RAZISKOVALNA NALOGA

RAČUNANJE ODVODA FUNKCIJ Z DUALNIMI ŠTEVILI

Avtorja: **Tija Vidmar, 4.a**

Loris Bovcon, 3.b

Področje: SŠ matematika

Mentor: **prof. Miha Šušteršič**

Somentor: **mag. Alojz Grahor**

Škofijska gimnazija Vipava

April, 2025

KAZALO VSEBINE

KAZALO SLIK

KAZALO TABEL

SEZNAM PRILOG

Zahvala

Zahvaljujeva se:

- profesorju Mihi Šušteršiču za mentorstvo,
- profesorju Alojzu Grahorju za idejo in spodbude pri raziskovanju,
- dr. Martinu Vuku, profesorju na Univerzi v Ljubljani (Fakulteta za računalništvo in informatiko), za pomoč pri iskanju virov in strokovne nasvete pri izdelavi naloge,
- profesorici Sonji Matelič za pregled povzetka v angleškem jeziku.

Povzetek

Dualna števila so števila oblike $a + b\varepsilon$, kjer sta a in b realni števili, ε pa je takšno neničelno število, katerega kvadrat je enak 0. Komponento a imenujemo realna komponenta, komponento b pa dualna komponenta. Dokazali smo, da je za funkcije, ki jih lahko razvijemo v Taylorjevi vrsto, odvod enak dualni komponenti izraza $f(a + \varepsilon)$. S pomočjo dualnih števil smo izpeljali odvode elementarnih funkcij. Predstavili smo več načinov, kako s pomočjo teh števil računamo odvode. Uporabo dualnih števil za računaje vrednosti odvodov v dani točki smo implementirali v programskem jeziku Julia. Ta pristop imenujemo *avtomatsko odvajanje*. Na koncu smo na osnovi primerov naredili primerjavo računanja odvodov po običajni poti z računanjem odvodov z dualnimi števili.

Ključne besede: dualna števila, odvod funkcije, vrednost odvoda, avtomatsko odvajanje, Julia

Abstract

Dual numbers are numbers of the form $a + b\varepsilon$, where a and b are real numbers, and ε is a non-zero number whose square is equal to 0. Component a is called the real component and component b the dual component. We have proven that for functions which can be expanded into a Taylor series, the derivative is equal to the dual component of the expression $f(a + \varepsilon)$. Using dual numbers, we derived the derivatives of elementary functions and presented several methods for computing derivatives with them. The use of dual numbers for calculating derivative values at a given point was implemented in the Julia programming language. This approach is called automatic differentiation. Finally, based on examples we compared the traditional method of computing derivatives with the method of using dual numbers.

Keywords: dual numbers, function derivative, derivative value, automatic differentiation, Julia

1. Uvod

1.1. Izhodišča

Prvi, ki je vpeljal dualna števila v matematiko, je bil angleški matematik W.K. Clifford leta 1873. Ta koncept so uporabili na različnih področjih: za vijačne sisteme, modelirne ravnine, iterativne metode za analizo premikanja prostorskih mehanizmov… (Kandasamy, 2012, 7). V začetku 20. stoletja jih je uporabil nemški matematik Eduard Study za predstavitev dualnega kota, ki meri relativni položaj dveh nevzporednih premic v prostoru (Zlobec, 2023). V raziskovalni nalogi bomo uporabili dualna števila v zvezi z računanjem prvega odvoda funkcij in vrednosti prvega odvoda funkcij v dani točki.

1.2. Cilji in metode dela

V raziskovalni nalogi smo si zastavili naslednje cilje:

- predstaviti dualna števila,
- pokazati povezavo dualnih števil in odvodov funkcij,
- pokazati, da je izpeljava odvodov funkcij z dualnimi števili konsistentna z običajno izpeljavo odvodov,
- poiskati načine odvajanja funkcij z dualnimi števili,
- implementirati avtomatsko odvajanje v programskem jeziku Julia,
- podati primerjavo računanja odvodov z dualnimi števili in računanja odvodov z običajnimi pravili za računanje odvoda funkcij.

Metode dela:

- delo po strokovni literaturi in internetnih virih,
- matematično sklepanje in dokazovanje,
- programiranje v programskem jeziku Julija.

2. Dualna števila

2.1. Definicija dualnih števil in osnovne računske operacije

Dualna števila so števila oblike $a + b\varepsilon$, kjer sta a, $b \in \mathbb{R}$, medtem ko je dualna enota ε neničelno število, katerega kvadrat je nič: $\varepsilon \neq 0; \varepsilon^2 = 0$. Množico dualnih števil označimo z D:

$$D = \{a + b\varepsilon; a, b \in \mathbb{R}; \varepsilon \neq 0; \varepsilon^2 = 0\}$$

Dualno število $z = a + b\varepsilon$ ima (podobno kot kompleksno število) dve komponenti. Imenujemo ju realna in dualna komponenta ter zapišemo:

- realna komponenta $\boldsymbol{Re}(z) = a$,
- dualna komponenta $\boldsymbol{Du}(z) = b$.

Z dualnimi števili računamo kot z navadnimi binomi, pri čemer upoštevamo, da je $\varepsilon^2 = 0$. Naj bosta dualni števili $z = a + b\varepsilon$ in $w = c + d\varepsilon$. Zapišimo operacije seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja.

2.1.1. Seštevanje

Dualni števili $z = a + b\varepsilon$ in $w = c + d\varepsilon$ seštejemo kot dva dvočlenika, pri čemer posebej seštejemo realne in posebej dualne dele.

$$z + w = (a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) = (a + c) + (b + d)\varepsilon$$

2.1.2. Odštevanje

Dualni števili $z = a + b\varepsilon$ in $w = c + d\varepsilon$ odštejemo kot dva dvočlenika, pri čemer posebej odštejemo realne in posebej dualne dele.

$$z - w = (a + b\varepsilon) - (c + d\varepsilon) = (a - c) + (b - d)\varepsilon$$

2.1.3. Množenje

Dualni števili $z = a + b\varepsilon$ in $w = c + d\varepsilon$ zmnožimo kot dva dvočlenika, upoštevati pa moramo, da je $\varepsilon^2 = 0$.

$$z \cdot w = (a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon) = ac + a\,d\varepsilon + bc\varepsilon + b\,d\varepsilon^2 = ac + (ad + bc)\varepsilon$$

2.1.4. Deljenje

Dualni števili $z = a + b\varepsilon$ in $w = c + d\varepsilon$ delimo tako, da ulomek razširimo s konjugirano vrednostjo imenovalca in upoštevamo, da je $\varepsilon^2 = 0$.

$$\frac{z}{w} = \frac{a + b\varepsilon}{c + d\varepsilon} \cdot \frac{c - d\varepsilon}{c - d\varepsilon} = \frac{ac + (bc - a\,d)\varepsilon}{c^2} = \frac{a}{c} + \frac{(bc - a\,d)\varepsilon}{c^2}$$

2.2. Lastnosti dualnih števil

Dokažimo, da sta računski operaciji seštevanja in množenja komutativni in asociativni ter da ju povezuje distributivnostni zakon.

2.2.1. Komutativnost

A) SEŠTEVANJE

Dokazati želimo, da $z + w = w + z$:

$$z + w = (a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) = (a + c) + (b + d)\varepsilon$$
$$w + z = (c + d\varepsilon) + (a + b\varepsilon) = (a + c) + (b + d)\varepsilon$$

Dokazali smo, da je seštevanje dualnih števil komutativno.

B) MNOŽENJE

Dokazati želimo, da $z \cdot w = w \cdot z$:

$$z \cdot w = (a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon$$
$$w \cdot z = (c + d\varepsilon) \cdot (a + b\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon$$

Dokazali smo, da je množenje dualnih števil komutativno.

2.2.2. Asociativnost

Naj bodo dualna števila $z = a + b\varepsilon$, $w = c + d\varepsilon$ in $y = e + f\varepsilon$.

