PROSTORNINE OKROGLIH TELES

Raziskovalna naloga srednješolcev s področja matematike

Avtorici: Joana ŠAVLI
Suzana ŠAVLI

Mentor: Marko KOSELJ, prof.

Strahinj, februar 2025

ZAHVALA

Zahvaljujeva se najinemu mentorju prof. Marku Koselju za njegovo strokovno vodenje, konstruktivne povratne informacije in dragoceno podporo pri izvedbi najine raziskovalne naloge.

I KAZALO VSEBINE

II KAZALO SLIK

III KAZALO TABEL

POVZETEK

Najprej smo pogledali pojem prostornine oziroma volumna in njegov izračun. S pomočjo določenega integrala nam je uspelo izpeljali formule za prostornino valja, stožca, prisekanega stožca, krogle, elipsoida in eliptičnega paraboloida. Ob določenih predpostavkah smo analitično izpeljali formulo za volumen tube zobne paste. Njen volumen smo izračunali tudi na numeričen način s trapeznim pravilom iz izmerjenih vrednosti.

Ključne besede: prostornina, paraboloid, elipsoid, stožec, valj, krogla, tuba zobne paste

ABSTRACT

First, we looked at the concept of volume and how it is calculated. Using the definite integral, we were able to derive the formulae for the volume of a cylinder, a cone, a truncated cone, a sphere, an ellipsoid and an elliptical paraboloid. Under certain assumptions, we have analytically derived the formula for the volume of a tube of toothpaste. Its volume was also calculated numerically using the trapezoidal rule from the measured values.

Keywords: volume, paraboloid, ellipsoid, cone, cylinder, sphere, toothpaste tube

1 UVOD

V vsakdanjem življenju se pogosto srečujemo z različnimi okroglimi telesi kot so valji, stožci, krogle in celo embalaže izdelkov, kot je tuba zobne paste. Prostornina takšnih teles igra ključno vlogo na mnogih znanstvenih in tehničnih področjih, od arhitekture in inženirstva do farmacije in živilske industrije.

V naši raziskovalni nalogi smo se osredotočili na izračun prostornine okroglih teles s pomočjo določenega integrala. Zanimalo nas je, ali uspemo z našim znanjem izračunavanja določenega integrala izračunati volumne preprostih in tudi manj preprostih okroglih teles. Raziskali smo različne geometrijske oblike, vključno z valjem, stožcem, prisekanim stožcem, kroglo, elipsoidom in paraboloidom. Posebno pozornost smo namenili tudi tubi zobne paste, saj ta predstavlja zanimiv primer v realnem svetu, kjer poznavanje prostornine vpliva na proizvodnjo in oblikovanje embalaže.

V nadaljevanju naloge bomo predstavili teoretično ozadje izračuna prostornin s pomočjo integrala, nato pa bomo podrobno analizirali vsako izmed izbranih teles ter prikazali konkretne izračune. Cilj naše raziskave je bil bolje razumeti matematične principe, ki se skrivajo za temi telesi, in prikazati, kako se ti koncepti uporabljajo v praksi.

2 PROSTORNINA OZIROMA VOLUMEN

Prostornina meri prostor, ki ga zavzema telo. Za merjenje prostornine potrebujemo enoto. Če izberemo dolžinsko enoto e, je prostorninska enota kocka z robom e.

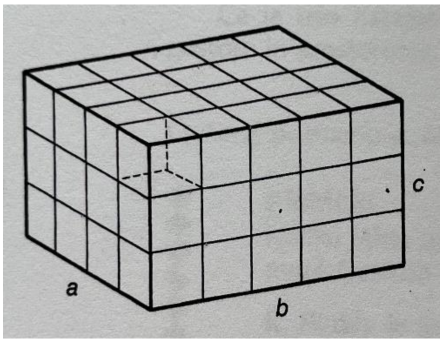
- Kocka z robom 1 meter ima prostornino 1 m^3 (kubični meter).
- Kocka z robom 1 decimeter ima prostornino 1 dm^3, kar je enako 1 liter.
- Kocka z robom 1 centimeter ima prostornino 1 cm^3.

LASTNOSTI PROSTORNINE

- Prostornina telesa, razrezanega na dele, je enaka vsoti prostornin teh delov.
- Telesa, ki so po obliki enaka in imajo enake mere, imajo enako prostornino.

Izračun prostornine kvadra:

Prostornina kvadra z robovi a, b, c izračunamo po formuli $V = a \cdot b \cdot c$, saj v kvader lahko po dolžini zložimo a enotskih kock, po širini b in po višini c enotskih kock (glej sliko 1).



Slika 1: Kvader

Kako pa bi določili volumen telesa nepravilne oblike?

Telo in prostor okrog njega si mislimo razrezana na kocke z robom 1 dm. Prostornina telesa se meri s kockami določenih dimenzij. Prostornino telesa izračunamo tako, da ugotovimo koliko kock z robom 1 cm je v telesu. Če je teh kock Z, je prostornina telesa $V = Z\ cm^3$. Če se kocke ne prilegajo točno telesu, izmerimo prostornino z manjšimi kockami. Tako dobimo bolj točen približek za prostornino telesa. Čim manjše kocke uporabimo za merjenje, tem bolj točen približek prostornine dobimo. V limiti pa dobimo točno vrednost.

Povezava z maso in gostoto:

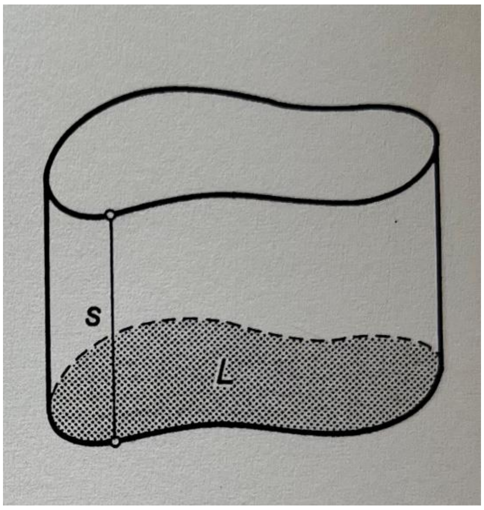
Če telo napolnimo (npr. z vodo), lahko ugotovimo njegovo prostornino s tehtanjem telesa, saj je masa telesa (m) povezana s prostornino (V) preko gostote (ρ) s formulo $V = \frac{m}{\rho}$.

3 IZRAČUN VOLUMNA TELES Z INTEGRIRANJEM

3.1 POKONČNI VALJ NAD LIKOM L IN NJEGOV VOLUMEN

V ravnini imamo lik L, omejen s sklenjeno črto l. V vsaki točki te črte konstruirajmo pravokotnico na dano ravnino. Tako dobimo v prostoru valjasto-cilindrično ploskev nad črto l (slika 2). Pravokotnico na dano ravnino skozi točko črke l imenujemo oblikovalka naše valjaste ploskve.

Imamo še eno ravnino, vzporedno dani. Obe ravnini in valjasta ploskev omejujejo del prostora, ki ga imenujemo pokončni valj nad likom L (glej sliko 2). Tuja beseda za valj je CILINDER.



