

59. srečanje mladih raziskovalcev Sloveije 2025

UPORABA TOPOLOŠKIH METOD V KOMBINATORIKI

Raziskovalno področje: Matematika ali logika

Raziskovalna naloga



Slika 1: Logo šole

Avtorja: Tomaž Koželj, Bor Vran-Benkovič

Šola: II. gimnazija Maribor

Mentor: Mateja Fošnarič

Maribor, april 2025

1 Kazalo

Kazalo

1	Kazalo	1
2	POVZETEK	3
3	SUMMARY	3
4	ZAHVALA	4
5	UVOD	5
5.1	Uvodne misli	5
5.2	Raziskovalno vprašanje in namen	5
6	METODOLOGIJA DELA	6
7	TOPOLOGIJA	7
8	PROBLEM DELJENJA	8
8.1	Problem delitve ogrlice	8
8.1.1	Izrek: Borsuk-Ulam	9
8.1.2	Zvezna ogrlica	11
8.1.3	Dokaz diskretne različice	12
8.1.4	Možne razširitve	13
8.2	Izrek: Ham-sandwich (Izrek o sendviču)	15
8.2.1	Uporabe izreka	17
9	PREVOJ BORSUK-ULAMA V KOMBINATORIČNO OKOLJE	18
9.1	Tuckerjeva lema	18
9.1.1	Tuckerjeva lema in povezava z Borsuk-Ulamom	19
9.2	Brouwerjev izrek o fiksnih (negibnih) točkah	22
9.3	Kombinatorna igra Hex	23
9.3.1	Hexov izrek	24
9.4	Spernerjeva lema	25
9.4.1	Opis leme	26
9.4.2	Povezava med Spernerjevo lemo, Brouwerjevim izrekom in Tuckerjevo lemo	27
9.4.3	Spernerjeva lema in deljenje najemnine	28
10	UVOD V TEORIJO GRAFOV	29
10.1	Osnovne definicije	29
10.2	Kromatično število in barvanje grafov	29
10.2.1	Posebni primeri kromatičnega števila	30
10.2.2	Pomembni tipi grafov	30

11 KNESERJEVI GRAFI	31
11.1 Definicija Kneserjevega grafa	31
11.1.1 Osnovne lastnosti	32
11.1.2 Kneserjev graf $KG(5, 2)$	34
11.1.3 Kneserjev graf $KG(7, 3)$	34
11.2 Kneserjeva domneva, dokaz Lovásza in Greena	34
12 MYCIELSKIJEVI GRAFI	36
12.1 Definicija Mycielskijeve konstrukcije grafa	36
12.2 Sklep o grafih	36
13 RADONOV IZREK	37
13.1 Topološki Radonov izrek in povezava z Borsuk–Ulamovim izrekom	38
13.2 Hellyjev izrek	38
14 TVERBERGOV IZREK	39
14.0.1 Naloga: Tverbergov izrek	39
15 RAZPRAVA IN ZAKLJUČKI	41
16 LITERATURA	43
17 Viri slik	45
Priloga 1	47
Priloga 2	48

2 POVZETEK

Raziskovalna naloga preučuje uporabo topoloških metod pri reševanju kombinatoričnih problemov, pri čemer se osredotoča na Borsuk-Ulamov izrek kot osrednji izrek, iz katerega izvirajo številne zanimive aplikacije, posplošitve in alternativne derivacije. Preko Tuckerjevega in Spernerjevega izreka raziskujemo diskretne vidike topologije, ki se naravno povezujejo s teorijo grafov, kot glavni dragulj področja o grafih pa predstavimo Kneserjevo domnevo. Za konec obravnavamo Tverbergov izrek, ki opisuje problem umeščanja točk v skupine. Naloga poudarja aplikativnost teh rezultatov v različnih matematičnih disciplinah, pri čemer izpostavlja njihovo izvirnost in uporabnost. Skozi celotno obravnavo ohranja jasno rdečo nit, saj se vse obravnavane teme neposredno ali posredno navezujejo na Borsuk-Ulamov izrek, okoli katerega se razvijajo mnoge zanimive matematične strukture in rešitve.

3 SUMMARY

The research paper examines the use of topological methods in solving combinatorial problems, focusing on the Borsuk–Ulam theorem as the central theorem, from which many interesting applications, generalizations, and alternative derivations arise. Through Tucker’s and Sperner’s theorems, we explore the discrete aspects of topology, which naturally connect to graph theory, and as the main jewel of the field of graphs, we present Kneser’s conjecture. Finally, we address Tverberg’s theorem, which describes the problem of placing points into groups. The paper emphasizes the applicability of these results in various mathematical disciplines, highlighting their originality and usefulness. Throughout the entire discussion, a clear red thread is maintained, as all the treated topics are directly or indirectly connected to the Borsuk–Ulam theorem, around which many interesting mathematical structures and solutions develop.

4 ZAHVALA

Zahvaljujema se vsem, ki so na kakršen koli način prispevali k nastanku te raziskovalne naloge. Posebna zahvala gre mentorici Mateji Fošnarič za usmerjanje in strokovno pomoč ter vsem, ki so s svojimi nasveti in spodbudami pripomogli k izboljšanju raziskave. Hvaležna sva tudi za dostop do virov in literature, ki so omogočili poglobljeno obravnavo teme. Vaša podpora je bila ključna.

5 UVOD

5.1 Uvodne misli

V tej nalogi vas bomo popeljali skozi zanimivo matematično potovanje, kjer se bomo dotaknili dveh vej matematike – diskretne kombinatorike in zvezne topologije. Na prvi pogled gre za povsem ločeni področji, a med raziskovanjem smo ugotovili, da se na različne načine prav tečno prepletata. S tem smo želeli prikazati eno izmed tistih edinstvenih oblik elegance, ki jih premore le matematika.

Začetna motivacija za raziskovalno nalogo je prišla med pripravami na matematično olimpijado, kjer smo naleteli na problem, ki nas je spodbudil k razmišljanju o povezavi med zveznimi metodami in diskretnimi vprašanji. Že od prej smo poznali klasičen problem delitve ogrlice, ki je lep primer kombinatoričnega problema, ki ga lahko elegantno rešimo s pomočjo topološkega pristopa. Tako nas je začelo zanimati, kako splošne so topološke metode, na katerih kombinatoričnih problemih delujejo, in kako učinkovite so v praksi.

Najprej bomo zato razložili nekaj osnovnih pojmov iz topologije, ki jih potrebujemo za razumevanje nadaljevanja. Nato bomo podrobneje predstavili Borsuk–Ulamov izrek in ga uporabili za dokaz delitve ogrlice. Nadaljevali bomo z izrekom o sendviču, ki pokaže, kako lahko topološki pristop razdeli prostor na pravične dele. V naslednjih poglavjih se bomo posvetili diskretnim različicam teh izrekov – Tuckerjevi lemi, Spernerjevi lemi in Brouwerjevemu izreku – ter prikazali, kako se iz njih da izpeljati zanimive kombinatorične rezultate in kako se pravzaprav med seboj vsi povezujejo. Na koncu se bomo dotaknili še teorije grafov in pokazali, kako so topološke metode pomagale pri dokazovanju znanega rezultata o Kneserjevem grafu, ter analizirali še nekaj dodatnih izrekov, kot sta Radonov in Tverbergov.

Kot glavni vir smo uporabili knjigo *Using the Borsuk–Ulam Theorem* (J. Matoušek, 2008)

5.2 Raziskovalno vprašanje in namen

Problem, ki ga raziskujemo, je uporaba topoloških metod pri reševanju kombinatoričnih problemov ter analiza njihove uporabnosti pri matematičnih dokazih. Čeprav sta kombinatorika in topologija na prvi pogled ločeni veji matematike, želimo prikazati, kako lahko topološki pristopi vodijo do elegantnih in močnih rešitev znanih kombinatoričnih nalog. Osrednje raziskovalno vprašanje, ki smo si ga zastavili, je: Ali in kako topološke metode pomagajo pri reševanju kombinatoričnih problemov?

Pri tem želimo prikazati, kako in do kolikšne mere je mogoče nekatere kombinatorične probleme obravnavati s pomočjo topoloških metod. Raziskali in razložili bomo ključne topološke izreke, kot so Borsuk–Ulamov izrek, izrek o sendviču, Tuckerjeva in Spernerjeva lema, Brouwerjev izrek o fiksni točki ter Radonov in Tverbergov izrek, ter jih uporabili pri reševanju konkretnih kombinatoričnih problemov, kot je problem delitve ogrlice, barvanja grafov in uravnoveženih delitev množic. Poleg tega bomo poskušali predstaviti tudi njihovo širšo uporabnost. Cilj naloge je tudi pokazati, kako se abstraktne matematične teorije povezujejo z resničnimi aplikacijami, zlasti na področju optimizacijskih problemov.

6 METODOLOGIJA DELA

Za izvedbo raziskave smo uporabili kombinacijo analitičnih, primerjalnih in aplikativnih metod, ki omogočajo celovito obravnavo obravnavane tematike.

1. Analiza literature – Pregledali smo obstoječe raziskave, znanstvene članke in učbenike s področja topologije in kombinatorike, da bi razumeli, kako so se topološke metode že uporabljale v matematičnih dokazih.
2. Teoretični matematični dokazi – V okviru raziskave smo rekonstruirali znane matematične dokaze in jih analizirali s pomočjo topoloških metod. Poseben poudarek je bil na povezavi med Borsuk-Ulamovim izrekom, Izrek o sendviču in problemom delitve ogrlice.
3. Primerjalna analiza metod – Primerjali smo klasične kombinatorične metode z topološkimi pristopi pri reševanju matematičnih problemov in ocenili njihovo učinkovitost.
4. Praktične aplikacije in implikacije – Raziskali smo možne aplikacije ugotovitev v širšem kontekstu, npr. v optimizaciji, teoriji iger in analizi podatkov.

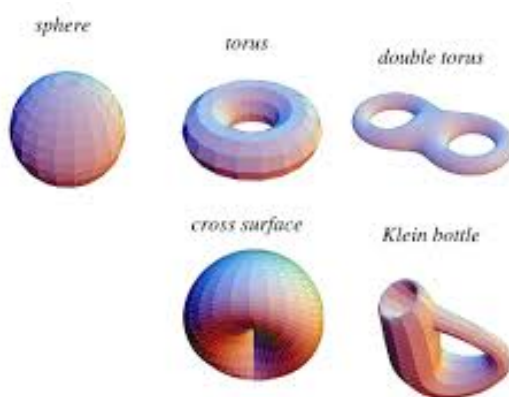
S takšnim metodološkim pristopom smo zagotovili celovito in poglobljeno analizo vpliva topoloških metod na kombinatoriko ter raziskali njihovo uporabnost v širšem matematičnem in znanstvenem kontekstu.

7 TOPOLOGIJA

Topologija je veja matematike, ki preučuje pojave, povezane z zveznostjo preslikav med geometrijskimi objekti in njihovimi osnovnimi značilnostmi. V tej disciplini se raziskujejo lastnosti prostorov in geometrijskih objektov, ki ostanejo nespremenjene ob splošnih, neprekinjenih transformacijah, kot so upogibanje, raztezanje ali stiskanje, vendar brez trganja ali lepljenja. Takšen pristop omogoča, da se osredotočimo na globalne značilnosti matematičnih objektov, ne da bi se preveč obremenjevali z njihovimi natančnimi geometrijskimi merili.

Med temeljne pojme, ki se pojavljajo v topologiji, sodijo koncepti odprtih in zaprtih množic, zveznosti ter preslikav, ki ohranjajo te lastnosti. Skozi študij topologije se razvija ideja, da je mogoče prostor razumeti kot celoto, kjer so nekatere lastnosti in strukture neodvisne od lokalnih sprememb. Ta pogled na prostore je nastal iz vprašanj, ki so prvotno izhajala iz analize in diferencialne geometrije, kjer je bilo potrebno razumeti obnašanje funkcij in krivulj pod kontinuiranimi preslikavami.

Danes topologija prodira v skoraj vsako področje matematike – od algebre in kombinatorike do logike – ter ima zanimivo vlogo tudi v računalništvu. Temeljni koncepti, razviti v topološkem okviru, so postali nepogrešljivo orodje za analizo kompleksnih struktur in prispevajo k globljemu razumevanju matematičnih fenomenov (A. Kuronya, 2010).



Slika 2: Topološke oblike

Tej abstraktni vedi se bomo skušali približati skozi razne probleme in naloge, ki jih bomo v raziskovalni nalogi obravnavali.

8 PROBLEM DELJENJA

8.1 Problem delitve ogrlice

Začeli bomo s klasičnim problemom diskretne matematike, ki pri svoji rešitvi uporablja topološke koncepte. Problem je dokaj preprost in ga je s precej truda za enostavnejše primere mogoče rešiti z algebro in zgolj kombinatorično, za nekoliko zahtevnejše ter razširjene različice pa obstaja le topološka rešitev. V tem delu bomo raziskali osnovni problem bisekcije (razdelitve, razpolovitve) ogrlice, predstavili njegovo formalno definicijo in dokazali, da je vedno mogoče doseči pravično delitev z omejenim številom rezov, neodvisno od dolžine ogrlice.



Slika 3: Delitev ogrlice

Problem delitve ogrlice: Zamislimo si ogrlico, odpeto na obeh koncih, ki jo sestavlja $2n$ dragih kamnov, razporejenih v določenem zaporedju, katerih je k različnih vrst (k barv). Vsaka vrsta i je zastopana natanko $2a_i$ -krat. Zanima nas, ali obstaja določeno število rezov potrebnih, neodvisno od skupnega števila draguljev, ki zadostuje za poljubno število barv k .

Definicija: Bisekcija ogrlice je množica neprekrivajočih se intervalov kamenčkov, katerih unija zajame natanko polovico kamenčkov vsake vrste. Velikost bisekcije je določena s številom rezov, ki oblikujejo te intervale.

Ni se prav težko (s poskušanjem) prepričati, da v primeru dveh barv vedno lahko dosežemo bisekcijo z zgolj dvema rezoma, ne glede na dolžino ogrlice. Zato se poraja vprašanje, ali vedno zadostuje zgolj k rezov? Težava minimalizacije tovrstne bisekcije je tudi pomembna v več matematičnih in inženirskih problemih, denimo načrtovanju večjih integriranih vezij. Problem se v majhnih primerih pri dveh matematično pisnih tatovih pojavi dokaj naravno, kako si lahko tatova pošteno razdelita ukradeno ogrlico, ki ima drage kamne povezane s platinasto žičko? Ker je platina zelo dragocena kamnina, želita narediti čim manj rezov, zato torej ne moreta kar razkosati celotne ogrlice (N. Alon, D. B. West, 1986).

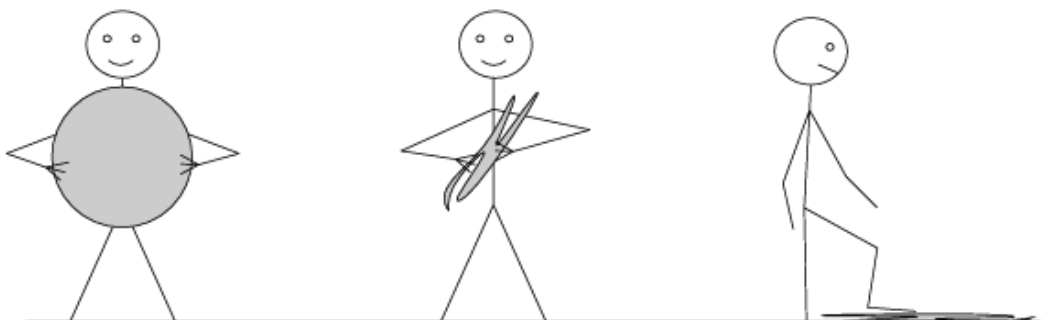
V ekstremnem primeru, ko so kamenčki vsake vrste zbrani v zaporednih blokih, je očitno, da je potrebnih vsaj k rezov – po en za vsako vrsto. Osnovni rezultat, ki ga bomo dokazali, trdi, da vsaka ogrlica s k vrstami kamenčkov vedno omogoča bisekcijo z največ k rezi.

