

OŠ Majde Vrhovnik Ljubljana

Raziskovanje Collatzove domneve

Raziskovalna naloga na področju matematike

Mentor:
Vesna Gartner

Avtor naloge:
Ian Mantel Kunej

Ljubljana, februar 2025

Kazalo

1	Uvod.....	1
2	Hipoteza.....	1
3	Raziskovalna vprašanja.....	1
4	Vsebinski del.....	2
5	Eksperimentalen del.....	4
6	Razprava.....	10
7	Odgovor na hipotezo.....	10
8	Odgovor na raziskovalno vprašanje.....	10
9	Zaključek.....	11
10	Viri in uporabljena literatura.....	12

Kazalo slik

Slika 1: Računalniška koda.....	4
---------------------------------	---

Kazalo grafov

Graf 1: Sodost in lihost števil.....	5
Graf 2: Število zadnjih števk.....	6
Graf 4: Pojavljena soda števila.....	6
Graf 5: Liha števila v zaporedju.....	7
Graf 6: Razmerje lihih in sodih števil.....	7
Graf 7: Razmerje lihih in sodih števil.....	8
Graf 8: Seštevek lihih in sodih števil.....	8
Graf 9: Sešteta liha in soda števila.....	9

Povzetek

Ključne besede: Collatzova domneva, zaporedje, soda števila, liha števila, ...

Collatzova domneva je zaporedje naključnosti. Če ga izvedemo na katerem koli naravnem številu, naj bi se po domnevi vedno končalo s številko 1. Collatzove domneve do sedaj ni še nihče rešil kljub poskusom marsikaterega matematika.

V raziskovalni nalogi podrobneje predstavimo zaporedje in naše raziskovanje domneve.

Sprva smo raziskali splet in poiskali do sedaj že znano o Collatzovi domnevi. Na splošno smo predstavili zgodovino domneve in njenega reševanja. Predstavili smo naš način reševanja domneve.

Natančno smo izpisali vse naše pridobljene podatke in jih predstavili z uporabo grafikonov.

Cilj raziskovalne naloge je bil raziskati Collatzovo domnevo s pomočjo hišnega računalnika in ugotoviti, če je mogoče takšne probleme reševati z uporabo moderne tehnologije.

1 Uvod

Domnevo rešujemo tako, da vzamemo katerokoli naravno število in na njem izvedemo n -korakov neke operacije. Operacija je različna za soda števila in liha števila. Liho število pomnožimo s 3 in prištejemo 1, sodo število delimo z 2. Rezultat, ki ga dobimo s to operacijo, zapišemo v zaporedje. Nadaljujemo z rezultatom in na njem izvedemo operacijo, glede na lihost oz. sodost. Collatzova domneva pravi, da se po n -korakih tako zaporedje vedno konča s številom 1. Do sedaj so bila s pomočjo računalniškega programa preverjena vsa naravna števila od 1 do približno 2^{68} . Collatzova domneva je zelo enostavna a zaradi tega kolikokrat je potrebno izvesti te preproste operacije postane nemogoče, da bi jo reševali ljudje. Cilj našega raziskovanja je, da z uporabo moderne tehnologije raziščemo Collatzovo domnevo ter raziskujemo načine reševanja matematičnih problemov z uporabo računalniških programov in algoritmov (Collatz Conjecture, 2025).

2 Hipoteza

H1: Collatzove domneve ni mogoče rešiti z uporabo hišnega računalnika.

3 Raziskovalna vprašanja

R1: Kakšen je najboljši način reševanja takih problemov?

4 Vsebinski del

Collatzovo domnevo je leta 1937 postavil Lothar Collatz. Domneva je poznana tudi pod imeni: domneva $3n + 1$, Ulamova domneva, Sirakuški problem itd.

