

59. Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2025

**MATEMATIKA PRETEKLOSTI,
SEDANJOSTI IN PRIHODNOSTI: ZLATI REZ**

Matematika ali logika

Raziskovalna naloga



III. gimnazija Maribor

Gospodsvetska cesta 4

2000 Maribor

Avtor: Miha Popović

Mentorica: Tina Zupanc

Maribor, 2025

KAZALO

1. POVZETEK	4
2. ZAHVALA	5
3. UVOD	6
3.1 Cilj raziskovalne naloge	6
3.2 Hipoteza	7
3.3 Metodologija	7
4. TEORETIČNO OZADJE	9
4.1 Fibonaccijevo zaporedje	9
4.2 Razmerje na daljici – zlata točka	11
4.3 Konstrukcija zlatega reza	13
4.4 Zlati pravokotnik in zlata spirala	15
5. RAZISKOVALNI DEL	17
5.1 Arhitektura	18
5.2 Umetnost	24
5.3 Narava	27
5.4 Zlati rez v vsakdanjem življenju	30
5.5 Ugotovitve	35
6. ZAKLJUČEK	36
7. VIRI IN LITERATURA	37
7.1 Viri in literatura	37
7.2 Slike	38
7.3 Tabele	38

KAZALO SLIK IN TABEL

SLIKA 1: FIBONACCIEVO ZAPOREDJE	9
SLIKA 2: RAZMERJE 1:5 PRIKAZANO NA DALJICI	11
SLIKA 3: RAZMERJE 1:0'618 PRIKAZANO NA DALJICI	11
SLIKA 4: PRIMERJAVA RAZMERJI 1:0'618 IN 1'618:1	12
SLIKA 5: EVKLIDOVA DEFINICIJA IN NJEGOVA KONSTRUKCIJSKA REŠITEV	14
SLIKA 6: KLASIČNA KONSTRUKCIJA ZLATEGA REZA NA DALJICI IN PRIKAZ PITAGOROVEGA IZREKA	15
SLIKA 7: TOČKA KRČENJA ZLATIH PRAVOKOTNIKOV	16
SLIKA 8: FIBONACCIEVA SPIRALA	17
SLIKA 9: GRŠKI PARTENON	18
SLIKA 10: THE GOLDEN PYRAMID AND TRIANGLE	19

SLIKA 11: NOTRE DAME CATHEDRAL	21
SLIKA 12: KAPELA INŠTITUTA TEHNOLOGIJE V ILLINOISU	21
SLIKA 13: ZLATI PRAVOKOTNIKI NA FASADI KAPELE IIT	22
SLIKA 14: ZLATI PRAVOKOTNIKI NA FASADI KAPELE IIT	22
SLIKA 15: TLORIS KAPELE IIT	23
SLIKA 16: RAZMERJE ČLOVEŠKEGA TELESA PO VITRUVIJU	24
SLIKA 17: MONA LISA	25
SLIKA 18: LEONARDOVE ŠTUDIJE OBRAZOV	26
SLIKA 19: MOŠKI VRISAN V KROG	26
SLIKA 20: UNTITLED	27
SLIKA 21: LUPINA NAUTILUS POMPILIUS	28
SLIKA 22: RAZPOREDITEV SEMEN V SONČNICI	29
SLIKA 23: UMETNE (FIBONACCIJEVE) SPIRALE, KI JIH NAJDEMO V RASTLINAH	29
SLIKA 24: BANKOVEC ZA 20 EVROV	31
SLIKA 25: BANČNA KARTICA	32
TABELA 1: TABELA VELIKOSTI BANKOVCEV	31
TABELA 2: TABELA RAZMERJA MED ŠIRINO IN VELIKOSTJO BANKOVCEV	32
TABELA 3: PODATKI ANKETE	33
TABELA 4: PODATKI ANKETE	34

1. POVZETEK

Zlati rez srečamo na številnih področjih človeške ustvarjalnosti, od umetnosti in arhitekture pa vse do glasbe. Ta edinstveni matematični koncept pa ni omejen le na umetno ustvarjene strukture, saj ga lahko zasledimo tudi v naravi, kjer ga marsikdo ne bi pričakoval. Velja za enega najočarljivejših zakonov narave, saj združuje matematično popolnost in natančnost z edinstvenostjo narave.

V tej raziskovalni nalogi bomo najprej preučili razmerje med Fibonaccijevim zaporedjem in iracionalnim številom zlatega reza, nato pa analizirali primere uporabe zlatega rezu v umetnosti, arhitekturi in naravi ter dokazali njegovo prisotnost. Cilj naloge je raziskati prisotnost zlatega reza v vsakdanjem življenju ter predstaviti dokaze o njegovi univerzalni veljavnosti v naravnem in v umetnem svetu, v naravi in v delih človeške roke.

Ključne besede: zlati rez, Fibonaccijevo zaporedje, narava, umetnost, arhitektura, matematična popolnost, iracionalno število, univerzalna veljavnost, človeška ustvarjalnost, naravni vzorci

The golden ratio appears in numerous fields of human creativity, from art and architecture to music. However, this unique mathematical concept is not limited to man-made structures, as it can also be found in nature, often in places where one might not expect it. It is considered one of the most enchanting laws of nature, as it unites mathematical perfection and precision with the uniqueness of the natural world.

In this research paper, we will first examine the relationship between the Fibonacci sequence and the irrational number known as the golden ratio, and then analyze examples of the golden ratio's application in art, architecture, and nature, providing proof of its presence. The aim of the paper is to explore the presence of the golden ratio in everyday life and to present evidence of its universal validity in both the natural world and human-made creations.

Keywords: golden ratio, Fibonacci sequence, nature, art, architecture, mathematical perfection, irrational number, universal validity, human creativity, natural patterns

2. ZAHVALA

Hvala mentorici, ki mi je pomagala pri urejanju enačb ter je vztrajno pregledovala moj napredek pri pisanju naloge. Iskrena zahvala tudi očetu in materi, ki sta mi pregledala nalogo za morebitne slovnične napake in mi pomagala pri zasnovi določenih delov naloge. Največja zahvala pa gre meni, da sem kljub šolskih in obšolskih dejavnostih in obveznostmi našel čas in motivacijo za dokončanje te naloge.

3. UVOD

"...pravzaprav je verjetno pošteno reči, da je zlato razmerje navdihnilo mislece vseh disciplin kot nobeno drugo število v zgodovini matematike." (Canady, 2024).

Mario Livio, Astrofizik

Zlato rez, tesno povezan s Fibonaccijevim zaporedjem, je posebno iracionalno število, ki mu v svetu matematike ni primere. Ta fascinanten matematični koncept je zavestno ali pa tudi podzavestno vpeljan v nekatere največje umetnine človeštva.

Na primer, Leonardo da Vinci je v svoji slavni sliki *Mona Lisa* spretno uporabil zlato rez, čeprav ni znano, ali je to storil zavestno ali ne. Znano pa je, da je Leonardov tesen prijatelj, Luca Pacioli, leta 1509 objavil delo *De Divina Proportione* (Božansko razmerje), knjigo o matematiki, v kateri med drugim raziskuje tudi zlato rez. Za ilustracije, prisotne v knjigi, je prosil prav Leonarda da Vincia. Zaradi tega, in pa dejstva, da je znano tudi Leonardovo zanimanje za geometrijo in vpeljevanje le-te v njegova dela, mnogi znanstveniki in raziskovalci domnevajo, da je uporabljal zlato rez namenoma. Takšna uporaba zlatega reza v umetnosti nam jasno pokaže, kako se lahko matematične ideje prepletajo z ustvarjalnostjo človeške narave. (Povzeto po The Mona Lisa Foundation, b. d.)

Zato ni presenetljivo, da je zlato rez pogosto omenjen tudi pri pouku likovne umetnosti. Dijakom je predstavljeno, kako zlato rez vpliva na vrednotenje estetske vrednosti, podzavestno zaznavanje vizualnih kompozicij, ustvarjanje globine in usmerjanju pogleda opazovalca. Ta povezava med matematiko in umetnostjo, ki smo jo najmanj pričakovali, me je najbolj pritegnila k raziskovanju tega koncepta.

3.1 Cilj raziskovalne naloge

Glavni cilj te raziskovalne naloge je raziskati in dokazati prisotnost zlatega reza ter njegovih elementov na različnih področjih našega sveta, vključno z umetniškimi deli, arhitekturo in naravnimi pojavi. Osredotočili se bomo na to, kako se ta matematični koncept izraža v umetnosti in naravi in se potrudili dokazati njegovo stalnost in univerzalnost, če je le-ta prisotna.

3.2 Hipoteza

Da bomo skozi pisanje naloge ohranili rdečo nit ter za lažji potek dela smo si postavili hipotezo, katero bomo v zaključku tudi potrdili ali zavrgli.

- Zlati rez je namenoma vpeljan v arhitekturi ter umetnosti in je univerzalno prisoten v slednjih ter tudi v naravi.

Z uporabo sledečih metod smo želeli ugotoviti, ali je zlati rez res univerzalno estetsko razmerje ali zgolj matematična posebnost, ki se je skozi čas vtisnila v človekovo dožemanje lepote in harmonije.

3.3 Metodologija

V naši raziskovalni nalogi smo uporabili več metod za preučitev prisotnosti zlatega reza v umetnosti, arhitekturi in naravi. Najprej smo izvedli teoretično analizo, kar je vključevalo pregled akademske literature, knjig in znanstvenih člankov, ki obravnavajo zlati rez. Osredotočili smo se na matematične osnove tega razmerja in njegovo povezavo s Fibonaccijevim zaporedjem. Z namenom, da bi dobili čim širši vpogled v obstoječe raziskave, smo preučili različne vire.

Nato smo izvedli kvantitativno analizo, pri kateri smo matematično ocenili prisotnost zlatega reza v izbranih primerih. Podrobno smo preučili, ali se to razmerje dejansko pojavlja v proporcijah arhitekturnih objektov, umetniških del in naravnih pojavov. To smo storili s pomočjo znanih enačb za izračun zlatega reza ter primerjali dobljene vrednosti z merami opazovanih objektov.

Poleg tega smo izvedli analizo sekundarnih podatkov, pri kateri smo analizirali različne slike in fotografije ter jih primerjali s teoretičnim modelom zlatega reza. Pri umetniških delih, kot sta *Mona Lisa* in *Vitruvijev človek*, smo preučevali razmerja med posameznimi elementi kompozicije. Pri arhitekturi smo raziskovali stavbe, kot so Partenon, Keopsova piramida in Notre-Dame, da bi ugotovili, ali njihove dimenzije ustrezajo zlatemu rezu. Prav tako smo se osredotočili na primere iz narave, na primer na razporeditev sončničnih semen in spirale v školjkah, ter preverili njihovo povezavo s Fibonaccijevim zaporedjem.