Izrek o deljenju ogrlice: Vsaka odprta ogrlica s k vrstami kamnov se lahko razdeli med dva tatova z uporabo največ rezov, ali drugače za vsako odprto ogrlico s vrstami kamnov obstaja bisekcija velikosti k (N. Alon, D. B. West, 1986).

Za dokaz izreka, vpeljimo sedaj klasičen rezultat algebraične topologije, ki pa ga bomo podali v različnih ekvivalentnih oblikah.

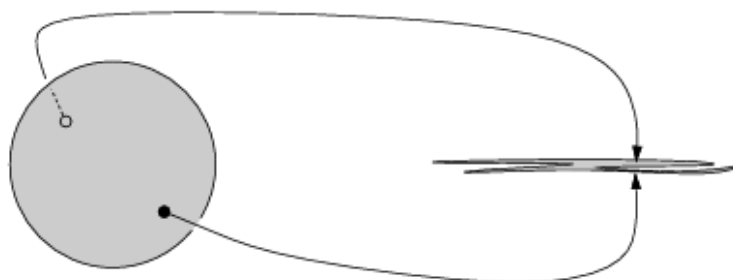
8.1.1 Izrek: Borsuk-Ulam

Skica izreka: Predstavljajmo si napihnjeno žogo, ki jo izpraznimo, tako da postane mehka in sploščena. Nato jo položimo na tla in povaljamo. Kljub vsem deformacijam, upogibom in spremembam oblike izrek Borsuk-Ulam zagotavlja naslednje: na površini te deformirane žoge bomo vedno našli dve točki na nasprotnih straneh, ki imata popolnoma enako vrednost določene lastnosti.



Slika 4: Vizualizacija BU izreka

Torej dve diametralno nasprotni točki ležita druga na drugi.

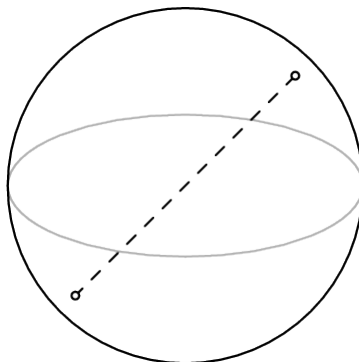


Slika 5: Dve točki

Preden lahko zapišemo izrek, moramo predstaviti nekaj definicij.

Definicija (S^n ali n -sfera): n -dimenzionalna sfera je množica vseh točk v \mathbb{R}^{n+1} , ki so na enaki razdalji (običajno gledamo kar enotsko razdaljo) od izhodišča. Na primer, S^1 je krožnica, S^2 pa površina krogle. Z \mathbb{R}^n označimo n -dimenzionalni Evklidski prostor, ki vsebuje vse urejene n -terke realnih števil. Koordinato točke podamo sledeče: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definicija (antipodni točki): za dano točko x na sferi S^n lahko najdemo njen antipodni par, točko $-x$, kar pomeni, da imata x in $-x$ simetrično lego glede na izhodišče (diametralno nasprotni). Za preslikavo nato rečemo, da je antipodna, če je zvezna in velja za dve antipodni točki sledeč pogoj: $f(-x) = -f(x)$.



Slika 6: Par antipodnih točk

Definicija (B^n n -krogla): n -dimenzionalna krogla je množica vseh točk v \mathbb{R}^n z razdaljo od izhodišča ali izbranega središča manjšo ali enako izbranemu polmeru r , torej

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}.$$

Definicija (meja, ∂B^n): meja množice, na primer množice B^n , je množica točk, ki ležijo na "robu" te množice, v našem primeru na robu krogle, kar je enako množici S^{n-1} .

Definicija (pokritje): za neko množico B rečemo, da je pokrita z družino množic A_1, A_2, \dots, A_{n+1} , če vsak element iz B pripada vsaj eni od teh množic.

Definicija (zaprta in odprta množica): V topologiji rečemo, da je množica F zaprta, če njen komplement $X \setminus F$ (glede na celoten prostor X) predstavlja odprto množico. To pomeni, da množica F vsebuje vse svoje mejne oziroma robne točke. Analogno sledi, da je neka množica U odprta, če je njen komplement zaprta množica, ta množica torej ne vsebuje robnih oziroma mejnih točk. Prav tako pa velja, da za vsako točko $x \in U$ obstaja okolica točke x , ki je v celoti vsebovana v U . To pomeni, da lahko okoli vsake točke v množici U najdemo "majhen prostor", ki je prav tako v U .

Ekvivalentne formulacije:

1. **Formulacija (BU1):** Za vsako zvezno preslikavo $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, obstaja točka $x \in S^n$, tako da $f(x) = f(-x)$.
2. **Formulacija (BU2):** Za vsako antipodno preslikavo preslikavo $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (torej f je zvezna in $f(x) = -f(-x)$ za vse $x \in S^n$), obstaja točka $x \in S^n$, ki zadošča $f(x) = 0$.
3. **Formulacija (BU3):** Ne obstaja antipodna preslikava $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$.
4. **Formulacija (BU4):** Ne obstaja zvezna preslikava $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$, ki je antipodna na meji, oziroma zadošča $f(x) = f(-x)$, za vsak $x \in S^{n-1} = \partial B^n$.

5. **Formulacija (BU5):** Kadarkoli je S^n pokrita z $n + 1$ množicami A_1, A_2, \dots, A_{n+1} , ki so zaprte ali odprte, potem vsaj ena od teh množic vsebuje par antipodalnih točk.

(J. Matoušek, 2008)

Dokaz izreka je nekoliko tehničen zato se sklicujemo na literaturo. Toda sedaj naletimo na težavo, izrek govori o zveznih preslikavah, naš primer pa uporablja diskreten jezik. Problem ogrlice moramo tako preoblikovati do neke “zvezne oblike”(J. Matoušek, 2008).

8.1.2 Zvezna ogrlica

Zvezno ogrlico predstavimo kot funkcijo dodeljevanja barve ali vrednosti, ki ustreza vsaki vrsti kamenčka. Enotski interval, na katerem se nahaja naša zvezna ogrlica je $I = [0, 1]$, vsaki točki intervala pa je dodeljena barva izmed k -tih. Naša bisekcija velikosti d bo določena s točkami:

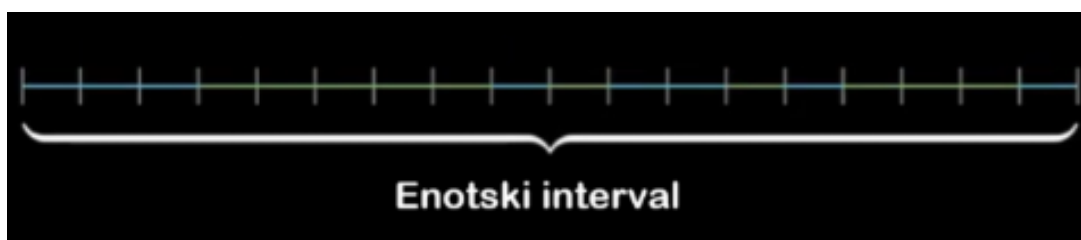
$$0 = z_0 < z_1 < \dots < z_d < z_{d+1} = 1$$

ti pa morajo biti takšni, da vsak od tatov dobi enako količino kamenčkov vsake barve. Sedaj predstavimo nov koncept, ki je ključen za rešitev našega problema.



Slika 7: Enotski interval

Definicija (mera): V matematiki lahko mero razumemo kot neke vrste generalizacijo in formalizacijo geometrijskih izmerkov (npr. dolžina, površina, volumen) in ostalih podobnih konceptov, kot so absolutna vrednost, masa ter verjetnost dogodkov. Takšna definicija zadostuje potrebam raziskovalne naloge, ni pa to formalna definicija, za katero bi potrebovali mnogo drugih konceptov, kot so sigma algebre, zato formalno definicijo opuščamo. (A. Kuronya, 2010)



Slika 8: Zvezna različica na enotskem intervalu

Dokaz zvezne različice:

Z vsako točko $x = (x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \in S^d$ lahko opišemo neko delitev intervala $[0, 1]$ na $d + 1$ delov dolžin $x_1^2, x_2^2, \dots, x_{d+1}^2$. To pomeni, da definiramo reze na mestih:

$$z_i := x_1^2 + \dots + x_i^2, \quad \text{kjer} \quad 0 = z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_d \leq z_{d+1} = 1.$$

Za vsak interval $I_j = [z_{j-1}, z_j]$ določimo predznak $\epsilon_j = \text{sign}(x_j)$. Tako definiramo zvezno funkcijo:

$$g_i(x) := \sum_{j=1}^{d+1} \epsilon_j \cdot \mu_i([z_{j-1}, z_j]).$$

Povedano z besedami, funkcija $g_i(x)$ nam pove količino i -te barve (kamna), dane prvemu tatu, od tega pa je odšteta količina i -te barve, razdeljene drugemu tatu. Zaradi potrebe po merjenju količine barve na poljubnem intervalu I_j vpeljemo mero μ_i , ki temu intervalu dodeli ustrezno realno število. Funkcija:

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_{d+1}(x))$$

je očitno antipodna (je zvezna in velja $g(-x) = -g(x)$ za vse $x \in S^d$), zato po BU2 obstaja točka $x \in S^d$, za katero velja $g(x) = 0$. To pomeni, da ta x določa pošteno delitev \square (N. Alon, D. B. West, 1986, J. Matoušek 2008).

8.1.3 Dokaz diskretne različice

Recimo, da imamo $2a_i$ kamenčkov i -te vrste:

$$n := \sum_{i=1}^k 2a_i.$$

Ogrlico postavimo na interval $[0, 1]$, kjer m -ti kamenček ustreza intervalu

$$\left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n} \right).$$

Definiramo karakteristično funkcijo:

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{če je } m\text{-ti kamenček vrste } i, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Vsaka f_i določa neko mero μ_i , za nek interval $A \subseteq [0, 1]$, $\mu_i(A)$ označuje razmerje kamenčkov vrste i , ki se nahajajo v A , glede na celotno število kamenčkov te vrste. Za tako definirane mere μ_i lahko vedno najdemo pravično bisekcijo, saj se navezujemo na dokaz iz zveznega primera. (Prvi tat dobi intervale s predznakom "+", drugi pa tiste s predznakom "-"). Ta razdelitev, kot smo dokazali, mora biti pravična, vendar se lahko zgodi, da smo nekatere kamenčke razrezali. Da to težavo rešimo, uporabimo postopek žaokroževanja".

Opravimo indukcijo glede na število "necelih" rezov. Če nek rez razdeli kamenček tipa i , potem je ta rez bodisi nepotreben bodisi obstaja še en rez skozi kamen tipa i . V slednjem primeru lahko oba reza premaknemo za tolikšno vrednost stran od kamenčkov, da dobimo dva nova reza, ki odpravita to težavo in ne spreminjata enakomerne razdelitve drugih kamenčkov med tatovoma. \square

Opomba: Kot dodatek navedemo formalno izraženo mero:

$$\mu_i(A) := \frac{n}{2a_i} \int_A f_i(x) dx$$

kjer je $2a_i$ skupno število kroglic barve i , funkcija $f_i(x)$ pa je zgoraj definirana karakteristična funkcija, ki zavzame vrednost 1, če je točka x v intervalu, kjer je kroglica te barve, sicer pa vrednost 0 (N. Alon, D. B. West, 1986, J. Matoušek, 2008).

8.1.4 Možne razširitve

Matematika je orodje, ki velikokrat omogoča naravno razširitev problemov in kot bomo videli v nadaljevanju topologija zelo lepo generalizira problem za "višje dimenzije".

Delitev v drugih razmerjih

V klasičnem problemu delitve ogrlice s k vrstami kamenčkov (v nadaljevanju za lažjo predstavo ponovno asociiramo vrsto z določeno barvo), lahko s k rezi vedno ustvarimo dve disjunktni množici, kjer vsaka vsebuje natančno polovico vsake barve (vrste). Naravno vprašanje, ki se poraja, je, kaj se zgodi, če imamo namesto dveh tatov t tatov? Z drugimi besedami, želimo določiti najmanjše število rezov, označeno kot $\min(t, k)$, ki vedno zadostujejo za oblikovanje t disjunktnih množic, pri čemer vsaka vsebuje natanko $1/t$ vsake barve. Če se vsaka barva pojavlja zvezno ter ni bravnih preskokov, mora biti v vsaki barvi vsaj $t - 1$ rezov, kar pomeni, da velja spodnja meja:

$$\min(t, k) \geq (t - 1)k.$$

S pametno uporabo naše ugotovitve za primer dveh tatov lahko kar s preprosto indukcijo pokažemo, da je ta meja dosegljiva in hkrati tudi najboljša mogoča, kadar je t potenca števila 2.

Lema: Za vsak i velja:

$$\min(2^i, k) = (2^i - 1)k.$$

Dokaz: Dokažimo z indukcijo po i , da velja

$$\min(2^i, k) \leq (2^i - 1)k.$$

Za $i = 1$ to neposredno sledi iz prejšnjega dela. Za vsak $i > 1$ uporabimo indukcijsko predpostavko, ki velja za $i - 1$.

Začnimo deliti ogrlico in uporabimo $(2^{i-1} - 1)k$ rezov, da oblikujemo 2^{i-1} množic intervalov, pri čemer vsaka vsebuje natanko $1/2^{i-1}$ vsake vrste kamenčkov. Nato obravnavamo novo barvanje intervala, ki ga dobimo s postavitvijo teh intervalov skupaj in homotetijo na interval dolžine 1. Z uporabo največ k dodatnih rezov lahko to novo barvanje razdelimo na dva enaka dela. Če prevedemo to nazaj na izvirno barvanje intervala, dodamo največ $k2^{i-1}$ novih rezov. Tako skupaj dobimo največ

$$(2^{i-1} - 1)k + k2^{i-1} = (2^i - 1)k$$

rezov, kar potrjuje željeno trditev (N. Alon, D. B. West, 1986, J. Matoušek, 2008). \square

To pomeni, da če želimo problem posplošiti na primer, kjer imamo več tatov in moramo ogrlico razdeliti na t enakih delov, kjer vsak dobi natanko $1/t$ vsake barve, potrebujemo največ

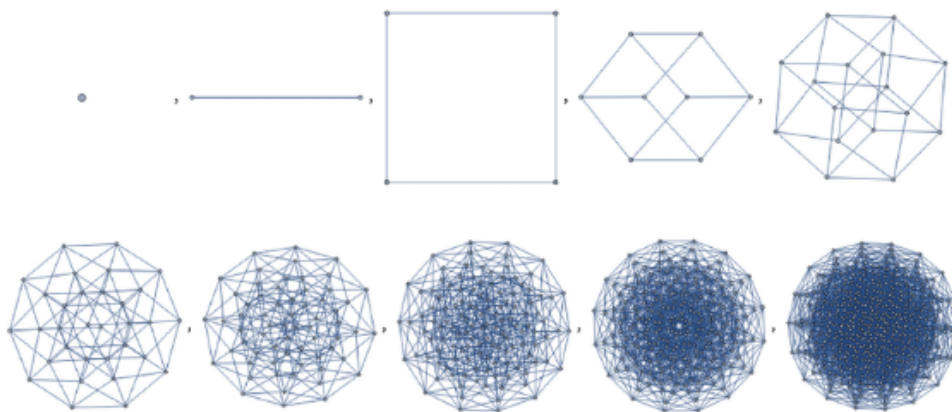
$(t - 1)k$ rezov. Tukaj smo dokazali, da je meja dosegljiva natanko takrat, ko je t potenca števila 2. V resnici pa lahko to posplošimo in dobimo enak rezultat za poljubno število tatov. Dokaz najprej obravnava praštevilske t , nato pa se da precej direktno posplošiti na vsa naravna števila. Sicer pa je precej kompliciram in uporablja napredno topologijo, zato ga bomo upostili.

