Raziskovalna naloga

PO POTI KOMBINATORIKE IN VERJETNOSTI DO ZAKLADA NA KONCU MAVRICE

Mentorici: Nevenka Jerebica, Jana Mahnič Šterling

Avtorji: Gael Bernobič, Maja Starc, Nika Višnjevec

Koper, april 2025

KAZALO

1. POVZETEK

V nalogi smo si zastavili temeljno raziskovalno vprašanje: »*Kolikšna je verjetnost, da kupimo dva paketka bonbonov z enako kombinacijo barv?«* Svoje raziskovanje smo razdelili na dva dela. V prvem smo se vprašanja lotili z uporabo kombinatorike, natančneje kombinacij. Po pojasnitvi osnovnih pojmov smo izračunali koliko je možnih različic enega paketka bonbonov in ugotovili, da jih je 40920. V drugem delu naloge smo obravnavali verjetnost in verjetnostni račun. Najprej smo obrazložili osnovne pojme in se nato lotili računanja verjetnosti, da kupimo paketka z enako kombinacijo barv. Na tej točki smo svoje vprašanje razdelili na več podvprašanj in si postavili različne pogoje za kupovanje paketkov, za vsako od teh pa izračunali verjetnost. Na koncu smo še izpeljali splošne formule za kupovanje zaporednih kombinacij bonbonov, če je število paketkov končno šteto.

2. UVOD

Odločili smo se, da želimo predstaviti uporabnost kompleksnih matematičnih vsebin v vsakdanjem življenju, zato smo si zastavili zelo enostavno vprašanje: »*Kolikšna je verjetnost, da kupimo dva paketka bonbonov z enako kombinacijo barv?«* Na začetku se nam je to vprašanje zdelo zelo preprosto, a smo kmalu ugotovili, da ima veliko napačnih odgovorov in zahteva znanje z različnih področij matematike. Svoje delo smo razdelili na dve večji poglavji – to sta kombinatorika in verjetnost. V prvi fazi se je treba vprašati, koliko različnih kombinacij paketka bonbonov je sploh mogočih, in nato lahko s tem podatkom ugotovimo, kolikšna je verjetnost, da kupimo dva paketka z enako kombinacijo.

3. KOMBINATORIKA

Za računanje kombinacij je potrebno znanje o pravilih kombinatorike. Dva osnovna izreka v kombinatoriki sta pravilo vsote in pravilo produkta. Ti pravili določata uporabo seštevanja in množenja glede na soodvisnost izbora elementov.

3.1. Pravilo vsote

se uporabi v primeru, da imamo več množic $A_0, A_1, \dots, A_n$, ki imajo $m_1, m_2, \dots, m_n$ elementov, od katerih želimo izbrati le en element. V tem primeru lahko to naredimo na

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{k=0}^{n} m_k$$

načinov.

V zgornjem zapisu je uporabljena velika črka sigma $\sum$, ki se v matematiki uporablja za označevanje vsote zaporednih števil. Simbol $\sum$ se običajno uporablja v kombinaciji z indeksi, ki natančno določajo, kateri elementi zaporedja se seštevajo.

Primer:

Tine ima dve škatlici bonbonov, v prvi je 12 okroglih bonbonov 12 različnih barv, v drugi pa 7 kvadratnih bonbonov 7 različnih barv. Mama mu je dovolila izbrati le en okrogel ali en kvadraten bonbon. Koliko možnih izborov ima Tine?

Za izračun števila možnih izborov uporabimo pravilo vsote:

$$12 + 7 = 19$$

Tine ima na voljo 19 možnih izborov.

3.1. Pravilo produkta ali osnovni izrek kombinatorike

se uporabi v primeru, ko imamo več množic $A_0, A_1, \dots, A_n$, ki imajo $m_1, m_2, \dots, m_n$ elementov, od katerih želimo iz VSAKE izbrati po en element. V tem primeru lahko to naredimo na

$$m_1 \cdot\ m_2 \cdot \cdots \cdot\ m_n = \prod_{k=0}^{n} m_k$$

načinov.

V zgornjem zapisu je uporabljena velika črka pi Π, ki se v matematiki uporablja za označevanje produkta zaporednih števil. Simbol Π se običajno uporablja v kombinaciji z indeksi, ki natančno določajo, kateri elementi zaporedja se množijo.

