve, odpirajo široke možnosti za nadaljno raziskovanje.

Literatura

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway in R. K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. 1982: Academic Press, 1982.

[2] G. Bokal. *Igra Nim skozi matematiko in spodbujevano učenje. Raziskovalna naloga.* Ljubljana: Osnovna šola Alojzija Šuštarja, 2022.

[3] R. Jamnik. *Teorija iger.* Ljubljana: Mladinska knjiga, 1966.

[4] Wen An Liu in Jia Wei Duan. "Misère Nim with multi-player". V: *Discrete Applied Mathematics* 219 (2017), str. 40–50. ISSN: 0166-218X. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.11.020`.

[5] E. H. Moore. "A Generalization of the Game Called Nim". V: *Annals of Mathematics* 11.3 (1910), str. 93–94. (Pridobljeno 22. 2. 2025).

[6] N. Prijatelj. *Matematične strukture. 1, Množice - relacije - funkcije.* Ljubljana: Mladinska knjiga, 1971, str. 216.

[7] Wikipedija. *Nim.* 2024. URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Nim` (pridobljeno 10. 10. 2024).