Ker se zlati rez pogosto omenja v moderni kulturi, smo izvedli tudi analizo virov. Preučili smo ugovore nekaterih raziskovalcev, ki dvomijo v njegovo vseprisotnost in menijo, da gre v določenih primerih zgolj za pretirano interpretacijo. To nam je omogočilo bolj nevtralen pogled na temo ter lažje razlikovanje med primeri, ki dejansko temeljijo na matematičnih zakonitostih, in tistimi, ki so morda le naključni ali napačno interpretirani.

Na koncu naloge smo opravili tudi lastno raziskovanje ter zbrali podatke o dolžini raznih delov telesa ter širino in višino 2 različnih načinov plačevanja; bankovca ter bančne kartice. Te podatke smo tudi predstavili v tabelah, izračunali razmerje med določenimi vrednostmi ter ga

ovrednotili glede na to, ali je dovolj blizu številu zlatega reza, da bi lahko o prisotnosti zlatega rezu tudi govorili.

Pri pripravi te naloge je bilo prav tako uporabljeno orodje ChatGPT izključno za generiranje osnovnih idej in predlogov besedila. Podatki, ki jih je zagotovilo orodje, so bili pregledani, prilagojeni in verificirani s strani avtorja.

4. TEORETIČNO OZADJE

4.1 Fibonaccijevo zaporedje

Fibonaccijevo zaporedje (Slika 1) predstavlja eno najznamenitejših zaporedij naravnih števil. Predstavlja zaporedje, kjer je vsako naslednje število, od tretjega naprej, vsota predhodnih dveh:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}	F_{21}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711

Slika 1: Fibonaccijevo zaporedje

Wikipedia. (b.d.). *Fibonaccijevo zaporedje* [Slika]. Wikipedia.
https://sl.wikipedia.org/wiki/Fibonaccijevo_%C5%A1tevililo

Dano zaporedje:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...

Lahko zapišemo tudi v rekurzivni obliki:

$$F_0 = 1$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; n \geq 2$$

kjer, F_n predstavlja n -ti člen Fibonaccijevega zaporedja.

Rekurzivni zapis delimo z F_n in preučimo kvociente, ko gre n proti neskončno:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

Naj bo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{a}$$

(Povzeto po Zakošek, 2005, str.12)

Ko vstavimo ti dve vrednosti v prvotno enačbo dobimo kvadratno enačbo:

$$a = 1 + \frac{1}{a}$$

$$a^2 = a + 1$$

$$a^2 - a - 1 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1 + 4}$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\phi = a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Kar pa je definicija zlatega števila. Čeprav je to le ena izmed mnogih definicij, velja za osrednjo in je najbolj prepoznavna.

Povezava med zlatim rezom oziroma, bolj natančno, zlatim številom se kaže še v razmerju, ko iz zgornje enačbe;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{a}$$

izrazimo neznanko a , ki, kot smo zgoraj ugotovili, predstavlja Φ , zlato število. Ko to naredimo, dobimo:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = a = \phi \text{ pri } n \rightarrow \infty$$

To zapišemo z limito in dobimo zapis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi,$$

ki predstavlja razmerje med zaporednima členoma Fibonaccijevega zaporedja. To lahko dokažemo s sledečim postopkom.

Prvih 10 členov Fibonaccijevega zaporedja:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

Izračunamo razmerje: $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, kar je kvocient med členom Fibonaccijevega zaporedja in njegovim neposrednim predhodnikom.

$$\frac{1}{1} = 1, \frac{2}{1} = 2, \frac{3}{2} = 1.5, \frac{5}{3} \approx 1.667, \frac{8}{5} = 1.6, \frac{13}{8} = 1.625, \frac{21}{13} \approx 1.615, \frac{34}{21} \approx 1.619, \frac{55}{34} \approx 1.618$$

Prvih 10 decimalk števila ϕ je: 1.6180339887.

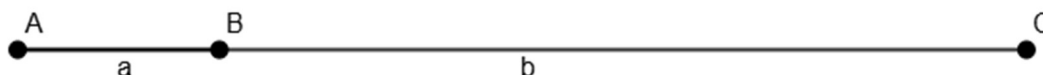
Opazimo, da že po 9 členih pridemo do, na 3 decimalke natančen zapis, zlatega števila. (Povzeto po Lipnik, 2006, str. 2)

Torej, sedaj ko poznamo in razumemo Fibonaccijevo zaporedje in njegovo povezavo z zlatim številom je čas, da se posvetimo še zlatemu rezu in njegovim elementom.

4.2 Razmerje na daljici – zlata točka

Kot pri vsakem matematičnem problemu, je tudi tukaj potrebno poznati teorijo, ki stoji za zlatim rezom. Ne ve se točno, kdaj se je uveljavilo ime zlati rez, saj ga ni uporabljal noben izmed matematikov, ki so ga proučevali. V matematiki se zlati rez praviloma označuje s grško črko Φ , Φ (manj pogosto pa tudi s ϕ). S približno vrednostjo $\Phi \cong 1.618$ predstavlja edinstveno razmerje, s svojo iracionalnostjo pa je zelo podoben številoma π ter e .

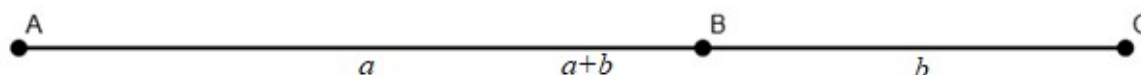
Da bi razumeli iracionalno število zlatega reza, oziroma zlato razmerje, moramo najprej razumeti osnovna razmerja. Če imamo razmerje 1:5 ali $\frac{1}{5}$, to pomeni, da je eno število (lahko tudi premica, daljica, ...) ena petina drugega oziroma, da je drugo število petkrat večje od prvega. Daljica AB je $\frac{1}{5}$ daljice AC , kot prikazuje Slika 2.



Slika 2: Razmerje 1:5 prikazano na daljici

Lastno delo, ustvarjeno s spletnim orodjem GeoGebra.

Torej, če zlato razmerje predstavimo, kot razmerje dveh daljic, kjer je razmerje med daljicami 1:1.618, velja, da ima daljica AB vrednost 1, daljica AC 1.618 ter daljica BC 0.618 dobimo sliko, kot je prikazano s Sliko 3:



Slika 3: Razmerje 1:0.618 prikazano na daljici

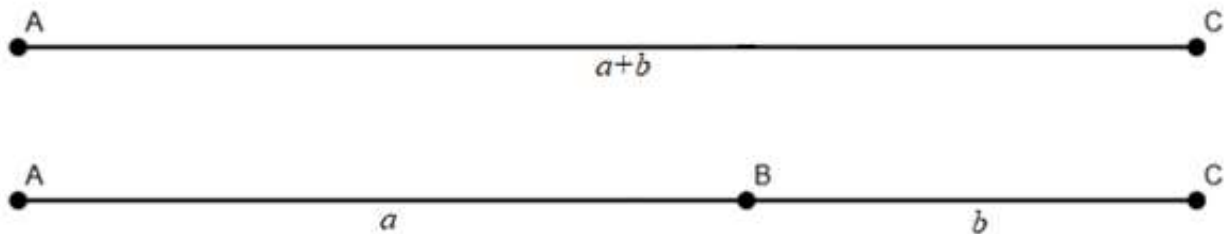
Lastno delo, ustvarjeno s spletnim orodjem GeoGebra.

To edinstveno razmerje je opisal tudi antični grški matematik Evklid:

"Daljica naj bi bila razdeljena v skrajnem in srednjem razmerju, kadar je razmerje med celotno daljico in večjim delom enako razmerju med večjim delom in manjšim delom."

(Maths Unit 24 - Euclidean Geometry: Ratio and Proportion; Stellenbosch University, b.d.)

Če upoštevamo Evklidove besede velja, da je razmerje med daljico AB in daljico AC (Slika 4) $\frac{AC}{AB} = \frac{1\ '618}{1}$ (1'618), enako razmerju med daljicama AB ter BC , $\frac{AB}{BC}$, torej $\frac{1}{0\ '618}$ (1'618).



Slika 4: Primerjava razmerji 1:0'618 in 1'618:1

Lastno delo, ustvarjeno s spletnim orodjem GeoGebra.

Če to povzamemo, ugotovimo, da velja sledeče:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

Kar pomeni, da če to zapišemo kot razmerje odnosov med daljicami, dobimo osnovni zapis za zlati rez:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Če predpostavimo, da je krajši del b dolg eno enoto, zanima pa nas dolžina daljšega dela, a , lahko to zapišemo kot:

$$\frac{a+1}{a} = \frac{a}{1}$$

$$a+1 = a^2$$

Kot izpeljano na strani 8, sta rešitvi enačbe:

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ker nas zanimajo samo pozitivne rešitve (iščemo dolžino daljice), dobimo zapis:

$$a = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989484 \dots$$

Po naših ugotovitvah pri Fibonaccijevem zaporedju vemo, da je zgornji zapis enak sledečemu:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

Decimalni razvoj števila ϕ je neskončen in neperiodičen, saj je število iracionalno. To pomeni da ga ni mogoče izraziti, kot razmerje dveh celih števil. Vendar, kot sta zapisala Marples in Williams (2022):

Približevanje iracionalnih števil z racionalnimi števili je tema veje matematike, znane kot diofantska aproksimacija. Vsako iracionalno število je mogoče približati z razmerjem celih števil. Na primer, $\pi = 3.14159265\dots$, razmerje med obsegom kroga in njegovim premerom, lahko približamo na dve decimalni mesti z enostavnim ulomkom $\frac{22}{7}$. Vsako realno število (racionalno ali iracionalno) je mogoče izraziti s pomočjo verižnih ulomkov. (Marples in Williams, 2022, stran 2)

Torej je še ena zanimiva definicija zlatega števila sledeč izraz neskončnih verižnih ulomkov:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}$$

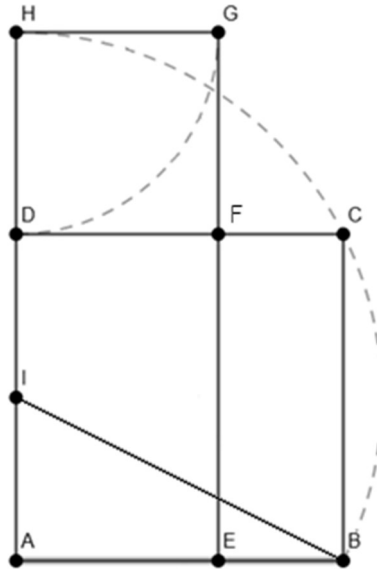
$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

4.3 Konstrukcija zlatega reza

Grški mislec Evklid se je največ posvečal geometriji, zato je zlati rez prikazal s sledečim postopkom (glej Sliko 5):

- Najprej narišemo daljico AB ter konstruiramo kvadrat, ki ima za stranico dolžino omenjene daljice. Dobimo kvadrat $ABCD$.
- Nato razpolovimo daljico AD ter na razpolovišču označimo točko I . Točka H je na nosilki AD od I oddaljena za dolžino $|IB|$.

