DVOJEZIČNA OSNOVNA ŠOLA I LENDAVA
I. SZ. LENDVAI KÉTNYELVŰ ÁLTALÁNOS ISKOLA
KRANJČEVA 44, 9220 LENDAVA
Tel.: (02) 5772-800, Fax.: (02) 5772-806
www.dos1-lendava.si
E-mail: dos1.lendava@guest.arnes.si

DVOJIŠKI ULOMKI IN ZANIMIVOSTI NJIHOVE UPORABE V VSAKDANJEM ŽIVLJENJU

Raziskovalno področje: matematika ali logika

Raziskovalna naloga

AVTORICI:

LAURA HOZJAN

ALINA GEREBIC

MENTORICA:

VIRÁG TADINA BENCE

Lendava, 2025

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujeva mentorici gospe Virág Tadina Bence za usmerjanje in spodbudo med izdelavo raziskovalne naloge.

Zahvaljujeva se tudi gospe Jasni Cigut za lekturo v slovenskem jeziku in gospodu Damirju Soldatu za lekturo v angleškem jeziku.

KAZALO

KAZALO SLIK

KAZALO TABEL

POVZETEK

Tema najine raziskovalne naloge so dvojiški (binarni) ulomki. Izhajali sva iz navadnih ulomkov in podrobneje preučevali ulomke, ki imajo v imenovalcu vrednost potence števila dva ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ …) Raziskovali in preiskovali sva, na kakšne načine se taki ulomki zapisujejo in ali obstajajo posebna pravila pri računanju z njimi. Opazili sva, da imajo taki ulomki posebno vlogo tudi v vsakdanjem življenju. Zanimalo naju je, na kakšen način, kako in zakaj. V najini raziskovalni nalogi so navedeni različni zapisi dvojiških ulomkov, lastnosti in računske operacije z njimi ter nekaj primerov njihove uporabe v vsakdanjem življenju.

Ključne besede: dvojiški ulomki, binarna in decimalna števila, računske operacije

ABSTRACT

The topic of our research paper is binary fractions. We started by regular fractions and continued by studying in more detail the fractions that have a power of two in the denominator ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ …). We researched and explored how these fractions are presented and whether there are special rules when performing calculations with them. We noticed that such fractions play a special role in everyday life and we were curious about the ways and why is that so. In our research paper, we have outlined different representations of binary fractions, their properties, and arithmetic operations with them, as well as some examples of their use in everyday life.

Keywords: binary fractions, binary and decimal numbers, arithmetic operations

UVOD

Dvojiški ulomki so ulomki, ki imajo v imenovalcu vrednost potence števila 2 (npr. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ …). V vsakdanjem življenju se pogosto omenjajo (v glasbi osminka, pol ure, četrt pice …). V strokovni literaturi [1] lahko zasledimo veliko zanimivih dejstev o njih in odločili sva se, da bova to še podrobneje raziskali. Iskali sva odgovore na vprašanja: kaj so, kako se definirajo, zakaj so pomembni v matematiki in vsakdanjem življenju? Kako so nastali njihovi zapisi? Zakaj so dvojiški ulomki velikokrat omenjeni v vsakdanjih problemih? Kako se pretvarja iz desetiškega v dvojiški sistem in obratno? Ali obstajajo izjeme pri pretvarjanju? Kako se računa z njimi? So matematični zapisi not in taktovski načini povezani z njimi? Pri delu sva si rezultate izračunov sistematično zapisovali v tabele, pomagali sva si tudi s strokovno literaturo in svetovnim spletom.

Hipoteza: Dvojiški in desetiški ulomki se v marsičem razlikujejo. V vsakdanjem življenju je uporabno poznavanje tako enih kot tudi drugih.

1. DVOJIŠKI ULOMKI

Dvojiški oziroma binarni ulomki so ulomki, ki imajo v imenovalcu števila 2, 4, 8, 16, 32 ... torej števila, ki jih dobimo z zaporednim potenciranjem števila 2.

Njihova vrednost je lahko tudi večja od 1, v naši raziskovalni nalogi se bomo osredotočili predvsem na pozitivne ulomke, ki so manjši od 1.

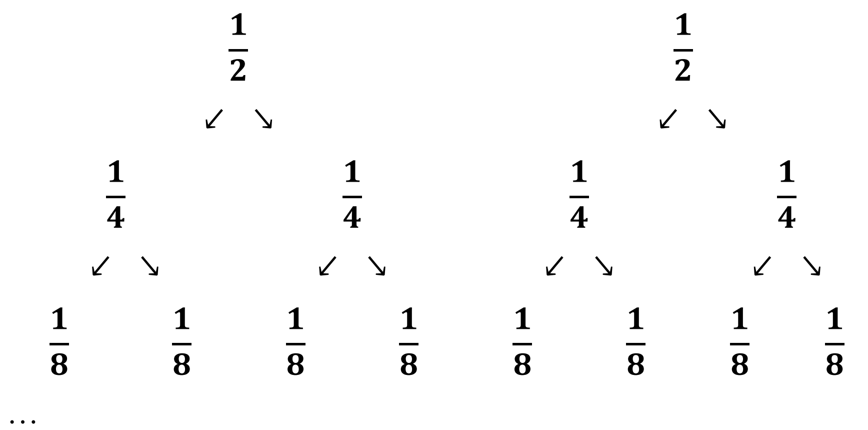
Najprej sva opazovali ulomke s števcem 1. Tako je nastalo naslednje zaporedje:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \cdots$$

Te ulomke lahko zapišemo s splošno obliko $(\frac{1}{2})^n$, v tem zapisu predstavlja n naravno število.

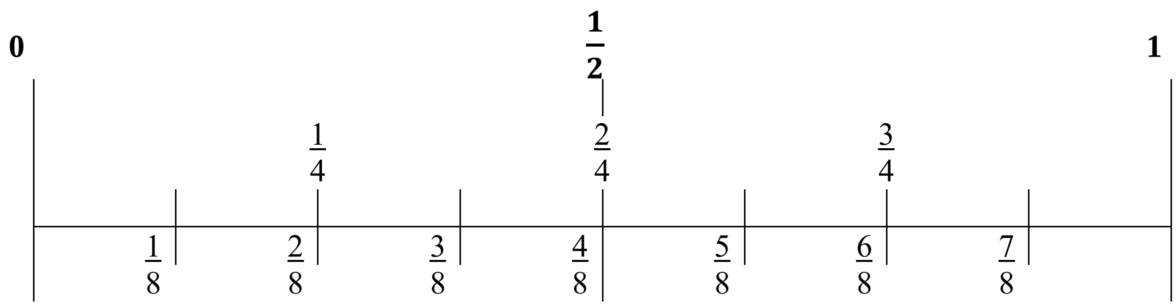
Vsak naslednji ulomek v tem zaporedju je enak polovici prejšnjega ulomka.

Če bi prikazali delitev dvojiških ulomkov vizualno, bi nastala drevesna struktura:



Slika 1: ***Drevesna struktura dvojiških ulomkov***

Prva veja drevesa je $\frac{1}{2}$, ki se deli dalje na polovico in tako dalje do neskončnosti, kar pomeni, da se vrednosti zmanjšujejo. Nastane enakomerna drevesna struktura, kjer se delčki izhodiščne vrednosti $\frac{1}{2}$ enakomerno delijo na vedno manjše enake dele.



Slika 2: ***Delitev enotske daljice na dvojiške ulomke z imenovalci 2, 4 in 8***

Med raziskovanjem literature [1] o dvojiških ulomkih sva spoznali, da se lahko vsak dvojiški ulomek zapiše tudi s posebno obliko števil z vejico. Taka dvojiška števila (binarna) bova v tej raziskovalni nalogi označevali z dvojko v oklepaju v desnem spodnjem kotu števil.