A) SEŠTEVANJE

Dokazati želimo, da $(z + w) + y = z + (w + y)$:

$$(z + w) + y = \big((a + c) + (b + d)\varepsilon\big) + (e + f\varepsilon) = (a + c + e) + (b + d + f)\varepsilon$$
$$z + (w + y) = (a + b\varepsilon) + \big((c + e) + (d + f)\varepsilon\big) = (a + c + e) + (b + d + f)\varepsilon$$

Tako smo dokazali, da je seštevanje dualnih števil asociativno.

B) MNOŽENJE

Dokazati želimo, da $(z \cdot w) \cdot y = z \cdot (w \cdot y)$:

$$(z \cdot w) \cdot y = (ac + (ad + bc)\varepsilon) \cdot (e + f\varepsilon) = ace + (acf + a\,de + bce)\varepsilon$$
$$z \cdot (w \cdot y) = (a + b\varepsilon) \cdot (ce + (cf + de)\varepsilon) = ace + (acf + a\,de + bce)\varepsilon$$

Tako smo dokazali, da je množenje dualnih števil asociativno.

2.2.3. Distributivnost

Dokazati želimo, da $z \cdot (w + y) = zw + zy$:

$$z \cdot (w + y) = (a + b\varepsilon) \cdot \big((c + e) + (d + f)\varepsilon\big) = (ac + ae) + (ad + af + bc + be)\varepsilon$$

$$zw + zy = (ac + (ad + bc)\varepsilon) + (ae + (af + be)\varepsilon) = (ac + ae) + (ad + af + bc + be)\varepsilon$$

Tako smo dokazali, da operaciji seštevanja in množenja dualnih števil povezuje tudi distributivnostni zakon.

2.2.4. Delitelji niča

Definicija: Delitelja niča sta takšni neničelni števili z in w, da velja: $z \cdot w = 0$.

Naj bosta $z = a + b\varepsilon$ in $w = c + d\varepsilon$ »pravi« dualni števili, to je $b \neq 0$ in $d \neq 0$. Naj bo $z \cdot w = 0$.

$$z \cdot w = 0$$

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = 0$$

$$ac + (ad + bc)\varepsilon = 0$$

Od tu sledi, da je $ac = 0$ in $ad + bc = 0$.

Obravnavajmo:

a) Naj bo $a = 0$. Potem je tudi $bc = 0$. Ker je $b \neq 0$, je zato $c = 0$. Tako je $(b\varepsilon)(d\varepsilon) = 0$.
b) Naj bo $c = 0$. Potem je tudi $ad = 0$. Ker je $d \neq 0$, je $a = 0$. Tako sledi $(b\varepsilon)(d\varepsilon) = 0$.

Sklep: V množici dualnih števil obstajajo delitelji niča. To so vsa dualna števila oblike $q\varepsilon; q \neq 0$. Neposredna posledica tega dejstva je, da z delitelji niča ne moremo deliti oziroma da ne obstaja inverzni element k številu $q\varepsilon; q \neq 0$ (Penn, 2022).

Sicer inverzni element z^{-1} k elementu $z = a + b\varepsilon;\ a \neq 0$ izračunamo takole:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\varepsilon} = \frac{a - b\varepsilon}{(a + b\varepsilon)(a - b\varepsilon)} = \frac{a - b\varepsilon}{a^2} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\varepsilon$$

2.3. Primeri računanja z dualnimi števili

$$(2+3\varepsilon)(5-4\varepsilon)=10-8\varepsilon+15\varepsilon-12\varepsilon^2=10+7\varepsilon$$

$$(3-2\varepsilon)^2+(2+3\varepsilon)^3=9-4\varepsilon+8+36\varepsilon=17-32\varepsilon$$

$$\frac{2-3\varepsilon}{3+4\varepsilon}=\frac{2-3\varepsilon}{3+4\varepsilon}\cdot\frac{3-4\varepsilon}{3-4\varepsilon}=\frac{6-17\varepsilon}{9}=\frac{2}{3}-\frac{17}{9}\varepsilon$$

Kot zanimivost navajamo nekaj primerov razstavljanja:

<u>1. primer</u>:

Ker je $(x-b\varepsilon)(x+b\varepsilon)=x^2, b\in\mathbb{R}$, lahko x^2 razstavimo na produkt $(x-b\varepsilon)(x+b\varepsilon)=x^2$.

<u>2. primer</u>: Razstavimo izraz $x^2+\varepsilon$ na linearne izraze.

$$x^2+\varepsilon=(x+a\varepsilon)(x+b\varepsilon)=x^2+(a+b)\varepsilon$$

Primerjamo koeficiente: $a+b=1$

Rešitev je: $a\in\mathbb{R}, b=1-a$.

Razcep $x^2+\varepsilon$ je enoparametrična družina: $x^2+\varepsilon=(x+a\varepsilon)(x+(1-a)\varepsilon)$.

2.4. Predstavitev dualnih števil z matrikami

Dualno število $a+b\varepsilon$ lahko predstavimo z matrikami reda $2x2$ oblike $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}=a\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=aI+b\varepsilon.$$

Matrika $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$ je enotska matrika, matrika $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\varepsilon$ ni ničelna matrika, velja pa

$$\varepsilon^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V knjigi *Dual numbers* (Kandasamy, 2012) je predstavljenih veliko matematičnih primerov in posplošitev dualnih števil.

3. Povezava dualnih števil in odvodov

3.1. Odvod polinoma in racionalne funkcije

Uvodni zgled 1: Vzemimo polinom $p(x) = 3x^2 + x$ in izračunajmo $p(x+\varepsilon)$:

$$p(x+\varepsilon) = 3(x+\varepsilon)^2 + x + \varepsilon = 3(x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2) + x + \varepsilon = 3x^2 + x + (6x+1)\varepsilon$$

Opazimo, da je odvod danega polinoma enak dualni komponenti izraza $p(x+\varepsilon)$.

Uvodni zgled 2: Naj bo $p(x) = x^n$. Izračunajmo $p(x+\varepsilon)$.

Pri izračunu$(x+\varepsilon)^n$ upoštevamo binomski izrek:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$$

Tako dobimo:

$$(x+\varepsilon)^n = x^n + nx^{n-1}\varepsilon + \binom{n}{2}x^{n-2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n$$

Ker je $\varepsilon^k = 0$ za vse $k \geq 2$, sledi: $(x+\varepsilon)^n = x^n + nx^{n-1}\varepsilon$.

Tedaj je

$$p(x+\varepsilon) = (x+\varepsilon)^n = x^n + nx^{n-1}\varepsilon + \binom{n}{n-2}x^{n-2}(\varepsilon)^2 + \cdots = x^n + nx^{n-1}\varepsilon$$

in $p(x+\varepsilon) = p(x) + p'(x)\varepsilon$.

Tudi tu opazimo, da je dualna komponenta izraza $\boldsymbol{Du}(p(x+\varepsilon))$ enaka odvodu dane funkcije: $\boldsymbol{Du}(p(x+\varepsilon)) = p'(x)$.

Posplošimo ugotovitev in dokažimo, da velja izpeljana zveza za polinome.

Trditev 1: Za vsak polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}$ velja:

$\boldsymbol{Re}(p(x+\varepsilon)) = p(x)$ in $\boldsymbol{Du}(p(x+\varepsilon)) = p'(x)$.

Dokaz: Izračunajmo $p(x+\varepsilon)$. Upoštevamo ugotovitev iz uvodnega zgleda 2, da je $(x+\varepsilon)^m = x^m + mx^{m-1}\varepsilon$ za vsako naravno število n.

$$p(x+\varepsilon) = a_n(x+\varepsilon)^n + a_{n-1}(x+\varepsilon)^{n-1} + \cdots + a_1(x+\varepsilon) + a_0 =$$
$$a_n(x^n + nx^{n-1}\varepsilon) + a_{n-1}(x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}\varepsilon) + \cdots + a_1(x+\varepsilon) + a_0 =$$
$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 + (na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1)\varepsilon$$

Iz teorije odvodov vemo, da je $p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$.

Zato je $p(x+\varepsilon) = p(x) + p'(x)\varepsilon$ (1)

Torej je: $\boldsymbol{Re}(p(x+\varepsilon)) = p(x)$ in $\boldsymbol{Du}(p(x+\varepsilon)) = p'(x)$.