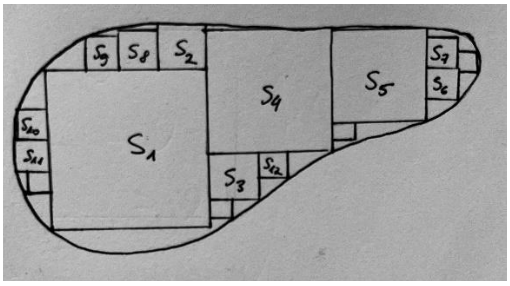
Slika 2: Pokončni valj nad likom L

Del oblikovalke med obema ravninama je stranica valja. Valjasta ploskev izreže iz druge ravnine lik, skladen liku L, saj si lahko mislimo, da je ta lik nastal z vzporednim premikom lika L vzdolž stranice. Ta dva lika imenujemo osnovni ploskvi našega valja. Razdalja med obema osnovnima ploskvama je višina valja.

Pokončno prizmo imamo lahko za valj nad večkotnikom. Če je lik L krog, pa govorimo o krožnem valju.

Poskusimo ugotoviti formulo za izračun prostornine pokončnega valja nad likom L. Lahko si mislimo, da je pokončni valj sestavljen iz mnogih kvadrov (glej sliko 3 z osnovnimi ploskvami kvadrov).

Volumen enega kvadra je $V = a \cdot b \cdot c = S \cdot v$.



Slika 3: Osnovna ploskev razdeljena na n kvadratov

Če seštejemo volumne vseh kvadrov, dobimo:

$$V = S_1 v + S_2 v + \cdots + S_n v$$

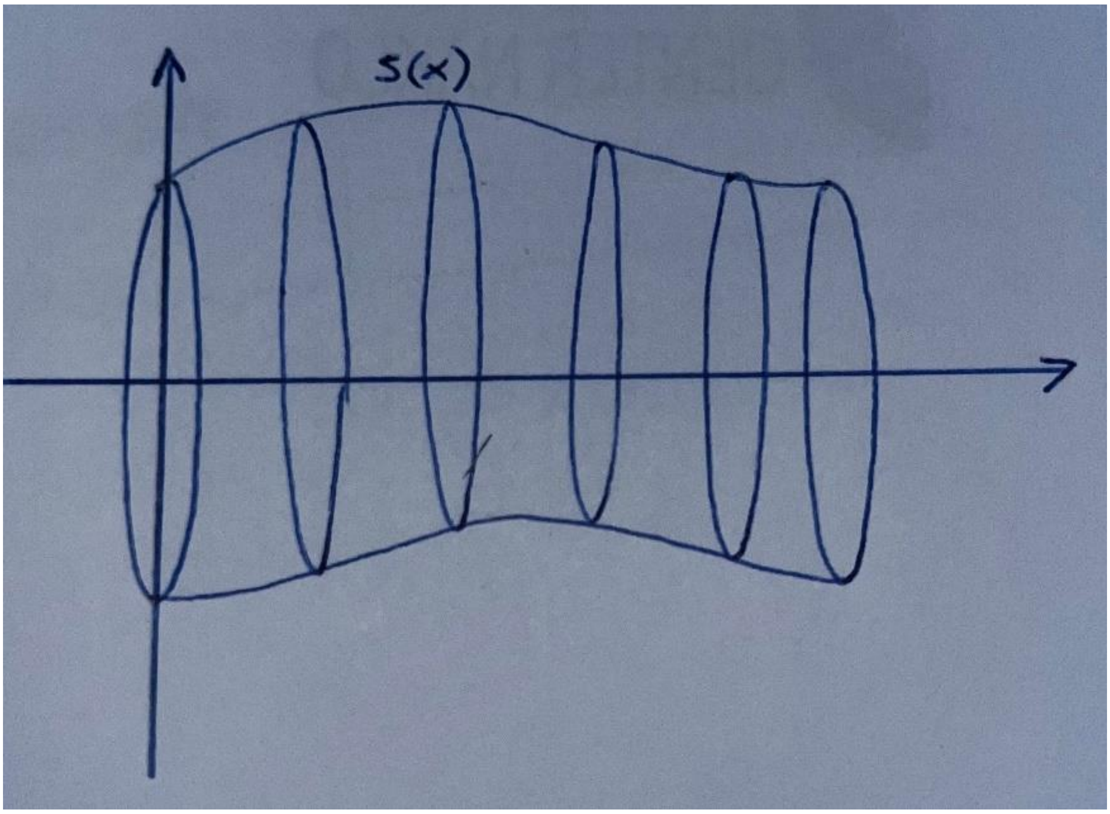
$$V = (S_1 + S_2 + \cdots + S_n) \cdot v$$

$$V = S \cdot v$$

Če naredimo vedno bolj drobno delitev lika L na pravokotnike ali kvadrate, potem je volumen pokončnega valja vedno bližje izrazu $V = S \cdot v$, kjer je S vsota ploščin pravokotnikov. Zato verjamemo, da volumen pokončnega valja nad likom L dobimo po formuli $V = S \cdot v$, kjer za S vzamemo ploščino lika L oziroma ploščino osnovne ploskve.

3.2 VOLUMEN TELESA

Imejmo telo, ki ga v koordinatnem sistemu položimo vzdolž x-osi (slika 4).



Slika 4: Skica poljubnega telesa

Telo sekamo z vzporednimi ravninami, ki jih postavimo pri delilnih točkah x_1, x_2, x_3,…x_n. Preseki ravnin z našim telesom naj imajo v delilnih točkah ploščino $S(x_i)$. Razdaljo med delilnima točkama označimo $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Prostornina dela telesa med dvema sosednjima ravninama je približno enaka $V_i = S(x_i) \cdot \Delta x_i$. Del telesa med ravninama bi lahko aproksimirali z notranjim pokončnim valjem in zunanjim pokončnim valjem. Vidimo pa, da čim bolj ko zgostimo delilne točke x_i, tem bolj se zunanji in notranji valj prilegata našemu delu telesa med ravninama. In zato gre v limiti, ko gre število delilnih točk proti ∞, širine intervalov pa neodvisno proti 0, ta približna vrednost prostornine proti točni vrednosti prostornine dela telesa. To zapišemo:

$$V = \lim_{n\to\infty,\ \Delta x_i \to 0} (S(x_1)\Delta x_1 + S(x_2)\Delta x_2 + \cdots + S(x_n)\Delta x_n)$$

Oziroma

$$V = \lim_{n\to\infty,\ \Delta x_i \to 0} \Sigma S(x_i)\Delta x_i$$

.Vemo pa, da vrednost takega izraza izračunamo s pomočjo določenega integrala:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

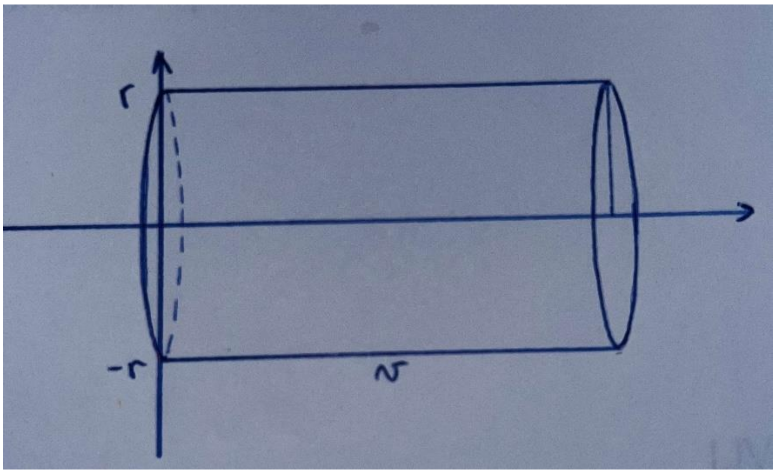
Po tej formuli bomo v naslednjih razdelkih izračunali prostornine raznih okroglih teles.