Primer:

Tinetova mama je kupila bonbone dveh različnih okusov in jih ločila v dve škatli. V prvo je dala 5 limoninih bonbonov 5 različnih barv, v drugo pa 3 jagodne bonbone 3 različnih barv. Ker si je Tine želel poskusiti obe vrsti bonbonov, mu je mama dovolila izbrati en bonbon z okusom limone in enega z okusom jagode. Koliko možnih izborov ima Tine?

Za izračun števila možnih izborov uporabimo pravilo produkta:

$$5 \cdot 3 = 15$$

Tine ima na voljo 15 možnih izborov.

Primer uporabe obeh pravil skupaj:

Tine je končno dočakal svoj rojstni dan, za darilo mu je mama pripravila pravo poslastico, 4 Skittles bonbone 4 različnih barv, 7 M&M bonbonov 7 različnih barv, 5 različnih mlečnih čokoladic in 3 različne bele čokoladice. Koliko možnih izborov ima Tine, če mu je mama dovolila izbrati le en bonbon in eno čokoladico?

*Da bi lažje ugotovili, katero pra*2Tukaj vnesite enačbo.*vilo kdaj uporabimo, si nalogo lahko poenostavimo z uporabo veznika* ***ali*** *in veznika* ***in****. Tine mora izbrati 1 bonbon, ki je lahko* ***ali*** *Skittles* ***ali*** *M&M,* ***in*** *1 čokoladico, ki je lahko* ***ali*** *mlečna* ***ali*** *bela.*

Za izračun števila vseh možnih izborov bomo najprej izračunali možne izbore bonbonov in čokoladic posebej ter ju nato množili, da dobimo vse možne izbore.

$$(4+7) \cdot (5+3) = 88$$

Tine ima na voljo 88 možnih izborov.

3.1. Kombinacije

Sedaj, ko znamo uporabljati obe osnovni pravili kombinatorike, lahko začnemo računati kombinacije elementov. Kombinacije delimo na:

3.1.1. Kombinacije brez ponavljanja

so izbire r (različnih) elementov izmed n različnih elementov, ki so na voljo, pri čemer velja: $r \leq n$. Število takih kombinacij izračunamo po formuli:

$$C_n^r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Zgornjo formulo lahko zapišemo tudi z binomskim simbolom:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

V formuli nastopa računska operacija fakulteta ali faktoriela, ki jo označimo z $n!$. To je funkcija, ki določa produkt pozitivnih celih števil, manjših ali enakih n $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdot n)$.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots (n-1) \cdot n$$

Primer:

Peter je mlad fant, ki obožuje sladkarije. Je v slaščičarni, ki ponuja 5 različnih vrst bonbonov: žele, kisle, čokoladne, karamelne in mentol bonbone. Petrova mama mu da vznemirljivo nalogo, da med razpoložljivimi možnostmi izbere 3 različne vrste bonbonov.

Koliko različnih kombinacij treh vrst sladkarij lahko Peter izbere, če lahko vsako sladkarijo izbere samo enkrat?

Za izračun števila različnih možnih kombinacij uporabimo formula za število kombinacij brez ponavljanja. V tem primeru je $n = 5$, saj ima Peter na izbiro 5 različnih vrst bonbonov, in $r = 3$, saj lahko izbere 3 različne bonbone. Tako formula postane:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10$$

Peter torej lahko izbira med 10 različnimi kombinacijami.

3.1.2. Kombinacije s ponavljanjem

so izbire r elementov izmed n elementov, vendar lahko isti element izberemo poljubno mnogokrat. Število takih kombinacij izračunamo po formuli:

$$_{(p)}C_n^r = \binom{n+r-1}{r}$$

Primer:

Pavliha je mlad fant, ki obožuje sladkarije. Ima kozarec, napolnjen s štirimi različnimi vrstami bonbonov: karamelnimi bonboni, gumi medvedki, kislimi bonboni in mentol bonboni. Kozarec vsebuje neomejeno količino vsake vrste bonbonov. Koliko različnih kombinacij bonbonov lahko Pavliha izbere, če lahko prosto izbere 6 bonbonov?