Trditev 2: Naj bo f racionalna funkcija iz $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta p in q polinoma in q neničelna funkcija. Tedaj je $\boldsymbol{Re}(f(x+\varepsilon)) = f(x)$ in $\boldsymbol{Du}(f(x+\varepsilon)) = f'(x)$.

Dokaz:
Pokazati moramo samo, kako izračunamo $f(x+\varepsilon)$. Ker je f racionalna funkcija, je zato $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta p in q polinoma in q ni ničelna funkcija. Naj bo $p(x+\varepsilon) = p(x) + p'(x) \cdot \varepsilon$ in $q(x+\varepsilon) = q(x) + q'(x) \cdot \varepsilon$. Tako je $f(x+\varepsilon) = \frac{p(x+\varepsilon)}{q(x+\varepsilon)} = \frac{p(x)+p'(x)\cdot\varepsilon}{q(x)+q'(x)\cdot\varepsilon}$. Po 2.1.4. pa je deljenje dualnih števil definirano in izračunamo:

$$\frac{p(x) + p'(x) \cdot \varepsilon}{q(x) + q'(x) \cdot \varepsilon} = \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{(p'(x)q(x) - p(x)q'(x))}{(q(x))^2} \varepsilon$$

Pri dualni komponenti dobljenega izraza prepoznamo pravilo za izračun odvoda kvocienta. Tako smo dobili, da je $\boldsymbol{Re}(f(x+\varepsilon)) = f(x)$ in $\boldsymbol{Du}(f(x+\varepsilon)) = f'(x)$.

3.2. Računanje odvoda analitične funkcije

Trditev 1 posplošimo (Vuk, 2024, 160).

Definicija: Funkcija f je analitična na intervalu $(x-r, x+r); r \in \mathbb{R}; r > 0$, če jo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto.

Trditev 3: Naj bo f analitična funkcija. Njen prvi odvod $f'(x)$ je enak dualni komponenti izraza $f'(x) = \boldsymbol{Du}(f(x+\varepsilon))$.

Dokaz:
Vsako analitično funkcijo f lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \cdot h^3 + \cdots$$

Vstavimo: $h = \varepsilon$ in izračunajmo $f(x+\varepsilon)$:

$$f(x+\varepsilon)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot\varepsilon+\frac{f''(x)}{2!}\cdot\varepsilon^2+\frac{f'''(x)}{3!}\cdot\varepsilon^3+\cdots$$

Od tu sledi: $f(x+\varepsilon)=f(x)+f'(x)\cdot\varepsilon$ za vsako analitično funkcijo. $\boxed{\text{qed}}$

3.3. Izpeljava simboličnih odvodov s pomočjo dualnih števil

V trditvi 3 smo ugotovili, da je $f'(x)=\boldsymbol{Du}(f(x+\varepsilon))$, kjer je f analitična funkcija. To bomo vzeli za definicijo prvega odvoda. V nadaljevanju pa bomo izpeljali, kako izračunamo vrednost analitične funkcije pri poljubnem dualnem številu $z=x+b\varepsilon;\ b\neq 0$. Vrednosti funkcij $f(x+b\varepsilon)$ bomo uporabili v naslednjem poglavju. Pogosto je namreč potrebno za izračun $f(x+\varepsilon)$ uporabiti tudi, koliko je $f(x+b\varepsilon)$.

Primer: Pri izračunu $f(x+\varepsilon)$ pri $f(x)=\sin(5x)$: $f(x+\varepsilon)=\sin(5(x+\varepsilon))=\sin(5x+5\varepsilon)=?$

Vemo, da lahko vsako analitično funkcijo f lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot h+\frac{f''(x)}{2!}\cdot h^2+\frac{f'''(x)}{3!}\cdot h^3+\cdots$$

Izračunajmo :

$$f(x+b\varepsilon)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot(b\varepsilon)+\frac{f''(x)}{2!}\cdot(b\varepsilon)^2+\frac{f'''(x)}{3!}\cdot(b\varepsilon)^3+\cdots=$$

$$f(x)+\frac{f'(x)}{1!}b\cdot\varepsilon+\frac{f''(x)}{2!}\cdot b^2\cdot\varepsilon^2+\frac{f'''(x)}{3!}\cdot b^3\cdot\varepsilon^3+\cdots=f(x)+f'(x)\cdot b\cdot\varepsilon$$

Prvi odvod dobimo tako, da dualno komponento $f(x+b\varepsilon)$ delimo z b.

Definicija: Naj bo f analitična funkcija. Potem je njen prvi odvod enak dualni komponenti izraza $\frac{f(x+b\varepsilon)}{b}$:

$$f'(x)=\frac{\boldsymbol{Du}\big(f(x+b\varepsilon)\big)}{b};\ b\neq 0$$

Za vsako izmed elementarnih funkcij f(ali funkcij, ki so zajete v učnem načrtu in v učbenikih za matematiko za splošne gimnazije) bomo izpeljali simbolični odvod f'. Vse izpeljave odvodov bomo naredili brez računanja limite

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

3.3.1. Eksponentna funkcija

Eksponentna funkcija je v gimnazijskih učbenikih definirana kot funkcija iz realnih števil v realna števila s predpisom $f(x) = e^x$. Glede na to definicijo ne znamo izračunati $e^{x+\varepsilon}$. Zato bomo eksponentno funkcijo definirali drugače in sicer s potenčno vrsto.

A) Eksponentna funkcija z naravno osnovo e

Definicija: Eksponentna funkcija e^x je funkcija iz realnih števil v realna števila s predpisom

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Naj bo $f(x) = e^x$ in izračunajmo $f(x + b\varepsilon) = e^{x+b\varepsilon}$. Pri tem upoštevajmo, da je $\varepsilon^{bk} = \left(\varepsilon^k\right)^b = 0$, ko je $k \geq 2$.

$$e^{x+b\varepsilon} = 1 + (x + b\varepsilon) + \frac{(x + b\varepsilon)^2}{2!} + \frac{(x + b\varepsilon)^3}{3!} + \frac{(x + b\varepsilon)^4}{4} + \cdots =$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + b\varepsilon + \frac{2xb\varepsilon}{2!} + \frac{3x^2 b\varepsilon}{3!} + \frac{4x^3 b\varepsilon}{4!} + \cdots + \frac{(b\varepsilon)^2}{2!} + \frac{3x(b\varepsilon)^2}{3!} + \frac{(b\varepsilon)^3}{3!} \cdots =$$

$$e^x + b\varepsilon\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) = e^x + e^x \cdot b\varepsilon.$$

Če izberemo $b = 1$, dobimo, da je $\mathrm{Du}(e^{x+\varepsilon}) = e^x$. Torej je odvod eksponentne funkcije $f(x) = e^x$ enak $(e^x)' = e^x$.

B) Eksponentna funkcija s poljubno realno osnovo $a \in \mathbb{R}$.

Naj bo $g(x) = a^x$**.** Vemo, da je $a^x = e^{x \cdot \ln a}$. Izračunajmo $a^{x+b\varepsilon}$:

$$a^{x+b\varepsilon} = e^{(x+b\varepsilon)\cdot \ln a} = e^{x\ln a + b\ln a\varepsilon} = e^{x\ln a} + e^{x\ln a} b\varepsilon = a^x + a^x(\ln a)b\varepsilon$$

Velja torej $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

3.3.2. Logaritemska funkcija

$f(x) = lnx$. Izračunajmo $f(x + b\varepsilon) = \ln(x + b\varepsilon)$.