Domneva je poimenovana po Lotharju Collatzu, ki jo je leta 1937 ustvaril dve leti po prejetju doktorata. Collatzova domneva je opredeljena kot zelo enostaven, a nerešljiv problem. Mnogi znanstveniki na področju matematike so si zadali cilj, da bi poskusili rešiti Collatzovo domnevo. Zaradi potrebe po preverjanju vsakega naravnega števila pa je ta domneva praktično nerešljiva, saj bi potrebovali neverjetno močne računalnike za preverjanje vseh naravnih števil. S preverjanjem naravnih števil je mogoče ovreči Collatzovo domnevo tako, da se zaporedje ne bi končalo s številko 1, ampak bi se neka številka, ki ni 1, ponovila večkrat in tako ustvarila ponavljajoče zaporedje. Leta 2019 je matematik Terence Tao ustvaril matematična pravila s katerimi je dokazal, da Collatzova domneva velja za večino števil (Honner, 2020), (Collatz Conjecture, 2025). Konkreten primer: vzamemo število 3 in ga damo v zaporedje.

3

Izvedemo operacijo, ker je liho število: $3 * 3 + 1 = 10$. Rezultat damo v zaporedje

3, 10

Z zadnjo številko izvedemo operacijo. Ker je soda: $10 : 2 = 5$. Rezultat damo v zaporedje.

3, 10, 5

Izvedemo operacijo ker je liho število: $5 * 3 + 1 = 16$. Rezultat damo v zaporedje

3, 10, 5, 16

Izvedemo operacijo ker je sodo število: $16 : 2 = 8$. Rezultat damo v zaporedje

3, 10, 5, 16, 8

Izvedemo operacijo ker je sodo število: $8 : 2 = 4$. Rezultat damo v zaporedje

3, 10, 5, 16, 8, 4

Izvedemo operacijo ker je sodo število: $4 : 2 = 2$. Rezultat damo v zaporedje

3, 10, 5, 16, 8, 4, 2

Izvedemo operacijo ker je sodo število: $2 : 2 = 1$. Rezultat damo v zaporedje

3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Zaporedje se je končalo s številko 1 kot pravi domneva

Matematiki se lotevajo Collatzove domneve tako, da ustvarjajo pravila s katerimi lahko vemo ali za neko naravno število velja domneva, brez da bi to število preverili. S temi pravili se preveri začetno število in števila, ki nastanejo v zaporedju. Primer takega pravila je, da domneva velja za vsa števila ki so potenca števila 2.

Do danes so bila za Collatzovo domnevo preverjena vsa naravna števila od 1 do približno 2^{68} z uporabo super računalnikov.

Collatzova domneva ustvari zaporedje naključnih števil, katerega rezultat ni mogoče ugotoviti brez preverjanja vseh zaporednih števil brez da bi uporabili katero koli matematično pravilo za izločanje števil (Collatz Conjecture, 2025).

Collatzovo domnevo smo izbrali zaradi njene kompleksnosti in potrebe po uporabi moderne računalniške tehnologije, ki je potrebna za reševanje tega problema.

Za raziskovanje Collatzove domneve smo se odločili, da bomo uporabili algoritmični računalniški program, ki bo sistematično preverjal vsa naravna števila od 1 do določene meje. Program je napisan v PHP programskem jeziku in ima 64-bitno arhitekturo. Za PHP smo se odločili zaradi preproste uporabe in učinkovitega delovanja.