Telo, ki je dobljeno na tak način, da lik pod pozitivno funkcijo f na intervalu $[a, b]$. Ko to telo zavrtimo koli x-osi, ga imenujemo rotacijsko telo. Prostornino rotacijskega telesa lahko izračunamo tudi po obrazcu

$$V = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx$$

4 VALJ

Pokončni krožni valj je rotacijsko telo, ki nastane z vrtenjem pravokotnika okoli ene od stranic za 360° ali okoli ene od obeh simetrijskih osi za 180°(glej sliko 5).



Slika 5: Skica valja

Izpeljana formula za volumen valja s pomočjo integrala:

$$V = \pi \int_{a}^{b} y(x)^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_{0}^{v} (r)^2 \, dx$$

$$V = \pi r^2 \int_{0}^{v} dx$$

$$V = \pi r^2 \cdot \left[\frac{x}{1}\right] \Bigg|_{0}^{v}$$

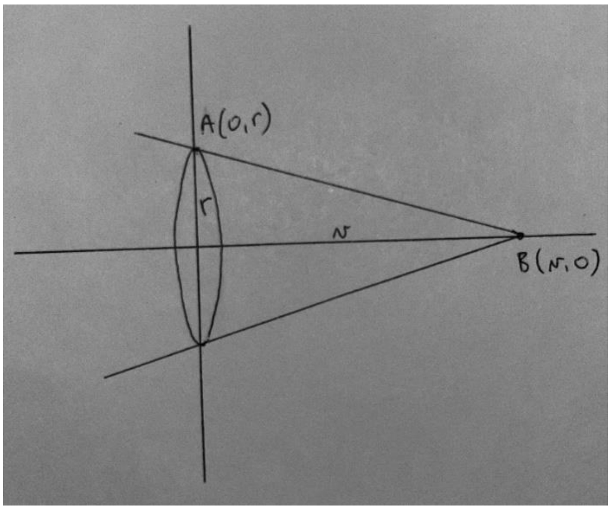
$$V = \pi r^2 \left(\frac{v}{1} - \frac{0}{1}\right)$$

$$V = \pi r^2 \cdot v$$

Prišli smo do enakega obrazca za izračun prostornine valja, kot ga že poznamo.

5 STOŽEC

Stožec je okroglo geometrijsko telo, ki ga omejujeta dve mejni ploskvi (osnovna ploskev in plašč) (glej sliko 6).



Slika 6: Skica stožca

Najprej bomo izračunali koeficient naše linearne funkcije, ki omejuje naš stožec:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x^2 - x_1}$$

$$k = \frac{0 - r}{v - 0}$$

$$k = \frac{-r}{v}$$

Začetna vrednost linearne funkcije je kar r. Zato je naša linearna funkcija

$$y(x) = -\frac{r}{v} \cdot x + r$$

Nato pa bomo vstavili našo funkcijo v določeni integral za izračun volumna rotacijskega telesa:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$V = \pi \int_{0}^{v} \left(-\frac{r}{v}x + r\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{0}^{v} \left(+\frac{r^2x^2}{v^2} - 2\frac{r^2x}{v} + r^2x^0\right) dx$$

$$V = \pi \left(\frac{r^2}{v^a} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2r^2}{v} \cdot \frac{x^2}{2} + r^2\frac{x}{1}\right) \Bigg|_0^v$$

$$V = \pi \left(\left(\frac{r^2v^3}{v^2 \cdot 3} - \frac{2r^2 \cdot v^2}{v \cdot 2} + r^2 \cdot \frac{v}{1}\right) - \left(\frac{r^2 \cdot 0^3}{v^2 \cdot 3} - \frac{2r^2 \cdot 0^2}{v \cdot 2} + \frac{r^2 \cdot 0}{1}\right)\right)$$

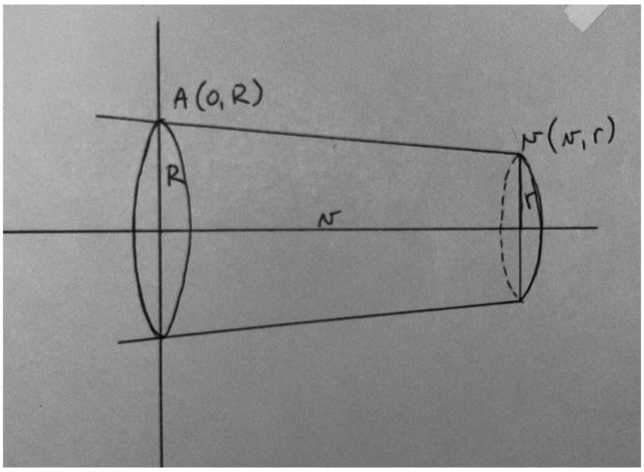
$$V = \pi \left(\frac{r^2 \cdot v}{3} - r^2v + r^2v - 0\right)$$

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3}$$

Dobili smo znano formulo za izračun volumna stožca.

6 PRISEKANI STOŽEC

Prisekani stožec dobimo, če stožcu s polmerom R in vrhom odrežemo vzporedno z osnovno ploskvijo stožec s polmerom r in z istim vrhom (glej sliko 7).



Slika 7: Skica prisekanega stožca

Najprej bomo izračunali našo linearno funkcijo, ki omejuje prisekani stožec, tako, da bomo v splošno enačbo linearne funkcije vstavili naše vrednosti za k in n:

$$y = kx + n$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad n = R$$

$$k = \frac{r - R}{v - 0}$$

$$k = \frac{r - R}{v}$$

$$y = \frac{r - R}{v} \cdot x + R$$

Nato pa bomo vstavili funkcijo v določeni integral in izračunali prostornino telesa:

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r - R}{v} \cdot x + R\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r-R}{v} \cdot x + R\right)^2 dx = \pi \int_0^v \left(\left(\frac{r-R}{v}\right)^2 x^2 + 2\frac{r-R}{v} \cdot Rx + R^2\right) dx$$

$$V = \pi \left(\left(\frac{r-R}{v}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2(r-R)}{v} \cdot R\frac{x^2}{2} + R^2\frac{x}{1}\right)\Bigg|_0^v$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{r-R}{v}\right)^2 \frac{v^3}{3} + \frac{2(r-R)}{v} \cdot R\frac{v^2}{2} + R^2 v - (0+0+0)\right]$$

$$V = \pi \left[\frac{(r-R)^2 \cdot v}{3} + (r-R)R \cdot v + R^2 \cdot v\right]$$

$$V = \pi \left(\frac{(r^2 - 2rR + R^2) \cdot v}{3} + Rrv - R^2 v + R^2 v\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{r^2 v - 2rRv + R^2 v}{3} + \frac{3rRv}{3}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{r^2 v + rRN + R^2 v}{3}\right)$$