Začnimo z nastavkom:

$$\ln(x + b\varepsilon) = p + r\varepsilon$$
$$x + b\varepsilon = e^{p+r\varepsilon}$$
$$x + b\varepsilon = e^{p} + re^{p}\varepsilon$$

Primerjajmo koeficiente:

$$x = e^{p} \to p = lnx$$
$$b = re^{p} \to r = \frac{b}{e^{p}} = \frac{b}{x}$$

Tako imamo:

$$\ln(x + b\varepsilon) = \ln x + \tfrac{b}{x}\varepsilon \text{ in } (\ln x)' = \tfrac{1}{x}.$$

Naj bo $g(x) = log_a x$. Izračunajmo $f(x + b\varepsilon) = \log_a(x + b\varepsilon)$.
Vemo, da je $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

$$\log_a(x + b\varepsilon) = \frac{\ln(x+b\varepsilon)}{\ln a} = \frac{\ln x + \frac{b}{x}\varepsilon}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{b}{x \cdot \ln a}\varepsilon = \log_a x + \frac{b}{x \cdot \ln a}\varepsilon,$$

od koder sledi

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

3.3.3. Potenčna funkcija

Naj bo $f(x) = x^n$. Izračunajmo $(x + \varepsilon b)^n$ z uporabo binomskega izreka.

$$(x + b\varepsilon)^n = x^n + nx^{n-1}b\varepsilon + \binom{n}{2}x^{n-2}(b\varepsilon)^2 + \cdots$$

Ker je $e^k = 0$, ko je $k \geq 2$, dobimo

$$(x + b\varepsilon)^n = x^n + nx^{n-1}b\varepsilon.$$

Ko je $b = 1$, sledi $(x^n)' = nx^{n-1}$. (2)

Naj bo $f(t) = t^n$, kjer sta t in n dualni števili: $t = x + b\varepsilon$, $n = c + d\varepsilon$.
Izračunajmo $t^n = (x + b\varepsilon)^{(c+d\varepsilon)}$ tako, da zapišemo nastavek in razvijemo:

$$(x + b\varepsilon)^{(c+d\varepsilon)} = p + r\varepsilon$$
$$(c + d\varepsilon)\ln(x + b\varepsilon) = \ln(p + r\varepsilon)$$
$$(c + d\varepsilon)(\ln x + \frac{b}{x}\varepsilon) = \ln p + \frac{r}{p}\varepsilon$$
$$c\, lnx + \left(d\ln x + \frac{bc}{x}\right)\varepsilon = \ln p + \frac{r}{p}\varepsilon$$
$$c \ln x = \ln p \to p = e^{c\ln x} = x^c$$

$$\frac{r}{p} = d\ln x + \frac{bc}{x} \to r = p\left(d\ln x + \frac{bc}{x}\right) = x^c\left(d\ln x + \frac{bc}{x}\right) = x^{c-1}(xd\ln x + bc)$$

$$(x + b\varepsilon)^{(c+d\varepsilon)} = x^c + x^{c-1}(xd\ln x + bc)\varepsilon$$

Če je osnova realno število x, je $b = 0$ in dobimo:

$$(x)^{(c+d\varepsilon)} = x^c + x^c d\ln x\varepsilon.$$

Če pa je eksponent realno število, je $d = 0$ in imamo:

$$(x + b\varepsilon)^c = x^c + cx^{c-1}b\varepsilon$$

$(x^c)' = cx^{c-1}$, kar je enako formuli (2), ki pa velja samo za naravna števila c.

3.3.4. Kvadratni koren

Naj bo $f(x) = \sqrt{x}; x \geq 0$.

$$\sqrt{x + b\varepsilon} = p + r\varepsilon$$
$$x + b\varepsilon = p^2 + 2pr\varepsilon$$
$$x = p^2 \to p = \sqrt{x}$$
$$2pr = b \to r = \frac{b}{2p} = \frac{b}{2\sqrt{x}}$$
$$\sqrt{x + b\varepsilon} = \sqrt{x} + \frac{b}{2\sqrt{x}}\varepsilon$$

Tako je: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3.3.5. Koren poljubne stopnje

Naj bo $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
Iščemo $\sqrt[n]{x + b\varepsilon}$.
Zapišimo nastavek: $\sqrt[n]{x + b\varepsilon} = p + r\varepsilon$ in potencirajmo:

$$x + b\varepsilon = (p + r\varepsilon)^n$$
$$x + b\varepsilon = p^n + np^{n-1}r\varepsilon$$
$$x = p^n \to p = \sqrt[n]{x}$$
$$b = np^{n-1}r \to r = \frac{b}{np^{n-1}} = \frac{bp^{1-n}}{n} = \frac{bx^{(\frac{1}{n}-1)}}{n}$$

Torej je: $\sqrt[n]{x + b\varepsilon} = \sqrt[n]{x} + \frac{bx^{(\frac{1}{n}-1)}}{n}\varepsilon = \sqrt[n]{x} + \frac{b}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}}\varepsilon$ in $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}}$.

3.3.6. Funkciji sinus in kosinus

Naj bo $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \cos x$.

Vemo, da je razvoj funkcij sinus in kosinus v potenčno vrsto naslednji: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ in $cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$, zato je $\cos(b\varepsilon) = 1$ in $\sin(b\varepsilon) = b\varepsilon$.

$$\sin(x + b\varepsilon) = \sin x \cos(b\varepsilon) + \cos x \sin(b\varepsilon) = \sin x + (\cos x) b\varepsilon$$

$$\cos(x + b\varepsilon) = \cos x \cos b\varepsilon - \sin x \sin(b\varepsilon) = \cos x - \sin x(b\varepsilon)$$

Dobili smo: $(\sin x)' = \cos x$ in $(\cos x)' = -\sin x$

3.3.7. Funkcija tangens

Naj bo $f(x) = \tan x$.

$$\tan(x + b\varepsilon) = \frac{\sin(x + b\varepsilon)}{\cos(x + b\varepsilon)} = \frac{\sin x + (b \cdot \cos x)\varepsilon}{\cos x - (b \cdot \sin x)\varepsilon} =$$

$$\frac{\sin x + (b \cdot \cos x)\varepsilon}{\cos x - (b \cdot \sin x)\varepsilon} \cdot \frac{\cos x + (b \cdot \sin x)\varepsilon}{\cos x + (b \cdot \sin x)\varepsilon} = \frac{\sin x \cos x + b\varepsilon}{(\cos x)^2} = \tan x + \frac{b\varepsilon}{(\cos x)^2}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

3.3.8. Funkcija arcus tangens (atan)

Naj bo $f(x) = \mathrm{atan} x$.

Izračunajmo $\mathrm{atan}(x + b\varepsilon)$ tako, da najprej zapišemo nastavek in uporabimo inverzno funkcijo:

$$\mathrm{atan}(x + b\varepsilon) = p + r\varepsilon$$

$$x + b\varepsilon = \tan(p + r\varepsilon)$$

$$x + b\varepsilon = \tan p + \frac{r\varepsilon}{(\cos p)^2}$$

$$x = \tan p \rightarrow p = \mathrm{atan} x$$

$$b = \frac{r\varepsilon}{(\cos p)^2} \rightarrow r = b(\cos p)^2\varepsilon = \frac{b}{1 + (\tan p)^2}\varepsilon = \frac{b}{1 + x^2}\varepsilon$$

Tako je: $\mathrm{atan}(x + b\varepsilon) = \mathrm{atan} x + \frac{b}{1+x^2}\varepsilon$ in $(\mathrm{atan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

3.3.9. Funkciji arcus sinus in arcus kosinus (asin in acos)

$$f(x) = \mathrm{asin}x$$

$$\mathrm{asin}(x + b\varepsilon) = p + r\varepsilon$$

$$x + b\varepsilon = \sin(p + r\varepsilon)$$

$$x + b\varepsilon = \sin p + r(\cos p)\varepsilon$$

$$x = \sin p \rightarrow p = \mathrm{asin}x$$

$$b = r\cos p$$

$$r = \frac{b}{\cos p} = \frac{b}{\sqrt{1 - (\sin p)^2}} = \frac{b}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\mathrm{asin}(x + b\varepsilon) = \mathrm{asin}x + \frac{b}{\sqrt{1 - x^2}}\varepsilon$$

$$f(x) = \mathrm{acos}x$$

$$\mathrm{acos}(x + b\varepsilon) = p + r\varepsilon$$

$$x + b\varepsilon = \cos(p + r\varepsilon)$$

$$x + b\varepsilon = \cos p - r(\sin p)\varepsilon$$

$$x = \cos p \rightarrow p = acosx$$

$$b = -r\sin p$$

$$r = \frac{-b}{\sin p} = \frac{-b}{\sqrt{1 - (\cos p)^2}} = \frac{-b}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\mathrm{acos}(x + b\varepsilon) = \mathrm{acos}x - \frac{b}{\sqrt{1 - x^2}}\varepsilon$$