5 Eksperimentalen del

Začeli smo z ustvarjanjem programa, ki algoritmično preverja števila v Collatzovi domnevi. Na sliki 1 vidimo končni zapis računalniške kode. Program ima več spremenljivk s katerimi smo si pomagali raziskovati domnevo. Ima spremenljivko \$maxruns s katero določimo, koliko zaporednih števil je lahko v zaporedju enega naravnega števila preden se program ustavi. S spremenljivko \$reportevryXloops določimo vsake koliko preverjenih naravnih števil bo program izpisal, koliko zaporednih korakov je imelo zaporedje z največ koraki do sedaj, katero je bilo največje število, ki se je pojavilo in kolikokrat se je do sedaj pojavilo katero število kot zadnja števka v zaporedju. Spremenljivka \$maxnumber nam omogoči določiti največje število v zaporedju. V primeru, da se to ali večje število pojavi, se bo program ustavil.

```
<?php
$maxruns = 1000;
$mostruns = 0;
$highestnumber = 0;
$reportevryXloops = 100000;
$resultstats = array();

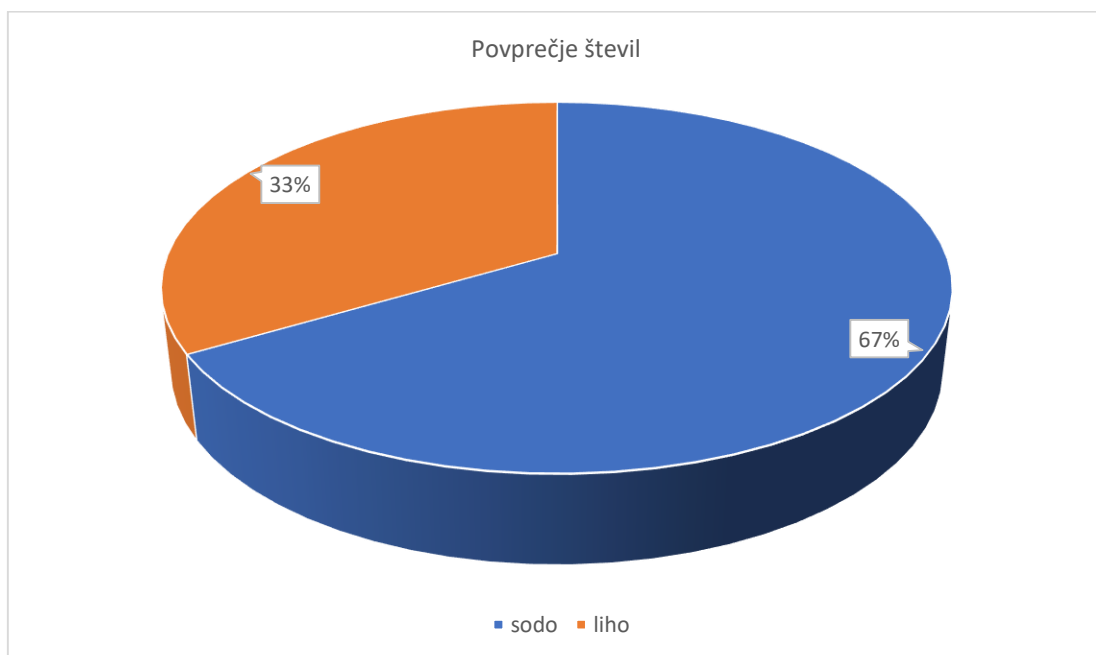
$maxnumber = 1000100010001000;
for($i=1; $i<$maxnumber; $i++){
    $val = $i;
    $highestinloop = 0;
    $runsleft = $maxruns;
    while ($runsleft and $val > 0 and $val != 1) {
        $runsleft--;
        if ($val & 1) $val = $val * 3 + 1; // Odd
        else $val = $val / 2; // Even
        $highestinloop = max($val, $highestinloop);
        $highestnumber = max($val, $highestnumber);
        if (!isset($resultstats[substr($val, -1)]))
            $resultstats[substr($val, -1)] = 0;
        $resultstats[substr($val, -1)]++;
    }
    $runsdone = $maxruns - $runsleft;
    $mostruns = max($runsdone, $mostruns);
    if (--$reportevryXloops == 0) {
        echo "Running $i. Current highest number=$highestnumber and mostruns=$mostruns.\n".print_r($resultstats, true)."\n";
        $reportevryXloops = 100000;
    }
    if ($val != 1)
        echo "$i leads to final value of $val after $runsdone ($mostruns) runs with highest number $highestinloop
($highestnumber).\n";
}
echo "Done with highest number=$highestnumber and mostruns=$mostruns.\n";
print_r($resultstats);
?>
```

Slika 1: Računalniška koda

Program je za zaporedje preveril vsa naravna števila od 1 do 108900000. Največje število, ki se je pojavilo v zaporedju, je bilo 2185143829170100.