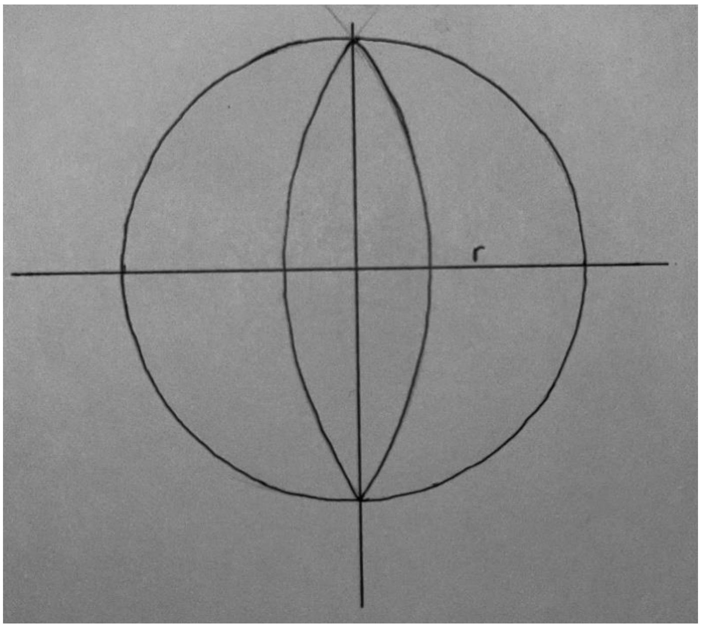
$$V = \pi \left(\frac{v(r^2 + Rr + R^2)}{3}\right)$$

$$V = \frac{\pi v(r^2 + Rr + R^2)}{3}$$

Dobili smo znano formulo za volumen prisekanega stožca. Opazimo še nekaj. Če bi namesto polmera r vstavili polmer R, bi dobili formulo za volumen valja.

7 KROGLA

Krogla je geometrijsko telo, omejeno s krogelno lupino ali sfero. Sfera je množica točk v prostoru, ki so enako (za polmer r) oddaljene od ene točke – središča (glej sliko 8).



Slika 8: Skica krogle

Krogla je tudi rotacijsko telo. Nastane z vrtenjem kroga okoli enega od premerov za kot 180° ali z vrtenjem polkroga okoli premera (2r) za kot 360°.

Če iz osnovne enačbe krožnice izpeljemo y, dobimo funkcijo, ki jo lahko uporabimo v integraciji, da dobimo volumen telesa:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

S pomočjo določenega integrala izračunamo prostornino krogle:

$$V = \pi \int_{a}^{b} y^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx$$

$$V = \pi \left[r^2 \frac{x^1}{1} - \frac{x^3}{3}\right] \Big|_{-r}^{r}$$

$$V = \pi \left[\left(r^2 \frac{r}{1} - \frac{r^3}{3}\right) - \left(r^2 \frac{-r}{1} - \frac{(-r)^3}{3}\right)\right]$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{r^3}{1} - \frac{r^3}{3}\right) - \left(\frac{-r^3}{1} + \frac{r^3}{3}\right)\right]$$

$$V = \pi \left[\frac{3r^3}{3} - \frac{r^3}{3} + \frac{3r^3}{1} - \frac{r^3}{3}\right]$$

$$V = \pi \left[\frac{3r^3}{3} - \frac{r^3}{3} + \frac{3r^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right]$$

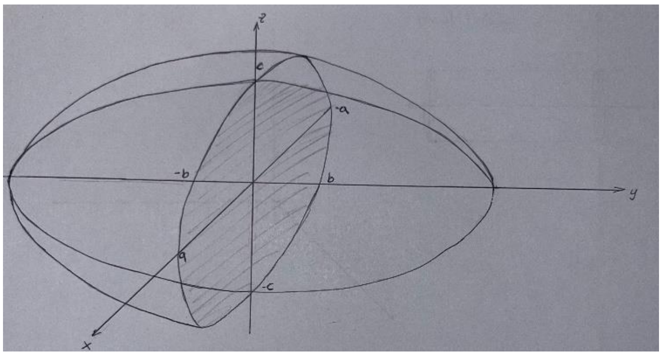
$$V = \pi \left[\frac{4r^3}{3}\right]$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Dobili smo enačbo za izračun prostornine krogle.

8 ELIPSOID

Elipsoid je zaprta ploskev, katere vsi ravninski prerezi so elipse ali krogi. Simetričen je glede na tri med seboj pravokotne osi, ki se sekajo v središču. Elipsoid dobimo iz krogle tako, da jo v x-smeri, y-smeri in z-smeri skrčimo z določenim faktorjem. Telo je podobno žogi za ameriški nogomet ali krompirju (glej sliko 9).



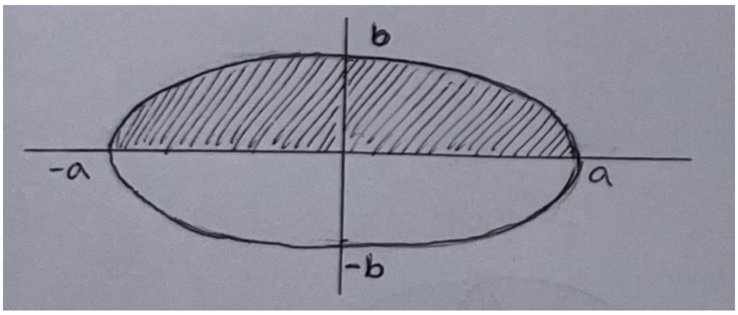
Slika 9: Skica elipsoida

Splošna enačba našega elipsoida je:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Za izračun prostornine elipsoida $V = \int_{-a}^{a} S(x)\, dx$, pa moramo izračunati S od prečnega preseka tega lika, ki je elipsa.

PLOŠČINA ELIPSE



Slika 10: Skica zgornje polovice za izračun ploščine elipse

Najprej iz enačbe za elipso izrazimo y:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \, / \cdot b^2$$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x^2)}$$

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Nato vstavimo funkcijo v določeni integral in s pomočjo njega izračunamo ploščino zgornje polovice (glej sliko 10).

$$S = \int_{-a}^{a} y(x) \, dx$$

$$S = \int_{-a}^{a} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

Vzamemo spremenjivko $x = a \, sin \, \varphi$, izračunamo odvod $x' = a \, cos \, \varphi$ in izpeljemo $dx = a \, cos \, \varphi \cdot d\varphi$.

$$S = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2 \cdot sin^2\, \varphi} \cdot a \cos\varphi\, d\varphi$$

$$S = \frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - sin^2\, \varphi)} \cdot a\, cos\, \varphi \cdot d\varphi$$

$$S = \frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cdot cos^2\varphi} \cdot a \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$$

$$S = \frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\, cos\, \varphi \cdot a\ \cos\varphi \cdot d\varphi$$

$cos^2\, \varphi$ znamo izraziti s pomočjo dvojnega kota 2 φ*:*

$$\cos(2\varphi) = cos^2\varphi - sin^2\varphi$$

$$1 = cos^2\varphi + sin^2\varphi$$

$$\cos(2\varphi) + 1 = 2cos^2\varphi\ /: 2$$

$$\frac{\cos(2\varphi) + 1}{2} = cos^2\varphi$$

$$\frac{\cos(2\varphi)}{2} + \frac{1}{2} = cos^2\varphi$$

$$\frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{1}{2} = cos^2\varphi$$

Sedaj pa vstavimo naprej v formulo:

$$S = \frac{b}{a} a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2 \varphi \, d\varphi$$

$$S = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} cos(2\varphi) + \frac{1}{2}\right) d\varphi$$

$$S = ab \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} cos(2\varphi) \, d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\varphi \right)$$

Vzamemo novo spremenljivko $u = 2\varphi$, izračunamo odvod $u' = 2$, nato izrazimo $d\varphi = \frac{du}{2}$. Ker smo uvedli novo spremenljivko, moramo uvesti tudi novo zgornjo in novo spodnjo mejo:

Zgornja meja: $u = 2\frac{\pi}{2}$, $u = \pi$. Spodnja meja: $u = -\pi$. Dobimo:

$$S = ab \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} cos\,(u) \cdot \frac{1}{2} du + \frac{1}{2} \left[\frac{\varphi}{1}\right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$S = ab \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot [sin\, u] \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) \right)$$

$$S = ab \left(\frac{1}{4} (sin(\pi) - sin(-\pi)) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$S = ab \left(\frac{1}{4} \big(0 - (0)\big) + \frac{1}{2} \pi \right)$$

$$S = ab \left(0 + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$S = a \cdot b \cdot \frac{\pi}{2} \,.$$

To je ploščina zgornje polovice elipse. Zato je ploščina elipse s polosema a in b enaka $S = \pi ab$. Ploščina elipse s polosema b in c pa je $S = \pi bc$.