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=0{,}1_{(2)}$$

$$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=0{,}01_{(2)}$$

$$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=0{,}001_{(2)}$$

$$\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=0{,}0001_{(2)}$$

$$\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=0{,}00001_{(2)}$$

…

$$\frac{1}{8192}=\left(\frac{1}{2}\right)^{13}=0{,}0000000000001_{(2)}$$

Z naštevanjem bi lahko še nadaljevali. Opazili sva, da ima binarna številka toliko števk za vejico, kot je stopnja potence števila $\frac{1}{2}$. Števki takih števil sta samo 0 in 1, torej se razlikuje od desetiškega sistema, kjer so števke od 0 do 9.

V dvojiškem številu vsaka števka po vejici predstavlja vrednosti zaporednih potenc ulomka $\frac{1}{2}$ (polovice, četrtine itd.), podobno kot v decimalnem sistemu, kjer po decimalni vejici vsako decimalno mesto predstavlja zaporedne vrednosti potence števila $\frac{1}{10}$ (desetine, stotine itd.).

Zanimalo naju je, kako bi lahko zapisali poljubne vrednosti.

Med raziskavo sva zapisali v tabelo naslednje ulomke in iskali vzorce.

Imenovalec	Ulomki z danim imenovalcem
2	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$
8	$\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$
16	$\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{4}{16}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$, $\frac{7}{16}$

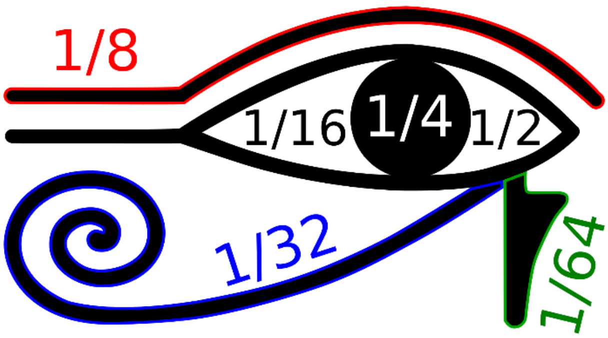
	$\frac{8}{16}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \quad \frac{9}{16}, \quad \frac{10}{16}=\frac{5}{8}, \quad \frac{11}{16}, \quad \frac{12}{16}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ $\frac{13}{16}, \quad \frac{14}{16}=\frac{7}{8}, \quad \frac{15}{16}$
32	$\frac{1}{32}, \quad \frac{2}{32}=\frac{1}{16}, \quad \frac{3}{32}, \quad \frac{4}{32}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}, \quad \frac{5}{32}, \quad \frac{6}{32}=\frac{3}{16}, \quad \frac{7}{32},$ $\frac{8}{32}=\frac{4}{16}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}, \quad \frac{9}{32}, \quad \frac{10}{32}=\frac{5}{16}, \quad \frac{11}{32}, \quad \frac{12}{32}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}, \quad \frac{13}{32},$ $\frac{14}{32}=\frac{7}{32}, \quad \frac{15}{32}, \quad \frac{16}{32}=\frac{8}{16}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \quad \frac{17}{32}, \quad \frac{18}{32}=\frac{9}{16}, \quad \frac{19}{32},$ $\frac{20}{32}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}, \quad \frac{21}{32}, \quad \frac{22}{32}=\frac{11}{16}, \quad \frac{23}{32}, \quad \frac{24}{32}=\frac{12}{16}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}, \quad \frac{25}{32},$ $\frac{26}{32}=\frac{13}{16}, \quad \frac{27}{32}, \quad \frac{28}{32}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}, \quad \frac{29}{32}, \quad \frac{30}{32}=\frac{15}{16}, \quad \frac{31}{32}$
	…

Tabela 1: ***Raziskujemo ulomke z imenovalci 2, 4, 8, 16 in 32***

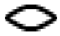
Najina tabela bi se lahko nadaljevala. Pri posamezni vrednosti imenovalca bo zmeraj več ulomkov. Ugotovili sva, da se dvojiški ulomki, ki imajo v števcu soda števila, lahko krajšajo, ulomki, ki imajo v števcu liha števila, pa se ne morejo krajšati. Zanimalo naju je, ali imajo ti ulomki, ki jih ni bilo mogoče krajšati, morda kakšne druge lastnosti.

Med raziskovanjem literature [3] in drugih virov [5] o zgodovini matematike sva izvedeli, da so Egipčani veliko vedeli o ulomkih in tudi o dvojiških ulomkih.

Stari Egipčani so uporabljali dva različna načina za zapisovanje ulomkov. Ulomke, ki imajo v števcu število 1, še dandanes imenujemo egipčanski ulomki (ali enotski ulomki) in ulomki Horusovega očesa. Ti ulomki so ravno tisti, o katerih sva želeli izvedeti čim več.



Slika 3: **Horusovo oko** (Vir slike [5])

Ulomki Horusovega očesa je sistem, ki so ga uporabljali za izražanje necelih enot količin žita ali tekočin ali pa so take necele količine izrazili kot vsoto dvojiških ulomkov $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ in $\frac{1}{64}$. Zgodnje oblike tega sistema najdemo v dokumentih iz pete dinastije Egipta pred 4000 leti. Opazili sva, da so Egipčani vedno uporabljali ulomke s števcem 1. Da bi ločili ulomke od celih števil, so nad številko zapisali »oval«, oziroma ta znak:  . Imeli so zapis za 1 = I in 10 = ∩. [3]

Tako bi $\frac{1}{2}$ po egipčansko lahko zapisali:  .

Druge ulomljene vrednosti so zapisovali kot vsoto takih enotskih ulomkov. Na takšen egipčanski način sva uspeli zapisati tudi ulomke iz najine tabele 1, ki jih ni bilo mogoče krajšati.
Nekaj primerov:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$
$$\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$$
$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$
$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$
$$\frac{5}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$
$$\frac{11}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$
$$\dots$$

Ta zapis je mogoče razčleniti na dvojiške ulomke. Pisanje vodoravne črtice med števcem in imenovalcem so v 12. stoletju vpeljali Arabci, ki celotno ulomljeno vrednost, ki je manjša od 1, opisuje z dvema številoma. Pred tem so sprva Egipčani, Babilonci, nato Grki in kasneje ostali sredozemski narodi izražali ulomljene vrednosti z vsoto ali zmnožkom enotskih ulomkov.

Nama se je pa zdelo zanimivo, da je že hindujski matematik Mahavra okoli leta 850 pr. n. št. za deljenje ulomkov uporabljal pravilo »obrni in pomnoži«, ki ga spoznamo tudi mi med osnovnošolskim izobraževanjem, je pa to postalo del zahodne oz. evropske matematike šele v 16. stoletju, prav tako pa so v tistem času na evropskih tleh začeli uporabljati desetiški sistem.

Z razvojem »strojev, ki razmišljajo«, je v 17. stoletju nemški matematik G. W. Leibniz zasnoval osnove binarnega sistema, katerega korenine segajo v starodavne kulture na Kitajskem, v Indiji in v arabskih državah. [3]

Obstaja torej več načinov zapisovanja dvojiških ulomkov, zato bova v nadaljevanju raziskali njihove različne pretvorbe.

1.1. Pretvorba iz dvojiškega v desetiški sistem

Če ima dvojiško število več kot eno števko z vrednostjo 1, označuje vsaka števka 1 vrednost potence števila $\frac{1}{2}$ na tisti stopnji, na katerem mestu se nahaja v številu od leve proti desni za vejico.

Poglejmo si primer.

Predstavili bova pretvorbo števila $0{,}00010101_{(2)}$ v ulomek in v decimalno število v desetiškem sistemu. Navadna decimalna števila v desetiškem sistemu bomo označili z malo številko 10 v desnem spodnjem kotu.

$$
\begin{aligned}
&0{,}00010101_{(2)} = \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = \frac{16+4+1}{256} = \frac{21}{256} \\
&= 0{,}0625_{\ (10)} + 0{,}015625_{(10)} + 0{,}00390625_{\ (10)} = 0{,}8203125_{(10)}
\end{aligned}
$$

Tako se pretvorijo številke, ki so zapisane z dvojiškim zapisom v ulomke z desetiškim zapisom.