- Na stranici DC označimo točko F tako, da velja $|DH| = |DF|$.
- Nato ponovno konstruiramo kvadrat $DFGH$.
- Presečišče daljice AB in nosilke daljice FG označimo z E .



Slika 5: Evklidova definicija in njegova konstrukcijska rešitev

Prerejeno po: Wikipedia. (b.d.). *Evklidova definicija* [Slika]. https://sl.wikipedia.org/wiki/Zlati_rez

Dokazana je bila posebnost te konstrukcije tudi v ploščini obeh likov. Če bi v konstrukcijo vpisali vrednosti, bi, dokler ostanejo razmerja med elementi pravilna, ugotovili, da je ploščina kvadrata $ABCD$ enaka ploščini pravokotnika $AEGH$. Zaradi tega imata enako ploščino tudi kvadrat $DFGH$ in pravokotnik $EBCF$. Dobimo naslednje razmerje:

$$\frac{DF}{FC} = \frac{AD}{DH} = \frac{FE}{FD}$$

Evklid je stranice v manjšem kvadratu poimenoval *minor* – m (DH) in stranice v večjem kvadratu *major* – M (AD). Iz tega dobimo enačbo:

$$\frac{m}{M} = \frac{M}{m + M}$$

ker velja $\frac{DH}{AD} = \frac{AD}{AH}$. Če enačbo ustrezno preuredimo, dobimo sledeče:

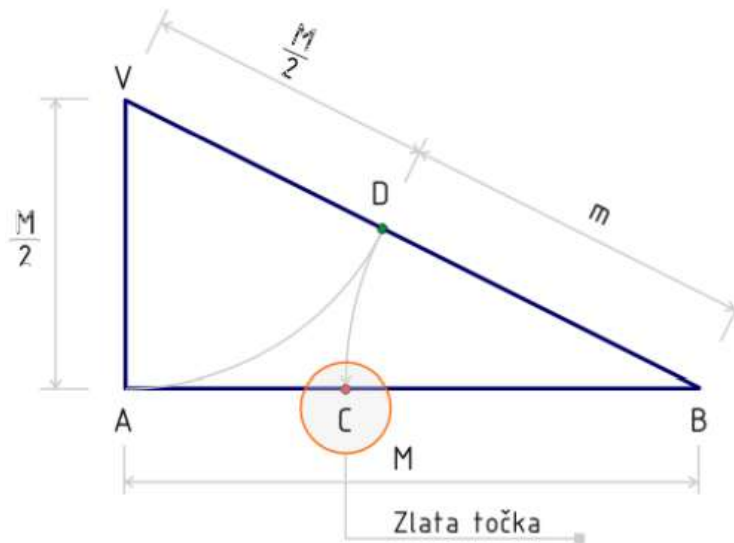
$$m^2 + Mm = M^2$$

Levo stran preoblikujemo v popolni kvadrat:

$$M^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right)^2 - \left(\frac{M}{2}\right)^2$$

$$M^2 + \left(\frac{M}{2}\right)^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right)^2$$

Dobimo Pitagorov izrek v pravokotnem trikotniku, ki ga lahko uporabimo za konstruiranje zlatega reza, ki je tudi razviden iz Slike 6.



Slika 6: Klasična konstrukcija zlatega reza na daljici in prikaz Pitagorovega izreka

Wikipedia. (b.d.). Klasična konstrukcija zlatega reza na daljici [Slika]. https://sl.wikipedia.org/wiki/Zlati_rez

Točko C, zaradi njene lastnosti, da daljico AB seka v zlatem razmerju, imenujemo zlata točka.

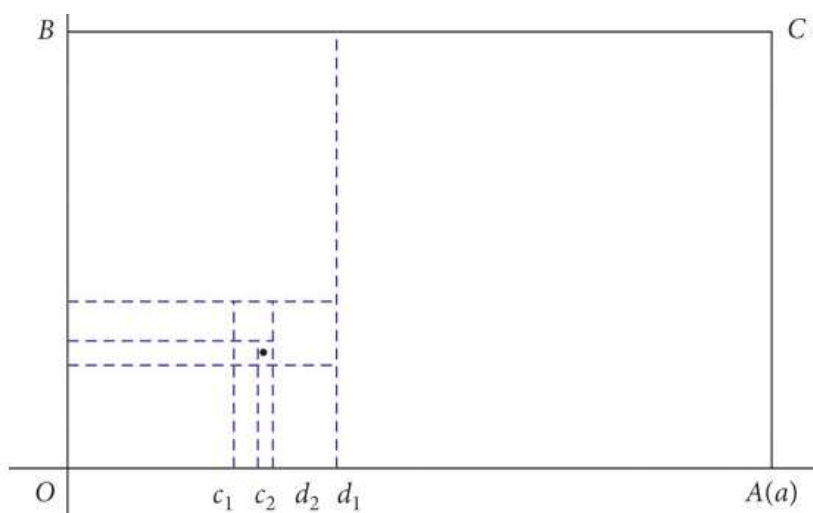
(Povzeto po Zakošek, 2005, str. 4 in 5)

4.4 Zlati pravokotnik in zlata spirala

Najpomembnejša elementa in bistvo zlatega reza sta zlati pravokotnik in zlata spirala.

Zlati pravokotnik je pravokotnik, katerega razmerje med širino in višino je enako številu zlatega reza. Torej, če je širina pravokotnika a in višina b , potem velja razmerje $\frac{a}{b} = \phi$.

Konstrukcijo zlatega pravokotnika (Slika 7) je opisal v svojem delu Duan (2019) s sledečimi besedami:



Slika 7: Točka krčenja zlatih pravokotnikov

Duan, J.-S. (2019). *Shrinkage point of golden rectangle* [Slika]. *Mathematical Problems in Engineering*. <https://doi.org/10.1155/2019/3149602>

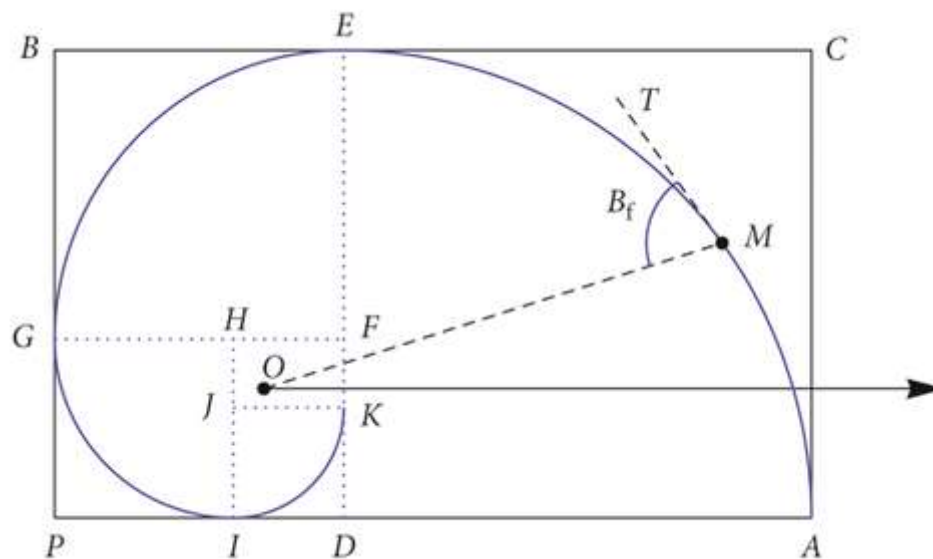
Iz zlatega pravokotnika OACB na sliki 1¹ se na desni strani izreže kvadrat, preostali pravokotnik pa prav tako ostane zlati pravokotnik. Postopek se nadaljuje tako: kvadrati na vrhu, levi in spodnji strani se odstranijo v naslednjih treh korakih. Postopek rezanja v nasprotni smeri urnega kazalca se lahko nadaljuje v nedogled. Po izreku o gnezdenju intervalov² obstaja ena točka (x_s, y_s) , označena s piko na sliki 1, ki pripada vsem zlatim pravokotnikom. To točko imenujemo točka krčenja izvirnega zlatega pravokotnika (Duan, 2019, stran 2).

Ko na sliki skonstruiramo zlate pravokotnike, ki so osnovani na razmerju zlatega reza, lahko narišemo tudi zlato spiralo. Zlata spirala je posebne vrste spirala, saj njeno razmerje, razmerje zlatega reza, torej razmerje $1:1\sqrt{5}$, izhaja iz zaporedja četrtn kroga, katerih polmeri ustrezajo dolžini stranice kvadratov, ki jih dobimo, ko strukturiramo zlate pravokotnike. Spirala narašča z razmerjem, ki ustreza razmerju zlatega reza, torej je razmerje med zaporednima deloma spirale enako $1:1\sqrt{5}$.

Tudi konstrukcijo zlate spirale (Slika 8) je predstavil v svojem delu Duan (2019) in sicer s sledečim opisom:

¹ Slika 1 v citiranem viru je označena kot Slika 7 v tej nalogi.

² Izrek o gnezdenju intervalov pravi, da če imamo zaporedje gnezdenih zaprtih intervalov z dolžinami, ki se približujejo nič, potem je presečišče vseh teh intervalov sestavljeno iz natanko ene točke.