Za izračun števila različnih možnih kombinacij uporabimo formulo za izračun kombinacij s ponavljanjem. V tem primeru je $n = 4$, saj lahko izbira med štirimi različnimi vrstami bonbonov, in $r = 6$, saj lahko izbere 6 bonbonov. Tako formula postane:

$$_{(p)}C_4^6 = \binom{4+6-1}{6}$$

Pavliha lahko izbere 84 različnih kombinacij bonbonov.

3.2. Izračun števila kombinacij v majhnem paketku bombonov

Kot že vemo, se naše vprašanje glasi: *Kolikšna je verjetnost, da kupimo dva paketka bonbonov z enako kombinacijo barv?* Za to pa je najprej potrebno izračunati število vseh kombinacij bonbonov v enem paketku. V vsakem paketku je 34 bonbonov petih različnih barv: rumene, zelene, oranžne, rdeče in vijolične. Ker se v vsakem paketku posamezna barva pojavi vsaj enkrat, je tako v vsakem paketku vsaj en bonbon rumene barve, vsaj en zelene, vsaj en oranžne, vsaj en rdeče in vsaj en vijolične barve. Iz tega sledi, da se pri vsaki kombinaciji pojavi enak set petih različnih bonbonov, ki je konstanten. Zato lahko rečemo, da se od štiriintridesetih bonbonov spreminjajo kombinacije samo devetindvajsetih.

Tako imamo zdaj vse podatke za izračun števila kombinacij s pomočjo zgoraj podane formule:

$$_{(p)}C_n^r = \binom{n+r-1}{r}$$

V tem primeru je $n = 5$, saj imamo na voljo pet vrst/barv bonbonov, in $r = 29$, saj se spreminjajo kombinacije samo devetindvajsetih bonbonov. Tako formula postane:

$$_{(p)}C_5^{29} = \binom{33}{29} = 40\,920$$

Z izračunom dobimo odgovor, da obstaja 40 920 kombinacij bonbonov oziroma 40 920 možnih različic majhnega paketka bonbonov.

4. VERJETNOSTNI RAČUN

Sedaj, ko smo izračunali naše število kombinacij bonbonov oziroma število različic majhnega paketka bonbonov, bomo do končne rešitve prišli z uporabo **verjetnostnega računa**. Zato moramo najprej spoznati osnove le-tega.

Prva stvar, s katero se srečamo pri verjetnosti, je **verjetnostni poskus**, ki je eksperiment, katerega rezultat je odvisen od naključja. Osnovne rezultate verjetnostnega poskusa imenujemo **izidi**.

Za verjetnost pa je najverjetneje najbolj ključen pojem dogodek. **Dogodek** je vsak pojav, ki se v verjetnostnem poskusu lahko zgodi. Zapišemo ga lahko kot množico izidov, ki so za ta dogodek ugodni.

Da bo naše razumevanje osnovnih pojmov karseda dobro, si poglejmo spodnji primer.

Primer:

Verjetnostni poskus: žrebanje ene kroglice izmed desetih, za katere velja, da je na posamezni kroglici število od 1 do 10, nobeno število pa se ne ponovi.

Izidi: kroglica s številom 1 ali 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ali 10.

Nekaj primerov dogodkov, ki jih lahko opazujemo v tem poskusu:

- A*: izžrebamo kroglico s številom 6* $A = \{6\}$
- B*: izžrebamo kroglico z lihim številom* $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- C*: izžrebamo kroglico s številom, manjšim od 5* $C = \{1, 2, 3, 4\}$
- D*: izžrebamo kroglico s številom, večjim od 6* $D = \{7, 8, 9, 10\}$

Zaradi sistematičnosti pa štejemo kot dogodka tudi:

- nemogoč dogodek – dogodek, ki se nikoli ne zgodi; označimo ga z N; predstavlja ga prazna množica izidov, torej: $N = \{\,\}$

Primer: N:
izžrebamo kroglico s številom 11; $N = \{\,\}$*, saj te kroglice ni.*

- **gotov dogodek** – dogodek, ki se zgodi vedno; označimo ga z G; predstavlja ga univerzalna množica, tj. množica vseh možnih izidov danega poskusa.

Primer: G:
izžrebamo oštevilčeno kroglico

4.1. Računanje z dogodki

Zdaj, ko vemo, kaj so dogodki, lahko nadaljujemo z računanjem z njimi.

Produkt ali **presek dogodkov** A in B je dogodek, ki se zgodi, kadar se zgodita dogodka A in B hkrati. To lahko zapišemo s **presekom množic kot** $A \cap B$.