Topološke omejitve bisekcije v višjih dimenzijah:

Zakaj so topološka orodja najbolj uporabna, bo po naslednjem razmisleku precej očitno. Vrnimo se k primeru z dvema tatovoma. Recimo, da želimo pogledati pravične delitve ravnine, trirazsežnega prostora, štirirazsežnega prostora itd. Kaj lahko takrat rečemo o omejitvi bisekcije? Ali lahko vedno, ne glede na prostorsko razporeditev, zagotovimo neko mejo ali najslabši primer za potrebno število rezov?

Velikokrat so takšne prostorske razširitve težko predstavljljive, zato pogledjmo najprej dvodimenzionalni primer. Ogrlico si lahko predstavljamo kot kvadratno mrežo, kjer kamenčki iste vrste tvorijo območja, ki jih je treba razdeliti. V splošnem primeru pa problem bisekcije preučujemo v n -dimenzionalnem prostoru, kjer so "kamenčki" pravzaprav raznovrstni n -dimenzionalni prostori oziroma podprostori, npr. n -dimenzionalne kocke.

Pri višjih dimenzijah se pokaže presenetljiv fenomen:



Slika 9: Večdimenzijski primeri

- Za liho dimenzijo ($d = 1, 3, 5, \dots$) velja, da lahko vedno izvedemo bisekcijo s k rezi, nekega obarvanega prostora za katerega uporabimo k barv. Dokaz za lihe višje dimenzije je zelo podoben, skoraj identičen dokazu za enodimenzionalen primer.
- Za sodo dimenzijo ($d = 2, 4, 6, \dots$) pa ne moremo narediti analognega razmisleka, kar je dokaj presenetljivo. Ne obstaja splošna metoda z omejenim številom rezov, ki bi vedno zagotavljala bisekcijo. Ta rezultat se lahko pokaže s pametno konstrukcijo.

To pomeni, da za sode dimenzije ni mogoče najti splošnega pravila, ki bi omogočalo vedno enakomerno razdeliti vsako vrsto kamenčkov med dva tatova. Dokaz v svojem bistvu ni ilustrativen prikaz topoloških metod, temveč se bolj zanaša na pametno izbrano konstrukcijo, zato ga bomo tukaj tudi opustili. (N. Alon, D. B. West, 1986)

8.2 Izrek: Ham-sandwich (Izrek o sendviču)

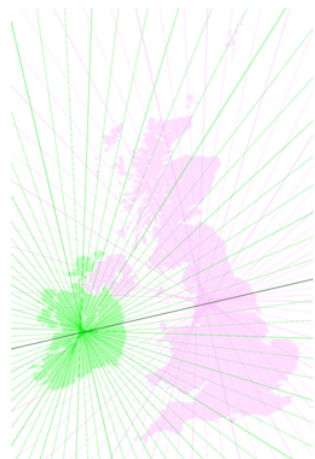
Na matematični gimnaziji sta dva profesorja Jurij in Jožef, ki sta bila znana po svojih briljantnih matematičnih idejah, a tudi po tem, da sta bila vedno neizmerno lačna. Nekega dne, ko sta skupaj pripravljala predavanje, sta se odločila, da si naredita malico. Na mizi sta imela kos kruha, rezino sira in nekaj pršuta – popoln sendvič! A pojavila se je nova težava, kako si lahko enakovredno razdelita sendvič? Ker pa sta oba rada reševala probleme, sta se vprašala, kako narediti en sam rez, da bosta oba dobila popolnoma enake (količinsko enake) dele kruha, sira in pršuta?

To morda navidez zveni kot enostaven problem, vendar kaj se zgodi, če imamo opravka z več dimenzijami in več objekti? Kako lahko z enim samim rezom vedno razdelimo več različnih delov prostora na dve enakovredni (to potrebuje nekoliko formalizacije) polovici?

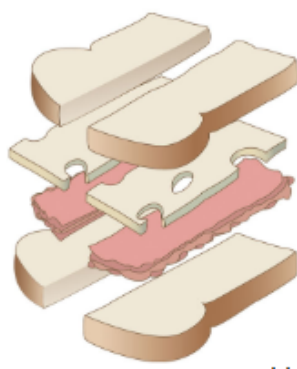
Odgovor na zastavljena vprašanja daje Izrek o sendviču (angl. "Ham sandwich theorem").

Neformalna interpretacija:

"Pri vsakem sendviču, sestavljenemu iz kruha, sira in šunke, obstaja rez, ki hkrati razdeli vse tri sestavine na dva enaka dela."



Slika 10: Izrek o sendviču- delitev na dva dela



Slika 11: Delitev vseh sestavin v sendviču z enim rezom

To je osnovna ideja izreka, ki se razteza v poljubne dimenzije in pravi, da lahko v n -dimenzionalnem prostoru vedno najdemo hiperravnino, ki hkrati razpolavlja n različne množice točk ali snovi. Ta rezultat je presenetljiv, saj ne zahteva posebnih pogojev o obliki ali porazdelitvi snovi – velja vedno! Naša profesorja sta tako rešena, čepravše morata ugotoviti kako ta rez dejansko izgleda. Sedaj pa moramo naš izrek malo bolj formalizirati.

Definicija (hiperravnina): V prostoru \mathbb{R}^n je *hiperravnina* množica vseh točk, ki zadoščajo enačbi oblike:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

kjer realni koeficienti a_1, a_2, \dots, a_n niso vsi enaki nič in $b \in \mathbb{R}$.

Izrek o sendviču (Ham sandwich theorem):

Navajamo dve ekvivalentni verziji, obstaja jih sicer več, nas zanimata le kombinatorični formulaciji:

1. Formulacija: Naj bodo $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ končne množice točk. Potem obstaja hiperravnina h , ki inducira bisekcijo (bisekira, razpolovi) množic A_1, A_2, \dots, A_d . Torej vsaka od (polprostorskih, kar pomeni da obsega pol izvornega prostora) množic vsebuje polovico točk iz originalnih množic, če je število točk liho ena točka leži na hiperravnini.

2. Formulacija: Naj bodo $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ disjunktne končne množice točk v *splošnem položaju* (tako da v nobeni hiperravnini ne leži več kot d točk iz $A_1 \cup \dots \cup A_d$). Potem obstaja hiperravnina h , ki inducira bisekcijo vsake množice A_i , pri čemer velja: - Natanko polovica točk iz A_i leži v vsakem od odprtih polprostorov, ki jih določa h . - Največ ena točka iz A_i leži na hiperravnini h . (J. Matoušek, 2008)

Skica dokaza:

Dokaz izreka temelji na *Borsuk-Ulamovem izreku*, bolj specifično *BU2*. Kako to povežemo z našim sendvičem? Vsaka točka na S^n določa neko hiperravnino, ki uvaja možen rez skozi prostor \mathbb{R}^n . Definiramo funkcijo, ki izmeri razliko med količino "mase" na levi in desni strani reza za vsako od d množic. Ta masa je nekoliko abstrakten pojem, ki bi ga morali zamenjati z izrazom Borelova mera, ampak za lažje razumevanje govorimo v poljudnem jeziku. Nek primer takšne funkcije z maso ali snovjo bi bila v diskretnem primeru razlika vsote točk na levi in desni, kar pa bi predstavljalo oviro pri nadaljevanju. Ta funkcija je antipodna (če obrnemo hiperravnino, se vrednosti spremenijo v nasprotno, če bi delali v diskretnem kontekstu pa ne bi bila zvezna). Borsuk-Ulamov izrek zagotavlja, da obstaja hiperravnina, pri kateri so vse te razlike enake nič – kar pomeni, da vsako "maso" prereže natanko na polovico. Tako pomeni, da se topološki princip (Borsuk-Ulamov izrek) pretvori v geometrijski rezultat, ki velja v vsaki dimenziji (J. Matoušek, 2008).

8.2.1 Uporabe izreka

Izrek se predvsem omenja v abstraktni matematiki, kljub temu pa ima širok spekter uporabe v različnih disciplinah, od računalništva do družbenih ved. Najbolj presenetljiva je morda uporaba pri družbeni geografiji, bolj specifično pri delitvi volilnih okrožij.

"Gerrymandering" je praksa manipuliranja z mejami volilnih okrajev, da bi ena stranka pridobila nepravilno prednost pred drugo. V Združenih državah ameriških zvezne države delijo svoja ozemlja na volilne okraje, pri čemer vsak okraj izvoli enega predstavnika. Vendar pa lahko nekdo z namernim oblikovanjem meja teh okrajev pridobi politično korist, s čimer se izniči pravičnost volilnega procesa. Kot poenostavljen primer si predstavljajmo državo z 80 prebivalci – 60 jih podpira modro stranko, 20 pa rumeno stranko. Država je razdeljena na štiri okraje po 20 ljudi. Morda se zdi pošteno, da se trije okraji nagibajo k modri stranki, eden pa k rumeni, kar bi ustrezalo splošnim preferencam prebivalcev. Vendar pa bi lahko zvit kartograf narisal meje okrajev tako, da bi vsak okraj vseboval 15 volivcev, ki se nagibajo k modri stranki, in 5, ki se nagibajo k rumeni stranki. V tem scenariju bi imel vsak okraj večino modrih volivcev, kar bi pomenilo 100-odstotno predstavništvo modre stranke namesto 75 odstotkov. Pravzaprav bi bilo mogoče izkoristiti tudi zelo majhno razliko (recimo 50,01 odstotkov (celotnega prebivalstva) modrih proti 49,99 rumenih), da bi zagotovili, da vsak okraj podpira izbrano stranko s to razliko. Tudi če bi želeli takšne nepravilne delitve odpraviti, recimo da država prepove oblikovanje okrajev, ki bi bili popačenih, čudnih krivoljastih oblik, namesto tega bi morale meje biti ravne črte, nam Izrek o sendviču še vedno omogoča najti nepravilno delitev. Če pogledamo ponovno naš primer: država z 80 volivci, od katerih 60 podpira modro stranko, 20 pa rumeno stranko. Izrek zagotavlja, da ne glede na njihovo porazdelitev lahko narišemo ravno črto, ki deli volivce na dve območji, pri čemer vsako vsebuje točno polovico modrih volivcev (30) in polovico rumenih volivcev (10). Če vsakemu od teh območij ponovno ponovno razdelimo z ravno črto, bomo dobili manjša območja, ki vsebujejo 15 modrih in 5 rumenih volivcev. Izrek tako ne glede na takšne omejitve ohranja prednost modre stranke. (J. Murtagh, 2024)

V abstraktni matematiki, se izrek povezuje z novim problem, problemom enakomerne delitve (angl. "Equipartition theorems"). V problemih enakomerne delitve Izrek sendviča v dveh dimenzijah zagotavlja, da lahko vsako porazdelitev "mase", snovi, točk" v ravnini razdelimo na štiri enakovredne dele z dvema premicama. Naravno vprašanje je, ali lahko v treh dimenzijah porazdelitev razdelimo na osem enakovrednih delov s tremi ravninami in ali je v splošnem mogoče, da v \mathbb{R}^n z n hiperravninami, ki ustvarijo 2^n enakih delov.

Za $n = 3$ je to mogoče, čeprav je iskanje rezov bolj zapleteno kot v ravnini. Vendar pa v dimenzijah $n \geq 5$ to na splošno ni mogoče. Dokaz tega in razmislek, ki stoji za tem bomo opustili, saj ni bistvo raziskovalne naloge. Ali je podobna delitev v \mathbb{R}^4 mogoča (16 delov s 4 hiperravninami) ostaja odprto vprašanje, saj se je izkazalo, da standardne topološke metode ne delujejo (J. Matoušek, 2008).

Kljub temu, da *Izrek o sendviču* kot tudi *Izrek o deljenju ogrlice* pričata o obstoju neke delitve, nam to v praksi ne pomaga, saj o konkretnem položaju reza (oziroma rezov) ne povesta prav ničesar. Ta problem je pomemben v računalniški geometriji, kjer se išče način, kako razdeliti množico točk v ravnini (ali višjih dimenzijah), kjer so točke označene z dvema barvama (na primer rdeča in modra), tako, da je na vsaki strani neke črte (ali hipravnine v več dimenzijah) enako število rdečih in modrih točk. (J. Matoušek, 2008, "Ham sandwich theorem", b. d.)

9 PREVOJ BORSUK-ULAMA V KOMBINATORIČNO OKOLJE

9.1 Tuckerjeva lema

Za začetek postavimo en problem. *Vojna zvezd* je ena izmed najbolj priljubljenih filmskih franšiz vseh časov – redkokdo ne pozna ogromne, kroglaste vesoljske postaje *Galaktičnega Imperija*, znane kot *Zvezda smrti*. Ta bojna postaja ima več dostopnih točk, med katerimi so *evakuacijski ventili* in *dostopni pristaniški vhodi* (iz vsakega vodi vsaj en jašek v notranje sektorje), strateško razporejeni po njeni površini. Predstavljajmo si, da Uporniško zavezništvo (*Rebel Alliance*) skuša prodreti v notranjost Zvezde smrti skozi nezastražene evakuacijske ventile, medtem ko imperialne sile (*Galactic Empire*) vstopajo skozi dostopne vhode, da bi zaščitile postajo. Vsak evakuacijski ventil ima svoj diametralno nasprotni dostopni vhod, kar pomeni, da ima vsak upornik, ki vstopi, točno določenega stormtrooperja ali imperialnega častnika, ki vstopa na nasprotni strani. Če se vsaj dva jaška sekata, temu prostoru rečemo križišče dostopnih kanalov. Imperator Palpatine ima poseben občutek za red in simetrijo ter močno zaupa trikotnikom, saj so znani kot najmočnejša in najbolj stabilna geometrijska oblika. Zato je ukazal, da se notranja struktura jaškov Zvezde smrti zasnuje po strogo urejenem vzorcu, tako da nastane simetrična triangulacija, kar pomeni, da kroglo razdelimo na tetraedre. Poleg tega uporabljajo tako Uporniki kot Imperij tri vrste plovil:

- Uporniki imajo svoje značilne *X-Winge*, *standardne prestreznike* in *srednje velike križarke*.
- *Imperij* uporablja *TIE lovce*, *naprednejše prestreznike* in *večje bombnike*.

Ko katera koli stran doseže križišče, tam pusti eno izmed svojih enot – bodisi standardno plovilo, bodisi posebno plovilo ali večjo vesoljsko ladjo, kar vpliva na nadzor nad določenim območjem. Če vemo, da so Uporniki in imperijske sile skupaj pokrili vsa križišča, *ali je vedno nujno, da bodo enote iste vrste od Imperija in Upornikov lahko prišle druga do druge le preko uporabe enega jaška?*

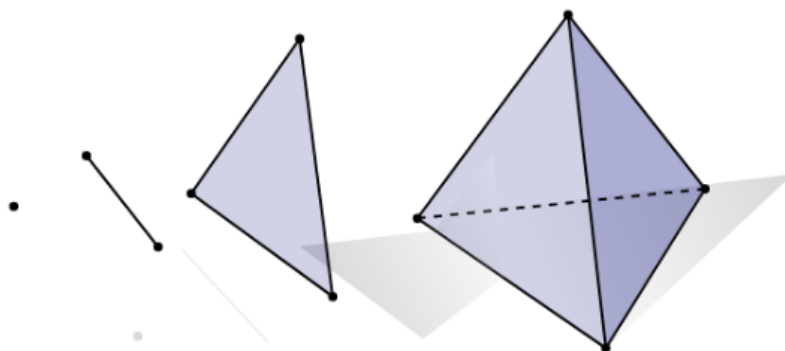


Slika 12: Zvezda smrti

9.1.1 Tuckerjeva lema in povezava z Borsuk-Ulamom

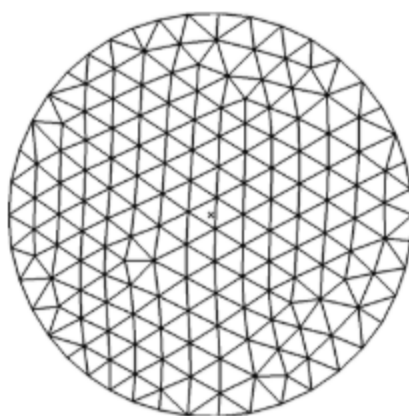
Problem je enostavno predstaviti in prav tako je enostavno narisati sliko, ki bi ga ponazarjala, dokazovanje v čisti kombinatoriki, pa bi se navezovalo na obravnavo velikega števila primerov in večstopenjskih indukcij, čarobno pa ponuja rešitev topologija. Začnimo z nekaj definicij ter z nam že znanim izrekom, iz poglavja o delitvi ogrlice.