Tako je: $(\mathrm{asin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $(\mathrm{acos}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.4. Tabela vrednosti funkcij pri $\boldsymbol{x + b\varepsilon}$ in prvih odvodov

Tabela 1: Vrednosti elementarnih funkcij pri dualnem številu x+bε

$f(x)$	$f(x+b\varepsilon)$	$f'(x) = \dfrac{\boldsymbol{Du}(f(x+b\varepsilon))}{b};\ \ b \neq 0$
$x^n, n \in N$	$(x+b\varepsilon)^n = x^n + nx^{n-1}b\varepsilon$	nx^{n-1}
$f(t) = t^n$, $t = x + b\varepsilon, x > 0$, $n = c + d\varepsilon$	$(x+b\varepsilon)^{(c+d\varepsilon)} =$ $x^c + x^{c-1}(xd\ln x + bc)\varepsilon$	$x^{c-1}(xd\ln x + c)\ (b=1)$
e^x	$e^{x+b\varepsilon} = e^x + e^x \cdot b\varepsilon$	e^x
a^x	$a^{x+b\varepsilon} = a^x + a^x(\ln a)b\varepsilon$	$a^x(\ln a)$
$\ln x$	$\ln(x+b\varepsilon) = \ln x + \dfrac{b}{x}\varepsilon$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\log_a(x+b\varepsilon) = \log_a x + \dfrac{b}{x \cdot \ln a}\varepsilon$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
$\sqrt{x}, x \geq 0$	$\sqrt{x+b\varepsilon} = \sqrt{x} + \dfrac{b}{2\sqrt{x}}\varepsilon$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{x+b\varepsilon} = \sqrt[n]{x} + \frac{b}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}}\ \varepsilon$	$\dfrac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$\sin(x+b\varepsilon) = \sin x + (\cos x)b\varepsilon$	$\cos x$
$\cos x$	$\cos(x+b\varepsilon) = \cos x - (\sin x)b\varepsilon$	$-\sin x$
$\tan x$	$\tan(x+b\varepsilon) = \tan x + \dfrac{b\varepsilon}{(\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{(\cos x)^2}$
$\mathrm{atan}x$	$\mathrm{atan}(x+b\varepsilon) = \mathrm{atan}x + \dfrac{b}{1+x^2}\varepsilon$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{asin}x$	$\mathrm{asin}(x+b\varepsilon) = \mathrm{asin}x + \dfrac{b}{\sqrt{1-x^2}}\varepsilon$	$\dfrac{b}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{acos}x$	$\mathrm{acos}(x+b\varepsilon) = \mathrm{acos}x - \dfrac{b}{\sqrt{1-x^2}}\varepsilon$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.5. Pravila odvajanja in dualna števila

Računske operacije, ki so opisane v poglavju 2.1, se ujemajo s pravili odvajanja. Pokažimo, da to velja tudi na primeru funkcij. Naj bosta funkciji f in g analitični funkciji. Torej velja:

$f(x+b\varepsilon) = f(x) + f'(x)b\varepsilon$ in $g(x+d\varepsilon) = g(x) + g'(x)d\varepsilon$.

Ko vzamemo $b = d = 1$, je $f(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon$ in $g(x+\varepsilon) = g(x) + g'(x)d\varepsilon$.

Potem je:

$k \cdot f(x+\varepsilon) = k \cdot (f(x) + f'(x)\varepsilon) = k \cdot f(x) + k \cdot f'(x)\varepsilon \ \rightarrow (kf(x))' = kf'(x)$

$(f+g)(x+\varepsilon) = f(x+\varepsilon) + g(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon \ + \ g(x) + g'(x)\varepsilon =$
$=\big(f(x)+g(x)\big) + \big(f'(x)+g'(x)\big)\varepsilon$

$(f \cdot g)(x+\varepsilon) = f(x+\varepsilon) \cdot g(x+\varepsilon) = (f(x) + f'(x)\varepsilon) \cdot (g(x) + g'(x)\varepsilon) =$
$f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\varepsilon + f'(x) \cdot g(x)\varepsilon + f'(x) \cdot g'(x)\varepsilon^2 =$
$f(x) \cdot g(x) + (f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x))\varepsilon$

$$\frac{f}{g}(x+\varepsilon) = \frac{f(x+\varepsilon)}{g(x+\varepsilon)} = \frac{f(x)+f'(x)\varepsilon}{g(x)+g'(x)\varepsilon} = \frac{f(x)+f'(x)\varepsilon}{g(x)+g'(x)\varepsilon} \cdot \frac{g(x)-g'(x)\varepsilon}{g(x)-g'(x)\varepsilon} =$$
$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)\varepsilon + f'(x) \cdot g(x)\varepsilon - f'(x) \cdot g'(x)\varepsilon^2}{\big(g(x)\big)^2 - (g'(x))^2\varepsilon^2} =$$
$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)\varepsilon + f'(x) \cdot g(x)\varepsilon}{\big(g(x)\big)^2} = \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{(f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x))}{\big(g(x)\big)^2}\varepsilon$$

Ugotovili smo, da se algebra računanja z dualnimi števili popolnoma ujema s pravili odvajanja funkcij. Razen odvodov posameznih funkcij ne potrebujemo posebnih pravil za računanje odvodov.

3.6. Primeri računanja odvodov z dualnimi števili

3.6.1. PRVI NAČIN: Računanje ***f(x+ ε)***

Primer 1: Naj bo funkcija f dana s predpisom $f(x) = x \cdot \sin x$.

$$f(x+\varepsilon) = (x+\varepsilon) \cdot \sin(x+\varepsilon) = (x+\varepsilon) \cdot (\sin x + (\cos x)\varepsilon) = x \cdot \sin x + (x \cdot \cos x + \sin x)\varepsilon + (\cos x)\varepsilon^2 = x \cdot \sin x + (x \cdot \cos x + \sin x)\varepsilon$$

Torej je $(x \cdot \sin x)' = x \cdot \cos x + \sin x$.

Primer 2: $f(x) = xe^x$

$$f(x+\varepsilon) = (x+\varepsilon)e^{(x+\varepsilon)} = (x+\varepsilon)(e^x + e^x\varepsilon) = xe^x + (xe^x + e^x)\varepsilon$$

Tako je: $(xe^x)' = (x+1)e^x$.

Primer 3: $f(x) = \sin(2x^2)$

$$\sin(2(x+\varepsilon)^2) = \sin(2x^2 + 4x\varepsilon) = \sin 2x^2 + (4x \cdot \cos 2x^2)\varepsilon$$

Dualna komponenta dobljenega števila je enaka odvodu: $(\sin 2x^2)' = 4x \cdot \cos 2x^2$.

Primer 4: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x+\varepsilon) = \frac{1}{x+\varepsilon} = \frac{1}{x+\varepsilon} \cdot \frac{x-\varepsilon}{x-\varepsilon} = \frac{x-\varepsilon}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\varepsilon$$

Torej je $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$.

Primer 5: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$f(x+\varepsilon) = \frac{\sin(x+\varepsilon)}{x+\varepsilon} = \frac{\sin(x+\varepsilon)}{x+\varepsilon} = \frac{\sin x + (\cos x)\varepsilon}{x+\varepsilon} =$$
$$\frac{\sin x + (\cos x)\varepsilon}{x+\varepsilon} \cdot \frac{x-\varepsilon}{x-\varepsilon} = \frac{x\sin x + (-\sin x + x\cos x)\varepsilon}{x^2} =$$
$$\frac{\sin x}{x} + \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)\varepsilon$$

Tako je $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$.

3.6.2. DRUGI NAČIN: Računanje *f(x+ iε)*

Kako bi »prelisičili« programe za simbolno računanje? Pri dani funkciji f izračunamo $f(x+i\varepsilon)$. Imaginarna komponenta i je dodana zato, da program upošteva lastnosti računanja s kompleksnimi števili, pri potencah, ki so večje od 2, pa moramo »ročno« upoštevati, da je $\varepsilon^k = 0; k \geq 2$. V naslednjem primeru smo uporabili program WolframAlpha. Ta program (še) nima vgrajene algebre računanja z dualnimi števili. Odvod bo seveda enak $Im\left(\frac{f(x+i\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$.