1.2. Pretvorba iz desetiškega v dvojiški sistem

Za pretvorbo iz desetiškega v dvojiški sistem sva znova preučili naslednje primere in iskali vzorce oziroma zakonitosti:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5_{(10)} = 0{,}1_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25_{(10)} = 0{,}01_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125_{(10)} = 0{,}001_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625_{(10)} = 0{,}0001_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125_{(10)} = 0{,}00001_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} = 0{,}015625_{(10)} = 0{,}000001_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} = 0{,}0078125_{(10)} = 0{,}0000001_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} = 0{,}00390625_{(10)} = 0{,}00000001_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512} = 0{,}001953125_{(10)} = 0{,}000000001_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} = 0{,}0009765625_{(10)} = 0{,}0000000001_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048} = 0{,}00048828125_{(10)} = 0{,}00000000001_{(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{1}{4096} = 0{,}000244140625_{(10)} = 0{,}000000000001_{(2)}$$

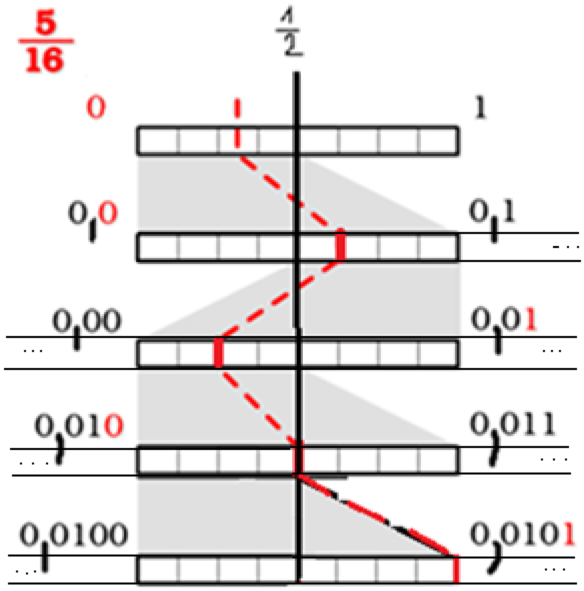
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1}{8192} = 0{,}0001220703125_{(10)} = 0{,}0000000000001_{(2)}$$

…

Z naštevanjem bi lahko še nadaljevali, opaziva pa, da je v dvojiškem ulomku z vedno večjim imenovalcem vedno več števk za vejico tudi v dvojiškem sistemu.

Opazili sva tudi, da si števke v desetiškem sistemu od ulomka $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ izmenjujejo zadnje tri decimalke (izmenično 125 oziroma 625). Kadar imamo liho stopnjo potence ulomka $\frac{1}{2}$, so zadnje tri števke v desetiškem sistemu 125, ko pa imamo sodo stopnjo, se števke za vejico končajo s 625.

Pretvorbo ulomka $\frac{5}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 0{,}0101_{(2)}$ v dvojiški decimalni zapis si lahko predstavljamo tudi z večkratnim razpolavljanjem lika, ki ga opazujemo pod mikroskopom najprej z dvakratno, nato s štirikratno, osemkratno … povečavo. V vsakem koraku preverimo, ali je vrednost bližje skrajno levemu ali skrajno desnemu ulomku, na koncu pa pridemo tudi do roba našega lika.



*Slika 4: **Pretvarjanje ulomkov v dvojiška decimalna števila** (prirejeno po [4])*

1. Ulomek je manjši od 1, torej zapišemo **0** celih.
2. Če je ulomek **manjši** od $\frac{1}{2}$ danega območja, zapišemo prvo števko za vejico **0**. Vsak delček lika razdelimo na polovice in sliko povečamo.
3. Če je iskana vrednost **večja** od polovice območja, zapišemo števko **1** in nadaljujemo z delitvijo lika.
4. Če je iskana vrednost ravno **enaka** eni polovici, vemo, da smo že pri **koncu**, vendar še zapišemo **0**.
5. Če je vrednost enaka **desnemu robu**, se postopek konča in zapišemo **1**.

V viru [5] sva prebrali tudi, da lahko pretvorba števila iz desetiškega v dvojiški sistem temelji na postopku zaporednega množenja decimalne vrednosti s številom 2. Pri tem zabeležimo cela števila, ki jih dobimo pri posameznih korakih, dokler ne pridemo do ulomljenega dela 0 (ali dokler ne dosežemo želene natančnosti).

Vzemimo primer, da pretvorimo $0{,}6875_{(10)}$ v dvojiški zapis $0{,}1011_{(2)}$.

Množimo decimalno vrednost z 2, pri čemer rezultat razdelimo na celo število (pred decimalno vejico) in ulomljeni del (za decimalno vejico).

$0{,}6875 \cdot 2 = 1{,}375$ $\longrightarrow$ cela vrednost: 1, ulomljeni del: 0,375

nadaljujemo z množenjem ulomljenega dela:

$0{,}375 \cdot 2 = 0{,}75$ $\longrightarrow$ cela vrednost: 0, ulomljeni del: 0,75

ulomljeni del pomnožimo:

$0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5$ $\longrightarrow$ cela vrednost: 1, ulomljeni del: 0,5

množimo še:

$0{,}5 \cdot 2 = 1$ $\longrightarrow$ cela vrednost: 1, ulomljeni del: 0

Z ulomljenim delom 0 se postopek zaključi.

Korak	Decimalna vrednost	Množenje z 2	Cela vrednost	Ulomljeni del
1.	0,6875	1,375	1	0,375
2.	0,375	0,75	0	0,75
3.	0,75	1,5	1	0,5
4.	0,5	1	1	0

Tabela 2: ***Postopek izračuna in rezultat pretvorbe iz desetiškega v dvojiški zapis: 0,6875$_{(10)}$ = 0,1011$_{(2)}$.***

Desetiško število smo v dvojiškem sistemu dobili tako, da smo cele vrednosti števil po zaporednem vrstnem redu zapisali v dvojiško predstavitev decimalnega števila $0{,}6875_{(10)}$, ki znaša v dvojiškem zapisu $0{,}1011_{(2)}$.

Rezultat lahko tudi preizkusimo.

Dvojiško število $0{,}1101_{(2)}$ lahko pretvorimo nazaj v desetiško:

$$0{,}1101_{(2)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} =$$

$$= 0{,}5_{(10)} + 0 + 0{,}125_{(10)} + 0{,}0625_{(10)} = 0{,}6875_{(10)}$$

Pri vsakem koraku pomnožimo ulomljeni del s številom 2, da ugotovimo, koliko "polovic, četrtin, osmin" itd. je vsebovanih v vrednosti.

Med preizkušanjem tega postopka pa sva naleteli tudi na težavo. Podobno kot ko pri pretvarjanju desetiških ulomkov v decimalna števila ponekod nastanejo neskončna decimalna števila, lahko tudi pri pretvorbi ulomkov, ki niso dvojiški, pride do neskončnega zapisa števil v dvojiškem sistemu. So pa tudi v tem primeru ti neskončni zapisi periodični oziroma se del zapisa ponavlja v neskončnost po nekem vzorcu.

Predstavili bova primer izračuna števila $0{,}3_{(10)}$ iz desetiškega v dvojiški zapis.

Pretvorbo izvajamo s prej predstavljenim postopkom ponavljajočega množenja z 2. Zabeležimo cele dele in ulomljene dele, dokler ne dosežemo ostanka 0 ali želenega števila decimalk.

Korak	Decimalna vrednost	Množenje z 2	Cela vrednost	Ulomljeni del
1.	0,3	0,6	0	0,6
2.	0,6	1,2	1	0,2
3.	0,2	0,4	0	0,4
4.	0,4	0,8	0	0,8
5.	0,8	1,6	1	0,6
6.	0,6	1,2	1	0,2
7.	0,2	0,4	0	0,4
8.	0,4	0,8	0	0,8
9.	0,8	1,6	1	0,6
10.	0,6	1,2	1	0,2
…				

Tabela 3: ***Pretvorba in rezultati za pretvorbo števila 0,3$_{(10)}$ v dvojiško število***

Z analizo sva ugotovili, da se ulomljeni del pri koraku 2 ponovi pri koraku 6, nato pri koraku 10 in tako naprej. To pomeni, da se vzorec števk tudi v dvojiškem zapisu ponavlja. Opazili sva zanimiv pojav, da pride do periodičnosti. Ponavljajo se števke 0011.