Definicija (n -simpleks): Simpleks je generalizacija trikotnika oziroma je različica trikotnika v n -ti dimenziji, takšno ime je dobil, saj je najpreprostejši politop (lik z ravnimi ploskvami) v gledani dimenziji. Primeri: 1-simpleks je daljica, 2-simpleks je trikotnik, 3-simpleks je tetraeder, itd.



Slika 13: n -simpleks

Definicija (triangulacija): Triangulacija n -dimenzionalne krogle je način, kako n -dimenzionalno kroglo (na primer, v drugi dimenziji disk oziroma krog, v tretji kroglja, itd.) razdeliti na manjše gradnike, n -simplekse. Ti se med seboj "prilegajo" tako, da se dotikajo le ob skupnih robovih, ogliščih ali ploskvah in se ne prekrivajo (njihov presek je prazen, razen v posebnih primerih). Če je kroglja zaprta (vsebuje rob), se pri triangulaciji rob krogle (ki je $(n-1)$ -dimenzionalni prostor, na primer obod diska ali površina krogle) tudi razdeli na manjše dele, ki skupaj tvorijo triangulacijo $(n-1)$ -dimenzionalnega sfere.



Slika 14: Preprosta triangulacija

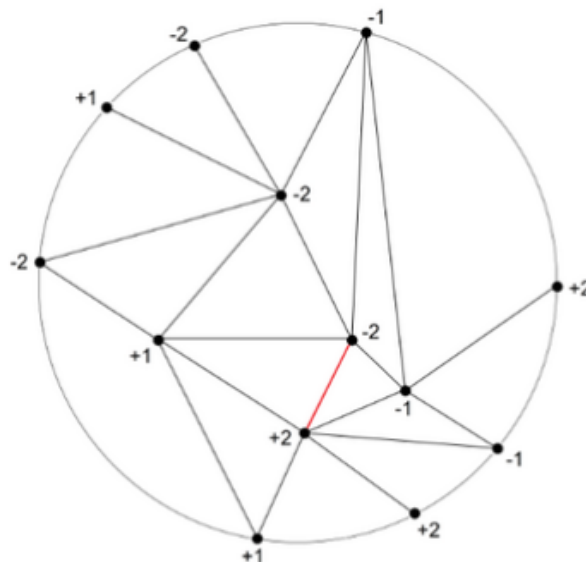
Tuckerjeva lema: Naj bo T triangulacija B^n (n -dimenzionalne krogle), ki je antipodno simetrična na robu (kar pomeni, da če pogledamo podmnožico simpleksov iz triangulacije T , ki leži na robu (z robom mislimo S^{n-1}) in ta vsebuje simpleks σ potem mora vsebovati tudi $-\sigma$). Naj bo:

$$L : V(T) \rightarrow \{+1, -1, +2, -2, \dots, +n, -n\}$$

označevanje oglišč triangulacije T , ki zadošča pogoju $L(-v) = -L(v)$ za vsako oglišče v na robu. Potem v T obstaja povezava (1-simpleks), ki je "komplementarna", njeni dve oglišči sta označeni z nasprotnima številoma (O. R. Musin, 2014).

Tuckerjeva lema je ekvivalentna, diskretna različica Borsuk-Ulamovega izreka. S tem mislimo da je mogoče lemo izpeljati iz izreka in obratno. Povezava pa ni takoj očitna, Tuckerjevo lemo bi morali reformulirati do oblike, ki bi jo lahko povezali z eno izmed različic izreka. Takšna prevedba pa ni tako samoumevna in zahteva veliko drugih ločenih pojmov. Izkaže pa se da Tuckerjeva lema v bistvu trdi, da ne obstaja zvezna preslikava (naj bo to λ), antipodna na meji, ki bi preslikala množico oglišč triangulacije T v neko drugo množico, hkrati pa bi bila pametno izbrana glede na označevanje, ki smo ga uvedli. To drugo množico bi lahko v grobem predstavili kot množico oglišč "ogrinjače" ali "lupine" vseh ploskev, ki omejujejo nek politop (politop, ki spada v posebno družino politopov z določenimi lastnostmi).

Izpeljava Tuckerjeve leme iz $BU4$ je tedaj dokaj neposredna. Dokazujemo s protislovjem, denimo da obstaja prej opisana preslikava λ , potemtako lahko konstruiramo zvezno preslikavo (antipodno na robu), iz celotne B^n v S^{n-1} , tako da vsaki točki znotraj simpleksa triangulacije T dodelimo "obteženo vrednost" glede na to kam se slikajo oglišča tega simpleksa. Takšna preslikava pa bi bila v protislovju z $BU4$, kar dokazuje lemo.



Slika 15: Vizualizacija leme

Definicija (premer simpleksov): Največjo razdaljo med dvema točkama simpleksa imenujemo premer simpleksa. Očitno je tudi, da je ta razdalja enaka razdalji med najbolj oddaljenima ogliščema, zato dokaz tukaj opustimo.

Definicija (kompaktna množica): Množici rečemo da je kompaktna, če ima vsako odprto pokritje končno podpokritje. To pomeni, da če imamo poljubno družino odprtih množic, katerih unija vsebuje dano množico, potem obstaja končna poddružina teh odprtih množic, katere unija še vedno vsebuje celotno množico. Kot dejstvo privzamimo, da je B^n kompaktna množica.

Za dokaz obratne implikacije, ki nas dejansko zanima, predpostavimo, da obstaja zvezna preslikava $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$, ki je antipodna na robu, ter skonstruirajmo T in λ , ki bosta v protislovju s Tuckerjevo lemo. Triangulacijo T lahko izberemo kot katerokoli triangulacijo B^n , ki je antipodna na robu in katere premer simpleksov ne presega δ . Da določimo δ , najprej postavimo: $\varepsilon := \sqrt{\frac{1}{n}}$. Ta izbira zagotavlja, da za vsak $y \in S^{n-1}$ velja $\|y\|_\infty \geq \varepsilon$; torej vsaj ena komponenta y ima absolutno vrednost vsaj ε . (Oznaka $\|\cdot\|_\infty$ pomeni, da gledamo največjo komponento vektorja ali koordinate, glede na nek koordinatni sistem.) Če to ne bi držalo, bi dobili $\sum_{i=1}^n y_i^2 < 1$ kar je protislovje.

Zvezna funkcija na kompaktni množici je enakomerno zvezna (Heine-Cantorov izrek), zato obstaja število $\delta > 0$, tako da če je razdalja med poljubnima točkama $x, x' \in B^n$ manjša ali enaka δ , potem velja:

$$\|f(x) - f(x')\|_\infty < 2\varepsilon.$$

To nam določa δ , ki omejuje premer simpleksov triangulacije T . Sedaj lahko definiramo:

$$\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}.$$

Nato definiramo: $k(v) := \min\{i : |f(v)_i| \geq \varepsilon\}$ in postavimo:

$$\lambda(v) := \begin{cases} +k(v), & \text{če } f(v)_{k(v)} > 0, \\ -k(v), & \text{če } f(v)_{k(v)} < 0. \end{cases}$$

Ker je f na robu ∂B^n antipodna, dobimo, da za vsako oglišče v na robu velja: $\lambda(-v) = -\lambda(v)$. Ta lastnost omogoča uporabo Tuckerjeve leme, ki pravi, da obstajata dva sosednja oglišča v in v' , kjer sta njuni oznaki nasprotni, kar pomeni: $\lambda(v) = -\lambda(v')$. Naj bo $i = \lambda(v) = -\lambda(v')$ in $i > 0$, potem dobimo, da je $f(v)_i \geq \varepsilon$ in $f(v')_i \leq -\varepsilon$. Iz tega sledi: $\|f(x) - f(x')\|_\infty < 2\varepsilon$, to pa privede do protislovja. \square (J. Matoušek, 2008).

Rešitev uvodnega problema je sedaj očitna, za vsak par vrst plovil izberemo število od 1 do 3 in nato ustrezno označimo vse vhode v Zvezdo smrti, s tem pa je zaradi leme pravzaprav naloga končana. Tuckerjeva lema je pomembna predvsem v diskretni matematiki, je opora za dokazovanje drugih topoloških in kombinatoričnih rezultatov, zanimiva je njena povezava predvsem z Borsuk-Ulamom ter rezultati, ki jih bomo predstavili v nadaljevanju. Je pa zanimiva za računalniško znanost, ki se ukvarja z algoritmom iskanja tega komplementarnega roba (J. Matoušek, 2008).

9.2 Brouwerjev izrek o fiksnih (negibnih) točkah

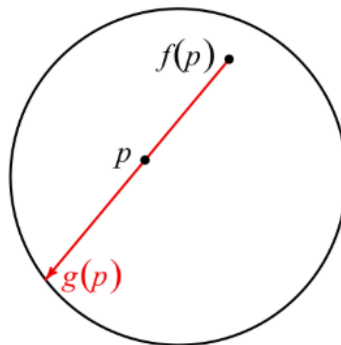
Za nadaljevanje, ne moremo prezreti ključnega rezultata: Brouwerjevega izreka o fiksnih točkah.

Izrek zagotavlja, da ima vsaka zvezna preslikava iz kompaktne, konveksne množice vase, vsaj eno fiksno točko. Najpogosteje se ta izrek navaja za n -dimenzionalno enotsko kroglo:

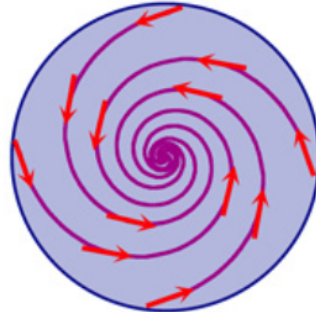
Brouwerjev izrek: Naj bo $f : B^n \rightarrow B^n$, potem obstaja točka $x \in B^n$, za katero velja:

$$f(x) = x.$$

Tako točko imenujemo fiksna točka (M. Weinstein, b. d.).



Slika 16: Vizualizacija Brouwerjevega izreka



Slika 17: Mešanje (analogija zvezne preslikave)



Slika 18: Kava (vsakodnevni prikaz izreka, če kave ne prelivamo bo ena molekula ostala na istem mestu kot pred mešanjem)

Pokažimo, kako *Borsuk-Ulam* implicira obstoj *Brouwerjevega izreka*:

Dokaz temelji na konstrukciji, imenovani *retrakcija*. Če predpostavimo, da Brouwerjev izrek o negibni točki ne drži za neko funkcijo f , potem lahko za vsako $x \in B^n$ narišemo poltrak od $f(x)$ skozi x in označimo $h(x)$ kot točko, kjer ta poltrak seka S^{n-1} . Sedaj opazimo, da je h zvezna funkcija (očitno h deluje na vsaki okolici točke, nato le uporabimo zveznost f), poleg tega je h identiteta na S^{n-1} . Ti dve lastnosti v bistvu poskrbita, da je h *retrakcija* – zvezna preslikava iz prostora X na njegovo podmnožico A , ki je identiteta na A . Če bi bil Brouwerjev izrek o negibni točki napačen, bi torej lahko konstruirali retrakcijo B^n v S^{n-1} . Vendar bi bila taka funkcija liha na meji (ker je identiteta na meji). Če pa Borsuk-Ulamov izrek drži, takšna funkcija ne more obstajati, kar pomeni, da mora biti Brouwerjev izrek o negibni točki resničen (M. Weinstein, b. d., J. Matoušek, 2008).

Pisanje o Brouwerjevem izreku ni naključno, saj je pri njegovi pametni uporabi lahko zelo močno orodje za reševanje različne vrste problemov, ki so povezani z analizo funkcij. Navedli pa smo ga predvsem zaradi naslednjega poglavja o kombinatorni igri Hex.

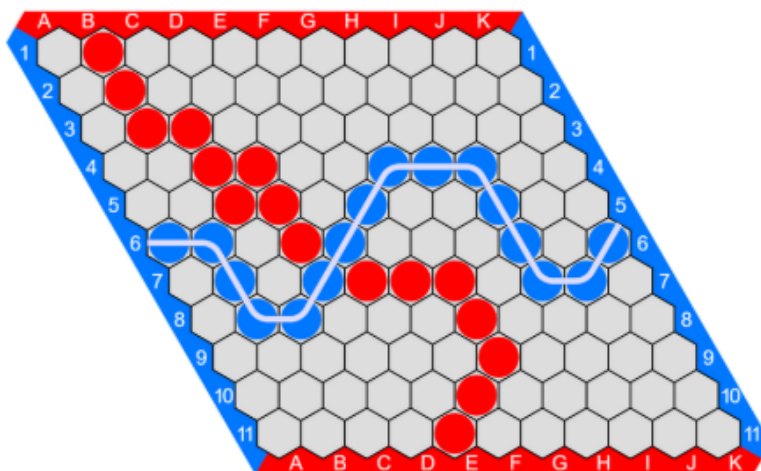
9.3 Kombinatorna igra Hex

Hex je strateška dvoplastna igra, ki sta jo domnevno neodvisno izumila Piet Hein (1942) in John Nash (1949). Igra se odvija na šestkotni mreži najpogosteje velikosti 11×11 (lahko tudi drugih velikosti na primer 13×13 ali 19×19), kjer vsak igralec izmenično pobarva eno ploščico s svojo barvo (rdeča ali modra). Cilj igre je ustvariti neprekinjeno pot ploščic iste barve, ki povezuje dve nasprotni strani plošče.

Matematični model igre Hex: matematično lahko Hex modeliramo kot graf, kjer:

- Vozlišča predstavljajo ploščice,
- Povezave med vozlišči predstavljajo sosednje ploščice,
- Igralci ustvarjajo povezane komponente, ki jim omogočajo zmago.

Ključna lastnost igre je, da neodločen izid ni mogoč. (M. Weinstein, b. d., "Hex (board game)", b. d.)



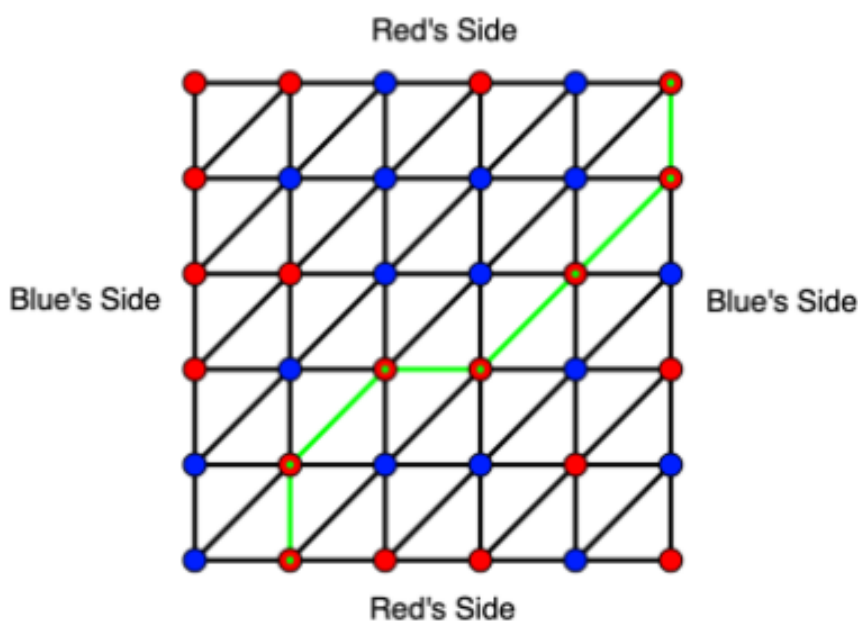
Slika 19: Prikaz igre Hex

9.3.1 Hexov izrek

Hexov izrek se nanaša na osnovno različico igre, znane pa so tudi posplošitve igre v ravnini, različica kjer je igralna površina torus, različica za več igralcev ipd. In izkaže se, da tudi takrat neodločen izid ni mogoč.