Slika 8: Fibonaccijeva spirala

Duan, J.-S. (2019). *Shrinkage point of golden rectangle* [Slika]. *Mathematical Problems in Engineering*. <https://doi.org/10.1155/2019/3149602>

Fibonaccijeva spirala se lahko ustvari iz zlatega pravokotnika PACB na sliki 5³. Sestavljena je iz četrt-krogov, ki so tangencialni na notranjost vsakega kvadrata, in sicer tako: narišemo lok četrt-kroga s središčem D skozi dva oglišča kvadrata DACE, tako da so stranice kvadrata tangencialne na lok. Nato zaporedno narišemo lok četrt-kroga s središčem F v kvadratu GFEB, lok četrt-kroga s središčem H v kvadratu PIHG, lok četrt-kroga s središčem J v kvadratu IDKJ in tako naprej (Duan, 2019, stran 3).

To sta osnovni konstrukciji in tudi glavna elementa, katera bomo uporabljali pri dokazovanju prisotnosti elementov zlatega reza.

5. RAZISKOVALNI DEL

Sedaj, ko smo seznanjeni s potrebnim znanjem in poznavanjem elementov zlatega reza, njegovo konstrukcijo ter konstrukcijo zlatega pravokotnika ter zlate spirale, se bomo osredotočili na glavni del te raziskovalne naloge, in sicer opazovanje elementov zlatega reza v arhitekturi, umetnosti ter v naravi.

Čeprav je dokumentov in člankov o uporabi zlatega reza v sledečih delih veliko pa lahko na spletu zasledimo tudi nekatere, ki temu strogo nasprotujejo. V tej raziskovalni nalogi bomo

³ Slika 5 v citiranem viru je označena kot Slika 8 v tej nalogi.

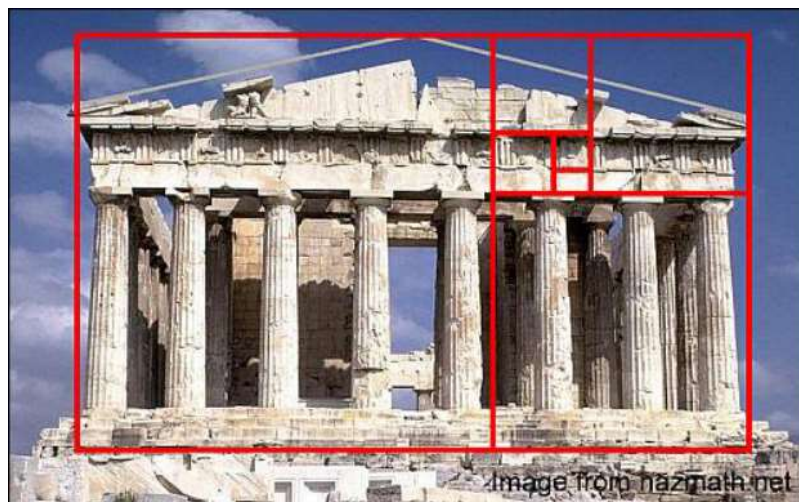
predstavili tako argumente ter dokaze, ki podpirajo te trditve, kot tudi tiste ki jih spodbijajo in prišli do ustreznega zaključka.

Najprej bomo pogledali nazaj skozi čas, kako so zlati rez, njegove elemente oziroma razmerje zlatega reza, implementirali naši predniki v raznih strukturah, zgradbah ter umetninah, nato pa se bomo še posvetili uporabi zlatega reza v moderni dobi ter na koncu še njegovi prisotnosti v naravi.

5.1 Arhitektura

V arhitekturi je zlati rez eden izmed manj izrazitih in skritih elementov, saj je po navadi edina povezava med določeno strukturo, zgradbo ali kipom in zlatim rezom le v razmerju med določenimi deli le teh. Ti deli imajo razmerje $1:\sqrt{5}$ ali vsaj približek te številke, kar prikaže človeškemu očesu estetsko razmerje, zaradi katerega zlatemu rezu pripisujemo njegovo pomembnost. Posledično so prav tako pomembni tudi zlati pravokotniki, saj pravzaprav omogočajo zlato razmerje, ki je prisotno med posameznimi elementi. V tem podpoglavju si bomo ogledali primere iz svetovne arhitekture, ki so zlati rez vključili preko raznolikih pristopov.

Prvi primer uporabe zlatega reza v arhitekturi, ki ga bomo obravnavali in opazovali bo grški Partenon. Partenon je glavni tempelj atenske akropole, posvečen boginji Ateni. Zgradili so ga v 5. stoletju pr. n. št. in je najbolj znan ostanek starogrške arhitekture ter njen največji dosežek.



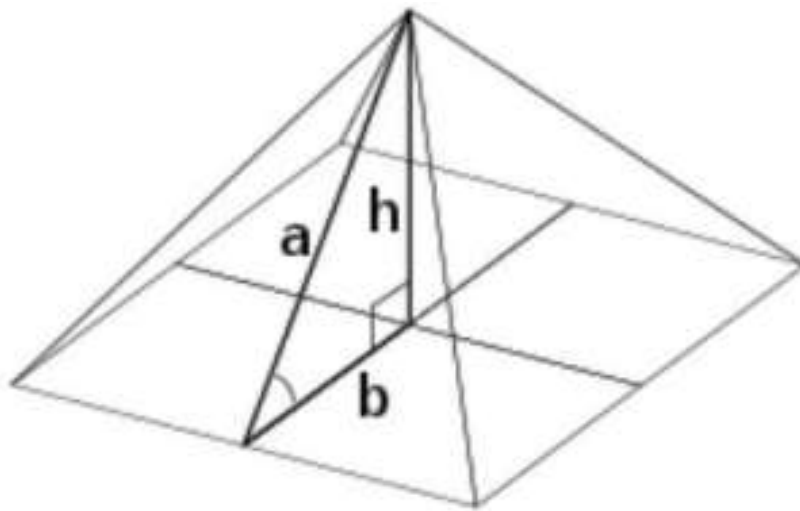
Slika 9: Grški Partenon

Osterkamp, P. (2014). *Golden Parthenon* [Slika]. <https://peggyosterkamp.com/wp-content/uploads/2014/04/golden-parthenon.jpg>

Splošno prepričanje je, da je bil Partenon zgrajen v razmerju zlatega reza, in sicer v razmerju zlatih pravokotnikov kot nam prikazuje Slika 9. To razmerje tudi opiše Booyesen (2024, stran 24) v njenem delu:

Zlati pravokotnik je zasnovan tako, da so razmerja dolžin njegovih stranic v zlatem rezu... Kot takšen je pogosto vključen v umetnost in arhitekturo... Celotna struktura, vključno s poškodovano streho, je v celoti umeščena v zlat pravokotnik. Poleg tega je znotraj strukture več manjših zlatih pravokotnikov...

Še en primer uporabe zlatega reza v antičnih civilizacijah so piramide v Gizi, specifično Keopsova piramida. Je najstarejša in največja piramida v Gizi, ter najstarejše svetovno čudo. Piramida je zgrajena kot grobnica faraona Kufuja, ki so ga Grki imenovali Keops. Glede na Zeina (2022) je razmerje, med razdaljo od vrha piramide do sredine ene izmed stranskih ploskev piramide (daljica a na Sliki 11) in razdalja od iste točke do središča kvadratne osnove piramide (daljica b na Sliki 11), enako zlatemu rezu, kot je tudi prikazano na Sliki 11.



Slika 10: The golden pyramid and triangle

Zeina, A. A. M. A. (2022). *The Golden ratio and its impact on Architectural design*. International Design Journal, Letnik 12, Število 2.

Piramide v svojem delu bežno omeni tudi Akhtaruzzaman (2011, stran 16):

Znane lokacije, kot so egipčanske piramide, prav tako uporabljajo zlati rez. Polovica spodnje plasti egipčanskih piramid je prav tako faktor 1,62. Še vedno pa ostaja vprašanje, ali je osupljivo razmerje do zlatega reza v teh piramidah rezultat namernega oblikovanja ali zgolj naključje.

Torej bi naj bilo razmerje med stranicami piramide v razmerju, ki je približek razmerja zlatega reza. Vendar Akhtaruzzaman v njegovem opisu izpostavi, da ni znano, ali je zlati rez implementiran v piramide namenoma ali po naključju. Uporaba zlatega reza v antiki je nasploh kontroverzna tema, saj ni nobenih dokazov, da so Grki ali Egipčani poznali koncept zlatega reza in da bi ga namenoma implementirali v njihova dela.

Naini (2024) zapiše, da večina poskusov, da bi na Partenonu poiskali in predstavili zlati pravokotnik, ki jih lahko najdemo, zlati pravokotnik projicira na Partenon tako, da izpusti nekaj stopnic ob njegovem vznožju ali podaljša streho tako, da bi ustrezala dimenzijam zlatega pravokotnika.

Vendar se zdi, da je celotna zgodba o klasičnih Grkih in zlatem rezu brez temeljev. Enako velja za egipčanske piramide. Ideja, da sta bila Partenon in egipčanske piramide zgrajena po načelih zlatega reza, izvira iz sredine 19. stoletja, saj v nobenem rokopisu iz klasičnih časov ni nobene omembe zlatega reza vse do tega obdobja (Naini, 2024, stran 3).

V svojem delu nam predstavi tudi nov pogled na zlati rez kot koncept in sicer zapiše:

Poskusi, da bi diagramatično pokazali, da katerakoli od teh struktur ustreza zlatemu pravokotniku ali na kak drug način, so špekulativni in očitno rezultat vztrajne želje po povezovanju zlatega reza s strukturo. Preprost iskalni poizvedek na internetu bo pokazal, koliko ljudi je poskušalo postaviti zlati pravokotnik na Partenon (Naini, 2024, stran 3).

S tem nam želi predstaviti neizogiben vpliv človeške narave in našo potrebo po iskanju vzorcev in zaporedij, tudi tam kjer jih mogoče ni. Čeprav ima zlati rez neizpodbitno matematično podlago, ki smo jo tudi v prejšnjem poglavju na kratko predstavili, pa je njegova vloga na kulturnem ter estetskem področju vprašljiva.

Zlati rez se pogosto pojavlja tudi v moderni arhitekturi. Eden izmed primerov uporabe zlatega reza je v Franciji in izhaja iz sredine 12. stoletja. Stolnica Notre-Dame v Parizu znana tudi kot Notredamska stolnica ali preprosto Notre-Dame, je srednjeveška katoliška stolnica na otoku Île de la Cité v četrtem okrožju Pariza, glavnega mesta Francije. Če pogledamo Sliko 11 vidimo, da je bila zahodna fasada stolnice zasnovana tako, da vključuje zlati rez.



Slika 11: Notre Dame Cathedral

Kimberly E., *Geometry of Design: Studies in Proportion and Composition* (2001; republished, New York: Princeton Architectural Press, 2011), stran 21.