Primer: $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ Izračunajmo $f(x+i\varepsilon)$.

Aplikacija WolframAlpha[1] izpiše:

$$f(1+i\varepsilon)=\frac{6\varepsilon^2}{4\varepsilon^2+(\varepsilon^2+3)^2}-\frac{8i\varepsilon}{4\varepsilon^2+(\varepsilon^2+3)^2}-\frac{3}{4\varepsilon^2+(\varepsilon^2+3)^2}+\frac{\varepsilon^4}{4\varepsilon^2+(\varepsilon^2+3)^2}$$

Ker so vse potence $\varepsilon^k=0; k\geq 2$, dobljeni rezultat poenostavimo in dobimo:

$$f(1+i\varepsilon)=-\frac{1}{3}-\frac{8}{9}i\varepsilon$$

Tako smo izračunali, da je $f(1)=-\frac{1}{3}$ in $f'(1)=-\frac{8}{9}$.

Program WolframAlpha deluje tudi v splošnem. Izračunajmo $f(x+i\varepsilon)$:

$$f(x+i\varepsilon)=\frac{2x^2\varepsilon^2-4x^2-8ix\varepsilon+4\varepsilon^2+\varepsilon^4+x^4}{4x^2\varepsilon^2+(x^2-\varepsilon^2-4)^2}$$

Ko upoštevamo lastnost konstante ε, se dobljeni izraz poenostavi v:

$$f(x+i\varepsilon)=\frac{-4x^2+x^4}{(x^2-4)^2}-\frac{8x}{(x^2-4)^2}i\varepsilon=\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{8x}{(x^2-4)^2}i\varepsilon$$

Realna komponenta dobljenega izraza je enaka $f(x)$, komponenta pri $i\varepsilon$ pa je enaka simboličnemu odvodu dane funkcije:

$$f'(x)=\frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

3.6.3. TRETJI NAČIN: Avtomatsko odvajanje

V splošnem poznamo tri načine, kako lahko izračunamo odvod funkcije z računalnikom:

- simbolično odvajanje,
- numerično odvajanje s končnimi diferencami in
- avtomatsko odvajanje programske kode (Vuk, 2024, 162).

Pri praktični uporabi v programiranju je simbolično odvajanje velikokrat težko izvedljivo (glej Vuk 2024, 158). Pri numeričnem odvajanju imamo težave z zaokrožitvenimi napakami. Avtomatsko

[1] Dostopna je na internetni povezavi https://www.wolframalpha.com/

odvajanje nima omenjenih težav (povzeto po Vuk, 2024, 158). V raziskovalni nalogi smo avtomatsko odvajanje implementirali v programskem jeziku Julia z dualnimi števili. Ker so dualna števila za ta programski jezik »nova« [2], definiramo podatkovni tip »D«, ki opisuje dualno število (Slika 1).

```
# Definicija strukture dualnega števila
struct D
  vf::Float64;
  vo::Float64;
end
```

Slika 1: Definiranje strukture dualnega števila

Posebej vključimo (ali na novo vnesemo) pravila za računanje z dualnimi števili (Slika 2). Pri nekaterih operacijah je pravil več glede na tip posameznih spremenljivk. Program sam izbere metodo, po kateri bo računal (upošteva tip spremenljivk).

```
# Definiramo računske operacije
Base.:+(x::D, y::D) = D(x.vf + y.vf, x.vo + y.vo)
Base.:+(x, y::D) = D(x + y.vf, y.vo)
Base.:-(x::D, y::D) = D(x.vf - y.vf, x.vo - y.vo)
Base.:-(x, y::D) = D(x - y.vf, -y.vo)
Base.:-(x::D, y) = D(x.vf - y, x.vo)
Base.:*(x::D, y::D) = D(x.vf * y.vf, (x.vo * y.vf) + (y.vo * x.vf))
Base.:*(x, y::D) = D(x * y.vf, x * y.vo)
Base.:/(x::D, y::Real) = D(x.vf / y, (y * x.vo)/(y * y))
Base.:/(x::D, y::D) = D(x.vf / y.vf, (y.vf * x.vo - x.vf * y.vo)/(y.vf * y.vf))
Base.:^(x::D, y::Real) = D(x.vf ^ y, y * x.vf ^ (y - 1) * x.vo)
```

Slika 2: Pravila za računanje z dualnimi števili

Podobno kot pravila računanja vključimo ali vnesemo v program tudi pravila za računanje vrednosti funkcij pri dualnem številu $x + b\varepsilon$. Tabelo 1 prepišemo v programskem jeziku Julia (slika 3).

[2] Programski jezik Julia ima vgrajen način za računanje z dualnimi števili. Glej na primer: https://discourse.julialang.org/t/dual-number-magic/11238

```
# Definiramo računanje f(x + b*eps)
Base.:sin(x::D) = D(sin(x.vf), cos(x.vf) * x.vo)
Base.:asin(x::D) = D(asin(x.vf), x.vo/sqrt(1 - x.vf * x.vf))
Base.:cos(x::D) = D(cos(x.vf), -sin(x.vf) * x.vo)
Base.:acos(x::D) = D(acos(x.vf), -x.vo/sqrt(1 - x.vf * x.vf))
Base.:tan(x::D) = D(tan(x.vf), sec(x.vf) * sec(x.vf))
Base.:atan(x::D) = D(atan(x.vf), x.vo/sqrt(1 - x.vf * x.vf))
Base.:cot(x::D) = D(cot(x.vf), -csc(x.vf) * csc(x.vf))
Base.:exp(x::D) = D(exp(x.vf), exp(x.vf) * x.vo)
Base.:log(x::D) = D(log(x.vf), x.vf / x.vf)
Base.:sqrt(x::D) = D(sqrt(x.vf), 0.5 / sqrt(x.vf) * x.vo)
expa(a, x::D) = D(exp(x.vf * log(a)), exp(x.vf *log(a)) * log(a) * x.vo)
loga(a, x::D) = D(log(a, x.vf), x.vo / (x.vf * log(a)))
sqrtn(n::Number, x::Number) = ^(x, 1/n)
sqrtn(n::Number, x::D) = D(sqrtn(n, x.vf), (x.vo / n) * x.vf ^ ((n - 1) / n))
```

Slika 3: Definiranje vrednosti osnovnih funkcij pri dualnem številu x+bε

Iz teorije dualnih števil vemo, da je vrednost funkcije f v točki x_0 enaka realni komponenti števila $f(x_0 + \varepsilon)$, prvi odvod pa je enak dualni komponenti števila $f(x_0 + \varepsilon)$. Z definicijo strukture dualnega števila, opisom operacij in z opisom računanja vrednosti funkcij pri dualnem številu $x + b\varepsilon$ imamo vse pripravljeno za računanje vrednosti odvodov funkcij v dani točki. Na sliki 4 sta dva primera. Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = 5x^2$, funkcija g pa s predpisom $g(x) = \sin(2x)$.

```
julia> f(x)=5*x^2
f (generic function with 1 method)

julia> f(D(3,1))
D(45.0, 30.0)

julia> g(x)=sin(2x)
g (generic function with 1 method)

julia> g(D(pi/6,1))
D(0.8660254037844386, 1.0000000000000002)
```

Slika 4: Primer izračuna vrednosti in odvoda funkcij f in g: f(3)in g(π/6)

V program vnesemo funkcijska predpisa. Če želimo izračunati vrednost funkcije f in njenega odvoda pri $x = 3$, bomo za argument postavili dualno število $3 + \varepsilon$, kar v programskem jeziku Julija ustreza zapisu $D(3,1)$ in izvedli klic $f\big(D(3,1)\big)$. Program izpiše vrednost funkcije kot dualno število z dvema komponentama: realna je enaka $f(3) = 45$, dualna pa $f'(3) = 30$. Podobno je pri funkciji g. (Slika 4).

```
julia> f(x)=((sin(5x))^2 * cos(3x))/cos(x)
f (generic function with 1 method)

julia> f(D(pi/7,1))
D(0.1509688679024192, -3.1155472553053536)
```

Slika 5: Primer izračuna vrednosti funkcije in vrednosti odvoda »zahtevnejše funkcije«

Oglejmo si še en primer. Vzemimo funkcijo f, podano s predpisom $f(x) = \frac{(sin(5x))^2\, cos(3x)}{cos\, x}$. Na sliki 5 je primer izračuna vrednosti $f(\frac{\pi}{7})$ in $f'(\frac{\pi}{7})$. V funkcijski predpis vstavimo dualno število $\frac{\pi}{7} + \varepsilon$ s klicem $f\left(D\left(\frac{\pi}{7}, 1\right)\right)$. Tako bi lahko takoj zapisali na primer enačbo tangente na graf te funkcije v točki $\left(\frac{\pi}{7}, f\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$: $y - 0{,}15097 = -3{,}11555(x - \frac{\pi}{7})$.