Hexov izrek (standardna verzija): Če je vsako vozlišče na plošči igre Hex (za dva) igralca obarvano rdeče ali modro in sta zgornji ter spodnji rob obarvana rdeče, stranska roba pa modro, potem obstaja pot rdečih vozlišč od vrha plošče do dna ali pa obstaja pot modrih vozlišč od leve strani plošče do desne (M. Weinstein, b. d.).

Koncept lahko še dodatno posplošimo z definiranjem n -dimenzionalne igre Hex: predstavljajmo si neko zapleteno mrežo vozlišč in povezav, ki predstavljajo igralno "površino", tem vozliščem pa dodelimo oznako ali barvo. Sedaj to našo strukturo preoblikujemo, da zglada kot triangulacija enotke n -kocke (višjedimenzionalni analog kvadrata in kocke). Povezave med vozlišči oziroma sosedske odnose pa določimo na podlagi razdalje med dvema vozliščima (izkaže se, da to ne spremeni strukture igre). Da lahko predstavimo izjemno lepo povezavo med Tuckerjevo lemo in Hexovim izrekom, ponovno iščemo neko pametno konstrukcijo. Na preoblikovano igralno ploščo lahko gledamo kot triangulacijo B^n , s čimer zagotovimo, da izpolnjuje pogoje, potrebne za uporabo Tuckerjeve leme. Sedaj konstruiramo pametno označevanje, ki uvede antipodno simetrijo na robu, kar omogoča direktno povezavo do Tuckerjeve leme. Če je označevanje ustrezno definirano, se nato izkaže, da lahko pokažemo obstoj poti določene dolžine med vozlišči. Bolj formalizirani dokazi temeljijo na veliko več dodatnih nadrobnih definicijah, kaj točno igra Hex je v več dimenzijah, kakšne vrste poti obstajajo, ipd. zato smo se in se tudi v nadaljevanju bomo omejili na glavno idejo dokazov (M. Weinstein, b. d.).



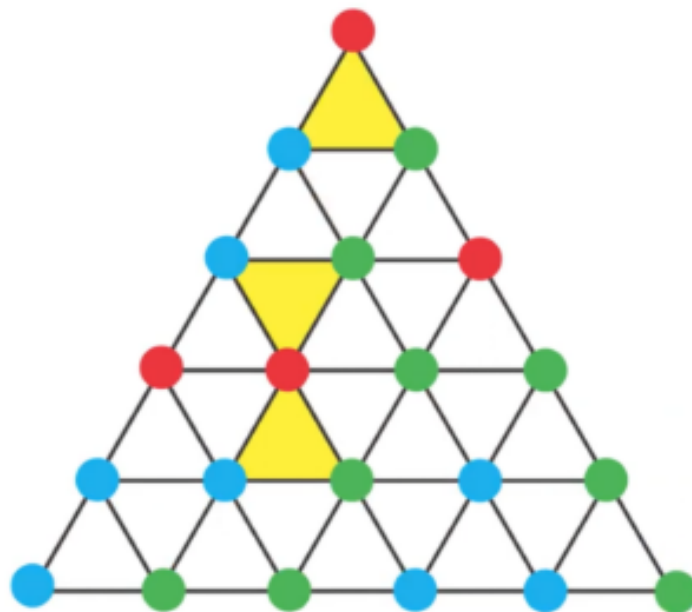
Slika 20: Igra hex v obliki grafa

Sedaj še ilustriramo povezavo med *Brouwerjevim izrekom* in *Hexovim izrekom*: *Hexov izrek* in *Brouwerjev izrek o fiksni točki* sta povezana na podoben način kot *Tuckerjeva lema* in *Borsuk-Ulamov izrek*.

Za dokaz Brouwerjevega izreka s Hexovim izrekom definiramo Hexovo ploščo s primerno triangulacijo, ki je v bistvu n -kocka (I^n), le da omejimo velikost triangulacije s premerom simpleksov in definiramo zvezno funkcijo $f: I^n \rightarrow I^n$. Funkcijo uporabimo za določitev označevanja vozlišč, kjer vsako označimo z eno izmed n -tih oznak ali vrednosti (pazimo tudi na predznak) glede na to, v katero smer to točko f premakne največ (najdemo največjo razliko med novo in prejšnjo koordinatno komponento oziroma vektorsko komponento krajevnega vektorja). Po Hexovem izreku obstaja pot med nasprotnima stranicama plošče, kar pomeni, da obstaja rob triangulacije (povezava med dvema vozliščema), kjer se predznak označbe med vozlišči oziroma oglišči spremeni iz pozitivnega v negativno. Ta sprememba prisili, da na nekem robu velja, da je premik skoraj nič, kar pomeni, če uvedemo dovolj "fino" triangulacijo in uporabimo zveznost f zagotovimo obstoj točke x z $f(x) = x$. Obratno, za dokaz Hexovega izreka s Brouwerjevim izrekom predpostavimo, da v dani Hexovi igri ne obstaja zmagovalna pot. S to predpostavko konstruiramo zvezno funkcijo $f: I^n \rightarrow I^n$, ki točke premika v določene smeri (glede na pametno izbrana pravila). Po Brouwerjevem izreku mora ta funkcija imeti fiksno točko, kar pa nasprotuje naši začetni predpostavki, da povezava ne obstaja. To protislovje potrди Hexov izrek. Tako sta Hexov izrek in Brouwerjev izrek o fiksni točki ekvivalentna, kar ustvarja zelo zanimiv most med kombinatorično teorijo iger in topološkimi izreki o fiksni točkah (M. Weinstein, b. d.).

9.4 Spernerjeva lema

Tudi tokrat bomo motivirali nov rezultat s pomočjo naloge. Denimo, da imamo enakostranični trikotnik T , ki ga razdelimo na manjše trikotnike s triangulacijo. Vsa oglišča te triangulacije pobarvamo s tremi barvami (rdečo, modro in zeleno) po naslednjih pravilih: glavna oglišča velikega trikotnika pobarvamo vsakega z drugačno barvo (en vrh je vedno rdeč, en vrh je vedno moder, en vrh je vedno zelen), vsako drugo oglišče, torej tisto, ki določa nek notranji trikotnik in leži na robu trikotnika T mora imeti eno od barv oglišč, ki določata daljico, na kateri leži. Ali bo vedno obstajal nek trikotnik v triangulaciji, ki bo imel raznobarna oglišča?



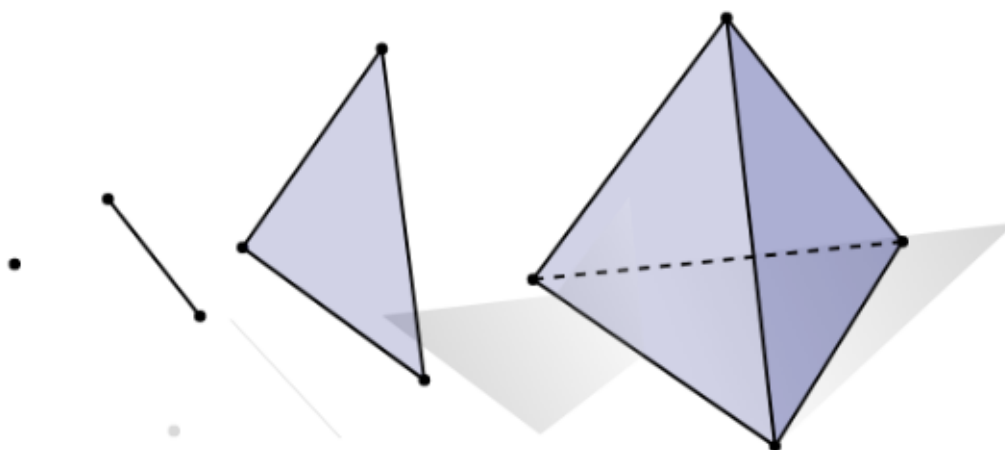
Slika 21: Prikaz trikotnika po danih navodilih

9.4.1 Opis leme

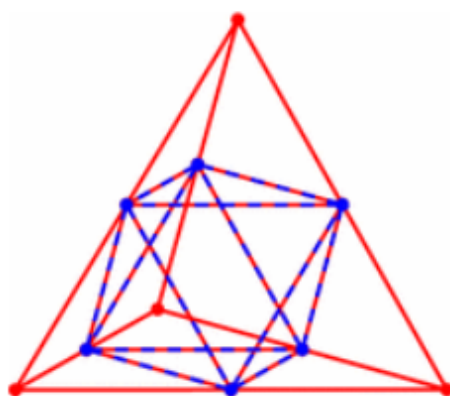
Spernerjeva lema je trditev o označevanju (barvanju) trianguliranih simpleksov. Lema zagotavlja obstoj popolnoma označenega (raznobarvnega) simpleksa v vsaki triangulaciji, ki upošteva določen sistem označevanja.

Naj bo S d -dimenzionalni simpleks z oglišči v_1, \dots, v_{d+1} . Naj bo T triangulacija simpleksa S . Predpostavimo, da je vsakemu vrhu triangulacije T dodeljena unikatna oznaka iz množice $\{1, 2, \dots, d+1\}$. Označevanje L imenujemo Spernerjevo, če so oglišča označena tako, da lahko oglišče triangulacije T , ki pripada notranjosti neke ploskve F simpleksa S , dobi oznako k samo, če je v_k oglišče simpleksa S .

Spernerjeva lema: Vsako Spernerjevo označevanje triangulacije d -dimenzionalnega simpleksa vsebuje celico (d -simpleks), v kateri so zastopane vse oznake (je raznobarvno) iz množice $\{1, 2, \dots, d+1\}$. Še več, teh raznobarvnih simpleksov tudi če jih je več, mora biti liho število (O. R. Musin, 2014).



Slika 22: d -dimenzionalni simpleks



Slika 23: simpleks-3 in njegova triangilacija

Naša naloga je tako ponovno magično trivializirana, naj pa opomnim, da so se taka barvanja že velikokrat pojavila na tekmovanjih iz logike in matematike, predvsem pri nižjih letnikih, reševanje pa je velikokrat sledilo načelu poskušanja in popravljanja napak. Zanimivo je, da čeprav imamo dane omejitve na barvanju, dejanskega specifičnega barvanja zgolj s pomočjo leme ne moremo konstruirati.

9.4.2 Povezava med Spernerjevo lemo, Brouwerjevim izrekom in Tuckerjevo lemo

Tukaj bomo grobo opisali abstrakten odnos z dosedaj navedenimi rezultati.

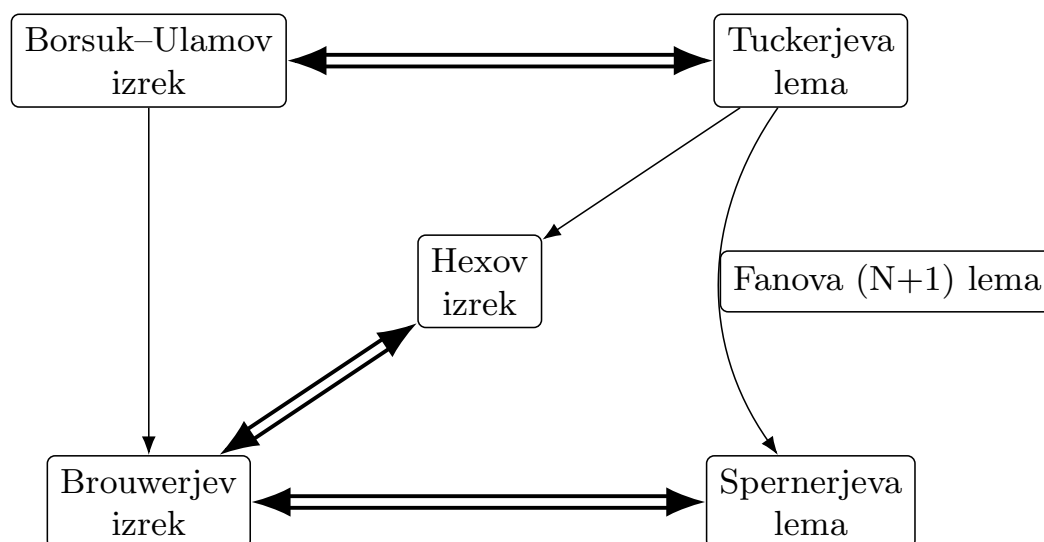
Povezava z Brouwerjevim izrekom:

Spernerjeva lema je diskretna različica tega izreka. Osnovna ideja povezave je naslednja: Spernerjeva lema zagotavlja obstoj raznovrstno označenega simpleksa v triangulaciji. Pri vsaki Spernerjevi triangulaciji lahko konstruiramo zvezno preslikavo, nato pa z limitnim argumentom dokažemo obstoj fiksne točke. Ta pristop omogoča diskretizirano dokazovanje Brouwerjevega izreka, prav tako pa je tudi eden najlažjih dokazov Brouwerjevega izreka. (K. L. Nyman, F. E. Su, 2013)

Dokazano je tudi, da je Spernerjeva lema ekvivalentna Brouwerjevemu izreku, kar pomeni, da lahko vsaka od teh dveh trditev služi kot alternativa za dokaz druge. (J. Fox, b. d.)

Povezava s Tuckerjevo lemo: Povezava med Tuckerjevo in Spernerjevo ni neposredna in temelji na drugem generaliziranem rezultatu Tuckerjeve leme (Fanova $N + 1$ lema). Povezavo lahko pokažemo direktno za zgolj nekatere lažje primere. V resnici bi bilo natančneje reči, da lahko izpeljemo Spernerjevo lemo iz Fanove $N + 1$ leme in ne iz Tuckerjeve leme. (K. L. Nyman, F. E. Su, b., d.)

Dinamika teh izrekov vzpostavlja most med kombinatoriko in topologijo.