Dobili sva naslednji rezultat: $0{,}3_{(10)} = 0{,}0100110011\,\dots_{(2)} = 0{,}01\overline{0011}_{(2)}$

Ugotovili sva, da je število neskončen periodičen zapis v dvojiškem sistemu in ga ne moremo natančno zapisati kot končno dvojiško število.

Slika 5: ***Pretvorba števila 0,3(10) v dvojiško število s pomočjo enotske daljice.***

Ko primerjamo pretvorbe desetiškega zapisa števil $0{,}6875_{(10)}$ in $0{,}3_{(10)}$v dvojiški zapis, je jasno, da nekatera števila potrebujejo več mest, da dosežejo zadostno natančnost, medtem ko druga lahko zapišemo že z nekaj mesti. Za decimalno številko $0{,}6875_{(10)}$ lahko dosežemo popolno natančnost v dvojiškem zapisu z le štirimi mesti $0{,}1101_{(2)}$, medtem ko številka, kot je $0{,}3_{(10)}$, potrebuje neskončno število mest za natančen zapis.

Če želimo doseči visoko natančnost pri matematičnih izračunih (na primer v računalništvu), moramo uporabiti več števk oziroma podatkovnih mest. To se v računalništvu imenuje bit (binary digit).

Pretvoriti sva želeli tudi ulomke, kot so $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{6}$. Uporabili sva postopek ponavljajočega množenja z 2. Predvidevali sva, da tudi pri teh ulomkih na koncu ne pridemo do ostanka 0. To hipotezo sva potrdili.

Oglejmo si pretvorbo ulomka $\frac{1}{6}$ v dvojiški zapis.

Korak	Ulomljena vrednost	Množenje z 2	Cela vrednost	Ulomljeni del
1.	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
2.	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
3.	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
4.	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
5.	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
…				

Tabela 4: ***Pretvorba ulomka v neskončno dvojiško število***

Dobili sva rezultat, da je nedvojiški ulomek $\frac{1}{6} = 0{,}0010101\,\ldots_{(2)} = 0{,}0\overline{01}_{(2)}$. Ulomek $\frac{1}{6}$ ni niti desetiški in niti dvojiški, torej niti v dvojiškem zapisu nima končnega zapisa temveč samo neskončno periodičnega.

2. RAČUNSKE OPERACIJE Z DVOJIŠKIMI ULOMKI

2.1. Seštevanje v dvojiškem sistemu

V dvojiškem sistemu seštevamo dvojiška števila tako, da jih najprej pravilno podpišemo (celi del pod celi del, prvo decimalko pod prvo decimalko, drugo pod drugo ...). Seštevamo jih od desne proti levi. Nato pa se držimo naslednjih pravil:

- Ko števko 1 seštevamo s števko 1, dobimo 2, česar v dvojiškem sistemu ne moremo imeti, saj v dvojiškem sistemu uporabljamo le števki 1 in 0. Zato nastane 10 in 1 prenesemo v naslednji stolpec. $1 + 1 = 10$ (1 prenesemo v naslednji stolpec).
- Ko nič seštevamo z nič, dobimo nič. $0 + 0 = 0$
- Ko ena seštevamo z nič, dobimo ena. $1 + 0 = 1$

Seštevanje prikažemo na primeru $0{,}101_{(2)} + 0{,}001_{(2)}$

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$$

+	0,	1	0	1
	0,	0	0	1
	0,	1	0	2
			+1	
	0,	1	1	0

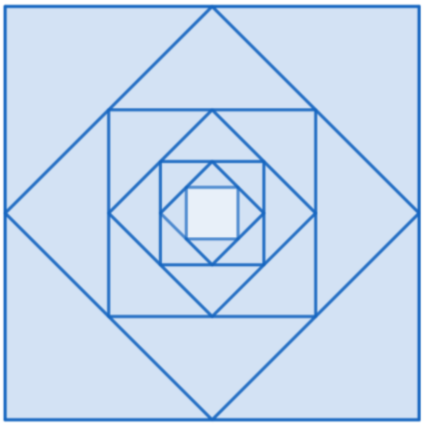
Tabela 5: ***Postopek seštevanja***

1. 1 + 1 = 10 (1 prenesemo v naslednji stolpec)
2. 0 + 0 +1 (ki smo jo prenesli) = 1
3. 1 + 0 = 1
4. 0 + 0 = 0
5. Tako seštejemo 2 števili v dvojiškem sistemu.

Rezultat je $0{,}110_{(2)}$, kar je $\frac{6}{8}$ ali $0{,}75_{(10)}$.

Seštevanje dvojiških števil se bistveno ne razlikuje od klasičnega seštevanja decimalnih števil. Pri seštevanju dvojiških števil, kot so zapisane zgoraj, moramo le biti pozorni na število decimalnih mest.

Med raziskovanjem sva v literaturi [6] našli zelo zanimivo nalogo seštevanja ulomkov.
Kvadrat je razdeljen na manjša območja tako, kot prikazuje slika 7:

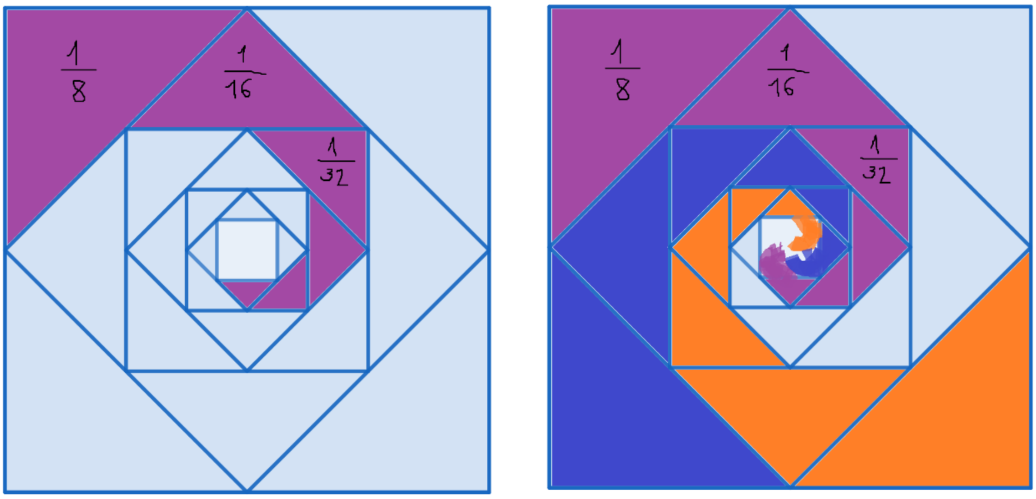


Slika 6: ***Delitev kvadrata na osmine, šestnajstine, dvaintridesetine …***

Oglejmo si naslednje seštevanje:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

Da bi si nalogo olajšali si pomagamo z različnimi barvami:



Slika 7: ***Nastanek spiralaste oblike***

S pomočjo slike ni težko ugotoviti, da bo neskončna vsota $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{4}$, saj lahko barvanje nadaljujemo v neskončnost, ampak vedno lahko s štirimi enakimi spiralastimi območji prebarvamo celi kvadrat.

Račun lahko zapišemo tudi z dvojiškimi števili: $0{,}001_{(2)}+0{,}0001_{(2)}+0{,}00001_{(2)}+\cdots=$ $0{,}0011111111111\ldots_{(2)}=0{,}00\overline{1}_{(2)}=0{,}01_{(2)}$.