Programski jezik Julia ima vgrajen modul za simbolično odvajanje. Na sliki 6 je s funkcijo $g(x)$ označen simbolični odvod funkcije $f(x) = \frac{(sin(5x))^2\, cos(3x)}{cos\, x}$ ter vrednosti $f(\frac{\pi}{7})$ in $f'\left(\frac{\pi}{7}\right) = g\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

```
julia>  f(x)=((sin(5x))^2 * cos(3x))/(cos(x))
f (generic function with 1 method)

julia> Symbolics.derivative(f(x), x)
(10cos(5x)*cos(3x)*sin(5x) - 3sin(3x)*(sin(5x)^2)) / cos(x) + sin(x)*((cos(3x)*(sin(5x)^2)) / (cos(x)^2))

julia> g(x)=(10cos(5x)*cos(3x)*sin(5x) - 3sin(3x)*(sin(5x)^2)) / cos(x) + sin(x)*((cos(3x)*(sin(5x)^2)) / (cos(x)^2))
g (generic function with 1 method)

julia> f(pi/7)
0.1509688679024192

julia> g(pi/7)
-3.115547255305354
```

Slika 6: Prikaz uporabe vgrajenega modula Symbolics.derivative v programskem jeziku Julia

Opomba: Že »na oko« je bilo opaziti, da je pri simboličnem odvajanju funkcije f minilo opazno več časa kot pri izvajanju ukaza $f\left(D\left(\frac{\pi}{7}, 1\right)\right)$, kjer je potekalo računanje z dualnimi števili.

Sicer pa ima programski jezik Julia že vgrajen modul za avtomatsko odvajanje z dualnimi števili. Modul naložimo z ukazom *using ForwardDiff*, primer uporabe pa je *ForwardDiff.derivative(f, pi/7)*. V primeru funkcije s slike 5 izpiše: *-3.115547255305354*. Tudi nekateri drugi programski jeziki omogočajo uporabo dualnih števil, na primer Python, C++.

Vrednost funkcije v dani točki lahko računamo tudi z iteracijo. Za primer vzemimo računaje kvadratnega korena po babilonski metodi (ki jo je posplošil Heron) (Kosheleva, 2024, 1). Kvadratni koren iz števila x so računali po iterativni metodi:

$y_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(y_n + \frac{x}{y_n}\right)$, kjer je $y_0 = \frac{1+x}{2}$. Program je prikazan na sliki 7 (Vuk, 2024, 159).

```
function kvadratni_koren(x)
  y = (1 + x) / 2
    for i = 2:20
      y = (y + x / y) / 2
    end
  y
end
```

Slika 7: Funkcija, ki izračuna kvadratni koren po babilonski metodi

Na sliki 8 sta dva primera izvedbe programa za računaje kvadratnega korena. Prvič je izvedba pri argumentu 64, drugič pa pri dualnem številu $64 + \varepsilon$. Izpis v drugem primeru pomeni, da je vrednost funkcije pri x = 64 enaka 8, vrednost odvoda kvadratnega korena pri x = 64 pa enaka 0,0625.

```
julia> kvadratni_koren(64)
8.0

julia> kvadratni_koren(D(64,1))
D(8.0, 0.0625)

julia> 1/(2*sqrt(64))
0.0625
```

Slika 8: Izračun vrednosti f(x)=√x in njenega odvoda pri x = 64

Ta primer lepo pokaže uporabnost dualnih števil za računanje vrednosti odvoda v dani točki (Edelman, 2023). Morda je nekoliko presenetljivo, da postopek deluje pri funkciji, ki je podana iterativno. Če zapišemo nekaj prvih iteracij, dobimo:

$$y_0 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{x}{y_0}\right) = \frac{x^2 + 6x + 1}{4(x+1)}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{x}{y_1}\right) = \frac{x^4 + 28x^3 + 70x^2 + 28x + 1}{8x^3 + 56x^2 + 56x + 8}$$

$$y_3 = \frac{x^8 + 120x^7 + 1820x^6 + 8008x^5 + 12870x^4 + 8008x^3 + 1820x^2 + 120x + 1}{16x^7 + 560x^6 + 4368x^5 + 11440x^4 + 11440x^3 + 4368x^2 + 560x + 16}$$

Na vsakem koraku vstavimo v racionalno iteracijsko formulo $y_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(y_n + \frac{x}{y_n}\right)$ prejšnji izraz, ki je racionalna funkcija. Tako na vsakem koraku dobimo racionalno funkcijo. Za racionalno funkcijo pa smo že pokazali, kako izračunamo $f(x+\varepsilon)$ (glej Trditev 2).

Celotni program, s katerim smo delali, je v prilogi 1.

4. Primerjava simboličnega odvajanja in računanja odvoda z dualnimi števili

A) Računaje simboličnih odvodov z dualnimi števili

Primer 1: $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

Izračunajmo prvi odvod z uporabo pravil:

$$\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)' = \frac{2x(x^2-4) - x^2(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

Izračunamo prvi odvod z dualnimi števili ***Du***$(f(x+\varepsilon))$:

$$f(x+\varepsilon) = \frac{(x+\varepsilon)^2}{(x+\varepsilon)^2-4} = \frac{x^2+2x\varepsilon}{x^2+2x\varepsilon-4} = \frac{x^2+2x\varepsilon}{x^2+2x\varepsilon-4} \cdot \frac{x^2-4-2x\varepsilon}{x^2-4-2x\varepsilon} = \frac{x^4-4x^2-2x^3\varepsilon+2x^3\varepsilon-8x\varepsilon}{(x^2-4)^2} =$$

$$\frac{x^4-4x^2}{(x^2-4)^2} - \frac{8x\varepsilon}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{8x\varepsilon}{(x^2-4)^2}$$

Primer 2: $f(x) = x \cdot \sin(2x)$
Izačun z uporabo pravil:

$$f'(x) = 1 \cdot \sin(2x) + x \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \sin(2x) + 2x \cdot \cos(2x)$$

Račun z dualnimi števili:

$$f(x+\varepsilon) = (x+\varepsilon)(\sin(2(x+\varepsilon))) = (x+\varepsilon)(\sin(2x+2\varepsilon)) =$$
$$(x+\varepsilon)(\sin(2x) + (\cos(2x))2\varepsilon) = x \cdot \sin 2x + (\sin(2x) + 2x \cdot \cos(2x))\varepsilon$$
$$f'(x) = \boldsymbol{Du}(x \cdot \sin(2x) + (\sin(2x) + 2x \cdot \cos(2x))\varepsilon) = \sin(2x) + 2x \cdot \cos(2x)$$

Na osnovi izračunanih primerov sklepamo, da ni bistvene razlike v tehniki računanja simboličnih odvodov z uporabo pravil odvajanja in z dualnimi števili. Pri običajnem odvajanju moramo poznati odvode elementarnih funkcij in pravila odvajanja. Pri računanju z dualnimi števili pa moramo poznati prav tako odvode elementarnih funkcij v obliki izračunanih vrednosti $f(x+b\varepsilon)$ in računske operacije z dualnimi števili. Računske operacije z dualnimi števili so zelo podobne računskim operacijam s kompleksnimi števili in same po sebi niso zahtevne. V praksi pa se izkažejo za dokaj zahtevne, saj vključujejo iracionalizacijo izrazov, ki imajo na primer ulomek sestavljen iz treh členov.

B) Računaje vrednosti funkcije in vrednosti prvega odvoda v točki x_0

1. primer: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Izračunajte vrednost funkcije in vrednost odvoda v točki $x_0 = 1$, kjer je $f(x) = \frac{1}{2}$.