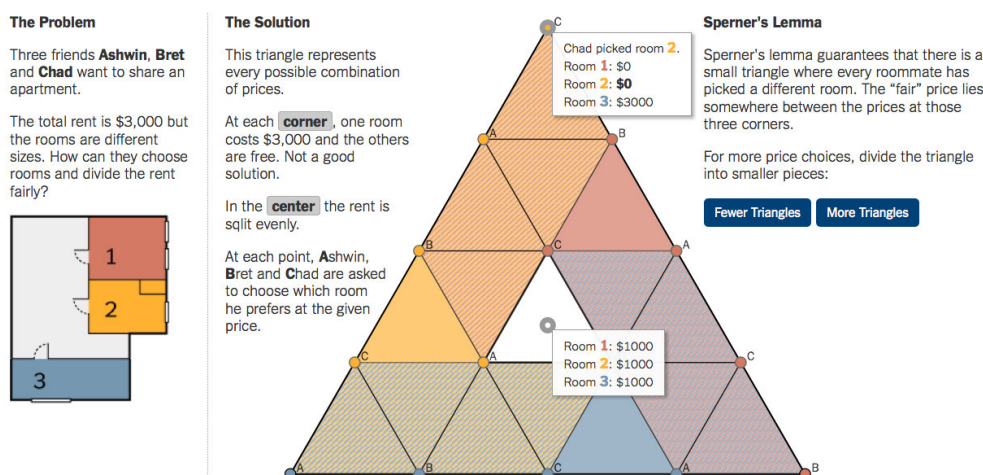


Slika 24: Povezava izrekov

9.4.3 Spernerjeva lema in deljenje najemnine

Za zaključek tega dela predstavimo zanimiv primer praktične uporabe Spernerjeve leme. Tudi tokrat gre za problem "pravične delitve". Predstavljajmo si tri študente matematike Ano, Bora in Ceneta (v nadaljevanju A, B in C zaporedoma). Skupaj bodo najeli trisobno stanovanje, ker so prijatelji se nočejo skregati. Želijo najti pravičen način, kako si razdeliti sobe ter najemnino. Za rešitev problema pogledjmo nek trikotnik, naj bo to kar enakostranični trikotnik, njegova višina pa naj predstavlja skupno ceno najema. Znan izrek iz elementarne geometrije nam pove (Vivianijev izrek), da je vsota razdalj od katerekoli notranje točke do stranic vedno enaka višini trikotnika (ta mora biti enakostraničen), ne glede na izbiro točke. Predstavljajmo si, da je trikotnik postavljen tako: Δ . Če izberemo, da na primer dolžina od izbrane točke do leve stranice predstavlja ceno za bivanje v rdeči sobi, dolžina do spodnje stranice ceno za modro sobo in dolžina do desne stranice ceno za rdečo sobo, bo vsota teh vedno enaka skupni ceni najema. Sedaj naš trikotnik simetrično razdelimo (trianguliramo) na manjše enake enakostranične trikotnike. Vsakemu od vozlišč pa damo eno izmed oznak A, B in C, tako da ima vsak trikotnik oglišča z različno oznako. Recimo, da gledamo neko oglišče A, za tisto točko si lahko Ana izbere katero sobo bo imela in tako pobarva oglišče z eno izmed treh barv, seveda si bo izbrala tisto, ki bo imela najnižjo ceno, torej izbira glede na to katera stranica ji je najbližje. Pri takem barvanju, če vsak dela v skladu s svojimi finančnimi interesi, ugotovimo, da so oglišča na levi stranici rdeča, na spodnji modra, na desni pa zelena. Za oglišča velikega trikotnika pa lahko vidimo, da bosta dve možnosti najbolj ugodni, kljub temu pa naredimo takšno barvanje, ki bo ustrezalo Spernerjevemu barvanju. Sedaj lahko najdemo po Spernerjevi lemi raznobarvni trikotnik znotraj triangulacije in ta bo predstavljal pravično delitev sob in najemnine, da pa bi pravično delitev dejansko dosegli bi morali triangulacijo opraviti s čim večjim številom trikotnikov. V tej razdelitvi nam tako oglišče z barvo pove katero sobo prejme oseba, ki ima to oglišče označeno kot svoje, ustrezna dolžina (glede na barvo) te točke do stranice pa predstavlja količino denarja, ki ga mora oseba prispevati za najemnino. To predstavlja pravično delitev, saj so pri označevanju vsi delovali v svojo korist.

New York Times je na podlagi tega procesa ustvaril kalkulator za pravično delitev najemnine. Takšne metode pravične delitve pa niso uporabne le pri najemninah, temveč so bile uporabljene tudi pri delitvi Nemčije po drugi svetovni vojni, razdelitvi pravic do globokomorskega rudarjenja ter pri razdelitvi premoženja po ločitvi ali smrti.



Slika 25: Prikaz uporabe leme, s člankom v NYT časopisu

10 UVOD V TEORIJU GRAFOV

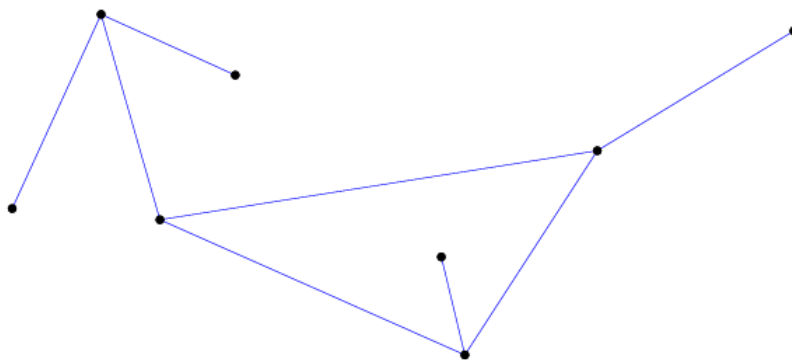
Teorija grafov je matematična disciplina, ki se ukvarja s študijem grafov – abstraktnih struktur, ki modelirajo odnose med objekti. Graf je sestavljen iz množice vozlišč in množice povezav, kjer vsaka povezava povezuje dve vozlišči. Grafi imajo široko uporabnost v številnih disciplinah, kot so računalništvo, biologija, družboslovje in optimizacija.

Pri enostavnih vprašanjih kot je barvanje grafov ali iskanje določenih vzorcev v strukturi grafa se presenetljivo srečamo s topološkimi rešitvami, bolj specifično, ogledali si bomo Kneserjeve in Mycielskijeve grafe. Najprej pa začnimo z osnovnimi definicijami.

10.1 Osnovne definicije

- *Preprost graf* je graf brez zank in večkratnih povezav.
- *Usmerjen graf* vsebuje povezave z določeno smerjo.
- *Podgraf grafa* je vsak graf, ki vsebuje podmnožico vozlišč in povezav iz danega grafa.
- *Stopnja vozlišča* (*deg*) je število povezav oziroma za enostavne grafe število sosedov, ki jih ima vozlišče.
- *Povezan graf* je graf, kjer obstaja pot med katerima koli dvema vozliščema, lahko sledimo zaporedju povezav in vozlišč od enega do drugega vozlišča.

(R. J. Wilson, 1996)



Slika 26: Preprost graf, hkrati tudi povezan

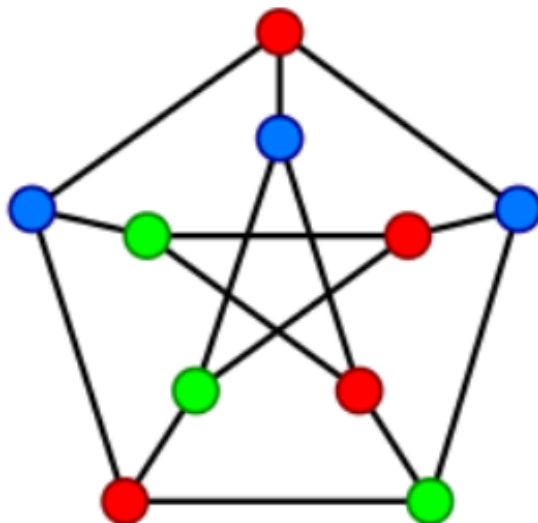
10.2 Kromatično število in barvanje grafov

Definicija (kromatično število): Naj bo $G = (V, E)$ neusmerjen graf, kjer je V množica vozlišč in E množica povezav. Kromatično število grafa G , označeno kot $\chi(G)$, je najmanjše število barv, potrebnih za pravilno barvanje grafa, tako da nobeni dve sosednji vozlišči nimata enake barve.

Matematično formalno lahko kromatično število definiramo kot:

$$\chi(G) = \min\{k \mid \exists f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, \text{ tako da } f(u) \neq f(v), \forall (u, v) \in E\}$$

kjer je $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ preslikava, ki vozliščem grafa G priredi eno izmed k barv, pri čemer velja, da je vsaka povezava $(u, v) \in E$ povezana z vozlišči različnih barv, tj. $f(u) \neq f(v)$.



Slika 27: Zgled grafa (Petersenovega), ki ima kromatično št. 3

10.2.1 Posebni primeri kromatičnega števila

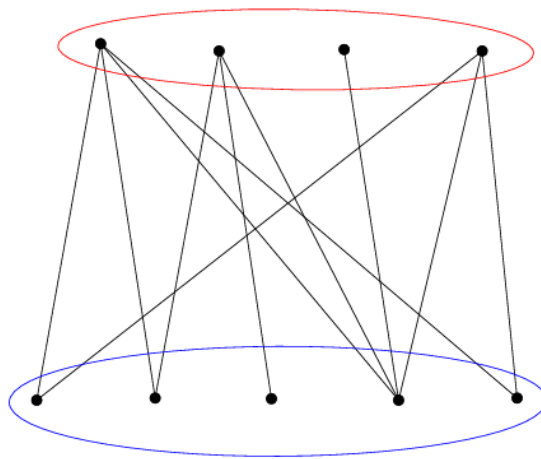
- Če je $\chi(G) = 1$, potem je graf brez povezav (diskretni graf).
- Če je $\chi(G) = 2$, potem je graf dikromatičen, tj. mogoče ga je razdeliti v dve disjunktni množici, tako da nobeni dve povezani vozlišči nista v isti množici.
- Če je $\chi(G) = n$ za neke večje n , potem ima graf dovolj zapleteno strukturo, da zahteva vsaj n različnih barv za pravilno barvanje.

Kromatično število je ključen parameter v teoriji grafov in se pogosto uporablja pri optimizacijskih problemih, načrtovanju in omrežjih.

10.2.2 Pomembni tipi grafov

- Dvodelni grafi: graf, katerega vozlišča lahko razdelimo v dve nepovezani množici.
- Klika (poln graf): graf, v katerem je vsako vozlišče povezano z vsemi ostalimi vozlišči.
- Drevo: povezan graf brez ciklov.

(R. J. Wilson, 1996)



Slika 28: Dvodelni graf

11 KNESERJEVI GRAFI

11.1 Definicija Kneserjevega grafa

Kneserjev graf je posebna vrsta grafa, kjer vsakemu vozlišču priredimo neko množico z določenim številom elementov. Te množice vzamemo iz večje množice, ki vsebuje naravna števila od 1 do n . Vozlišča povežemo med seboj takrat, kadar nimajo nobenega skupnega elementa – torej so disjunktne.

Lahko si predstavljamo, da imamo več skupin ljudi, pri čemer vsaka skupina izbere nekaj različnih števil. Dve skupini se "poznata" oziroma sta povezani le, če si nista izbrali nobenega enakega števila.

Kneserjev graf je torej graf, kjer:

- Vozlišča predstavljajo vse k -elementne podmnožice množice.
- Povezava med dvema vozliščema obstaja, če sta pripadajoči množici disjunktne.

Definicija (Kneserjev graf): Naj bo $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ množica prvih n naravnih števil in naj bo $\binom{[n]}{k}$ množica vseh k -elementnih podmnožic množice $[n]$. *Kneserjev graf* $KG(n, k)$ je neusmerjen graf, definiran na naslednji način:

- Množica vozlišč $V(KG(n, k))$ je množica vseh k -elementnih podmnožic od $[n]$, torej:

$$V(KG(n, k)) = \binom{[n]}{k} = \{A \subseteq [n] \mid |A| = k\}.$$

- Množica povezav $E(KG(n, k))$ je določena tako, da sta dve vozlišči A, B povezani natančno tedaj, ko sta množici predstavljeni z vozliščema A in B disjunktne (množici A in B sta k -elementni podmnožici gledane n -elementne množice), torej:

$$E(KG(n, k)) = \{\{A, B\} \mid A, B \in V(KG(n, k)), \quad A \cap B = \emptyset\}.$$

(L. Babai, P. Frankl, 2022)

11.1.1 Osnovne lastnosti

- Velikost množice vozlišč Število vozlišč grafa $KG(n, k)$ je enako številu k -elementnih podmnožic od n -elementne množice, kar je enako binomski izbiri:

$$|V(KG(n, k))| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(L. Babai, P. Frankl, 2022)

- Največja stopnja vozlišča Stopnja vozlišča A je število vseh k -elementnih podmnožic množice $[n]$, ki so disjunktne z A . To pomeni, da imajo vozlišča stopnjo:

$$\deg(KG(n, k)) = \binom{n+k}{n}.$$

(L. Babai, P. Frankl, 2022)










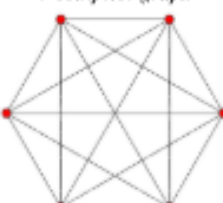
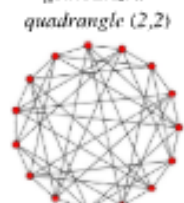
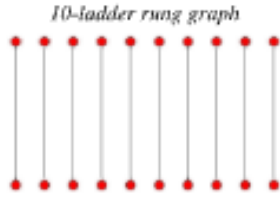
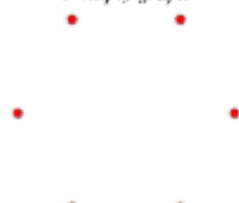

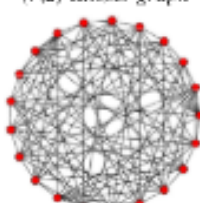
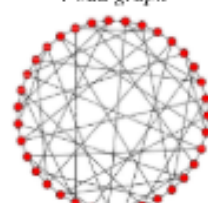
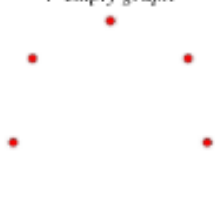
- Kromatično število Lovász (1978) je dokazal, da za $n \geq 2k - 1$ velja:

$$\chi(KG(n, k)) = n - 2k + 2.$$

(L. Babai, P. Frankl, 2022)

Posebni primeri:

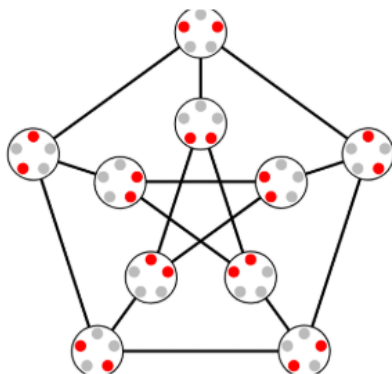
- $KG(5, 2)$ je Petersenov graf.
- $KG(n, 1)$ je popolni graf K_n .
- $KG(n, n - 1)$ je graf brez povezav.

<p>$K(2, 1)$ 2-path graph</p> 			
<p>$K(3, 1)$ triangle graph</p> 	<p>$K(3, 2)$ 3-empty graph</p> 		
<p>$K(4, 1)$ tetrahedral graph</p> 	<p>$K(4, 2)$ 3-ladder rung graph</p> 	<p>$K(4, 3)$ 4-empty graph</p> 	
<p>$K(5, 1)$ pentatope graph</p> 	<p>$K(5, 2)$ Petersen graph</p> 	<p>$K(5, 4)$ 5-empty graph</p> 	
<p>$K(6, 1)$ 6-complete graph</p> 	<p>$K(6, 2)$ generalized quadrangle (2,2)</p> 	<p>$K(6, 3)$ 10-ladder rung graph</p> 	<p>$K(6, 5)$ 6-empty graph</p> 
<p>$K(7, 1)$ 7-complete graph</p> 	<p>$K(7, 2)$ (7,2)-Kneser graph</p> 	<p>$K(7, 3)$ 4-odd graph</p> 	<p>$K(7, 6)$ 7-empty graph</p> 

Slika 29: Prvih 7 kneserjevih grafov

11.1.2 Kneserjev graf $KG(5, 2)$

- Vozlišča predstavljajo vse 2-elementne podmnožice množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Število vozlišč: $\binom{5}{2} = 10$, ker je vseh možnih dvoelementskih podmnožic 10.
- Povezave: Dve podmnožici sta povezani, če nimata nobenega skupnega elementa.
- Oblika: Graf ima pentagamsko strukturo, saj so vsa vozlišča razporejena v krožno obliko z notranjimi povezavami.



Slika 30: Kneserjev graf $(5,2)$, s prikazom povezav disjunktne množice

11.1.3 Kneserjev graf $KG(7, 3)$

- Vozlišča predstavljajo vse 3-elementne podmnožice množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- Število vozlišč: $\binom{7}{3} = 35$.
- Povezave: Dve podmnožici sta povezani, če nimata nobenega skupnega elementa.
- Oblika: Ta graf je veliko bolj kompleksen, ima večjo povezanost in težje vizualiziramo njegovo strukturo v primerjavi z $KG(5, 2)$.