2.2. Odštevanje v dvojiškem sistemu

V dvojiškem sistemu odštevamo tako, da števila naprej pravilno podpišemo (celi del pod celi del, prvo decimalko pod prvo decimalko ...). Odštevamo jih od desne proti levi. Nato pa se držimo naslednjih pravil:

- Ko od nič odštejemo nič, dobimo nič. $0 - 0 = 0$.
- Ko od nič odštejemo ena, dobimo ena, saj si izposodimo dvojko in od nje odštejemo enko. V naslednjem stolpcu pa enko prečrtamo. (Če je v naslednjem stolpcu ponovno ničla, ponovimo postopek). $0 - 1 = 1$.
- Ko od ena odštejemo nič, dobimo ena. $1 - 0 = 1$.
- Ko od ena odštejemo ena, dobimo nič. $1 - 1 = 0$.

Za primer si oglejmo naslednji račun: $0{,}110_{(2)} - 0{,}001_{(2)} = 0{,}101_{(2)}$

				2
	0,	1	~~1~~	0
−	0,	0	0	1
	0,	1	0	1

*Tabela 6: **Postopek odštevanja***

1. $0 - 1 = 1$ (saj si sposodimo 2 in enko v naslednjem stolpcu prečrtamo)
2. $0 - 0 = 0$ (saj smo v prejšnjem koraku 1 prečrtali)
3. $1 - 0 = 1$
4. $0 - 0 = 0$
5. Tako odštejemo števili v dvojiškem sistemu.

Rezultat sva preizkusili z odštevanjem dvojiških ulomkov:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Ugotovili sva, da je seštevanje in odštevanje dvojiških števil celo lažje, kot seštevanje in odštevanje decimalnih števil v desetiškem sistemu, ker so v računu samo 1 in 0.

2.3. Množenje in deljenje dvojiških števil z enotskimi ulomki

Pri množenju in deljenju decimalnih števil v desetiškem sistemu smo spoznali, da se pri množenju oziroma deljenju z vrednostmi potenc števila 10 le premakne vejica v levo oziroma desno smer. Zanimalo naju je, ali je temu tako tudi pri množenju oziroma deljenju dvojiških decimalnih števil.

Ugotovili sva, da imajo v tem sistemu potence števila $2_{(10)}$ tako vlogo. Torej se pri množenju oziroma deljenju s potencami števila $2_{(10)}$ vejica premakne v levo oziroma v desno smer, števke in njihov vrstni red se pa v rezultatu ne spremeni.

Oglejmo si naslednji primer množenja:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

$0{,}01_{(2)} \cdot 0{,}001_{(2)} = 0{,}00001_{(2)}$

0,	0	1	·	0,	0	0	1
0	0	0		0			
+	0	0		0	0		
+		0		0	0	0	
+				0	0	1	
0,	0	0		0	0	1	

*Tabela 7: **Postopek množenja z enotskim ulomkom***

Produkt ima pet mest za vejico, kar pomeni, da je rezultat $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

Vsota števil števk za vejico obeh faktorjev nam pove koliko decimalk bo imel zmnožek, saj velja za množenje takih enotskih ulomkov pravilo za množenje potenc z enako osnovo:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

V našem primeru je ta osnova $a = \frac{1}{2}$ v desetiškem zapisu oziroma $a = 0{,}1_{(2)}$.

Tudi pri deljenju z enotskimi dvojiškimi ulomki sva opazovali podobno značilnost.

Pri deljenju dvojiških števil sva poskusili uporabiti način premikanja vejice, ki sva ga spoznali pri decimalnih številih v desetiškem sistemu. Nato sva naredili preizkus z množenjem, da se prepričava, ali je postopek pravilen tudi v dvojiškem sistemu.

Oglejmo si postopek deljenja na primeru $0{,}011_{(2)} : 0{,}1_{(2)} = 0{,}11_{(2)}$.

Postopek deljenja je bil sledeč:

0,	0	1	1	:	0,	1	=				
	0,	1	1	:		1	=	0,	1	1	

*Tabela 8: **Postopek deljenja z enotskim ulomkom***

1. Prestavimo vejici za 1 mesto v desno.
2. Delimo z 1, kar pomeni, da prepišemo nastali deljenec.

Z računom $\frac{3}{8} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ sva se prepričali, da je postopek pravilen.

2.4. Množenje v dvojiškem sistemu

V dvojiškem sistemu množimo zelo podobno kot v desetiškem. Edini problem nastane pri seštevanju, ko zmnožimo vse števke. Tam se držimo pravil, kot so pri seštevanju, saj imamo v dvojiškem sistemu samo števki 1 in 0.

Oglejmo si postopek na naslednjem primeru: $0{,}11_{(2)} \cdot 0{,}011_{(2)} = 0{,}01001_{(2)}$.

0,	1	1 ·	0,	0	1	1
0	0	0	0			
+	0	0	0	0		
+		0	1	1	0	
+			0	1	1	
	0	0	1	2	1	
			+1			
	0	0	2	0	1	
		+1				
0,	0	1	0	0	1	

*Tabela 9: **Postopek množenja dveh števil s prehodom***

1. Vsako števko enega števila pomnožimo z vsako števko drugega števila
2. Zmnožena števila nato seštejemo.
3. Preštejemo decimalke faktorjev in jih seštejemo. (V tem primeru: $2 + 3 = 5$)
4. Zmnožek ima nato toliko decimalk. Tako vemo, kam postaviti vejico.

Rezultat lahko preverimo z množenjem ulomkov: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{32}$ in se prepričamo, da je $\frac{9}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}$.

2.5. Deljenje v dvojiškem sistemu

V dvojiškem sistemu delimo tako, da najprej premaknemo vejico v obeh številih in pridemo do računa, kjer delitelj nima več vejice. Nato vzamemo toliko števk deljenca, kolikor števk ima

delitelj. Če je delitelj sedaj večji od deljenca zapišemo količnik 0 in deljencu dodamo še naslednjo števko (ali števko 0), nato, če je delitelj še vedno večji, zapišemo 0 in ponovimo postopek, če pa je manjši, napišemo 1 in števili odštejemo, kot smo to že prej. Ker imamo pri količniku na razpolago samo dve števki (0 in 1), nam ni treba razmišljati o poštevanki delitelja, samo po velikosti moramo primerjati dve po dve števili. Ta postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do ostanka 0 ali do željene natančnosti (števila decimalk). V resnici je torej postopek deljenja zelo podoben postopku odštevanja.
Ta postopek deljenja (z odštevanjem) sva si ogledali tudi na težjem primeru

$0{,}796875_{(10)} : 1{,}5_{(10)} = 0{,}53125_{(10)}$,

z ulomki bi izgledal ta račun tako: $\frac{51}{64} : \frac{3}{2} = \frac{17}{32}$.

Tudi v tem primeru je bilo zanimivo, da se deljenje ni zdelo veliko težje od seštevanja ali odštevanja decimalnih števil, pri desetiških decimalnih številih pa ni tako.

0,	1	1	0	0	1	1	:	1,	1	=	
0	1,	1	0	0	1	1	:	1	1	=	**0, 1 0 0 0 1**
0	1										
	1	1									
−	1	1									
0	0	0	0	0	1						
					1	1					
				−	1	1					
						0					

*Tabela 10: **Postopek deljenja***

1. Najprej prestavimo vejico tako, da se ta premakne na skrajni desni rob delitelja.
2. Prepišemo toliko števk, kot jih ima delitelj in primerjamo vrednosti: ker je vrednost **manjša**, zapišemo h količniku **0**.
3. Dodamo še eno števko pri deljencu.
4. Ker je sedaj vrednost **večja**, zapišemo **1** in **odštejemo** delitelja.
5. Postopek ponovimo do ostanka 0.

Rezultat sva dobili pravzaprav samo z izvajanjem primerjanja dveh števil in odštevanjem:

$0{,}110011_{(2)} : 1{,}1_{(2)} = 0{,}10001_{(2)}$.

3. UPORABA DVOJIŠKIH ULOMKOV V VSAKDANJEM ŽIVLJENJU

Med raziskovanjem sva opazili, da se dvojiški ulomki pojavljajo na različnih področjih vsakdanjega življenja.