Izračunajmo sedaj volum en našega elipsoida z enačbo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Pri vsakem x-u je prečni prerez tega elipsoida elipsa. Pri izbranem x-u izračunajmo, kolikšni sta polosi te elipse:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2 a^2}{b^2(a^2 - x^2)} + \frac{z^2 a^2}{c^2(a^2 - x^2)} = 1$$

$$\frac{y^2}{\frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}} + \frac{z^2}{\frac{c^2(a^2 - x^2)}{a^2}} = 1$$

Zato ena polos meri $\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ in druga polos $\frac{c\sqrt{a^2-x^2}}{a}$. Ploščina elipse pri nekem x-u je zato

$$S = \pi \frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a} \cdot \frac{c\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \frac{\pi bc(a^2-x^2)}{a^2}$$

Volumen elipsoida dobimo po formuli:

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)\, dx$$

$$V = \int_{-a}^{a} \frac{\pi bc(a^2 - x^2)}{a^2} dx$$

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \cdot \int_{a}^{a} (a^2 x^0 - x^2)\, dx$$

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \cdot \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \cdot \left(\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right)\right)$$

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \cdot \left(\frac{3a^3}{3} - \frac{a^3}{3} + \frac{3a^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)$$

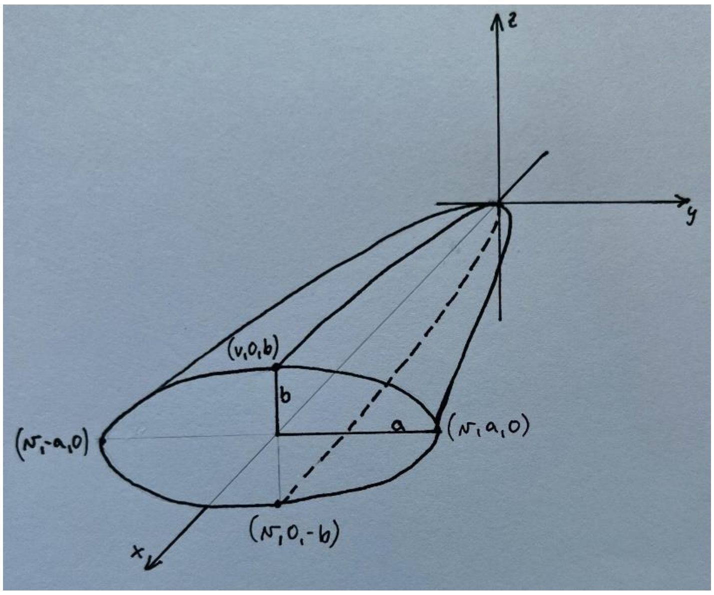
$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \cdot \frac{4a^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi abc}{3}$$

To je formula za volumen našega elipsoida. Opazimo še to, da če so vse tri polosi enake in zato za a, b, c vzamemo povsod r, potem dobimo ravno obrazec za volumen krogle $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, kar smo pričakovali.

9 ELIPTIČNI PARABOLOID

Eliptični paraboloid omejujejo točke (x, y, z), ki zadoščajo pogoju $\frac{x}{v} = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$. Poleg tega telo omejuje še ravnina, ki je pri $x = v$ pravokotna na x-os. Eliptiči paraboloid je telo, ki je skicirano na sliki 11. Za njega je značilno, da so prečni preseki z ravnino, ki je pravokotna na x-os, elipse. Prečni preseki z ravnino, ki je pravokotna na y-os ali z-os, pa so parabole.



Slika 11: Skica eliptičnega paraboloida

Pri nekem izbranem x, si ogledamo elipso, ki je dobljena kot presek ravnine, pravokotne na abscisno os v tistem x-u, s paraboloidom.

Poskušajmo ugotoviti velikost obeh polosi od te elipse.

$$\frac{x}{v} = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \,/\cdot \frac{v}{x}$$

$$1 = \frac{vy^2}{a^2x} + \frac{z^2v}{b^2x}$$

$$1 = \frac{y^2}{\frac{a^2x}{v}} + \frac{z^2}{\frac{b^2x}{v}}$$

Velika polos je $a' = \sqrt{\frac{a^2x}{v}} = a \cdot \sqrt{\frac{x}{v}}$.

Mala polos je $b' = \sqrt{\frac{b^2x}{v}} = b \cdot \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Ploščina elipse je:

$$S = \pi \cdot a'b'$$

$$S = \pi \cdot a\sqrt{\frac{x}{v}} \cdot b\sqrt{\frac{x}{v}}$$

$$S = \pi \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{v^2}}$$

$$S(x) = \pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{x}{v}$$

$$S(x) = \frac{\pi abx}{v}$$

Zdaj pa bomo našo ploščino vstavili v določeni integral in izračunali prostornino eliptičnega paraboloida:

$$V = \int_0^v S(x)\,dx$$

$$V = \int_0^v \frac{\pi ab}{v} \cdot x\,dx$$

$$V = \left(\frac{\pi ab}{v} \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^v$$

$$V = \frac{\pi ab}{v} \cdot \frac{v^2}{2} - \frac{\pi ab}{v} \cdot \frac{0^2}{2}$$

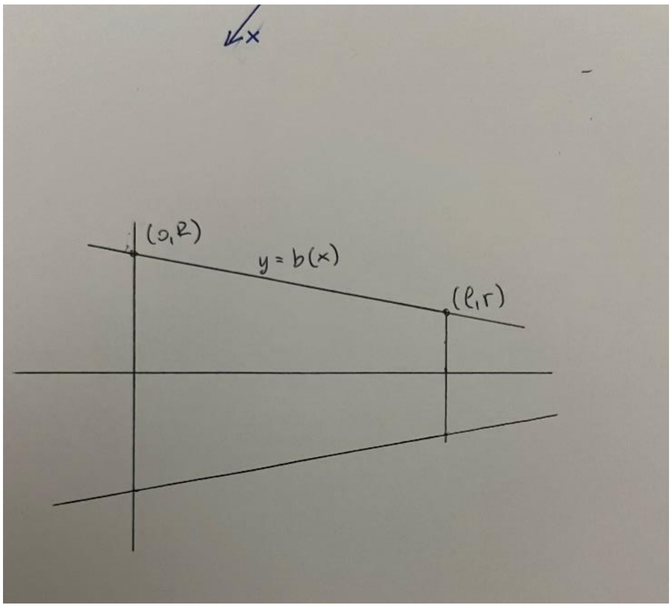
$$V = \frac{\pi ab \cdot v}{2}$$

Vidimo, da je volumen odvisen od obeh polosi mejne elipse ter od višine paraboloida.