Primer:

Verjetnosti poskus: Žrebanje kroglic, ki so oštevilčene s številkami od 1 do 10, te pa se ne ponavljajo.

Dogodek A*: izžrebamo kroglico s številom, večjim od 7;* $A = \{8, 9, 10\}$

Dogodek B: izžrebamo kroglico z lihim številom; $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Produkt dogodka A in B ali $A \cap B = \{9\}$

Poljubna dogodka sta lahko tudi **nezdružljiva**. Produkt nezdružljivih dogodkov je **nemogoč dogodek** ali N.

Primer:

Verjetnosti poskus: Žrebanje kroglic, ki so oštevilčene s številkami od 1 do 10, te pa se ne ponavljajo.

Dogodek C: izžrebamo kroglico s številom 7; $C = \{7\}$

Dogodek D: izžrebamo kroglico s sodim številom; $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Tako je $C \cap D = N$ nemogoč dogodek.

- **Unija dogodkov** A in B je dogodek, ki se zgodi, ko se zgodi vsaj en od danih dogodkov A ali B.

To lahko zapišemo kot **unijo množic** A in B kot $A \cup B$.

Lahko tudi z vsoto $A + B$, vendar se ta uporablja le za unijo nezdružljivih dogodkov.

Primer:

Verjetnosti poskus: Žrebanje kroglic, ki so oštevilčene s številkami od 1 do 10, te pa se ne ponavljajo.

Dogodek A: izžrebamo kroglico s številom, večjim od 7; $A = \{8, 9, 10\}$

Dogodek B: izžrebamo kroglico z lihim številom; $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Unija dogodka A in B ali $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

- **Nasprotni dogodek** dogodka A je dogodek, ki se zgodi natanko takrat, ko se dogodek A ne zgodi.

To lahko zapišemo s **komplementarno množico** kot A'.

Primer:

Verjetnosti poskus: Žrebanje kroglic, ki so oštevilčene s številkami od 1 do 10, te pa se ne ponavljajo.

Dogodek B: izžrebamo kroglico z lihim številom; $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Dogodek B' : izžrebamo kroglico s sodim številom; $B' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Dogodek A je **način** dogodka B, če se vedno, ko se zgodi dogodek A, hkrati zgodi tudi dogodek B.

To lahko zapišemo kot **podmnožico** kot $A \subset B$

Primer:

Verjetnosti poskus: Žrebanje kroglic, ki so oštevilčene s številkami od 1 do 10, te pa se ne ponavljajo.

Dogodek E: izžrebamo kroglico s številom, manjšim od 5; $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

Dogodek F: izžrebamo kroglico s številom 3; $F = \{3\}$

V tem primeru je dogodek F podmnožica dogodka E ali $F \subset E$

4.2. Verjetnost dogodka

Po klasični definiciji verjetnosti (katere se bomo držali) je verjetnost dogodka enaka količniku števila za poskus ugodnih dogodkov in števila vseh možnih dogodkov.

Primer:

Poskus ostaja isti kot v zgornjih primerih. Iz vreče vlečemo kroglice, oštevilčene od 1 do 10, vsaka kroglica se pojavi natanko enkrat. Torej je verjetnost, da na primer izžrebamo kroglico s številom 6, količnik med številom za poskus ugodnih dogodkov (v našem primeru je to samo eden, ki je, da izžrebamo kroglico s številom 6) in številom vseh mogočih dogodkov, kar je v našem primeru 10.

Torej je naš izračun tak:

$$\frac{\check{S}tevilo\ ugodnih\ dogodkov}{\check{S}tevilo\ mogo\check{c}ih\ dogodkov} = \frac{1}{10}$$

Verjetnost, da izžrebamo kroglico s številko 6 je 1:10 *oziroma ena desetina.*

4.3. Izračun verjetnosti, da kupimo dva paketka z enako kombinacijo

Da si računanje malce poenostavimo, si lahko kupovanje paketkov bonbonov v trgovini predstavljamo kot vlečenje kroglic iz vreče, v kateri je neskončno kroglic s številkami od 1 do 40920, kjer se vsaka pojavi enakokrat. Vsaka številka predstavlja eno od 40920 možnih kombinaciji v paketku bonbonov. V tej fazi je zelo pomembno, kako si zastavimo svoje vprašanje. Mi smo ta del razdelili v dve podvprašanji.