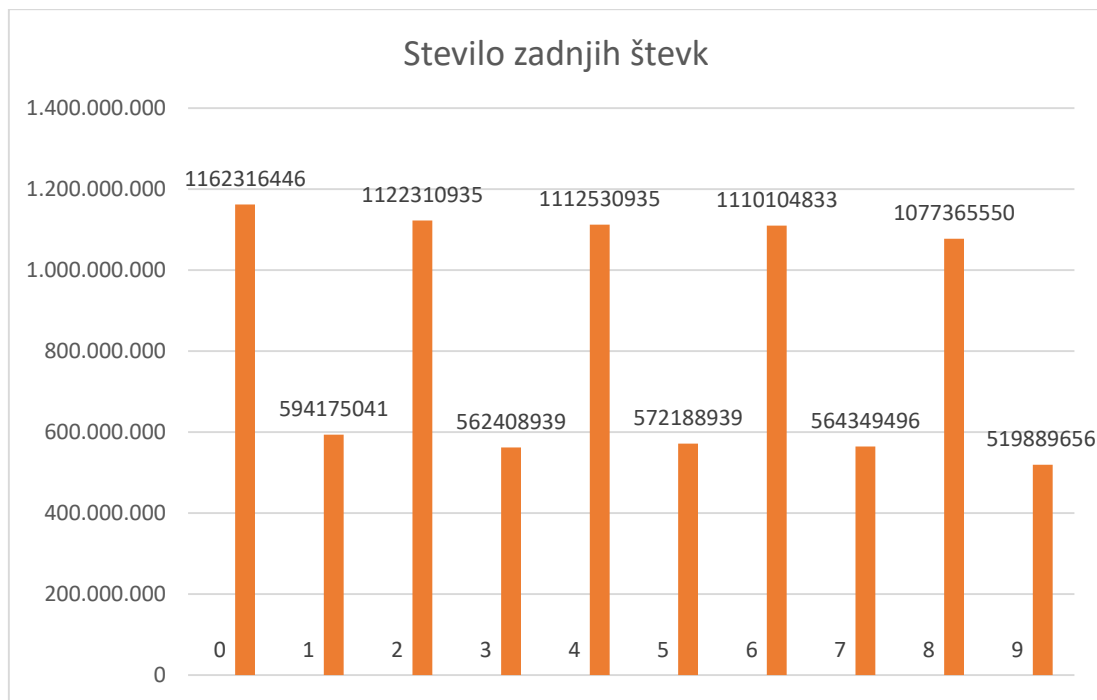
Spodaj so predstavljeni podatki za zadnje številke vseh zaporednih števil, ki so bila preverjena za Collatzovo domnevo.

Kot je razvidno iz grafa 1, je 33 % števil lihih in 67% števil sodih. V dveh tretjinah primerov se število deli z 2, v eni tretjini primerov pa se število množi s 3 in prišteje ena. Torej je ena tretina vseh števil v zaporedju liha in dve tretini vseh števil st sodi.



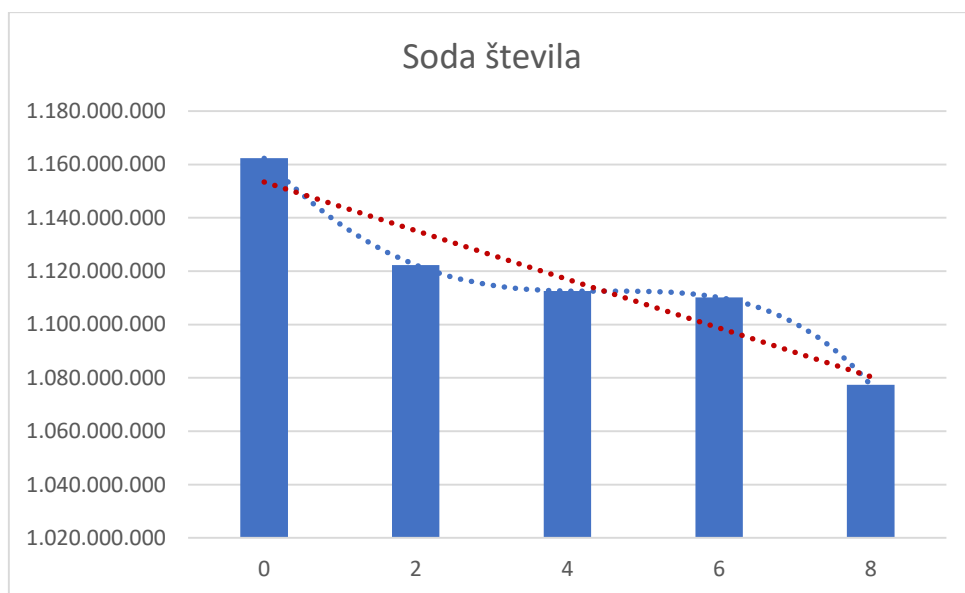
Graf 1: Sodost in lihost števil

Na grafu 2 vidimo, kolikokrat se je katero število pojavilo kot zadnja številka števil števila v zaporedju.