10 TUBA ZOBNE PASTE

Tuba zobne paste je telo, ki ga dobimo če valj na eni strani stisnemo v daljico. Za izračun volumna predpostavimo, da je prečni presek tube povsod elipsa. In še to, da se velika polos in mala polos vzdolž tube preprosto spreminjata. Če tuba leži, bomo predpostavili, da se njena širina linearno spreminja vzdolž tube. Za spreminjanje višine tube pa bomo naredili dva izračuna. Prvič bomo predpostavili, da se višina linearno spreminja vzdolž dolžine. Drugič pa bomo predpostavili, da je odvisnost višine vzdolž dolžine kvadratna funkcija. Širino in višino bomo merili od simetrale tube v eno stran. Širina in višina tako predstavljata polosi prečne elipse v neki točki.

Obe polosi elipse, ki je najbližja pokrovčku, naj merita r . Na stisnjenem koncu pa naj ena polos meri R, druga pa 0 . Dolžina tube, brez podaljška z navojem za pokrovček, naj meri l (glej sliko 12 in 13).



Slika 12: Skica tube zobne paste

Izpeljava za našo linearno funkcijo (glej sliko 12), ki predstavlja širino ležeče tube:

$$y = b(x)$$

$$b(x) = kx + n$$

$$b(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + n$$

$$b(x) = \frac{r-R}{l} \cdot x + R$$

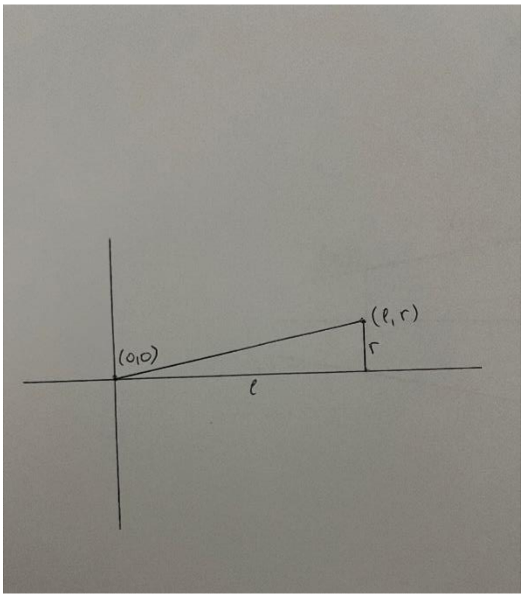
10.1 VIŠINA TUBE $a(x)$ JE LINEARNA FUNKCIJA

Izpeljali bomo še funkcijo za širino tube $a(x)$, ki omejuje našo tubo zobne paste (glej sliko 13):

$$y = kx + n$$

$$y = \frac{r}{l}x + 0$$

$$a(x) = \frac{r}{l}x$$



Slika 13: Skica tube zobne paste

Zdaj pa bomo naši funkciji vstavili v določeni integral in izračunali prostornino tube zobne paste:

$$V = \int_0^l S(x)dx$$

$$V = \int_0^l \pi a(x) \cdot b(x)dx$$

$$= \int_0^l \pi \frac{r}{l} x \left(\frac{r-R}{l} x + R\right) dx$$

$$= \int_0^l \left(\frac{\pi r(r-R)}{l \cdot l} x^2 + \frac{\pi r R}{l} x\right) dx$$

$$= \left(\frac{\pi r(r-R)}{l^2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{\pi r R}{l} \cdot \frac{x^2}{2}\right) \Bigg|_0^l$$

$$= \frac{\pi r(r-R)l^3}{l^2 \cdot 3} + \frac{\pi r R l^2}{l \cdot 2} - 0$$

$$= \frac{\pi r l(r-R)}{3} + \frac{\pi r R l}{2}$$

$$= \frac{2(\pi r^2 l - \pi r l R) + 3\pi r R l}{6}$$

$$= \frac{2\pi r^2 l - 2\pi r l R + 3\pi r R l}{6}$$

$$= \frac{2\pi r^2 l + \pi r R l}{6}$$

$$V = \frac{\pi r l \cdot (2r + R)}{6}$$

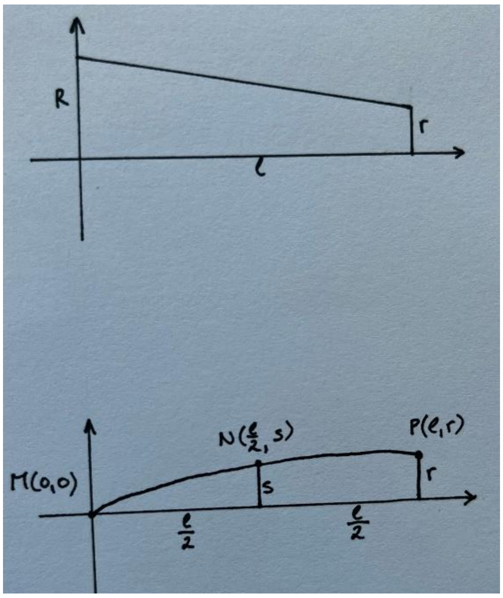
Dobili smo prostornino tube zobne paste v primeru, da vzamemo za višino tube $a(x)$ linearno funkcijo. Kasneje smo opazili, da dobimo po tem obrazcu nižje rezultate, kot je navedeno na tubah (glej tabelo 1). Zato smo se odločili preučiti še možnost, kjer se višina tube spreminja po kvadratni funkciji.

10.2 VIŠINA TUBE $a(x)$ JE KVADRATNA FUNKCIJA

Predpostavimo, da se širina tube $b(x)$ spreminja tako kot prej: $b(x) = \frac{r-R}{l}x + R$.

Zdaj pa bomo vzeli, da je višina tube $a(x)$ kvadratna funkcija (glej sliko 14). Iščemo jo v obliki

$$y = ax^2 + bx + c$$



Slika 14: Skica tube zobne paste

Na sredini tube (pri $x = \frac{l}{2}$) naj polos $a(x)$ meri s. Kadratna funkcija mora potekati skozi točke $M(0,\ 0)$, $N\left(\frac{l}{2},\ s\right)$, $P(l,\ r)$ (glej sliko 14). Dobimo enačbe:

$$M: \quad 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$N: \quad s = a \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{l}{2} + c$$

$$P: \quad r = a \cdot l^2 + b \cdot l + c$$

Rešimo sistem enačb in dobimo:

$$c = 0$$

$$b = \frac{4s - r}{l}$$

$$a = \frac{2r - 4s}{l^2}$$

Zdaj vstavimo a, b in c v našo kvadratno funkcijo, se pravi (x) :

$$y = \frac{2r - 4s}{l^2} x^2 + \frac{4s - r}{l} x$$

$$a(x) = \frac{2r-4s}{l^2} \cdot x^2 + \frac{4s-r}{l} \cdot x$$

S pomočjo določenega integrala izračunamo prostornino tube zobne paste:

$$V = \int_0^l \pi \cdot a(x) \cdot b(x)\, dx$$

$$= \int_0^l \pi \left(\frac{2r - 4s}{l^2} x^2 + \frac{4s - r}{l} x\right) \cdot \left(\frac{r - R}{l} x + R\right) dx$$