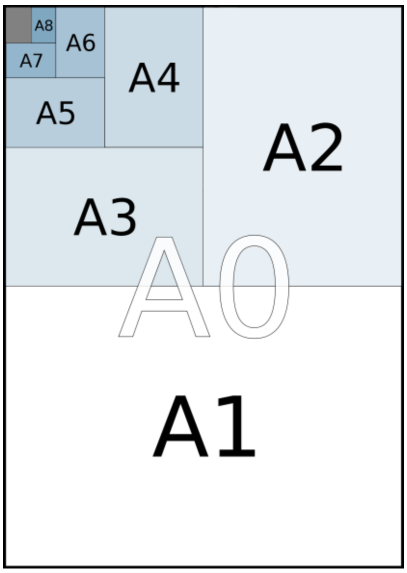
Čas pogosto delimo na pol, npr. 30 min, na četrt ($\frac{1}{4}$), kar pomeni 15 min in $\frac{3}{4}$, torej 45 min. Tudi peščena ura, ki se je uporabljala v preteklosti za merjenje časa, je bila razdeljena na pol.

V literaturi [3] sva zasledili, da so anglosaške **mere za prostornino** (galon v ZDA = 3,7854111784 L in galon v UK = 4,54609 L) oblikovane tako, da je vsaka enota za polovico manjša od predhodne:

- galon,
- $\frac{1}{2}$ galona,
- $\frac{1}{4}$ galona,
- $\frac{1}{8}$ galona = pint,
- $\frac{1}{16}$ galona = 1 skodelica,
- $\frac{1}{32}$ galona = gill.

Slika 8: ***Delitev anglosaške mere za prostornino*** *(Vir slike [3])*

V vsakdanjem življenju uporabljamo **različne formate papirja**. Standardne formate papirja [8] dobimo tako, da format A0 (1189 x 841mm) večkrat razpolovimo. Če A0 razpolovimo enkrat, dobimo A1, če nadaljujemo z razpolavljanjem dobimo A2, A3 … kot je to razvidno iz spodnje slike 10.



Slika 9: ***Delitev papirja*** *(Vir slike: [9])*

Ugotovili sva, da številka poleg črke A pomeni, kolikokrat je standardna velikost papirja A0 bila razpolovljena, da smo prišli so te velikosti.
Torej iz A0 dobimo $2^4 = 16$ listov papirja velikosti A4, saj je list A4 ravno šestnajstina celotne pole A0.
Največkrat uporabljen papir A4 ima površino: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ celotne pole A0. [8]

V digitalnih in **računalniških** sistemih so dvojiški ulomki ključnega pomena, saj računalniki uporabljajo binarni sistem za predstavitev in obdelavo podatkov. Dvojiški ulomki omogočajo predstavitev vrednosti med celimi števili, podobno kot decimalni ulomki v desetiškem sistemu. V dvojiškem sistemu so števke omejene na dve vrednosti: 0 in 1, ki predstavljata osnovni gradnik za vse vrste podatkov v računalniških sistemih in sta bili v prvih računalnikih oznaki za vklopljena oziroma izklopljena stikala. Vsako število v binarnem sistemu je zapisano kot zaporedje teh dveh vrednosti, pri čemer se vsak bit (kratica za "binary digit") uporablja za oznako stopnje potence števila 2.

Med pripravami na računalniško tekmovanje Bober se je večkrat pojavila naloga, ki je temeljila na bisekciji – iskanju z razpolavljanjem. To iskanje je zelo učinkovito in hitro, temelji pa na razpolavljanju števila podatkov. [10]

Ker sva obe glasbenici, bova predstavili še dvojiške ulomke, ki se pojavijo v **glasbeni umetnosti** za matematičnim pristopom in ustvarjanjem.

3.1. Povezava dvojiških ulomkov in glasbene umetnosti

Ugotovili sva, da je taktovski način v glasbi definiran z ulomki, ki so dvojiški. Primeri takšnih zapisov so:

4/4 (štiričetrtinski taktovski način) $\frac{4}{4}$

¾ (tričetrtinski taktovski način) $\frac{3}{4}$

2/4 (dvočetrtinski taktovski način) $\frac{2}{4}$

6/8 (šestosminski taktovski način) $\frac{6}{8}$

3/2 (tripolovinski taktovski način) $\frac{3}{2}$

Dvojiški ulomki se skrivajo v imenu in trajanju not (polovinka, četrtinka, osminka, šestnajstinka, dvaintridesetinka …). Števec označuje število udarcev v taktu, imenovalec pa vrednost ene dobe glede na osnovno noto. V našem prvem primeru ¾ taktu je števec 3 (trije udarci), imenovalec pa 4 (vsaka doba traja 1/4 note, torej eno četrtinko).

*Slika 10: **Zapis not z oznako trajanja***

Zanimivo pa je, da v glasbenem smislu ulomkov ne krajšamo. ¾ in 6/8 taktovski način nista enakovredni. V ¾ taktovskem načinu imamo namreč v 1 taktu 3 udarce, ki imajo vrednost ene četrtinke, v 6/8 taktovskem načinu pa imamo 2 udarca in so v enem udarcu 3 osminke. Torej omenjena taktovska načina dajeta drugačen ritmični občutek.

Trajanje vsake note v taktu lahko izrazimo v matematičnem zapisu, v dvojiških ulomkih:

Nota	Zapis	Čas v taktu	Binarni zapis
Celinka	1	Traja cel takt	$\mathbf{1}_{(2)}$
Polovinka	$\frac{1}{2}$	Traja pol takta	$\mathbf{0,1}_{(2)}$
Četrtinka	$\frac{1}{4}$	Traja četrt takta	$\mathbf{0,01}_{(2)}$
Osminka	$\frac{1}{8}$	Traja osmino takta	$\mathbf{0,001}_{(2)}$
Šestnajstinka	$\frac{1}{16}$	Traja šestnajstino takta	$\mathbf{0,0001}_{(2)}$

*Tabela 11: **Razčlenitev zapisa not v matematičnem zapisu***

Pesem z naslovom *Veselo raziskovanje dvojiških ulomkov* avtorice Laure Hozjan bova ritmično in matematično razčlenili.

Pesem se glasi:

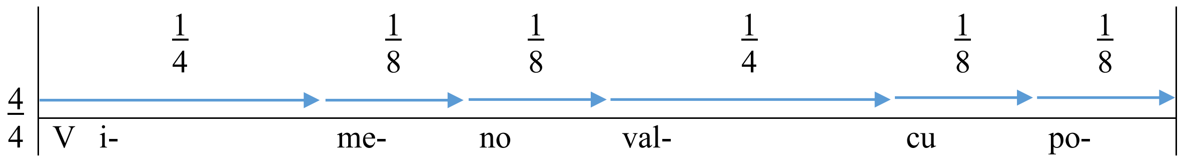
Veselo raziskovanje dvojiških ulomkov

V imenovalcu potence števila dva,
se skriva čaroben svet brez dna.
Ulomki se redčijo – v neskončnost hitijo.
V vsakdanjem življenju povsod nas lovijo.

Ustvarili sva naslednji ritmični vzorec v 4/4 taktu:

Besedilo po zlogih	Nota	Trajanje v ulomku	Binarni zapis
V i-	četrtinka	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$
me-no	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=$ $0{,}010_{(2)}=0{,}01_{(2)}$
val-	četrtinka	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$
cu po-	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=$ $0{,}010_{(2)}=0{,}01_{(2)}$

Tabela 12: ***Prvi takt v binarnem zapisu in binarnih ulomkih***

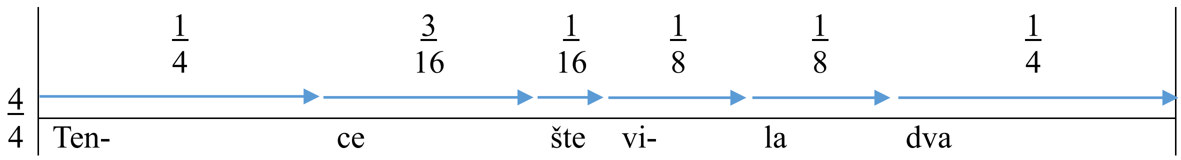


Slika 11: ***Prvi takt v matematičnem zapisu***

Slika 11 ponazarja prvi takt, ki predstavlja celoto in je razdeljen na štiri četrtine. Števec označuje štiri udarce v taktu, imenovalec pa vrednost ene dobe glede na osnovno noto. Prvi udarec predstavlja četrtinko ("V i-"), v drugem udarcu sta dve osminki, zato se čas razpolovi in izgovorimo dva zloga ("me-no"), tretji udarec je četrtinka ("val-"), v četrtem udarcu imamo dve osminki ("cu po-").