1. Kolikšna je verjetnost, da izvlečemo dve kroglici s številom, ki je že vnaprej izbrano?
2. Kolikšna je verjetnost, da dvakrat zapored izvlečemo kroglico z enako številko, če številka na kroglici ni pomembna?

Pri prvem vprašanju si lahko izbor predstavljamo kot zaporedje dveh enakih in odvisnih poskusov, saj se število kroglic z izbranim številom ne spreminja (jih je neskončno). Za izračun verjetnosti torej uporabimo klasično definicijo verjetnosti, kjer je število vseh možnih dogodkov enako številu različnih kroglic oz. paketkov, torej 40920, ugoden dogodek pa je le eden (to, da izvlečemo kroglico z izbranim številom, oz. kupimo paketek z želeno kombinacijo barv).

$$\frac{1}{40920} \cdot \frac{1}{40920} = \frac{1}{1674446400}$$

Verjetnost, da izvlečemo dve kroglici s številom, ki je že vnaprej izbrano, je 1 proti 1674446400 ali $5.97 \cdot 10^{-8}$ %.

Drugo vprašanje si tudi lahko predstavljamo kot zaporedje dveh odvisnih poskusov. Razlika je, da je v tem primeru prvi izbor gotov dogodek (njegova verjetnost je enaka 1), saj številka na kroglici ni pomembna, pri drugem izboru pa lahko uporabimo klasično definicijo verjetnosti, saj mora biti druga kroglica enaka prvi. Pri drugem poskusu je torej ugoden dogodek le eden (to, da izvlečemo kroglico z enako številko kot prej), možnih dogodkov pa je 40920, saj je kroglic v vreči neomejeno.

$$1 \cdot \frac{1}{40920} = \frac{1}{40920}$$

Torej je verjetnost, da zaporedoma izvlečemo enaki kroglici, če številka ni pomembna, $1: 40920$ oziroma 0,00244 %.

4.4. Izpeljava splošnih formul

Sedaj, ko smo odgovorili na prvotno vprašanje, pa lahko izpeljemo splošni formuli za izračun verjetnosti. Predpostavimo, da ima trgovina končno število paketkov, kjer se vsaka kombinacija bonbonov ponovi enakokrat (natanko p -krat).

4.4.1. Verjetnost, kjer izberemo vse ponovitve

Najprej si poglejmo izpeljavo za zaporeden nakup vseh paketkov z vnaprej izbrano kombinacijo.

- n je št. kombinacij
- p je št. ponovitev
- i je spremenljivka
- $n, p, i \in \mathbb{N}$

Da malce poenostavimo, si lahko najprej za p izberemo prva tri naravna števila.

1 ponovitev $(p = 1)$

$$\frac{1}{n}$$

2 ponovitvi $(p = 2)$

$$\frac{2}{2n} \cdot \frac{1}{2n-1}$$

3 ponovitve $(p = 3)$

$$\frac{3}{3n} \cdot \frac{2}{3n-1} \cdot \frac{1}{3n-2}$$

Sedaj pa lahko namesto števil v enačbo vstavimo p ponovitev

$$\frac{p}{pn} \cdot \frac{p-1}{pn-1} \cdot \frac{p-2}{pn-2} \cdot \dots \cdot \frac{p-(p-1)}{pn-(p-1)} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \dots \cdot 1}{(pn) \cdot (pn-1) \cdot (pn-2) \cdot \dots \cdot (pn-p+1)}$$

$$\prod_{i=0}^{p-1} \frac{p-i}{pn-i} = \binom{pn}{p}^{-1} = \frac{(pn-p)! \cdot p!}{(pn)!}$$

Dodatna razlaga za fakultetni zapis

$$\frac{(pn-p)! \cdot p!}{(pn)!} =$$

$$= \frac{(pn-p) \cdot (pn-p-1) \cdot (pn-p-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \dots \cdot 1}{(pn) \cdot (pn-1) \cdot (pn-2) \cdot \dots \cdot (pn-p) \cdot (pn-p-1) \cdot (pn-p-2) \cdot \dots \cdot 1} =$$

$$= \frac{\cancel{(pn-p)\cdot(pn-p-1)\cdot(pn-p-2)\cdot\dots\cdot 1}\cdot p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot\dots\cdot 1}{(pn)\cdot(pn-1)\cdot(pn-2)\cdot\dots\cdot\cancel{(pn-p)\cdot(pn-p-1)\cdot(pn-p-2)\cdot\dots\cdot 1}} =$$

$$= \frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot\dots\cdot 1}{(pn)\cdot(pn-1)\cdot(pn-2)\cdot\dots\cdot(pn-p+1)}$$