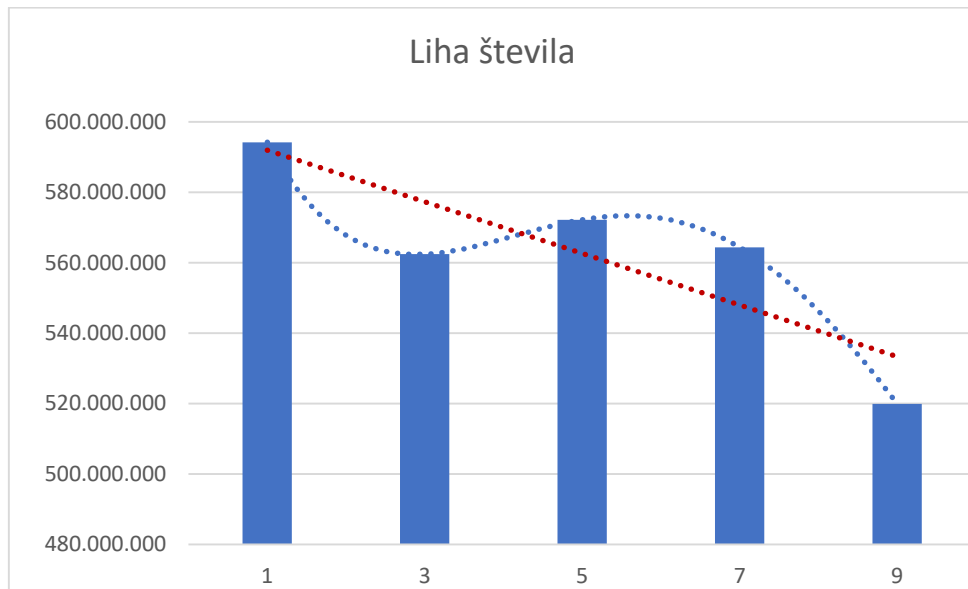
Graf 2: Število zadnjih števk

Na grafu 3 je prikazano razmerje pojavljenih sodih števil. Vidimo, da se števila od 0 proti 8 zmanjšujejo. To nam pove, da se soda števila, ki so bližje številu nič pojavijo večkrat.