Besedilo po zlogih	Nota	Trajanje v ulomku	Binarni zapis
ten-	četrtinka	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$
ce šte-	osminka s piko + šestnajstinka	$\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	$0{,}0011_{(2)}+0{,}0001_{(2)}=$ $0{,}0100_{(2)}=0{,}01_{(2)}$
vi-la	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=$ $0{,}010_{(2)}=0{,}01_{(2)}$
dva,	četrtinka	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$

Tabela 13: ***Drugi takt v binarnem zapisu in binarnih ulomkih***



Slika 12: ***Drugi takt v matematičnem zapisu***

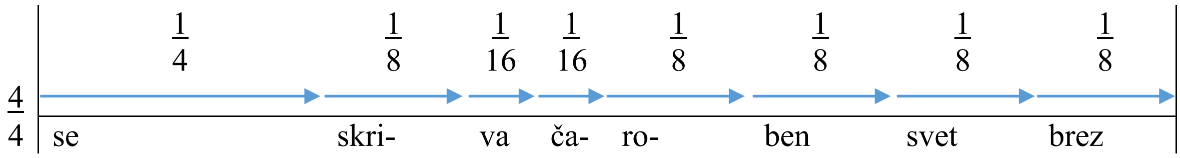
Drugi takt se začne s četrtinko, torej je v prvem udarcu zlog "ten". Drugi udarec je dejansko razdeljen na štiri dele, saj imamo osminko s piko, ki jo zapišemo kot $\frac{3}{16}$ in šestnajstinko ("ce šte-"). V glasbi namreč s piko podaljšamo dolžino note za polovico njenega trajanja $(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=$

$\frac{3}{16}$). Dva zloga "vi-la" v tretjem udarcu se izgovorita enakomerno z dvema osminkama. V četrtem udarcu imamo četrtinko in en zlog "dva".

Nastale so zanimive delitve še znotraj takta - daljice, ki ustvarjajo dinamičen ritem.

Besedilo po zlogih	Nota	Trajanje v ulomku	Binarni zapis
se	četrtinka	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$
skri-va ča-	Osminka + dve šestnajstinki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}0001_{(2)}+0{,}0001_{(2)}=0{,}0100_{(2)}=0{,}010_{(2)}=0{,}01_{(2)}$
ro-ben	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=0{,}010_{(2)}=0{,}01_{(2)}$
svet brez	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=0{,}010_{(2)}=0{,}01_{(2)}$

*Tabela 14: **Tretji takt v binarnem zapisu in binarnih ulomkih***

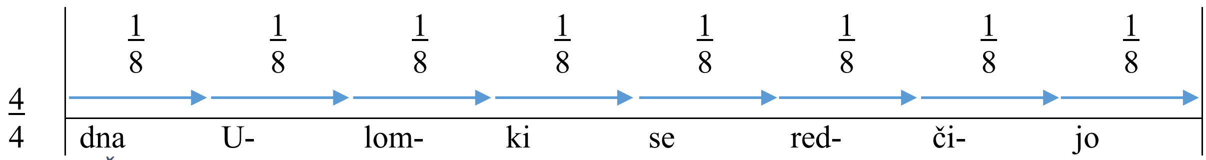


*Slika 13: **Tretji takt v matematičnem zapisu***

V sliki 13 je prikazana daljica, ki je po udarcih razdeljena na naslednje dele: Prvi udarec "se" je izražen s $\frac{1}{4}$ in se ne deli. Medtem ko se drugi udarec deli. Torej $\frac{1}{4}$ razdelimo na tri neenake dele, na osminko ($\frac{1}{8}$), to bo zlog "skri-" in na na dve $\frac{1}{16}$ ("-va ča"). Tretji in četrti udarec se delita le na polovico četrtine in se izrazita z besedilom po zlogih "ro-ben svet brez".

Besedilo po zlogih	Nota	Trajanje v ulomku	Binarni zapis
dna.	osminka	$\frac{1}{8}$	$0{,}001_{(2)}$
U-	osminka	$\frac{1}{8}$	$0{,}001_{(2)}$
lom-ki	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=0{,}011_{(2)}$
se-red	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=0{,}011_{(2)}$
-či-jo	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=0{,}011_{(2)}$

*Tabela 15: **Četrti takt v binarnem zapisu in binarnih ulomkih***

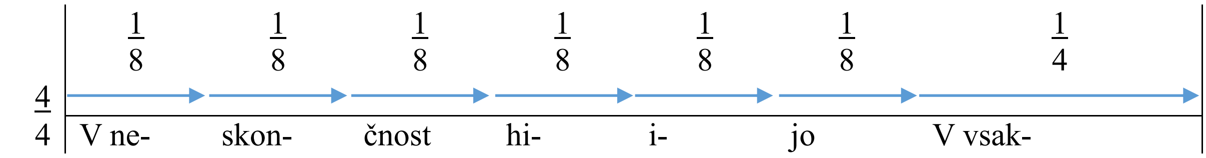


*Slika 14: **Četrti takt v matematičnem zapisu***

V četrtem taktu imamo na razpolago osem zlogov. Odločili sva se, da enakomerno razdeliva besedilo med osmimi osminkami.

Besedilo po zlogih	Nota	Trajanje v ulomku	Binarni zapis
v ne-	osminka	$\frac{1}{8}$	$0{,}001_{(2)}$
skon-čnost hi-	tri osminke	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=0{,}011_{(2)}$
ti-jo.	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=0{,}010_{(2)}=0{,}01_{(2)}$
V vsak-	četrtinka	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$

Tabela 16: ***Peti takt v binarnem zapisu in binarnih ulomkih***

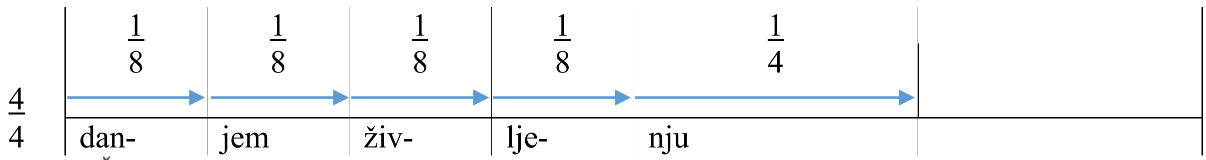


Slika 15: ***Peti takt v matematičnem zapisu***

Pri komponiranju petega takta sva imeli sprva zapis v prvem zlogu $\frac{1}{4}$, kar ritmično ni bilo pravilno, saj je takt razdeljen na $\frac{4}{4}$ in bi takt bil predolg za $\frac{1}{8}$. To sva popravili tako, da sva prvi zlog "v ne-" zamenjali $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{8}$ in tako ustvarili še bolj tekoč ritem, ki pohitri ritem besedila po zlogih "v ne-skon-čnost hi-ti-jo" z osminkami, torej $\frac{1}{8}$. Zaradi matematične analize sva lahko hitreje pravilno oblikovali takt, ki je ritmičen in skladen z matematičnimi zakonitostmi.