Kromatično število znanih Kneserjevih grafov:

- $\chi(KG(5, 2)) = 3$.
- $\chi(KG(7, 3)) = 4$.

11.2 Kneserjeva domneva, dokaz Lovásza in Greena

Kneserjeva domneva, ki jo je postavil Martin Kneser leta 1955, pravi: $\chi(KG(n, k)) = n - 2k + 2$. To pomeni, da je kromatično število Kneserjevega grafa odvisno le od razmerja med n in k . Domnevo je leta 1978 dokazal László Lovász z uporabo Borsuk-Ulamovega izreka. S tem je tudi začel področje kombinatorične topologije.

Poleg Lovászovega dokaza obstaja tudi dokaz, ki ga je podal Greene, ki uporablja drugačne topološke metode, dokaz je prečistil in poenostavil. Njegov dokaz zdaj tudi predstavimo.

Greenov dokaz

Definicija (splošna pozicija): Splošna pozicija pomeni, da so točke (ali drugi geometrijski objekti) urejene tako, da se ne pojavijo nobene posebne odvisnosti, ki bi povzročile degenerativne primere. Na primer, v ravnini so točke v splošni poziciji, če nobene tri točke niso kolinearne, torej ne ležijo vse na isti premici.

Definicija (odprta hemisfera): Odprta hemisfera (imenovana tudi odprta polobla) je množica točk na sferi, ki jo dobimo, če sfero razdelimo s hiperravnino skozi njeno simetrijsko središče in pri tem izločimo mejo, torej točke, ki ležijo na razdelitveni hiperravnini.

Denimo, da imamo Kneserjev graf $KG_{n,k}$ in definiramo $d := n - 2k + 1$. Naj bo $X \subset S^d$ množica n -tih točk, tako da nobena hiperravnina, ki gre skozi središče S^d , ne vsebuje več kot d točk iz X . Ta pogoj je enostavno izpolnjen, če so točke v splošni poziciji, to pa lahko privzamemo, saj obravnavamo točke v \mathbb{R}^{d+1} in zahtevamo, da nobenih $d + 1$ točk ne leži na isti hiperravnini skozi središče. Predpostavimo, da je množica vozlišč $KG_{n,k}$ enaka $\binom{X}{k}$, namesto običajne notacije $\binom{[n]}{k}$ (z drugimi besedami, elemente množice $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ asociiramo s točkami iz X). Dokaz poteka z metodo protislovja. Predpostavimo, da obstaja pravilno barvanje Kneserjevega grafa $KG_{n,k}$ z največ $n - 2k + 1 = d$ barvami. Fiksiramo oziroma izberemo eno takšno barvanje in definiramo množice $A_1, \dots, A_d \subseteq S^d$, na naslednji način:

Za vsako točko $x \in S^d$, velja $x \in A_i$. Če obstaja vsaj ena k -terka $F \subseteq X$ v $\binom{X}{k}$, ki je obarvana z barvo i in je v odprti polobli $H(x)$, ki ima središče v x . Formalno: $H(x) = \{y \in S^d : \langle x, y \rangle > 0\}$. Definiramo še: $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d)$.

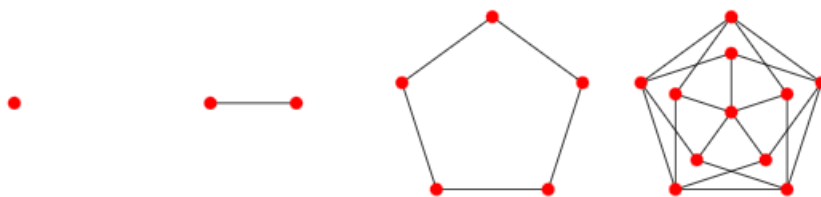
Očitno je, da so množice A_1, \dots, A_d odprte, medtem ko je A_{d+1} zaprta. Zaradi BU5 potem obstaja nek $i, 1 \leq i \leq d + 1$ tako, da za nek $x \in S^d$, velja da sta $x, -x$ oba v A_i .

Če je $i \leq d$, potem imamo dve disjunktni k -terki, ki sta barvani z barvo i , ena v odprti polobli $H(x)$, druga v nasprotni odprti polobli $H(-x)$, kar pomeni, da barvanje ni pravilno barvanje Kneserjevega grafa. Če je $i = d + 1$, potem $H(x)$ vsebuje največ $k - 1$ točk iz X , enako velja za $H(-x)$. Zato komplement $S^d \setminus (H(x) \cup H(-x))$, ki je neke vrste "ekvator" (presek hiperravnine skozi središče in S^d), vsebuje vsaj $n - 2k + 2 = d + 1$ točk množice X , kar je protislovno z izbiro X zaradi splošne pozicije. \square (J. E. Greene, 2002)

12 MYCIELSKIJEVI GRAFI

12.1 Definicija Mycielskijeve konstrukcije grafa

Mycielskijeva konstrukcija je ena najpreprostejših metod za sestavo grafov brez trikotnikov s poljubno velikim kromatičnim številom. Za dani graf $G = (V, E)$ definiramo $M_2(G)$ kot graf s množico vozlišč $V \times \{0, 1\} \cup \{z\}$, kjer obstaja povezava med $(u, 0)$ in $(v, 0)$ ter med $(u, 0)$ in $(v, 1)$, kadar koli velja $\{u, v\} \in E$. Poleg tega obstaja povezava med $(u, 1)$ in z za vsak $u \in V$. Enostavno je pokazati, da se kromatično število poveča pri vsaki iteraciji funkcije $M_2(\cdot)$.



Slika 31: Vizualizacija Mycielskijevih grafov

To konstrukcijo sta posplošila Stiebitz in neodvisno Van Ngoc na naslednji način. Za dani graf $G = (V, E)$ in celo število $r \geq 1$ definiramo $M_r(G)$ kot graf s množico vozlišč $V \times \{0, \dots, r-1\} \cup \{z\}$, kjer obstaja povezava med $(u, 0)$ in $(v, 0)$ ter med (u, i) in $(v, i+1)$, kadarkoli velja $\{u, v\} \in E$. Poleg tega obstaja povezava med $(u, r-1)$ in z za vsak $u \in V$.

Če $r > 2$, ni več nujno, da se kromatično število poveča pri vsaki iteraciji $M_r(\cdot)$. Kljub temu je Stiebitz pokazal, da se kromatično število vedno poveča pri vsaki iteraciji $M_r(\cdot)$, če začnemo z lihim ciklom ali s skrbno izbranim grafom.

Za vsako celo število $k \geq 2$ označimo z M_k množico vseh posplošenih Mycielskijevih grafov, pridobljenih iz K_2 s $k-2$ iteracijami $M_r(\cdot)$, kjer se lahko vrednost r spreminja med iteracijami. Stiebitz je dokazal naslednje:

Stiebitzov izrek: Če $G \in M_k$, potem velja

$$\chi(G) \geq k.$$

Stiebitzov dokaz temelji na Lovaszevem dokazu za Kneserjeve grafe in brez Borsuk-Ulama ne bi deloval (T. Muller, M. Stehlik, 2017).

12.2 Sklep o grafih

Mycielskijevi grafi so primer grafov brez trikotnikov, ki imajo kljub temu poljubno visoko kromatično število. To kaže, da omejitve na majhne podgrafe, kot so trikotniki, ne določajo nujno števila potrebnih barv pri barvanju grafa.

Tudi Kneserjevi grafi igrajo pomembno vlogo pri povezovanju kombinatorike in topologije. Lovászov dokaz Kneserjeve domneve je zgodovinski primer uporabe topoloških metod za dokazovanje rezultatov o barvanju grafov, kar je odprlo pot številnim nadaljnjim raziskavam.

Doprinos teh grafov je v tem, da vsak na svoj način razširja splošno razumevanje topologije v kombinatoriki. Pomembneje pa se oba lahko aplicirata na ožje cilje, ki jih tudi praktično uporabljamo. Zasledimo jih v večini optimizacijskih algoritmov, postopkih za minimiziranje kromatičnega števila in predvsem pri dokazovanju kompleksnih kombinatornih problemov.

13 RADONOV IZREK

Konveksna ogrinjača predstavljajo enega temeljnih konceptov v geometriji in analizi podatkov. Ključna lastnost konveksne ogrinjače je, da lahko vsako njegovo točko izrazimo kot konveksno kombinacijo določenega števila točk iz začetne množice. Ta lastnost ima široke uporabe v optimizaciji, algoritmih in kombinatorični geometriji. Eden izmed najpomembnejših rezultatov na tem področju je Radonov izrek, ki je temeljni rezultat linearne algebre in ima tudi zanimive implikacije za topologijo.

Definicija (konveksna ogrinjača): Konveksna ogrinjača množice X v evklidskem prostoru \mathbb{R}^d je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje vse točke iz X , in jo označujemo kot $\text{conv}(X)$. Za dano množico $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ lahko vsako točko $x \in \text{conv}(X)$ izrazimo kot linearno kombinacijo:

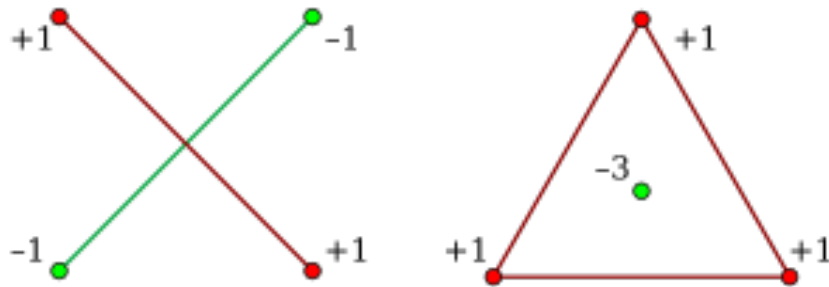
$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \text{kjer} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i.$$

Za $n = d + 2$ pa velja poseben rezultat, znan kot Radonov izrek. (L. Babai-P. Frankl, 2022)

Radonov izrek: Naj bo $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{d+2}\}$ množica $d + 2$ točk v \mathbb{R}^d . Tedaj lahko množico vedno razdelimo na dve disjunktni podmnožici X_1 in X_2 , katerih konveksni ogrinjači se prekrivata:

$$\text{conv}(X_1) \cap \text{conv}(X_2) \neq \emptyset.$$

To pomeni, da vedno lahko najdemo takšni podmnožici, katerih konveksni ogrinjači se sekata, ne glede na konfiguracijo točk. (L. Babai-P. Frankl, 2022)



Slika 32: Vizualizacija Radonovega izreka, s pomočjo konveksnih ogrinjač

13.1 Topološki Radonov izrek in povezava z Borsuk–Ulamovim izrekom

Radonov izrek lahko izrazimo tudi v topološki obliki, zapišemo ga v jeziku zveznih preslikav. Kjer delamo z nekimi posebnimi strukturami v \mathbb{R}^n , pri tem pa se mora ohraniti pogoj, da množice ki nastanejo niso disjunktne. (L. Babai-P. Frankl, 2022)

Topološki Radonov izrek ima tesno povezavo z Borsuk-Ulamovim izrekom, ki pravi, da ni zvezne injektivne antipodne preslikave iz sfere S^n v \mathbb{R}^n (BUI). V bistvu je topološki Radonov izrek poseben primer tega rezultata.

Definicija (afina preslikava): Afina preslikava ali afina transformacija je preslikava med vektorskima prostoroma, ki je kompozitum linearne transformacije in translacije:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} + \mathbf{b}.$$

("Afina preslikava", b. d.)

Dokaz ekvivalence med klasično in topološko verzijo Radonovega izreka temelji na dejstvu, da vsaka afina preslikava ohranja konveksne ogrinjače točk. Nato pa afino preslikavo ustrezno zamenjamo z zvezno preslikavo in dobimo topološko verzijo. (L. Babai-P. Frankl, 2022)

13.2 Hellyjev izrek

Radonov izrek in sedaj tudi Hellyjev izrek omenjamo zaradi prav posebne naloge, ki je bila tudi eden izmed motivatorjev za izbiro teme. Naloga je bila objavljena kot domača naloga za priprave na Mednarodno matematično olimpijado in njena rešitev je brez uporabe Hellyjevega izreka (linearne algebre) bila zelo dolga in precej mučna za pisati. Izrek pa jo skorajda trivializira, tako se je pojavilo vprašanje ali lahko s topologijo kot je to mogoče z linearno algebro in splošno algebro trivializiramo težke kombinatorične naloge?

Preden predstavimo nalogo opišimo nov izrek. Radonov izrek je podlaga za Hellyjev izrek, ki se velikokrat uporablja v kombinatorični geometriji na matematičnih olimpijadah.

Hellyjev izrek: Če so $C_1, \dots, C_m \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksne množice (ogrinjače), tako da se katerekoli $n + 1$ izmed njih sekajo, potem se vse sekajo. (L. Babai, P. Frankl, 2022) **Naloga iz priprav na MO:** V ravnini je označenih n točk. Za vsake tri označene točke obstaja krog z radijem 1, ki vsebuje te tri točke. Dokaži, da tedaj obstaja krog z radijem 1, ki vsebuje vseh n označenih točk.

Krogi so seveda konveksne množice, zato lahko uporabimo Hellyjev izrek. Za našo družino konveksnih množic v ravnini smo izbrali kroge s središči v označenih točkah in polmeri 1. Dokazati moramo, da imajo poljubni trije izmed teh krogov neko skupno točko – torej, da za vsake tri označene točke obstaja neka točka, ki je manj kot 1 oddaljena od vseh treh. Zaradi pogoja naloge se poljubni trije krogi sekajo v vsaj eni točki, kar po Hellyjevem izreku pomeni, da imajo vsi skupaj neprazno presečišče. Poljubno točko iz presečišča vseh krogov lahko sedaj vzamemo za središče nekega kroga s polmerom 1, ki bo torej vseboval vse označene točke, kot smo želeli. Nalogo smo s pomočjo ustreznega izreka rešili v nekaj stavkih, kar nakazuje moč tovrstnih orodij. (J. J. Snój, 2020)

14 TVERBERGOV IZREK

Predstavimo še zadnji izrek, ki ima tudi geometrijsko naravo. Tverbergov izrek, ki ga je leta 1966 dokazal Helge Tverberg, se glasi:

Tverbergov izrek: Za poljubna naravna števila $d \geq 1$ in $r \geq 2$ vsaka množica $(d+1)(r-1)+1$ točk v \mathbb{R}^d vsebuje razbitje na r disjunktnih podmnožic A_1, A_2, \dots, A_r tako, da velja:

$$\bigcap_{i=1}^r \text{conv}(A_i) \neq \emptyset.$$

Takšna delitev se imenuje Tverbergova delitev. Izkaže se tudi, da je tak r glede na druge parametre minimalen. (J. Matoušek, 2008)

Tverbergov izrek se lahko podobno kot Radonov izrek, ki je v resnici podprimer Tverbergovega izreka za $r = 2$, dokaže s pomočjo *Borsuk-Ulama*. Ponovno moramo spremeniti izrek in ga pretvoriti v topološko verzijo. Pri topolški verziji pa naletimo na težavo, namreč posplošitve za poljubne vrednosti parametra r ostaja odprto vprašanje. Obstaja pa tudi barvna različica izreka, ki pravi, da je mogoče zagotoviti Tverbergovo delitev, pri čemer so točke vnaprej obarvane in vsaka podmnožica v delitvi mora vsebovati točke vseh barv. Tverbergov izrek ima nasploh številne aplikacije v kombinatoriki, optimizaciji in računalništvu.