Vrednost odvoda $f'(1)$ izračunamo preko simboličnega odvoda:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2}$$

Tako je $f'(1) = \frac{3}{4}$.

Z dualnimi števili dobimo obe vrednosti z izračunom $f(1+\varepsilon)$:

$$f(1+\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)^2}{2+\varepsilon} = \frac{(1+2\varepsilon)}{(2+\varepsilon)} \cdot \frac{(2-\varepsilon)}{(2-\varepsilon)} = \frac{2+3\varepsilon}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon$$

Realna komponenta je enaka je $f(x) = \frac{1}{2}$, dualna pa $f'(1) = \frac{3}{4}$.

2. primer: Izračunajte vrednost funkcije in vrednost odvoda v točki $x_0 = \frac{\pi}{3}$, kjer je $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$.

Običajni način:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$f'(x) = 2\sin x(\cos x)^2 - (\sin x)^3$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{8}$$

Z dualnimi števili izračunamo:

$$f\left(\frac{\pi}{3} + \varepsilon\right) = \left(\sin\frac{\pi}{3} + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\varepsilon\right)^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\varepsilon\right) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right) =$$

$$\frac{3}{8} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\varepsilon = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}\varepsilon$$

Realna komponenta rezultata je enaka je $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{8}$, dualna pa $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{8}$.

Menimo, da je računaje vrednosti odvoda v dani točki z dualnimi števili enostavnejše kot računanje z običajno metodo.

5. Zaključek

Zanimivo je, da so okrog 150 let star koncept dualnih števil šele pred nekaj leti uporabili v zvezi z odvajanjem funkcij. Uporabnost pri odvajanju se zlasti pokaže pri numeričnem računanju vrednosti odvodov v dani točki. Prednosti so v hitrosti, natančnosti, ni potrebe po simboličnem odvajanju in v enostavni implementaciji (Edelman, 2023). Tudi naše ugotovitve so podobne. Za računanje vrednosti odvoda funkcije v dani točki potrebujemo znanje o odvodih elementarnih funkcij in spretnost računanja z dualnimi števili. Ker je izvedba osnovnih računskih operacij podobna računanju s kompleksnimi števili (pravzaprav je še enostavnejša), menimo, da bi bilo za srednješolce dobrodošla vsaj seznanitev s tem konceptom. Glavni problem pa je seveda vpeljava, saj se v srednji šolo ne obravnava razvoja funkcij v potenčno vrsto.

6. Viri in literatura

[1] Edelman, A.: *Lecture 5 Part 2: Forward Automatic Differentiation via Dual Numbers*, 2023. [online] [citirano 17. 12. 2024] Dostopno na spletnem naslovu: https://www.youtube.com/watch?v=5F6roh4pmJU

[2] Kandasamy, W.B.V., Smarandache,F.: *Dual numbers*, ZIP PUBLISHING, Ohio, 2012. [citirano 17. 12. 2023] Dostopno na spletnem naslovu: https://digitalrepository.unm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1136&context=math_fsp

[3] Kosheleva, O.: Babylonian MethodofC omputing the Square Root: Justifications Based on Fuzzy Techniques and on Computational Complexity, Department of Mathematics Education University of Texas at El Paso, 2024. [online] [citirano 17. 1. 2025] Dostopno na spletnem naslovu: https://ceid.utsa.edu/HYPAD/wp-content/uploads/sites/50/2023/04/3DualNumbers-12.pdf

[4] Penn, M.: *The strange cousin of the complex numbers -- the dual numbers*, 2022. [online] [citirano 15. 5. 2023] Dostopno na spletnem naslovu: https://www.youtube.com/watch?v=ceaNqdHdqtg

[5] Vuk, M.: *Numerična matematika v programskem jeziku Julia*, Univerza v Ljubljani Fakulteta za računalništvo in informatiko, Ljubljana, 2024. [online] [citirano 7. 12. 2024] Dostopno na spletnem naslovu: https://zalozba.fri.uni-lj.si/vuk2024.pdf

[6] Zlobec Jurčič, B.: *Seminar NABE o dualnih številih,* 2023. [online] [citirano 15. 5. 2023] Dostopno na spletnem naslovu: http://matematika.fe.uni-lj.si/html/people/borut/scratch/Dokumenti/NABE_dual.pdf

Priloga 1: Celotni program v programskem jeziku Julia

```
import Pkg
import Base

# Definiramo strukturo dualnega števila
struct D
  vf::Float64;
  vo::Float64;
end

# Definiramo računske operacije
Base.:+(x::D, y::D) = D(x.vf + y.vf, x.vo + y.vo)
Base.:+(x, y::D) = D(x + y.vf, y.vo)
Base.:-(x::D, y::D) = D(x.vf - y.vf, x.vo - y.vo)
Base.:-(x, y::D) = D(x - y.vf, -y.vo)
Base.:-(x::D, y) = D(x.vf - y, x.vo)
Base.:*(x::D, y::D) = D(x.vf * y.vf, (x.vo * y.vf) + (y.vo * x.vf))
Base.:*(x, y::D) = D(x * y.vf, x * y.vo)
Base.:/(x::D, y::Real) = D(x.vf / y, (y * x.vo)/(y * y))
Base.:/(x::D, y::D) = D(x.vf / y.vf, (y.vf * x.vo - x.vf * y.vo)/(y.vf * y.vf))
Base.:^(x::D, y::Real) = D(x.vf ^ y, y * x.vf ^ (y - 1) * x.vo)

# Definiramo računanje f(x + b*eps)
Base.:sin(x::D) = D(sin(x.vf), cos(x.vf) * x.vo)
Base.:asin(x::D) = D(asin(x.vf), x.vo/sqrt(1 - x.vf * x.vf))
Base.:cos(x::D) = D(cos(x.vf), -sin(x.vf) * x.vo)
Base.:acos(x::D) = D(acos(x.vf), -x.vo/sqrt(1 - x.vf * x.vf))
Base.:tan(x::D) = D(tan(x.vf), sec(x.vf) * sec(x.vf))
Base.:atan(x::D) = D(atan(x.vf), x.vo/sqrt(1 - x.vf * x.vf))
Base.:cot(x::D) = D(cot(x.vf), -csc(x.vf) * csc(x.vf))
Base.:exp(x::D) = D(exp(x.vf), exp(x.vf) * x.vo)
Base.:log(x::D) = D(log(x.vf), x.vf / x.vf)
Base.:sqrt(x::D) = D(sqrt(x.vf), 0.5 / sqrt(x.vf) * x.vo)
expa(a, x::D) = D(exp(x.vf * log(a)), exp(x.vf *log(a)) * log(a) * x.vo)
loga(a, x::D) = D(log(a, x.vf), x.vo / (x.vf * log(a)))
sqrtn(n::Number, x::Number) = ^(x, 1/n)
sqrtn(n::Number, x::D) = D(sqrtn(n, x.vf), (x.vo / n) * x.vf ^ ((n - 1) / n))



#Definiramo funkcijo, ki izračuna vrednost funkcije in  vrednost odvoda v točki x
```

```
function izracunaj_vfvo(f, x::Number)
  v = D(x, 1.0)
  return f(v).vf, f(v).vo
end

#Definiramo funkcijo, ki izračuna vrednost funkcije in  vrednost odvoda v točki x in ju lepo izpiše
function izpisi_vfvo(f, tocka_x::Real)
        vfun, vodv = izracunaj_vfvo(f, tocka_x)
        print("Vrednost funkcije: ", vfun, "\nVrednost odvoda v ", tocka_x, ":  ", vodv)
        print("\n")
end
# Definiramo funkcijo, ki z iteracijo izračuna kvadratni koren iz števila x (babilonska oz. Heronova metoda)
function kvadratni_koren(x)
  y = (1 + x) / 2
    for i = 2:20
      y = (y + x / y) / 2
    end
  y
end

#Običajni izračun kvadratenga korena in odvoda pri danem številu x, na primer pri x = 5
x = 5
println("Kvadratni koren iz: ",x,  " je: ", sqrt(x), "   odvod pa: ", 0.5/sqrt(x))
```