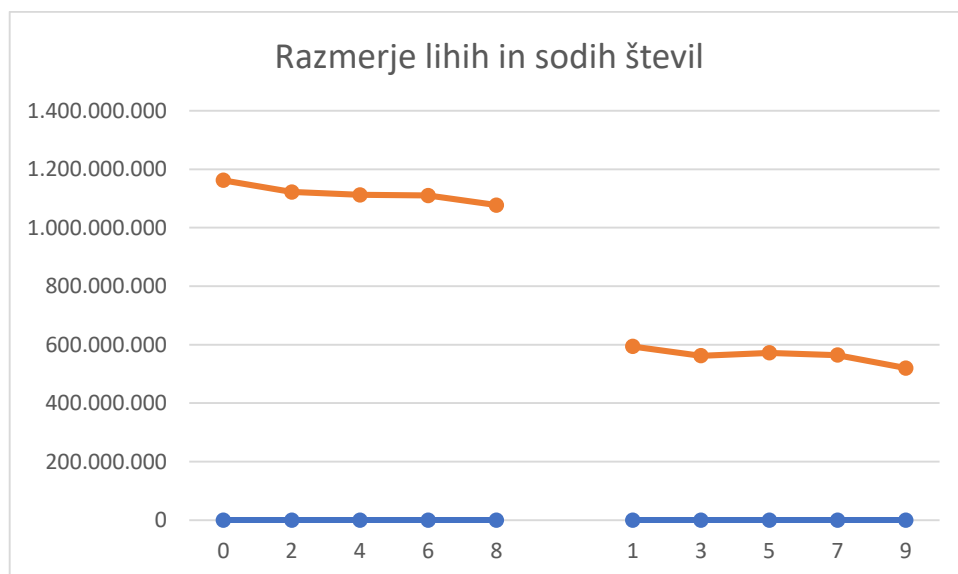
Graf 3: Pojavljena soda števila

Na grafu 4 je prikazano razmerje pojavljenih sodih števil. Vidimo, da se števila od 1 proti 9 zmanjšujejo. To nam pove, da se liha števila, ki so bližje 1, pojavijo večkrat. Izstopa število 3, ker se je pojavilo manjkrat kot števili 5 in 7.



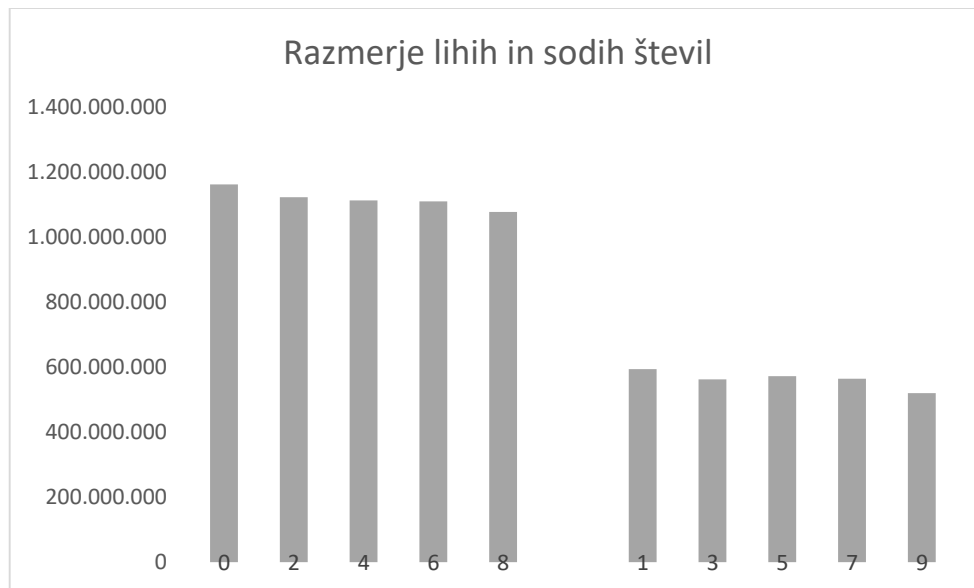
Graf 4: Liha števila v zaporedju

Na grafu 5 vidimo, da je razmerje sodih števil podobno razmerju lihih števil. Pri obeh se število najbližje 0 pojavlja največkrat, tretje in četrto največje število pa se pojavi pogosteje kot drugo in zadnje največje število.