“Spodnji del fasade je umeščen v kvadrat zlatega pravokotnika, stolpa pa sta umeščena v recipročen pravokotnik zlatega reza ... fasado je mogoče razdeliti na šest enot, pri čemer je vsaka enota še en zlat pravokotnik (Kimberly, 2001, stran 21).”

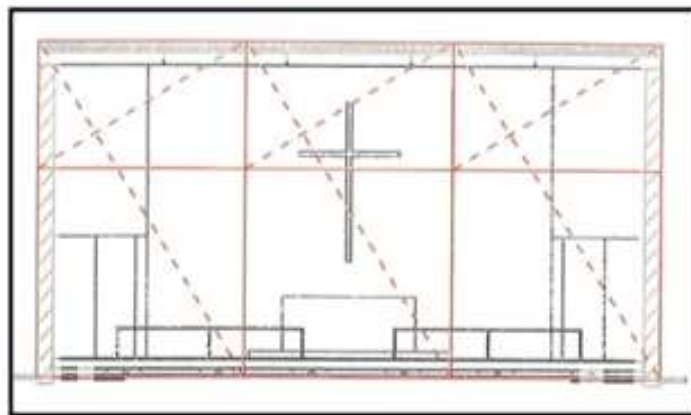
Primer iz nedavne arhitekture je tudi kapela Inštituta tehnologije v Illinoisu (Illinois Institute of Technology) ali na kratko, kapela IIT. Grajena med letoma 1949 in 1952 v svojem designu vsebuje več elementov zlatega reza (Slika 12).



Slika 12: Kapela Inštituta tehnologije v Illinoisu

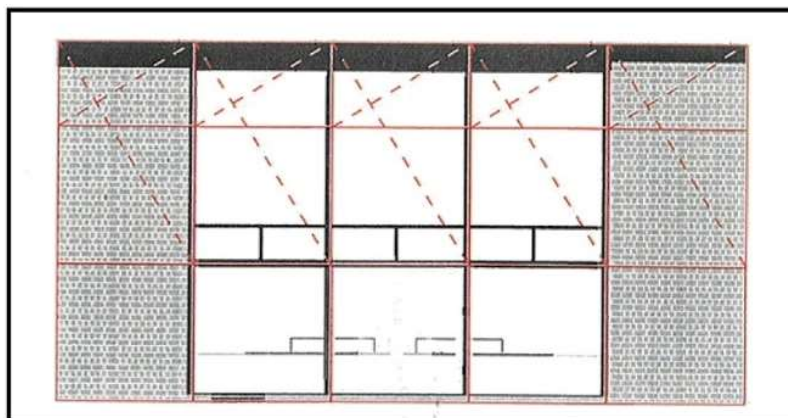
Kimberly E., *Geometry of Design: Studies in Proportion and Composition* (2001; republished, New York: Princeton Architectural Press, 2011), stran 76.

Mies van der Rohe⁴ je bil direktor šole arhitekture (School of Architecture) na inštitutu ter je zasnoval večino zgradb inštituta ter tudi njihov kampus. Ena izmed teh je zgoraj omenjena kapela. Celotna fasada zgradbe je v razmerju 1:1'618 ali približno 3:5. Prav tako je zasnovana na takšen način, da je z uporabo zlatih pravokotnikov razdeljena v 5 vrst, te pa se ponavljajo v vzorcu kot prikazujeta Slika 13 in 14.



Slika 13: Zlati pravokotniki na fasadi kapele IIT

Kimberly E., *Geometry of Design: Studies in Proportion and Composition* (2001; republished, New York: Princeton Architectural Press, 2011), stran 77.



Slika 14: Zlati pravokotniki na fasadi kapele IIT

Kimberly E., *Geometry of Design: Studies in Proportion and Composition* (2001; republished, New York: Princeton Architectural Press, 2011), stran 77.

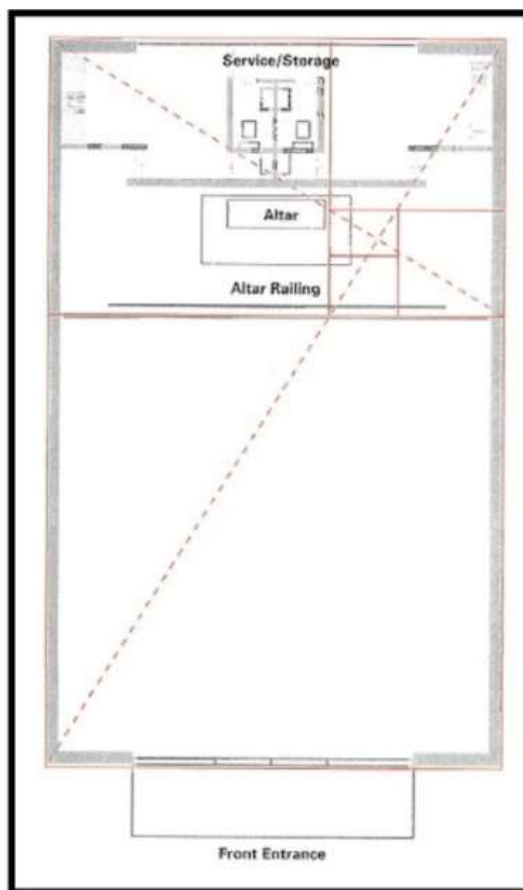
⁴ Ludwig Mies van der Rohe (27. 3. 1886 - 17. 8. 1969) je bil ameriški arhitekt nemškega rodu, čigave pravokotne oblike, oblikovane v elegantni preprostosti, so predstavljale vrhunec mednarodnega arhitekturnega sloga.

Razdelitev fasade na zlate pravokotnike je Kimberly (2001, stran 77) opisal tako:

...(zgoraj levo)⁵ Sprednjo fasado kapele je mogoče razdeliti na vrsto pravokotnikov zlatega reza, ki obdajajo zgornja velika okna in manjša zgornja viseča ventilacijska okna. Spodnja velika okna so kvadrati. (zgoraj desno)⁶Prerez notranjosti, usmerjen proti oltarju, prikazuje, da je obod sprednje fasade mogoče opredeliti s tremi pravokotniki zlatega reza....

Prav tako je zlati rez prisoten tudi v sami notranjosti kapele in sicer v tlorisu (Slika 15). Ta razdeli prostor, ponovno na zlate pravokotnike, tako da loči prostor, kjer so klopi za ljudi, od rahlo dvignjenega prostora z oltarjem in shrambo.

Načrt oboda kapele se popolnoma prilega pravokotniku zlatega reza. Kvadrat zlatega reza določa območje za občestvo, medtem ko recipročen pravokotnik zlatega reza določa prostor za oltar ter območja za službo in shranjevanje v kapeli. Ti dve območji sta ločeni z rahlim dvigom območja oltarja in ograjo (Kimberly, 2001, stran 77).



Slika 15: Tloris kapele IIT

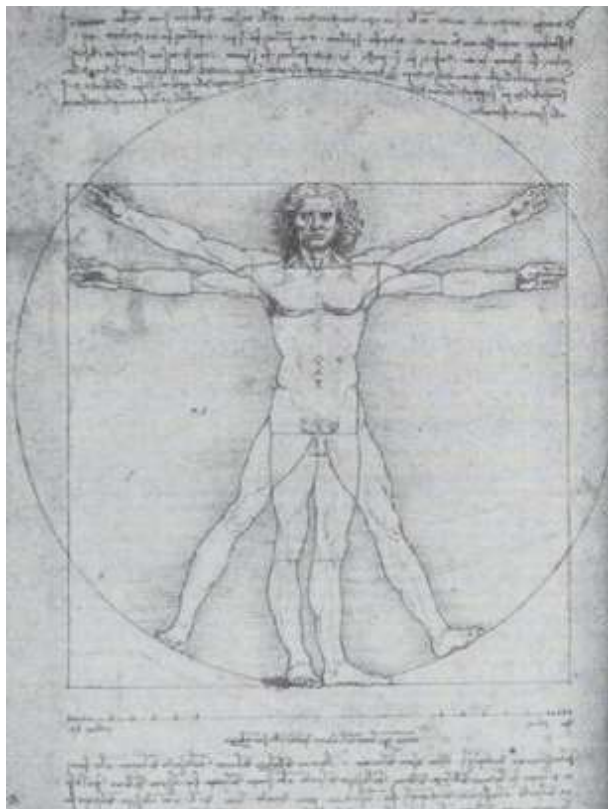
Kimberly E., *Geometry of Design: Studies in Proportion and Composition* (2001; republished, New York: Princeton Architectural Press, 2011), stran 77.

⁵ V tej nalogi spodnja slika (Slika 13)

⁶ V tej nalogi zgornja slika (Slika 12)

5.2 Umetnost

Zlati rez v umetnosti in umetniških delih je pogosto prisoten element v kompoziciji slike. Najbolj znani primeri uporabe zlatega reza, zlate spirale oziroma zlatih pravokotnikov so pri Leonardo da Vinciju⁷. Zlati rez in njegovi elementi so najpogosteje prikazani v njegovih delih *Mona Lisa*⁸ ter *Razmerje človeškega telesa po Vitruviju*⁹.



Slika 16: Razmerje človeškega telesa po Vitruviju

Posamentier, A. S. (2007). *The fabulous Fibonacci numbers*. Prometheus Books. Stran 257.

Razmerje človeškega telesa po Vitruviju je da Vinci ilustriral (Slika 16) v knjigi *Divina proportione*¹⁰. Razmerje dolžine stranice kvadrata in polmera kroga je približek zlatemu rezu z

⁷ Leonardo da Vinci (1452–1519) je bil italijanski slikar, risar, kipar, arhitekt in inženir, čigave veščine in inteligenca, morda bolj kot pri kateremkoli drugem posamezniku, so predstavljale simbol humanističnega ideala renesanse.

⁸ Mona Lisa, olje na lesu. Naslikana nekje med letoma 1503 in 1519.

⁹ Razmerje človeškega telesa po Vitruviju, svinčnik in črnilo na papirju, okoli leta 1490.

¹⁰ Fra Luca Bartolomeo de Pacioli, *Divina Proportione* (O božanskem razmerju), 1509.

vrednostjo $\approx 1{,}7$. Za ilustracijo je uporabil sistem idealnih proporcij človeškega telesa, imenovan Vitruvijev kanon¹¹ po rimskem arhitektu Vitruvijju¹² (Povzeto po Posamentier, 2007).

To kaže, da je bil Leonardo da Vinci, zaradi svojega poznanstva s Pacilijem, verjetno dobro seznanjen s pojmom zlatega reza. Vendar pa dejstvo, da ga ni omenil v svojih zvezkih ali proporcionalnih risbah, nakazuje, da verjetno ni verjel, da je ta pojem povezan z človeško lepoto ali idealiziranimi proporcijami (Naini, 2024, stran 3).

Leonardo je zaradi svojega ekstenzivnega znanja na mnogih različnih področjih veljal za genija. Prav zato prihaja do veliko špekulacij, da je namerno in zavestno uporabil zlati rez v svojih delih, saj je to bil takrat nov koncept, ki ga je odkril in opisal Leonardov dober prijatelj Pacioli.

Vendar ni dokazov, ki bi to trditev tudi podprli. Zlati rez oziroma elementi zlatega reza so prisotni v njegovih delih, vendar ni zapisov, da bi jih namerno uporabil. Poglejmo si primer uporabe zlatega reza v njegovi svetovno znani sliki *Mona lisa* (Slika 17).



Slika 17: Mona Lisa

Biščak, K. (2013). *Fibonaccijeva števila in zlati rez v umetnosti : magistrsko delo* [Magistrsko delo, K. Biščak]. Repozitorij Univerze na Primorskem. Stran 47.

Iz slike je razvidno, da so proporcije obraza, v skladu z zlatim razmerjem, razdeljene na zlate pravokotnike. Kljub temu, da je zlati rez na sliki prikazan, pa med Leonardovimi študijami

¹¹ Vitruvijev kanon opisuje idealne proporcije človeškega telesa, ki jih je razvil arhitekt Vitruvij v delu *De architectura*. Telesno razmerje je prikazano v kvadratu, ki obdaja telo, in krogu, ki se dotika rok in nog.

¹² Vitruvius Pollio (80–70 pr. n. št. – okoli 15 pr. n. št.) je bil rimski arhitekt in inženir.

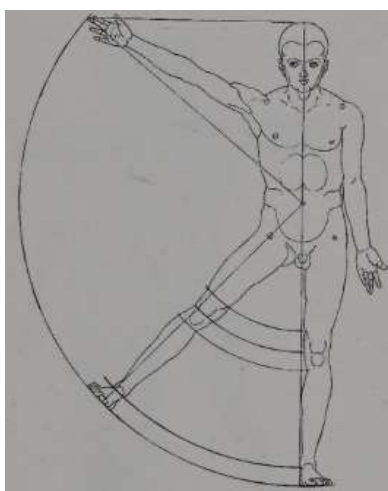
obrazov, ki so prikazane na Sliki 18, in njihovih proporcij, ne najdemo niti enega primera, v katerem bi prikazoval razmerje zlatega števila (Biščak, 2013).



Slika 18: Leonardove študije obrazov

Biščak, K. (2013, stran 48). *Fibonaccijeva števila in zlati rez v umetnosti : magistrsko delo* [Magistrsko delo, K. Biščak]. Repozitorij Univerze na Primorskem.

Elemente zlatega reza lahko opazimo tudi v nekaterih delih Dürerja¹³. Dürer je podobno, kot Leonardo da Vinci, ilustriral svojo verzijo človeka, v kateri je prikazal Vitruvijev kanon (Slika 19).



Slika 19: Moški vrisan v krog

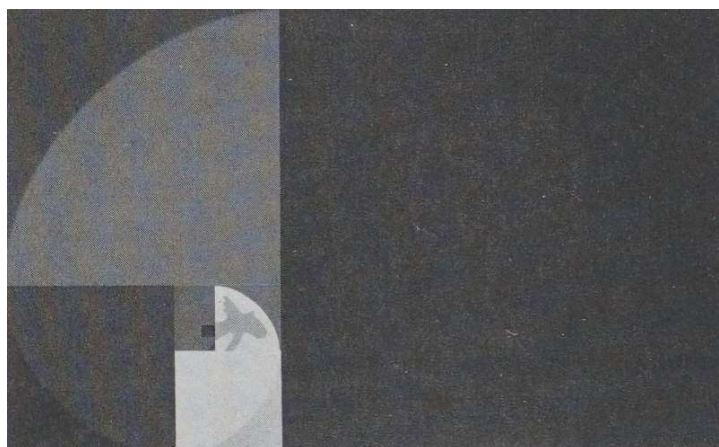
Kimberly E., *Geometry of Design: Studies in Proportion and Composition* (2001; republished, New York: Princeton Architectural Press, 2011), stran 14.

Oba umetnika, Dürer in Leonardo, ki sta študirala in proučevala proporcije človeškega telesa, sta delovala v času renesanse. Obadva sta svoja proučevanja oziroma eksperimentiranje s proporcijami tudi opisala v raznih delih, Dürer v svojem delu *Štiri knjige o človeških*

¹³ Albrecht Dürer (1471–1528) je bil slikar in grafični umetnik, splošno priznan kot največji nemški renesančni umetnik.

proporcijah¹⁴ Leonardo pa v *Divina proportione*, ki jo je napisal Pacioli. Pri ilustracijah obeh avtorjev je edina večja opazna razlika med proporcijami obraza (Kimberly, 2001).

V sodobni umetnosti so uporabe zlatega reza očitnejše in povezave z njim so zavestne in namerne. Če pogledamo Sliko 20, *Untitled*¹⁵ (1988), lahko opazimo da je umetniško delo pravzaprav prikaz zlate spirale:



Slika 20: Untitled

Posamentier, A. S. (2007). *The fabulous Fibonacci numbers*. Prometheus Books. Stran 266.

Zatorej je glavna in najopaznejša razlika med uporabo zlatega reza v sodobni umetnosti in starejših delih ta, da je dandanes zlati rez dobro raziskan in poznan koncept in ga zato avtorji zavestno vključujejo v svoja dela, med tem ko pa lahko pri starejših delih samo predvidevamo, če je bila uporaba zlatega rezu zavestna odločitev ali ne.

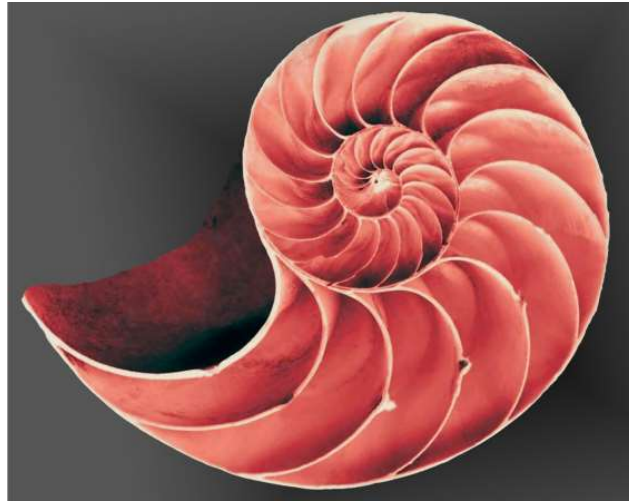
5.3 Narava

Pogosto naletimo na prepričanje, da se zlati rez pogosto pojavlja v naravi in sicer v obliki števila razporeditve cvetov, v oblikah spiral školjk ter razporeditvi sončničnih semen. V naravi se najmočneje odraža povezanost med zlatim rezom in Fibonaccijevim zaporedjem, saj dva od treh primerov, ki smo jih našli zgoraj, implementirata Fibonaccijevo zaporedje, vendar niso vsi našti primeri pravilni.

Kot je že bilo ugotovljeno (Naini, 2024) je dejstvo, da se zlata spirala nahaja v spiralah školjk, napačno. Domnevno, in najbolj pogosto tudi demonstrirano, naj bi bila zlata spirala prisotna pri vrsti *Nautilus pompilius*, ki je članica družine hobotnic (glej Sliko 21).

¹⁴ *Four Books on Human Proportion* (1528) podrobno obravnava idealne proporcije človeškega telesa. Gre za eno prvih sistematičnih raziskav proporcij v evropski umetnosti ter vključuje Dürerjeve risbe, študije anatomije in opazovanja človeških oblik.

¹⁵ *Untitled* (1988), Hreinn Friðfinnsson, konceptualna umetnost, uporaba naravnih materialov, fotografija, svetloba in senca



Slika 21: Lupina *Nautilus pompilius*

Naini, F.B. (2024) *The golden ratio—dispelling the myth*. Maxillofac Plast Reconstr Surg 46, številka 2.

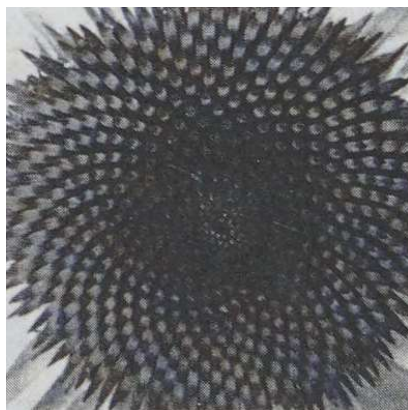
Vendar so meritve več sto takšnih lupin pokazale, da je razmerje sprejemljivo in veliko bližje logaritemski spirali¹⁶, kot pa zlati spirali.

O spiralah na lupini *Nautilus pompilius* je zapisal tudi Falbo (2005) in sicer je dejal:

Vsakdo, ki ima dostop do takšne školjke, lahko takoj opazi, da je razmerje nekje okoli 4 proti 3. Leta 1999 sem izmeril školjke vrste *Nautilus pompilius*, kamnite nautiluse ... meritve so bile opravljene do najbližjega milimetra, kar pomeni, da imajo napake ± 1 mm. Razmerja so se gibala od 1.24 do 1.43, povprečje pa je bilo 1.33, ne pa ϕ (ki je približno 1.618). Ob upoštevanju Markowskyjevega dovoljenja $\pm 2\%$ za ϕ , torej je lahko vrednost tako majhna kot 1.59, vidimo, da je 1.33 precej oddaljena od te razširjene vrednosti ϕ (Falbo, 2005, stran 127).

Naslednji primer, ki si ga bomo ogledali je primer razporeditve sončničnih semen. Predvideva se, da je pogosta prisotnost Fibonaccijevih števil pri razporeditvi listov (ali semen), posledica tega, da je takšna razporeditev najboljša saj omogoča najboljšo izpostavljenost svetlobi za vsak posamezen list (seme), kot prikazuje Slika 22 (Booyesen, 2024).