$$= \pi \int_0^l \left(\frac{(2r - 4s)(r - R)}{l^2 \cdot l} x^3 + \frac{(4s - r)(r - R)}{l^2} x^2 + \frac{(2r - 4s) \cdot R}{l^2} x^2 + \frac{(4s - r) \cdot R}{l} x\right) dx$$

$$= \pi \int_0^l \left(\frac{(2r-4s)(r-R)}{l^3} x^3 + \frac{4sr - r^2 - 4sR + rR + 2rR - 4sR}{l^2} x^2 + \frac{(4s-r)R}{l} x \right) dx$$

$$= \pi \int_0^l \left(\frac{(2r-4s)(r-R)}{l^3} x^3 + \frac{4sr - r^2 + 3rR - 8sR}{l^2} x^2 + \frac{(4s-r) \cdot R}{l} x \right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{(2r-4s)(r-R)}{l^3} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{4rs - r^2 + 3rR - 8sR}{l^2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{(4s-r)R}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^l$$

$$= \pi \left[\frac{(2r-4s)(r-R)}{l^3} \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{4rs - r^2 + 3rR - 8sR}{l^2} \cdot \frac{l^3}{3} + \frac{(4s-r)R}{l} \cdot \frac{l^2}{2} - 0 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{(2r-4s)(r-R)}{l^3} \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{4rs - r^2 + 3rR - 8sR}{l^2} \cdot \frac{l^3}{3} + \frac{(4s-r) \cdot Rl}{2} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{(2r-4s)(r-R) \cdot l \cdot 3}{12} + \frac{(4rs - r^2 + 3rR - 8sR) \cdot l \cdot 4}{12} + \frac{(4s-r) \cdot Rl \cdot 6}{12} \right]$$

$$= \pi \cdot \frac{(2r^2 - 4rs - 2rR + 4sR) \cdot 3l + (4rs - r^2 + 3rR - 8sR) \cdot 4l + (4sR - rR) \cdot 6l}{12}$$

$$= \pi \cdot \frac{6r^2 l - 12rsl - 6rRl + 12sRl + 16rsl - 4r^2 l + 12rRl - 32sRl + 24sRl - 6rRl}{12}$$

$$= \pi \frac{2r^2 l + 4rsl + 4sRl}{12}$$

$$= \pi \frac{2l}{12} (r^2 + 2rs + 2sR)$$

$$V = \frac{\pi l (r^2 + 2rs + 2Rs)}{6}$$

Dobili smo prostornino za primer, ko za spreminjanje višine tube zobne paste vzamemo kvadratno funkcijo. Da potrdimo naše enačbe, bomo v naslednjem razdelku vanje vstavili izmerjene podatke različnih vrst zobnih past, krem in zaščite pred komarji (glej tabelo 1). Opazovali bomo, kakšne so razlike med našo izračunano prostornino in prostornino, ki je napisana na embalaži različnih tub.

10.3 PRIMERJAVA REZULTATOV

Za različne tube (glej sliko 15) smo v tabeli 1 zbrali podatke: vrsta tube, navedeni volumen $V_{navedeni}$, polmer pri pokrovčku r, polmer pri stisnjenemu delu R, dolžino l, polos po višini na sredini tube s, izračun volumna z linearno funkcijo V in izračun volumna s kvadratno funkcijo V'. Merska enota za volumen je povsod mililiter ml, kar je enako kot cm^3.

Slika 15: Vrste tub in merilni pripomočki

Vrsta tube	$V_{navedeni}$ $[ml]$	r $[cm]$	R $[cm]$	l $[cm]$	s $[cm]$	$V = \frac{\pi r l(2r + R)}{6}$ [ml]	$V' = \frac{\pi l(r^2 + 2rs + 2Rs)}{6}$ $[ml]$
Palmolive brivska krema	63	1,6	2,4	11	1,2	51,6	70,0
Aquafresh zobna pasta	125	1,75	2,6	17	1,4	95	135,7
Koncentrat 48 zaščitna krema za roke	125	1,7	2,6	17	1,4	90,8	132,8
SUN MIX sončna krema	50	1,7	2,6	9,2	1,35	49,1	69,8
MIXA krema za obraz	100	2,0	3,0	11,2	1,4	82,1	105,5
OFF! Zaščita pred komarji in klopi	100	1,9	3,0	11,5	1,45	77,8	104,5

Tabela 1: Različne vrste tub in izračunana prostornina

Opazili smo, da če vzamemo prvo izračunano enačbo in vanjo vstavimo podatke, dobimo manjšo prostornino, kot je napisana na embalažah. Če pa vstavimo v drugo enačbo, kjer smo za funkcijo vzeli kvadratno funkcijo, dobimo prostornine malenkost večje kot so napisane na embalažah. Obrazec s kvadratno funkcijo je nekoliko bolj natančen.

10.4 VIŠINA TUBE $a(x)$ JE PODANA TABELARIČNO

Ker smo ugotovili, da niti linearna niti kvadratna funkcija ne ustrezata dovolj dobro resničnemu spreminjanju višine ležeče tube, smo višine tub kar tabelirali. V tabeli 2 so zbrani podatki za dve od teh tub: Palmolive in OFF!. V stolpcu x so razdalje od izhodišča, v stolpcu a je velikost polovične širine, ki se linearno spreminja, v stolpcu b so višine, ki smo jih dejansko izmerili, v zadnjem stolpcu S pa je pri vsakem x-u izračunana ploščina $S = \pi ab$ elipse, ki je prečni presek tube pri tem x-u. Količine x, a in b so v milimetrih, S pa je v kvadratnih milimetrih.

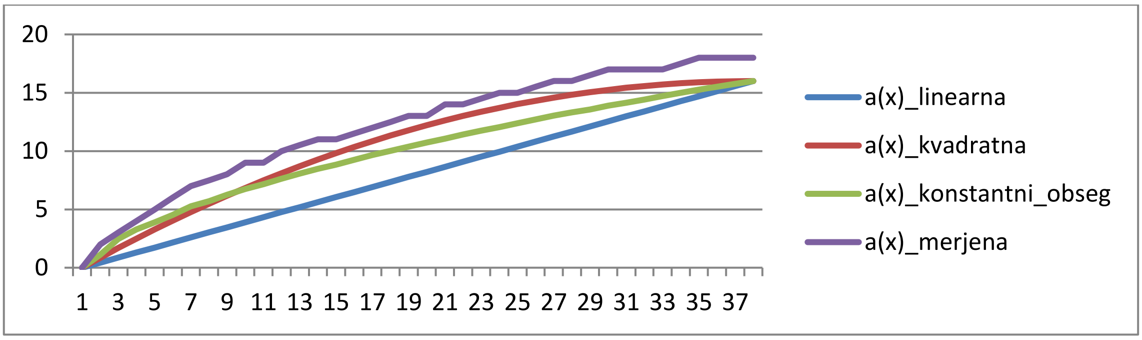
x	a	b	S
0,0	24,0	0,0	0,0
3,0	23,8	2,0	149,3
6,0	23,6	3,0	222,0
9,0	23,3	4,0	293,2
12,0	23,1	5,0	363,1
15,0	22,9	6,0	431,6
18,0	22,7	7,0	498,7
21,0	22,5	7,5	529,2
24,0	22,3	8,0	559,0
27,0	22,0	9,0	622,7
30,0	21,8	9,0	616,6
33,0	21,6	10,0	678,2
36,0	21,4	10,5	705,0
39,0	21,2	11,0	731,0
42,0	20,9	11,0	723,5
45,0	20,7	11,5	748,5
48,0	20,5	12,0	772,8
51,0	20,3	12,5	796,4
54,0	20,1	13,0	819,4
57,0	19,9	13,0	810,5
60,0	19,6	14,0	863,2
63,0	19,4	14,0	853,6
66,0	19,2	14,5	874,2
69,0	19,0	15,0	894,0
72,0	18,8	15,0	883,8
75,0	18,5	15,5	902,6
78,0	18,3	16,0	920,8
81,0	18,1	16,0	909,8
84,0	17,9	16,5	926,9
87,0	17,7	17,0	943,4
90,0	17,5	17,0	931,7
93,0	17,2	17,0	920,1
96,0	17,0	17,0	908,4
99,0	16,8	17,5	923,2
102,0	16,6	18,0	937,2
105,0	16,4	18,0	924,9
108,0	16,1	18,0	912,5
111,0	15,9	18,0	900,2
0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	**trapezno:**	**80,1**