Če želimo izračunati verjetnost, da izberemo vse paketke z neko kombinacijo, ne glede na to, katera kombinacija to je, pa je izpeljava taka:

Tukaj je potrebno še poudariti, da je prvi dogodek gotov dogodek (kombinacija nas ne zanima), ta dogodek pa določi kombinacijo, ki jo želimo dobiti v naslednjih izborih.

- n je št. kombinacij
- p je št. ponovitev
- i je spremenljivka
- $n, p, i \in \mathbb{N}$

Najprej spet poglejmo primer za prva 3 naravna števila

1 ponovitev

$$1$$

2 ponovitvi

$$1 \cdot \frac{1}{2n-1}$$

3 ponovitve

$$1 \cdot \frac{2}{3n-1} \cdot \frac{1}{3n-2}$$

p ponovitev

$$1 \cdot \frac{p-1}{pn-1} \cdot \frac{p-2}{pn-2} \cdot \dots \cdot \frac{p-(p-1)}{pn-(p-1)} = \frac{(p-1)\cdot(p-2)\cdot\dots\cdot 1}{(pn-1)\cdot(pn-2)\cdot\dots\cdot(pn-p+1)}$$

$$1 \cdot \prod_{i=1}^{p-1} \frac{p-i}{pn-i}\ ;\ p > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(pn-p)!\cdot(p-1)!}{(pn-1)!}$$

Dodatna razlaga za fakultetni zapis

$$\frac{(pn-p)!\cdot(p-1)!}{(pn-1)!}=$$

$$=\frac{(pn-p)\cdot(pn-p-1)\cdot(pn-p-2)\cdot\dots\cdot 1\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot\dots\cdot 1}{(pn-1)\cdot(pn-2)\cdot\dots\cdot(pn-p)\cdot(pn-p-1)\cdot(pn-p-2)\cdot\dots\cdot 1}=$$

$$=\frac{\cancel{(pn-p)\cdot(pn-p-1)\cdot(pn-p-2)\cdot\dots\cdot 1}\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot\dots\cdot 1}{(pn-1)\cdot(pn-2)\cdot\dots\cdot\cancel{(pn-p)\cdot(pn-p-1)\cdot(pn-p-2)\cdot\dots\cdot 1}}=$$

$$=\frac{(p-1)\cdot(p-2)\cdot\dots\cdot 1}{(pn-1)\cdot(pn-2)\cdot\dots\cdot(pn-p+1)}$$

3.4.2 Verjetnost, kjer izberemo določeno število ponovitev

Sedaj pa si vprašanje še malo bolj zakomplicirajmo. Če želimo izračunati verjetnost, da izberemo samo določeno število (j) paketkov z določeno kombinacijo, je izpeljava taka:

Kot v prejšnjem primeru bomo najprej izračunali verjetnost, če imamo že vnaprej izbrano kombinacijo.

- n je št. kombinacij
- p je št. ponovitev
- i je spremenljivka
- j je št. izborov
- $n,p,i,j \in \mathbb{N}$
- $j \leq p$

Najprej si poglejmo nekaj enostavnih primerov:

3 ponovitve z 2 izboroma $(p=3, j=2)$

$$\frac{3}{3n}\cdot\frac{2}{3n-1}$$

4 ponovitve z 2 izboroma $(p=4, j=2)$

$$\frac{4}{4n}\cdot\frac{3}{4n-1}$$

5 ponovitev z 2 izboroma $(p=5, j=2)$

$$\frac{5}{5n} \cdot \frac{4}{5n-1}$$

Sedaj pa si poglejmo p ponovitev z j izborov:

$$\frac{p}{pn} \cdot \frac{p-1}{pn-1} \cdot \frac{p-2}{pn-2} \cdot \dots \cdot \frac{p-(j-1)}{pn-(j-1)} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \dots \cdot (p-j+1)}{(pn) \cdot (pn-1) \cdot (pn-2) \cdot \dots \cdot (pn-j+1)}$$

$$\prod_{i=0}^{j-1} \frac{p-i}{pn-i} = \frac{(pn-j)! \cdot p!}{(pn)! \cdot (p-j)!}$$