¹⁶ Logaritemska spirala, enakokotna spirala ali rastna spirala je spiralna krivulja, ki se pogosto pojavlja v naravi. Prvi jo je opisal Albrecht Dürer (1525) in jo poimenoval "večna črta".

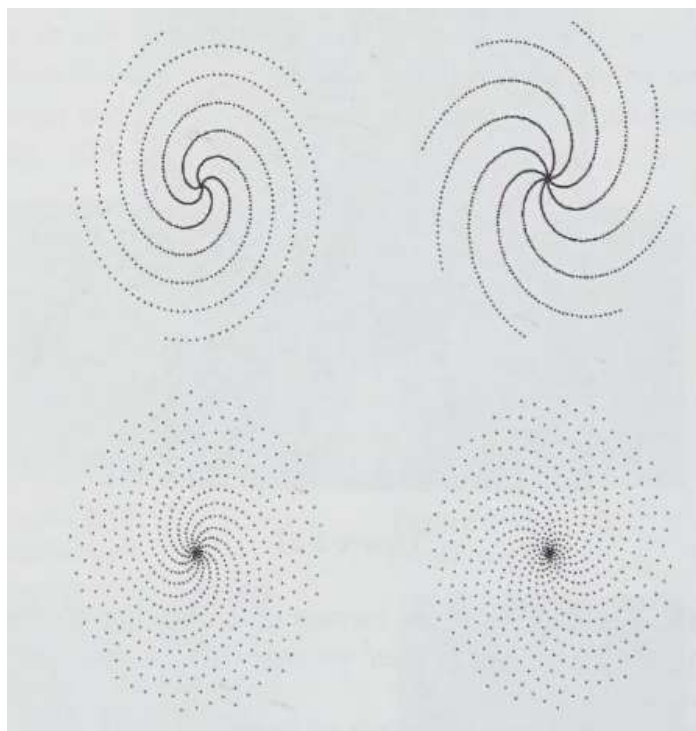


Slika 22: Razporeditev semen v sončnici

Posamentier, A. S. (2007). *The fabulous Fibonacci numbers*. Prometheus Books. Stran 68.

V primeru semen pri sončnici velja, da starejša, kot je sončnica, več spiral bo imela. Posledično je število spiral Fibonaccijevo število, kot opiše Posamentier (2005):

Razlog za to se zdi, da ta razporeditev tvori optimalno pakiranje semen, tako da, ne glede na velikost semenskega območja, pri čemer so vsa semena enake velikosti, so ta enakomerno razporejena v vsakem trenutku; to pomeni, da ni gneče v središču in da ni preveč prazno ob robovih. To "vidimo" kot spirale, kar skoraj vedno vodi v zaporedne Fibonacci številke (Posamentier, 2005, stran 70).



Slika 23: Umetne (Fibonaccijeve) spirale, ki jih najdemo v rastlinah

Podobno kot pri številu spiral v sredini sončnice, je število listov velikokrat (a ne vedno!) tudi Fibonaccijevo število. Nekatere vrste, kot npr. zlatica, imajo strogo določeno število cvetov, medtem ko nekatere druge vrste, npr. marjetice, rahlo nihajo, vendar tudi za slednje velja, da je povprečno število listov enako enemu izmed Fibonaccijevih števil.

- 3 cvetni listi: iris, snežna roža, lilija (nekateri lilije imajo 6 cvetnih listov, ki so oblikovani iz dveh setov po 3)
- 5 cvetnih listov: maslenica, orlica, divja vrtnica, nageljni, jabolčni cvetovi, hibiskus, šentjanževka
- 8 cvetnih listov: pernatolistna kozmeja, lepe očke
- 13 cvetnih listov: koruzna marjetica, nekatere ostale marjetice
- 21 cvetnih listov: nebina, radič, navadna sončnica
- 34 cvetnih listov: bolhač in druge marjetice
- 55, 89 cvetnih listov: astre in druge vrste nebinovk (družina Asteraceae)

To je le nekaj primerov rastlin in njihovega števila cvetov ki je enako kot eno izmed Fibonaccijevih števil (povzeto po Posamentier, 2007).

5.4 Zlati rez v vsakdanjem življenju

Najpomembnejši element današnjega sveta je na žalost denar. Kroji naš svet, pa naj nam bo to všeč ali pa ne. Zatorej je pomembno, da je denar tudi estetsko privlačen. V antiki se je kot univerzalna kovina, ki so jo uporabljali za denar, uveljavilo zlato¹⁷. Bilo je redko, kar mu je dajalo vrednost. Zlato ne rjavi ali oksidira, zato je predstavljalo simbol večnosti. A vendar je prava vrednost iz estetskega vidika. Njegov lesk in rumenkasto barvo so pogosto povezovali s božanstvo, zato je pridobilo še večjo simbolično moč.

Podobno kot zlato, imajo tudi današnji načini poslovanja določene estetske elemente, naj si bo to barva ali simboli, ki jih lahko najdemo na današnjih bankovcih ali bančnih karticah.

¹⁷ V antiki se je zlato kot univerzalna kovina uveljavilo predvsem v obliki kovancev. Prvi kovanci so bili kovani v današnji Turčiji okoli 7. stoletja pr. n. št., kjer so začeli uporabljati naravno zlitino zlata in srebra. Kasneje so v različnih delih sveta kovali kovance iz čistih zlatih in srebrnih zlitin, zlato pa je postalo simbol bogastva in stabilnosti. Zato se je zlato v antiki res uveljavilo kot univerzalno plačilno sredstvo, čeprav so včasih uporabljali tudi srebro in druge kovine.



Slika 24: Bankovec za 20 evrov, osebni arhiv

Starejša oblika trgovanja, torej trgovanje s papirnatim denarjem, ima sledeče mere (opazujemo Tabela 1):

Tabela 1: Tabela velikosti bankovcev

Vrednost (€)	Širina (cm)	Višina (cm)
5	12,0	6,2
10	12,7	6,7
20	13,3	7,2
50	14,0	7,7
100	14,7	8,2
200	15,3	8,2
500	16,0	8,2

Lastno delo avtorja, tabela ustvarjena s pomočjo spletnega orodja Chat GPT

Če širino in višino teh bankovcev delimo, ugotovimo, da so vrednosti precej oddaljene od zlatega reza, saj niti približno niso dovolj blizu, da bi lahko upravičeno dejali, da je razmerje zlatega reza prisotno (Glej Tabela 2) kljub upoštevanju Markowskyjevega dovoljenja $\pm 2\%$ za ϕ , torej je lahko vrednost tako majhna kot $1'59$ ali tako velika kot $1'65$.

Tabela 2: Tabela razmerja med širino in velikostjo bankovcev

Vrednost (€)	Razmerje (Širina:Višina)
5	1,94:1
10	1,90:1
20	1,85:1
50	1,82:1
100	1,79:1
200	1,87:1
500	1,95:1

Lastno delo avtorja, tabela ustvarjena s pomočjo spletnega orodja Chat GPT

Vendar prehajamo v dobo nadvlade tehnologije in vedno bolj je prisotno elektronsko poslovanje z uporabo bančnih kartic. Vrednosti širine in višine bančne kartice na Sliki 25 so 8,7 cm¹⁸ in 5,5 cm, kar nam poda razmerje približno 1,58, kar je zelo blizu dopuščene vrednosti za zlati rez, ko upoštevamo Markowskyjevo dovoljenje.



Slika 25: Bančna kartica

Osebni arhiv

Kot smo že omenili v nalogi, je risba *Razmerje človeškega telesa po Vitruvijju* Leonarda da Vincija narisana tako, da so človeški deli v popolnem razmerju, in sicer razmerju zlatega rezu. To smo se tudi odločili preveriti in smo opravili anketo o proporcijah človeškega telesa, ki jo je rešilo 10 dijakov starih med 17 in 18 let.

¹⁸ Vrednost širine, ki je prikazana na Sliki 24, je zavajajoča zaradi zornega kota fotografije.

Z anketo smo pridobili podatke o dolžinah sredinca, dlani, podlakti ter dolžine celotne roke. Meritve so bile opravljene na milimeter natančno. Zanimalo nas je razmerje med dolžino sredinca ter dlani in pa razmerje med dolžino podlakti ter celotne roke.

V Tabeli 3 so predstavljeni podatki dolžine sredinca ter dlani, v Tabeli 4 pa podatki o dolžini podlakti ter celotne roke ter razmerje med določenima opazovanima deloma telesa. Predstavljene so tudi povprečne vrednosti, in sicer v zadnji vrstici vsake tabele.

Najprej si oglejmo podatke predstavljene v Tabeli 3.

Tabela 3: Podatki ankete

Dolžina dlani (mm)	Dolžina sredinca (mm)	Razmerje dlan/sredinec
15,0	7,0	2,1429
19,8	8,7	2,2759
12,2	7,8	1,5641
17,0	7,5	2,2667
19,5	8,0	2,4375
18,8	8,2	2,2927
14,2	7,3	1,9452
16,1	8,4	1,9167
16,6	8,6	1,9302
17,8	9,3	1,9140
16,7	8,1	2,0686

Lastno delo avtorja, tabela ustvarjena s pomočjo spletnega orodja Chat GPT

Kot opazimo, se razmerje med dolžino sredinca ter dlani giblje precej visoko, saj je povprečno razmerje 2,07, s viškom pri 2,43 in najnižjo vrednostjo pri 1,56. To razmerje torej nikakor ne ustreza razmerju zlatega reza, saj je preveč oddaljeno od razmerja zlatega reza za kakršnikoli razmislek o njegovi prisotnosti.

V Tabeli 4 so nato predstavljeni še podatki o dolžini podlakti in celotne roke, ter njuno razmerje.

Tabela 4: Podatki ankete

Dolžina roke (cm)	Dolžina podlakti (cm)	Razmerje
50,0	22,0	2,2727
81,9	46,2	1,7727
78,4	49,4	1,5870
75,0	45,0	1,6667
75,6	47,8	1,5816
80,4	54,8	1,4672
72,3	38,9	1,8586
77,1	51,2	1,5059
80,2	44,9	1,7862
65,3	33,7	1,9377
73,6	43,4	1,7436

Lastno delo avtorja, tabela ustvarjena s pomočjo spletnega orodja Chat GPT

Kot opazimo, je tukaj razmerje dosti bližje zlatemu rezu s povprečno vrednostjo 1`74, z viškom 2`27 in najnižjo vrednostjo 1`47. Kljub upoštevanju Markowskyjevega dovoljenja $\pm 2\%$ za ϕ ¹⁹ dobljena vrednost preveč odstopa, da bi lahko govorili o prisotnosti razmerja zlatega reza.