x	a	b	S
0,0	30,0	0,0	0,0
3,0	29,7	2,0	186,7
6,0	29,4	3,0	277,3
9,0	29,1	4,0	366,2
12,0	28,9	5,0	453,2
15,0	28,6	6,0	538,4
18,0	28,3	7,0	621,9
21,0	28,0	7,5	659,5
24,0	27,7	8,0	696,3
27,0	27,4	9,0	775,2
30,0	27,1	9,0	767,1
33,0	26,8	10,0	843,3
36,0	26,6	10,5	876,0
39,0	26,3	11,0	907,8
42,0	26,0	11,5	938,7
45,0	25,7	12,0	968,7
48,0	25,4	12,5	997,8
51,0	25,1	13,0	1026,0
54,0	24,8	13,0	1014,3
57,0	24,5	13,5	1041,1
60,0	24,3	14,0	1067,0
63,0	24,0	14,5	1092,1
66,0	23,7	15,0	1116,2
69,0	23,4	15,0	1102,7
72,0	23,1	15,5	1125,5
75,0	22,8	16,0	1147,4
78,0	22,5	16,0	1132,9
81,0	22,3	16,5	1153,5
84,0	22,0	16,5	1138,6
87,0	21,7	17,0	1157,8
90,0	21,4	17,0	1142,4
93,0	21,1	17,0	1127,1
96,0	20,8	17,5	1144,5
99,0	20,5	18,0	1161,0
102,0	20,2	18,0	1144,7
105,0	20,0	18,0	1128,5
108,0	19,7	18,5	1143,2
111,0	19,4	19,0	1157,0
114,0	19,1	19,2	1151,8
0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	**trapezno:**	**105,7**

Tabela 2: Polosi a in b vzdolž dolžine x za tubi Palmolive in OFF!

Naš cilj je, da izračunamo volumen tube $V = \int_a^b S(x)\, dx$. Ker imamo funkcijo $S(x)$ podano le v posameznih točkah x, bomo vrednost integrala izračunali s pomočjo trapeznega pravila. $V = \frac{1}{2}h(S_0 + 2S_1 + 2S_2 + \cdots + 2S_{n-1} + S_n)$. Rezultata za dve tubi sta vidna v tabeli 2 in sta že preračunana v cm^3 oz. ml. Ta postopek smo naredili tudi za preostale tri tube. Rezultati so prišli nekoliko višji kot so prostornine, ki so navedene na embalaži. Zadovoljni pa smo, ker znamo na numeričen način izračunati vrednost določenega integrala funkcije, ki je podana le v posameznih točkah.

Kako se spreminja višina ležeče tube smo si želeli predstavljati še grafično. V koordinatnem sistemu na sliki 16 smo predstavili štiri funkcije. Na x-osi nanašamo zaporedno številko delilne točke, na y-osi pa so milimetri.



Slika 16: Graf spreminjanja višine ležeče tube

Modra funkcija predstavlja predpostavko, da se višina tube linearno spreminja vzdolž dolžine. Rdeča predstavlja predpostavko, da se višina kvadratično spreminja. Vijolična predstavlja dejansko izmerjene vrednosti, ki so najbrž za nekaj odstotkov previsoke zaradi nenatančnega prenosa na milimetrski papir. Zadnja, zelena predstavlja predpostavko, da ima tuba pri vsakem preseku konstanten obseg elipse. Pri linearni funkciji smo rezultate za volumen dobili nekoliko prenizke, pri ostalih treh funkcijah pa nekoliko previsoke. Razlogi so različni: pri linearni in kvadratni funkciji je bila naša predpostavka verjetno preveč idealizirana, pri tisti z izmerjenimi vrednostmi pa je zaradi človeške nenatančnosti rezultat nekoliko previsok. Pri nekaterih tubah smo opazili tudi, da je naš izračunani volumen bistveno večji od navedenega na embalaži. Gotovo je v teh primerih proizvajalec dal v tubo več vsebine v korist potrošnika.

11 ZAKLJUČEK

V raziskavi smo spoznali, da lahko z določenim integralom učinkovito izračunamo prostornino teles. Naši izračuni so se ujemali z znanimi formulami, kar potrjuje pravilnost metode. Integral nas je navdušil s svojo uporabnostjo, saj nam omogoča reševanje kompleksnih matematičnih problemov na eleganten in sistematičen način.

V nalogi se še nismo lotili obravnave volumna torusa ali svitka. Obstajajo pa tudi telesa, ki so deloma okrogla in deloma oglata. Za izračun njihovega volumna pa so najbrž potrebne bolj zahtevne metode računanja.

Naleteli smo tudi na tubo zobne paste, pri kateri se v ležečem položaju njena višina ne spreminja po kakšni znani preprosti funkciji. V tem primeru smo funkcijo tabelirali z dovolj majhnim korakom. Prostornine tub nam ni uspelo izračunati analitično s pravili za določene integrale, ampak smo se morali seznaniti z načinom za numerično integriranje.

12 VIRI IN LITERATURA

Pavlič G., Kavka D., Rugelj, M. Šparovec J. (2018) *Spatium novum* (1. izdaja, 4. natis). Ljubljana: Modrijan založba.

Pavlič G., Kavka D., Rugelj, M. Šparovec J. (2019) *Tempus novum* (2. izdaja). Ljubljana: Modrijan izobraževanje.

Legiša P. (1994) *Matematika: drugi letnik. Kompleksna števila, eksponentna funkcija in logaritem, merjenje v geometriji* (1. prenovljena izdaja). Ljubljana: DZS.

Uršič S. (1979) *Štirimestni logaritmi in druge tabele* (8. natis). Ljubljana: DMFA.

Bronštejn J. N., Semendjajev K. A. (1988) *Matematični priročnik: za inženirje in slušatelje tehniških visokih šol (*10. ponatis). Ljubljana: Tehniška založba Slovenije.

The volume of a toothpaste tube. (2. 4. 2025). Na https://www.youtube.com/. Pridobljeno 2. 4. 2025 s https://www.youtube.com/watch?v=ylw8zU42qJo&ab_channel=EasyMathematics.

Trapezoidal Rule. (2. 4. 2025). Na https://www.youtube.com/. Pridobljeno 2. 4. 2025 s https://www.youtube.com/watch?v=Rn9Gr52zhrY&ab_channel=TheOrganic.