Besedilo po zlogih	Nota	Trajanje v ulomku	Binarni zapis
dan-jem	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=$ $0{,}010_{(2)}=0{,}01_{(2)}$
živ-lje-	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=$ $0{,}010_{(2)}=0{,}01_{(2)}$
nju	četrtinka	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$
	četrtinska pavza	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$

Tabela 17: ***Šesti takt v binarnem zapisu in binarnih ulomkih***

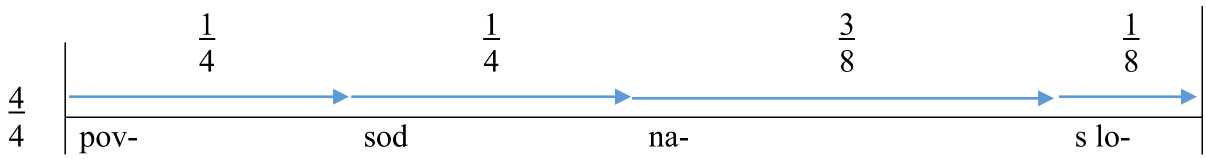


Slika 16: ***Šesti takt v matematičnem zapisu***

V šestem taktu je besedilo po zlogih "dan-jem živ-lje-" razdeljeno na osminke, zlog "nju" pa traja celoten udarec, torej $\frac{1}{4}$. Ker je na koncu takta četrtinska pavza, je pri zadnjem udarcu tišina.

Besedilo po zlogih	Nota	Trajanje v ulomku	Binarni zapis
pov-	četrtinka	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$
sod	četrtinka	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$
na-	četrtinka s piko	$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$	$0{,}01_{(2)}+0{,}001_{(2)}=$ $0{,}011_{(2)}$
s lo-	osminka	$\frac{1}{8}$	$0{,}001_{(2)}$

*Tabela 18: **Sedmi takt v binarnem zapisu in binarnih ulomkih***

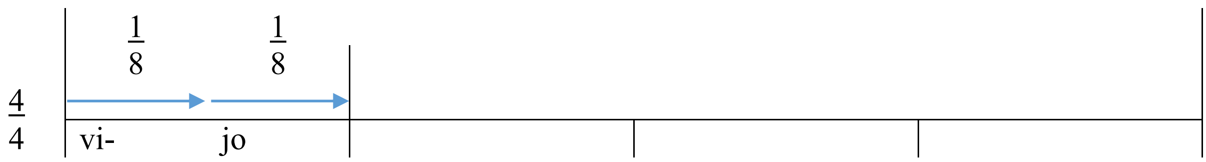


*Slika 17: **Sedmi takt v matematičnem zapisu***

V sedmem taktu sva ritem malo upočasnili. Pri zlogu "na-" sva se spet odločili za četrtinko s piko. S tem sva nakazali tudi, da se pesem počasi končuje.

Besedilo po zlogih	Nota	Trajanje v ulomku	Binarni zapis
vi-jo	dve osminki	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$0{,}001_{(2)}+0{,}001_{(2)}=0{,}010_{(2)}=$ $0{,}01_{(2)}$
	četrtinska pavza	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$
	četrtinska pavza	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$
	četrtinska pavza	$\frac{1}{4}$	$0{,}01_{(2)}$

*Tabela 19: **Osmi takt v binarnem zapisu in binarnih ulomkih***



*Slika 18: **Osmi takt v matematičnem zapisu***

V zadnjem (8.) taktu sta zapisana dva zloga "vi-jo" izražena z dvema $\frac{1}{8}$, prikazana z dvema daljicama s puščico enakih dolžin. V zadnjih treh udarcih takta je pavza, zato je ta daljica z razdelitvijo na $\frac{3}{4}$ prikazana brez daljic s puščico.

ZAKLJUČEK

Pri raziskovanju sva bolje spoznali dvojiške ulomke in dvojiški sistem zapisovanja ulomkov. Odkrili sva zanimive vzorce, ki sva jih tudi grafično upodobili. Dvojiški sistem sva primerjali z desetiškim in ugotovili, kako se pretvarja iz desetiškega sistema v dvojiški in obratno. Ugotovili sva, da se nekateri zapisi pri pretvorbi ne dokončajo, ustvarijo se periodične ponovitve. Raziskali sva, kako se v tem sistemu sešteva, odšteva, množi in deli.

So pa dvojiški ulomki zanimivo strukturirani in predstavljajo temelj ali standard za marsikatere sisteme in področja v vsakdanjem življenju. Njihova prisotnost v merjenju časa, glasbi, tekočinah, papirju, računalništvu in drugih področjih kaže, da je binarna delitev naravna in praktična za organizacijo in merjenje podatkov. Že Egipčani so imeli zanimiv zapis za ulomke. Njihov zapis naju spominja na noto, kar je zanimivo pri matematični analizi. Bolj podrobno sva raziskali pomen dvojiških ulomkov v glasbi in matematično analizirali pesem, ki sva jo napisali. Z matematičnim znanjem lahko učinkoviteje in pravilno sestaviva ritem. S tem znanjem lahko matematiko približava sovrstnikom na zabaven način, saj smo lahko z uporabo znanja o dvojiških ulomkih zelo kreativni. Raziskava potrjuje, da so različni zapisi dvojiških in drugih ulomkov zelo koristni tudi za razumevanje, urejenost in standardizacijo različnih področij, kar vodi v kreativnost, hitrejšo, učinkovitejšo, praktično uporabo, hkrati pa nas vodi k nadaljnjim raziskavam in razvoju.

Ugotovitve: Dvojiški in desetiški ulomki se v marsičem razlikujejo. Računske operacije v dvojiškem sistemu sva skozi raziskovanje bolje spoznali, kar nama je pomagalo pri razumevanju njihove uporabe. V vsakdanjem življenju je uporabno poznavanje tako enih kot tudi drugih. S poznavanjem dvojiških ulomkov in dvojiškega sistema sva poglobili tudi svoje znanje o desetiškem sistemu. Pri raziskovanju povezave z glasbo sva uporabili kreativnost in matematična znanja pri ritmičnem sestavljanju pesmi, svoje znanje o dvojiških ulomkih sva tudi tu s pridom uporabljali.

LITERATURA IN VIRI

[1] D. E. Mansfield, D. Thompson: Matematika új felfogásban I. (Matematics: A new approach, Published by Chatto and Windus, 1966), Gondolat, Budapest (1970)

[2] Jože Berk, Jana Draksler, Marjana Robič: Skrivnosti števil in oblik 6, učbenik za matematiko v 6. razredu osnovne šole 3. izdaja, založba Rokus Klett, d. o. o. , Ljubljana (2023)

[3] William P. Berlinghoff, Fernando Gouvêa: Matematika skozi stoletja, Modrijan, Ljubljana (2008)

[4] Fractions in binary? https://math.stackexchange.com/questions/301435/fractions-in-binary (answered Feb 12, 2013 at 8:50 by dtldarek) (Zadnji dostop dne: 19. 2. 2025)

[5] Binary number: https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_number (Zadnji dostop dne: 19. 2. 2025)

[6] Kovács Csongorné, Sz. Földvári Vera, Szeredi Éva: MATEMATIKA 7, Tankönyvkiadó, Budapest (1988)

[7] Mojca Širca Pavčič: Solfeggio I: Učbenik z elementi delovnega zvezka za solfeggio I na višji stopnji osnovnega glasbenega izobraževanja, založba Rej d. o. o., Postojna (2020)

[8] International paper sizes: https://www.a4-size.com/international-paper-sizes/ (Zadnji dostop dne: 19. 2. 2025)

[9] ISO 216: https://sl.wikipedia.org/wiki/ISO_216 (Zadnji dostop dne: 19. 2. 2025)

[10] Bober 2013 - šolsko tekmovanje, knjižica, Priprava rešitev in knjižice: Špela Cerar in Janez Demšar

[11] Borut Batagelj, Patricio Bulić, Janez Demšar, Uroš Lotrič, Boštjan Slivnik, Damjan Vavpotič: Učenje računalništva s pomočjo tekmovanja Bober (Skripta posodobitvenega programa nadaljnjega izobraževanja učiteljev), Univerza v Ljubljani Fakulteta za računalništvo in informatiko (2013)