Dodatna razlaga za fakultetni zapis

$$\frac{(pn-j)! \cdot p!}{(pn)! \cdot (p-j)!} =$$

$$= \frac{(pn-j) \cdot (pn-p-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot (p-j) \cdot (p-j-1) \cdot \dots \cdot 1}{(pn) \cdot (pn-1) \cdot \dots \cdot (pn-j) \cdot (pn-j-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot (p-j) \cdot (p-j-1) \cdot \dots \cdot 1} =$$

$$= \frac{\cancel{(pn-p) \cdot (pn-p-1) \cdot \dots \cdot 1} \cdot p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot \cancel{(p-j) \cdot (p-j-1) \cdot \dots \cdot 1}}{(pn) \cdot (pn-1) \cdot \dots \cdot \cancel{(pn-p) \cdot (pn-p-1) \cdot \dots \cdot 1} \cdot \cancel{(p-j) \cdot (p-j-1) \cdot \dots \cdot 1}} =$$

$$= \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \dots \cdot (p-j+1)}{(pn) \cdot (pn-1) \cdot (pn-2) \cdot \dots \cdot (pn-j+1)}$$

Če sledimo prejšnjemu vzorcu, lahko sedaj izpeljemo še formulo, kjer je kombinacija naključno izbrana s prvim izborom.

- n je št. kombinacij
- p je št. ponovitev
- i je spremenljivka
- j je št. izborov
- $n, p, i, j \in \mathbb{N}$
- $j \leq p$

Najprej si poglejmo nekaj enostavnih primerov:

3 ponovitve z 2 izboroma

$$1 \cdot \frac{2}{3n-1}$$

4 ponovitve z 2 izboroma

$$1 \cdot \frac{3}{4n-1}$$

5 ponovitev z 2 izboroma

$$1 \cdot \frac{4}{5n-1}$$

p ponovitev z j izborov

$$1 \cdot \frac{p-1}{pn-1} \cdot \frac{p-2}{pn-2} \cdot \ldots \cdot \frac{p-(j-1)}{pn-(j-1)} = \frac{(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-j+1)}{(pn-1)\cdot(pn-2)\cdot\ldots\cdot(pn-j+1)}$$

$$1 \cdot \prod_{i=1}^{j-1} \frac{p-i}{pn-i}\ ;\ p>1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{(pn-j)!\cdot(p-1)!}{(pn-1)!\cdot(p-j)!}$$

Dodatna razlaga za fakultetni zapis

$$\frac{(pn-j)!\cdot(p-1)!}{(pn-1)!\cdot(p-j)!} =$$

$$= \frac{(pn-j)\cdot(pn-p-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-j)\cdot(p-j-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(pn-1)\cdot\ldots\cdot(pn-j)\cdot(pn-j-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot(p-j)\cdot(p-j-1)\cdot\ldots\cdot 1} =$$

$$= \frac{\cancel{(pn-p)\cdot(pn-p-1)\cdot\ldots\cdot 1}\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot\cancel{(p-j)\cdot(p-j-1)\cdot\ldots\cdot 1}}{(pn-1)\cdot\ldots\cdot\cancel{(pn-p)\cdot(pn-p-1)\cdot\ldots\cdot 1}\cdot\cancel{(p-j)\cdot(p-j-1)\cdot\ldots\cdot 1}} =$$

$$= \frac{(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-j+1)}{(pn-1)\cdot(pn-2)\cdot\ldots\cdot(pn-j+1)}$$

5. VIRI:

- Pavletič, M. *Matematični priročnik*. *Kombinatorika*. http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/kombi.html (5. 12. 2023)
- Pavlič, G., Kavka, D., Rugelj, M., Šparovec, J. 2014. *Tempus Novum*. Ljubljana: Modrijan (5. 12. 2023)

- *Wikipedija.* 2023*. Fakulteta (funkcija).* https://sl.wikipedia.org/wiki/Fakulteta_(funkcija) *.* (5. 12. 2023)