Da bi to dodatno preverili, smo se odločili analizirati razmerja lastnih teles in ugotoviti, ali nam meritve podajo enake rezultate. Ponovno so opazovali razmerja med dolžino roke in podlakti ter dolžino dlani in sredinca.

Dolžina roke je 72cm, dolžina podlakti pa 44cm kar nam poda razmerje 1`64 kar je bližje vrednosti zlatega reza kot večina prej pridobljenih vrednosti vendar ne dovolj, da bi lahko upravičeno dejali da gre za zlati rez. Ravno nasprotno pa nam razmerje med dolžino dlani (18`5cm) in dolžino sredinca (8cm) poda razmerje s vrednostjo 2`3, kar je bistveno preveč oddaljeno.

Opazovali smo tudi razmerje med višino (181cm) ter višino od tal do popka (106cm), kar nam poda razmerje 1`71, ki ponovno ne ustreza vrednosti zlatega reza.

Ugotovili smo, da razmerje zlatega reza pri proporcijah človeškega telesa ni prisotno, vendar se moramo vseeno zavedati, da je bila opazovana skupina relativno majhna, zato lahko podatki odstopajo od dejanskega povprečja razmerja opazovanih delov telesa.

¹⁹ Vrednost zlatega reza je lahko tako majhna kot 1`59 ali tako velika kot 1`65.

5.5 Ugotovitve

Ob pregledu izbrane literature, analiziranju že zapisanih in ugotovljenih podatkov ter s pomočjo lastnega raziskovalnega dela smo prišli do sledeče ugotovitve: zlati rez je prisoten tako v naravi kot tudi v delu človeških rok, arhitekturi ter umetnosti.

Vendar je njegova univerzalna prisotnost pogojno prisotna v naravi, in sicer v nekaj primerih, ki smo jih prej predstavili, npr. številu cvetov, število spiral v sončnici in mnogih drugih. Tudi tukaj prihaja do izjem, še več pa je elementov narave, ki se sploh ne ravna po njegovem principu oziroma niso nikakor povezani z njim, kot smo predstavili tudi pri proporcijah delov telesa.

Njegova univerzalnost pa začne močno pešati pri delu človeških rok. V umetnosti je vedno pogosteje upodobljen zaradi zlatega reza (oziroma zlate spirale) samega, kot pa zaradi njegovega usmerjanja pogleda, kakor nam je povedala naša profesorica likovne umetnosti. Veliko je primerov starejše umetnosti, kjer bi naj bili elementi zlatega reza prisotni, vendar je zelo malo zanesljivih in dokumentiranih primerov uporabe le tega.

Vsi temelji univerzalnosti se navidezno podrejo pri arhitekturi. Čeprav je prisoten v Partenonu in Keopsovi piramidi, kot smo v nalogi predstavili, pa ni dokazov o poznavanju zlatega reza v času njune gradnje. Prav tako je njegova uporaba v modernih zgradbah, kot je na primer stavba Združenih narodov, dvomljiva, saj ni dokazov o njegovi namerni uporabi.

6. ZAKLJUČEK

Zlati rez je prisoten v naših življenjih, v svetu v katerem živimo. Ima trdno matematično podlago, kar smo tudi predstavili v svojem poglavju. Vendar je njegova vloga, kot elementa estetike, na kulturnem področju precenjena.

Čeprav so njegovi elementi prisotni v arhitekturi in naravi, za prvo ni nobenih dokazov poznavanja zlatega reza, torej je posledično naključno vpeljan, in narava je uporabljala njegove elemente dolgo preden smo ljudje odkrili pojem zlatega reza. Zatorej se moremo vprašati ali smo zlati rez res iznašli, ali pa smo ga le odkrili. V moderni umetnosti in arhitekturi se zlati rez uporablja bolj zavestno ter očitno, vendar pogosto zaradi predvidevanja, da bi naj bil estetsko privlačen. Njegova vloga v našem svetu je precenjena in temelji zgolj na splošnem in napačnem prepričanju, da je zares nekaj pomembnega v svetu lepote in estetike.

Namen te raziskovalne naloge je bil približati dijakom predmet matematike skozi nekaj, kjer ni očitne povezave s njo samo, torej skozi naravo. Vse pre pogosto je matematika dijakom le nujno zlo, vendar v sebi skriva prečudovit svet zakonitosti in pravil, s katerimi kroji svet, kakršnega poznamo.

7. VIRI IN LITERATURA

7.1 Viri in literatura

- Akhtaruzzaman, M. (2011). *Geometrical Substantiation of Phi, the Golden Ratio and the Baroque of Nature, Architecture, Design and Engineering*. International Journal of Arts, 16-18. DOI: 10.5923/j.arts.20110101.01. Pridobljeno 22. 1. 2025
- Biščak, K. (2013). *Fibonaccijeva števila in zlati rez v umetnosti : magistrsko delo* [Magistrsko delo, K. Biščak]. Repozitorij Univerze na Primorskem. http://www.famnit.upr.si/sl/izobrazevanje/zakljucna_dela/view/91 Pridobljeno 26. 1. 2025
- Booyesen, T. (2024). *Fibonacci Sequences with Some Applications and a Historical Background DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS*, 24. DOI: [10.13140/RG.2.2.31436.63361](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.31436.63361) Pridobljeno 22. 1. 2025
- Canady, B. (26. 7. 2024). *Do You Know Why 80/20 Works? (No, You Don't. Nobody Does.)*. billcanady.com. <https://billcanady.com/do-you-know-why-80-20-works-no-you-dont-nobody-does/> (Datum citiranja: 20.49 22.11.2024)
- Duan, J.-S. (20.12.2019). *Shrinkage points of golden rectangle, Fibonacci spirals, and golden spirals*. Mathematical Problems in Engineering, 2019, 1-4. <https://doi.org/10.1155/2019/3149602>
- Eckardt, W. Von (29. 11. 2024). *Ludwig Mies van der Rohe*. Encyclopedia Britannica. <https://www.britannica.com/biography/Ludwig-Mies-van-der-Rohe> Pridobljeno 26. 1. 2025
- Falbo, C. (2005). *The Golden Ratio—A Contrary Viewpoint*. The College Mathematics Journal. 36. DOI: [10.2307/30044835](https://doi.org/10.2307/30044835).
- Heydenreich, L. Heinrich (25. 1. 2025). *Leonardo da Vinci*. Encyclopedia Britannica. <https://www.britannica.com/biography/Leonardo-da-Vinci> Pridobljeno 26. 1. 2025
- Kimberly E., *Geometry of Design: Studies in Proportion and Composition* (2001; republished, New York: Princeton Architectural Press, 2011).
- Leonardo and Mathematics. (b. d.). <https://monalisa.org/2012/09/12/leonardo-and-mathematics-in-his-paintings/> Pridobljeno 22. 11. 2024
- Lipnik, R. (2006). *Zlati rez* [Seminar, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko], 2-3. <http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2006/ura/lipnik/html/zlati%20rez.pdf> Pridobljeno 10.10.2024
- Marples, C. R. in Williams, P. M. (3. 10. 2022) *The Golden Ratio in Nature: A Tour across Length Scales*. mdpi.com. <https://www.mdpi.com/2073-8994/14/10/2059> (Datum citiranja: 17.29 8.1.2025)
- Maths Unit 24 - Euclidean Geometry: Ratio and Proportion; Stellenbosch University. (b. d.) https://academic.sun.ac.za/mathed/shoma/MATUNIT24_08.htm (Datum citiranja: 13.32 29.11.2024)

- Modernagalerija.hr. (19. 4. 2023). *Kaj je zlati rez in kako se uporablja?*. <https://moderna-galerija.hr/sto-je-zlatni-rez-i-kako-se-koristi/> Pridobljeno 25. 1. 2025
- Naini, F.B. (2024) *The golden ratio—dispelling the myth*. *Maxillofac Plast Reconstr Surg* **46**, številka 2. <https://doi.org/10.1186/s40902-024-00411-2> Pridobljeno 25. 1. 2025
- Posamentier, A. S. (2007). *The fabulous Fibonacci numbers*. Prometheus Books.
- Rubiano Ortigón, G. N., & Jurčič-Zlobec, B. (2016). *Iteracije in fraktali: (s sistemom Mathematica)* (Slovenska izd., 1. natis). Zveza za tehnično kulturo Slovenije.
- Zakošek, V. (2005). *Zlati rez skozi zgodovino* [Seminar, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko], 2-12. http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2005/ura/zakosek/stran/zlati_rez/zlati_rez.pdf Pridobljeno 10.10.2024
- Zeina, A. A. M. A. (2022). *The Golden ratio and its impact on Architectural design*. *International Design Journal*, letnik 12 št. 2, 77-90. DOI: <https://doi.org/10.21608/idj.2022.113126.1031> Pridobljeno 24. 1. 2025

7.2 Slike

- Biščak, K. (2013). *Fibonaccijeva števila in zlati rez v umetnosti : magistrsko delo* [Magistrsko delo, K. Biščak]. Repozitorij Univerze na Primorskem. http://www.famnit.upr.si/sl/izobrazevanje/zakljucna_dela/view/91
- Duan, J.-S. (2019). *Shrinkage point of golden rectangle* [Slika]. *Mathematical Problems in Engineering*. <https://doi.org/10.1155/2019/3149602>
- GeoGebra Team. (2025). *GeoGebra* (različica 6.0) [Programska oprema]. <https://www.geogebra.org/>
- Kimberly E., *Geometry of Design: Studies in Proportion and Composition* (2001; republished, New York: Princeton Architectural Press, 2011).
- Osterkamp, P. (2014). *Golden Parthenon* [Slika]. <https://peggyosterkamp.com/wp-content/uploads/2014/04/golden-parthenon.jpg>
- Wikipedia. (b.d.). *Evklidova definicija* [Slika]. Wikipedia. https://sl.wikipedia.org/wiki/Zlati_rez
- Wikipedia. (b.d.). *Fibonaccijevo število* [Slika]. Wikipedia. https://sl.wikipedia.org/wiki/Fibonaccijevo_%C5%A1tevilico
- Wikipedia. (b.d.). *Klasična konstrukcija zlatega reza na daljici* [Slika]. Wikipedia. https://sl.wikipedia.org/wiki/Zlati_rez

7.3 Tabele

- OpenAI. (2025). *ChatGPT* [Large language model]. <https://chatgpt.com>