14.0.1 Naloga: Tverbergov izrek

V dvorani se nahaja 37 gostov, poljubno razporejenih po prostoru. Gostitelj dogodka Gargamel se rad norčuje iz svojih natakarej, zelo mu je smešno če se natakarji zaletijo. Ima narisan tloris dvorane in označeno kje se vsak gost nahaja. Goste želi razdeliti v najmanjše možno število skupin, vsak natakar je zadolžen za eno skupino. Ali lahko Gargamel zagotovi, da se konveksne ovojnice teh skupin vedno sekajo v vsaj eni skupni točki, kar bi pomenilo, da obstaja možnost, da se bodo natakarji zaleteli?

Koliko skupin potrebujemo, da zagotovo dosežemo to lastnost?

Naloga je še en primer uporabe topologije, ponovno se izkaže da nam vnovič izrek katerega dokaz temelji na Borsuk-Ulamu pomaga rešiti nalogo. Za rešitev torej uporabimo *Tverbergov izrek*:

Iz Tverbergovega izreka sklepamo, da lahko vsako množico N točk v \mathbb{R}^d razdelimo v vsaj r skupin, katerih konveksne ovojnice imajo skupno presečišče. Kar pomeni, da velja: $N \leq (d+1)(r-1)+1$, iz česar sklepamo: $(N-1)/(d+1)+1 \leq r$, še naprej pa: $r = \left\lceil \frac{N-1}{d+1} + 1 \right\rceil$, kar lahko poenostavimo v:

$$r = \left\lfloor \frac{N}{d+1} \right\rfloor + 1.$$

V našem primeru imamo:

- Število točk: $N = 37$,
- Dimenzija prostora: $d = 2$.

Z uporabo formule izračunamo najmanjše možno število skupin:

$$r = \left\lfloor \frac{37}{2+1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{37}{3} \right\rfloor + 1 = 12 + 1 = 13.$$

(J. Matoušek, 2008)

S tem problemom pa tudi zaključujemo obravnavo izrekov in rezultatov topologije, ki smo jih vključili v raziskovalno nalogo.

15 RAZPRAVA IN ZAKLJUČKI

Ključni elementi razprave

- Topološke metode so se izkazale za močno orodje pri dokazovanju kombinatoričnih problemov.
- Uporaba Borsuk-Ulamovega izreka, Izreka o sendviču in drugih izrekov ter lem omogoča elegantnejše in splošnejše dokaze.
- Čeprav so metode učinkovite, je nekatere težje aplicirati v praksi zaradi kompleksnosti topoloških struktur.
- Kljub izjemni uporabnosti topoloških metod ostajajo še nerazrešena vprašanja, na primer odprti problem ostaja določanje optimalne hiperravnine pri enakomernih delitvah.

Zaključek

V raziskovalni nalogi smo proučili uporabo topoloških metod pri reševanju kombinatoričnih problemov in s tem osvetlili povezavo med topologijo in kombinatoriko. Z veseljem lahko povemo, da smo v celoti odgovorili tudi na glavno vprašanje, ki se poraja vzdolž celotne naloge. In sicer: Ali in kako topološke metode pomagajo pri reševanju kombinatoričnih problemov? S pomočjo Borsuk-Ulamovega izreka, izreka o sendviču, Tuckerjeve in Spernerjeve leme, Brouwerjevega izreka o fiksni točki ter Radonovega in Tverbergovega izreka, kjer je bil v glavni vlogi Borsuk-Ulamov izrek, smo prikazali izredno uporabnost le teh. Najbolj zablestijo takrat, ko je navadna diskretna kombinatorika ostane nemočna. Znjimi se odpirajo nova vrata lepšega in učinkovitejšega reševanja problemov. Vredno omembe je tudi to, da smo poleg tega pokazali kdaj ti izreki delujejo. Pogoj za njihovo delovanje je možen prevoj kombinatoričnega problema v zvezno okolje, kar smo prikazali na primerih kot so delitev ogrlice, barvanje grafov in uravnovežena delitev množic. Spoznanje, da so topološke metode zelo učinkovite pri dokazovanju obstoja ali ne obstoja nečesa, ne pa tako uspešne pri prikazovanju samih konstrukcij in rezultatov, nam namiguje, da v celoti le ne moremo popolnoma nadomestiti kombinatorične metode s topološkimi. Ugotovili smo, da je tudi praktična, življenska uporaba teh metod neoporečna. Npr. s problemom delitve najemnine, raznimi pravičnimi deljenji in s teorijo iger (igra Hex). Za piko na i , pa smo njihovo aplikativno vrednost podkrepili tudi primerom reševanja tipa naloge, ki se pojavi na MO.

Sklep

Topološke metode se v kombinatoriki izkažejo kot izjemno močno orodje, zlasti tam, kjer diskretni pristopi odpovejo. Skozi raziskavo smo pokazali, da omogočajo elegantne dokaze o obstoju rešitev ter osvetlijo globljo strukturo problemov, kot so delitev ogrlice, barvanje grafov in pravična delitev. Čeprav niso vedno konstruktivne, njihov prispevek k razumevanju in reševanju kombinatoričnih izzivov ostaja nepogrešljiv. Spoznanje, da se ti pristopi povezujejo tudi s praktičnimi problemi, kot so delitve virov in teorija iger, dodatno potrjuje njihovo vrednost v matematični in uporabni sferi. S potrjujemo dosego ciljev naloge, saj smo uspešno prikazali povezavo med topologijo in kombinatoriko ter odgovorili na raziskovalno vprašanje.

Družbena odgovornost in razvoj

- Raziskovalna naloga prispeva k matematični pismenosti in interdisciplinarnemu povezovanju znanja.
- Topološke metode imajo praktične aplikacije v optimizaciji virov, pravični delitvi in analizi podatkov, kar podpira trajnostni razvoj.
- Možni doprinosi vključujejo izboljšanje algoritmov v računalništvu in teoriji iger.

16 LITERATURA

1. Babai, L., & Frankl, P. (2022). "Linear Algebra Methods in Combinatorics". University of Chicago. Pridobljeno s <https://people.cs.uchicago.edu/~laci/babai-frankl-book2022.pdf>
2. Klarreich, E. (2014). "To Divide the Rent, Start With a Triangle". *The New York Times*. <https://www.nytimes.com/2014/04/29/science/to-divide-the-rent-start-with-a-triangle.html>
3. Küronya, A. (2010). "Introduction to Topology". Goethe University Frankfurt. Pridobljeno s https://www.uni-frankfurt.de/64271720/TopNotes_Spring10.pdf
4. Matoušek, J. (2008). "Using the Borsuk–Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry (2nd ed.)". Charles University, Department of Applied Mathematics. Springer. Pridobljeno s <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/matousek1x.pdf>
5. Müller, T., & Stehlík, M. (2017). "Generalised Mycielski Graphs and the Borsuk–Ulam Theorem". University of Groningen & Université Grenoble Alpes. arXiv. Pridobljeno s <https://arxiv.org/pdf/1710.01072.pdf>
6. Musin, O. R. (2014). "Around Sperner's Lemma". University of Texas at Brownsville. Pridobljeno s <https://arxiv.org/pdf/1405.7513.pdf>
7. Nalon, N. (b.d.). "The Borsuk-Ulam Theorem and Bisection of Necklaces". Princeton University. Pridobljeno s <https://web.math.princeton.edu/~nalon/PDFS/Publications/The%20Borsuk-Ulam%20Theorem%20and%20bisection%20of%20necklaces.pdf>
8. Nyman, K. L., & Su, F. E. (2013). "A Borsuk–Ulam Equivalent That Directly Implies Sperner's Lemma". *The American Mathematical Monthly*, 120 (4), 346–354. Mathematical Association of America (MAA). JSTOR. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.120.04.346>
9. Ranicki, A. (b.d.). "Wilson Graph". University of Edinburgh. Pridobljeno s <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wilsongraph.pdf>
10. Scientific American. (b.d.). "The Strangely Serious Implications of Math's Ham Sandwich Theorem". Pridobljeno s <https://www.scientificamerican.com/article/the-strangely-serious-implications-of-maths-ham-sandwich-theorem/>
11. Snoj, J. J. (2020). *Kombinatorična geometrija*. Slovensko društvo matematikov, fizikov in astronomov (DMFA). Pridobljeno s https://www.dmfa.si/Tekmovanja/MaSSA/Dokumenti/cg_predavanje.pdf
12. "Sperner's Lemma". (b.d.). Wikipedia. Pridobljeno s https://en.wikipedia.org/wiki/Sperner%27s_lemma
13. Weinstein, M. (2021). "Combinatorial Perspectives on Borsuk-Ulam and Brouwer". University of Chicago. Pridobljeno s <https://math.uchicago.edu/~may/REU2021/REUPapers/Weinstein.pdf>

14. Wilson, R. J. (1996). "Introduction to Graph Theory (4th Edition)". Addison Wesley Longman Limited. Pridobljeno s <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wilsongraph.pdf>
15. "Ham sandwich theorem". (b. d.). Wikipedia. Pridobljeno s https://en.wikipedia.org/wiki/Ham_sandwich_theorem
16. Sun, A. (2014). "To Divide the Rent, Start With a Triangle". The New York Times. Pridobljeno s: <https://www.nytimes.com/2014/04/29/science/to-divide-the-rent-start-with.html>

17 Viri slik

Slika 1: <https://www.druga.si/wp-content/uploads/2015/08/logo.png>

Slika 2: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTYFpulBwUQ5bHKw_abpwbwShJ7Y0d-ulBSg&s

Slika 3: <https://www.youtube.com/watch?v=yuVqxCSsE7c> (obdelana)

Slika 4: Matoušek, J. — PDF dostopen prek brskalniškega dodatka

Slika 5: Matoušek, J. — PDF dostopen prek brskalniškega dodatka

Slika 6: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7c/Linalg_antipodal.png

Slika 7: <https://www.youtube.com/watch?v=yuVqxCSsE7c> (obdelana)

Slika 8: <https://www.youtube.com/watch?v=yuVqxCSsE7c> (obdelana)

Slika 9: <https://medium.com/from-the-diaries-of-john-henry/visualizing-higher-dimension>

Slika 10: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/ca/Ham_sandwich_theorem_2d.png/250px-Ham_sandwich_theorem_2d.png

Slika 11: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS7j1o1MZ_J2Z2EheKFxeGBx1s

Slika 12: https://star-wars-and-mlpfim.fandom.com/wiki/Death_Star?file=Death_Star.jpg

Slika 13: <https://quantdare.com/wp-content/uploads/2018/11/simplices.png>

Slika 14: https://www.researchgate.net/figure/Triangulation-of-the-unit-circle-by-IDEAS_fig1_2297726

Slika 15: https://en.wikipedia.org/wiki/Tucker%27s_lemma#/media/File:TuckerLemExample.png

Slika 16: <https://scientificgems.wordpress.com/wp-content/uploads/2022/08/homology.png>

Slika 17: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5a/Th%C3%A9or%C3%A8me-de-Brouwer-%28cond-2%29.jpg>

Slika 18: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/Hex-board-11x11-%282%29.svg>

Slika 19: https://media.istockphoto.com/id/843978190/photo/top-view-of-hot-coffee-cappuccino-jpg?s=612x612&w=0&k=20&c=FrGfh9nrksQ9kWz17Ib8A1svoUNkCrlhglHtrfc_QkY=

Slika 20: Weinstein, J. — PDF dostopen prek brskalniškega dodatka

Slika 21: <https://www.youtube.com/watch?v=7s-YM-kcKME> (obdelana)

Slika 22: <https://quantdare.com/wp-content/uploads/2018/11/simplices.png>

Slika 23: https://mathproblems123.wordpress.com/wp-content/uploads/2018/02/tetra_cube_1.png

Slika 24: Lasten vir

Slika 25: <https://www.nytimes.com/2014/04/29/science/to-divide-the-rent-start-with-a-triangle.html>

Slika 26: DMFA — PDF dostopen prek brskalniškega dodatka

Slika 27: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/90/Petersen_graph_3-coloring.svg/1200px-Petersen_graph_3-coloring.svg.png

Slika 28: DMFA — PDF dostopen prek brskalniškega dodatka

Slika 29: <https://mathworld.wolfram.com/KneserGraph.html>

Slika 30: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e6/Kneser_graph_KG%285%2C2%29.svg

Slika 31: <https://mathworld.wolfram.com/MycielskiGraph.html>

Slika 32: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/44/Radon_coefficients.svg/1200px-Radon_coefficients.svg.png Slika 33: Lastna priloga Slika 34: Snoj J. J. (2020)

Priloga 1

Problem na Zvezdi smrti

Za začetek postavimo en problem. *Vojna zvezd* je ena izmed najbolj priljubljenih filmskih franšiz vseh časov – redkokdo ne pozna ogromne, kroglaste vesoljske postaje *Galaktičnega Imperija*, znane kot *Zvezda smrti*. Ta bojna postaja ima več dostopnih točk, med katerimi so *evakuacijski ventili* in *dostopni pristaniški vhodi* (iz vsakega vodi vsaj en jašek v notranje sektorje), strateško razporejeni po njeni površini. Predstavljajmo si, da Uporniško zavezništvo (*Rebel Alliance*) skuša prodreti v notranjost Zvezde smrti skozi nezastražene evakuacijske ventile, medtem ko imperialne sile (*Galactic Empire*) vstopajo skozi dostopne vhode, da bi zaščitile postajo. Vsak evakuacijski ventil ima svoj diametralno nasprotni dostopni vhod, kar pomeni, da ima vsak upornik, ki vstopi, točno določenega stormtrooperja ali imperialnega častnika, ki vstopa na nasprotni strani. Če se vsaj dva jaška sekata, temu prostoru rečemo križišče dostopnih kanalov. Imperator Palpatine ima poseben občutek za red in simetrijo ter močno zaupa trikotnikom, saj so znani kot najmočnejša in najbolj stabilna geometrijska oblika. Zato je ukazal, da se notranja struktura jaškov Zvezde smrti zasnuje po strogo urejenem vzorcu, tako da nastane simetrična triangulacija, kar pomeni, da kroglo razdelimo na tetraedre. Poleg tega uporabljajo tako Uporniki kot Imperij tri vrste plovil:

- Uporniki imajo svoje značilne *X-Winge*, *standardne prestreznike* in *srednje velike križarke*.
- Imperij uporablja *TIE lovce*, *naprednejše prestreznike* in *večje bombnike*.

Ko katera koli stran doseže križišče, tam pusti eno izmed svojih enot – bodisi standardno plovilo, bodisi posebno plovilo ali večjo vesoljsko ladjo, kar vpliva na nadzor nad določenim območjem. Če vemo, da so Uporniki in imperijske sile skupaj pokrili vsa križišča, *ali je vedno nujno, da bodo enote iste vrste od Imperija in Upornikov lahko prišle druga do druge le preko uporabe enega jaška?*

Priloga 2

Naloga (Naloga iz priprav na MO). V ravnini je označenih n točk. Za vsake tri označene točke obstaja krog z radijem 1, ki vsebuje te tri točke. Dokazati, da obstaja krog z radijem 1, ki vsebuje vseh n označenih točk.

Rešitev. Opazimo, da so krogi konveksne množice. Naj za vsako točko P_i , $i = 1, 2, \dots, n$, označimo krog s središčem P_i in radijem 1 z C_i . Pogoji naloge zagotavljajo, da za poljubne tri točke P_i , P_j in P_k velja

$$C_i \cap C_j \cap C_k \neq \emptyset,$$

kar pomeni, da obstaja točka, ki je oddaljena manj kot 1 od vseh treh izbranih točk. Ker so vsi krogi konveksne množice, lahko uporabimo Hellyjev izrek, ki pravi, da če ima katerakoli poddružina treh konveksnih množic v ravnini neprazno skupno presečišče, potem ima celotna družina neprazno skupno presečišče. Tako dobimo

$$\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset.$$

To pomeni, da obstaja točka, ki leži v vseh krogih C_i , oziroma obstaja krog z radijem 1, ki vsebuje vseh n označenih točk.

S tem je naloga dokazana.