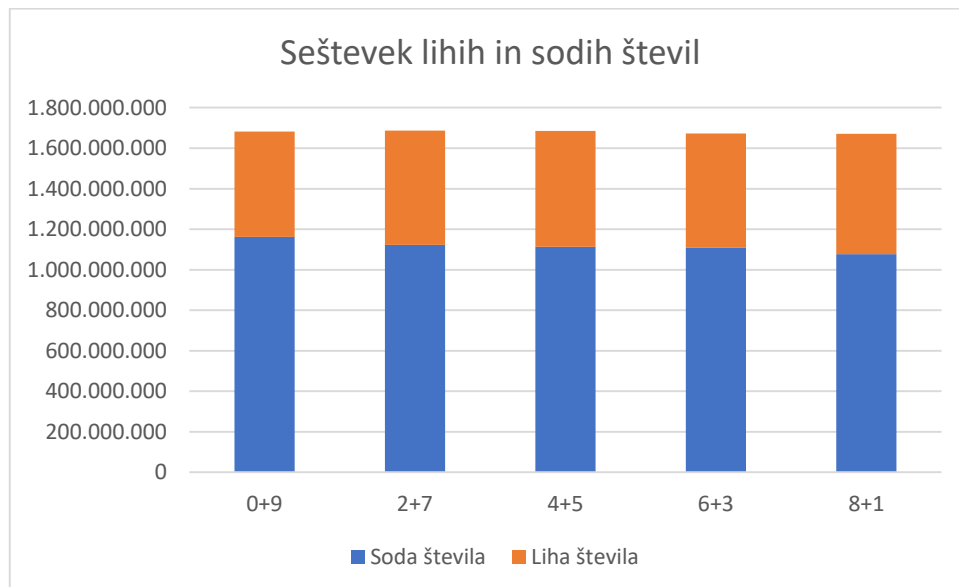
Graf 5: Razmerje lihih in sodih števil

Na grafu 6 opazimo, da bi se stolpci za soda števila skoraj ujemali s stolpci za liha števila, če bi jih obrnili za 180°.



Graf 6: Razmerje lihih in sodih števil

Na grafu 7 vidimo seštevek lihih in sodih števil.



Graf 7: Seštevek lihih in sodih števil

Na grafu 8 vidimo točne seštevke določenih lih in sodih števil, pri tem je povprečno odstopanje med seštevki manjše od 0,1 %.



Graf 8: Sešteta liha in soda števila

Razmerja med sodimi in lihimi števili nakazujejo, da v Collatzovi domnevi zadnje številke ustvarijo določeno razmerje, ki nam pove, da Collatzova domneva ni povsem naključna. Te podatki nam omogočijo delno predvideti, koliko števil bo v zaporedju. Vseeno moramo preveriti zaporedje za točen izid. S pomočjo teh podatkov vemo tudi, da je v Collatzovi domnevi razmerje določenih števk v povprečju enako.

Ugotovili smo, da Collatzova domneva velja za vsa naravna števila od 1 do 108900000.

6 Razprava

V okviru naše raziskovalne naloge smo ustvarili delujoč program, ki algoritmično preverja Collatzovo domnevo. Ugotovili smo, da domneva ni povsem naključna in jo je mogoče delno predvideti.

Sprva smo načrtovali raziskati in poskusiti rešiti Collatzovo domnevo, vendar smo ugotovili, da bi za to potrebovali super računalnik.

7 Odgovor na hipotezo

Prva hipoteza, ki pravi »Collatzove domneve se ne da rešiti z uporabo hišnega računalnika« smo potrdili, saj nam je ni uspelo rešiti. Program je namreč preveril samo vsa naravna števila od 1 do 108900000.

8 Odgovor na raziskovalno vprašanje

Odgovor na prvo raziskovalno vprašanje »Kakšen je najboljši način reševanja takih problemov?« je uporaba algoritmičnega računalniškega programa. Ugotovili smo, da je veliko hitreje kot kateri koli drugi način in je tudi najbolj učinkovita metoda reševanja takšnih problemov.

9 Zaključek

Namen naše raziskovalne naloge je bil raziskati, ali in kako je mogoče reševati takšne probleme kot je Collatzova domneva. Potrdili smo našo hipotezo, da se vsa zaporedja naravnih števil končajo s številko 1. Z našim raziskovanjem smo ugotovili, da Collatzova domneva ni popolnoma naključna in v njej so ponavljajoči vzorci, s katerimi se da delno predvideti zaključek zaporedja. Ustvarili smo program s katerim je mogoče preverjati naravna števila za Collatzovo domnevo. Ta program bi lahko izboljšali tako, da bi dodali matematične pogoje, s katerimi bi program lahko potrdil domnevo ne da bi preveril zaporedje in s pomočjo katerih programu nebi bilo treba preveriti števila do konca. A kljub kakršni koli izboljšavi, bi bilo še vedno treba popolnoma preveriti zelo veliko števil, saj ti pogoji ne veljajo za vsa števila.

10 Viri in uporabljena literatura

Honner, P. (2020, September 22). *Why mathematicians still can't solve the Collatz conjecture*. Quanta Magazine.

<https://www.quantamagazine.org/why-mathematicians-still-cant-solve-the-collatz-conjecture-20200922/>

Collatz Conjecture. (1. 5. 2025). V *Wikipedija: prosta enciklopedija*.

https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture