

Raziskovalna naloga

Področje: matematika

# ZAPOREDJA SESTAVLJANK IZ OZNAČENIH KVADRATOV

Avtorji: **Manca Blažič, Theo Anton Delor, Vitan Rajčević** (8. razred)

Mentor: Igor Blažič, dipl. ing.

Somentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Inštitut montessori, Zasebna osnovna šola montessori, Ljubljana

Ljubljana, april 2025

## Zahvala

Zahvaljujemo se:

- mentorju dipl. ing. Igorju Blažiču za vodenje pri delu in
- somentorju prof. Alojzu Grahorju za idejo in svetovanje pri izdelavi raziskovalne naloge.

## Kazalo vsebine

1. Uvod .....	6
1.1. Opis splošne matematične sestavljanke.....	6
1.2. Opis raziskovalnega problema.....	8
1.3. Cilji raziskovalne naloge .....	9
1.4. Metode dela.....	10
2. Sestavljanke trakov iz označenih kvadratkov .....	11
2.1. Sestavljanje »peš«.....	11
2.2. Zlaganje sestavljanek s programom Python .....	12
2.3. Iskanje vzorcev med osnovnimi delčki.....	18
3. Zaporedje Catalanovih števil.....	20
3.1. Definicija Catalanovih števil .....	20
3.2. Drugi primeri množic s Catalanovimi števili.....	21
3.3. Formule za izračun Catalanovih števil .....	27
3.4. Dokazi.....	28
3.5. Načrt za izdelavo praktične sestavljanke.....	32
4. Zaključek.....	34
5. Viri in literatura .....	35
6. Priloge .....	36

## Slikovno kazalo

Slika 1: Dodajanje označenega kvadratka v sestavljanke .....	6
Slika 2: Primer redukcije .....	7
Slika 3: Seznam osnovnih delčkov (Vir: Han, 2011, stran 3) .....	7
Slika 4: Primeri sestavljanek $2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4$ in $2 \times 5$ .....	8
Slika 5: Program v Pythonu, ki izpiše vse možne sestavljanke traku ( $2 \times 5$ ) s štirimi osnovnimi delčki T .....	12
Slika 6: Izpis vseh možnih sestavljanek traku $2 \times 5$ s štirimi osnovnimi delčki T .....	13
Slika 7: K razvoju programa v Pythonu .....	13
Slika 8: Triangulacije trikotnika, kvadrata, pravilnega petkotnika in pravilnega šestkotnika (Vir: Lokar, Valič, 2017, stran 10) .....	20
Slika 9: Polno vsajeno binarno drevo – primer (Vir: Lokar, Valič, 2017, stran 11) .....	21
Slika 10: Polna vsajena binarna drevesa na tretjem nivoju (Vir: Lokar, Valič, 2017, stran 11) .....	22
Slika 11: Polna vsajena binarna drevesa na tretjem nivoju .....	23
Slika 12: Prehod od polnega vsajenega binarnega drevesa k triangulaciji .....	23
Slika 13: Nekaj prvih primerov nizov z delnimi nenegativnimi vsotami .....	24
Slika 14: Polnemu vsajenemu binarnemu drevesu priredimo niz z delnimi nenegativnimi vsotami – primer .....	25
Slika 15: Primer prehoda od niza z delnimi nenegativnimi vsotami k polnemu vsajenemu binarnemu drevesu .....	25
Slika 16: Primer prehoda od niza z delnimi nenegativnimi vsotami k polnemu vsajenemu binarnemu drevesu .....	26
Slika 17: Primer prehoda od niza z delnimi nenegativnimi vsotami k Dyckovi poti in obratno (Vir: Lokar, Valič, 2017, stran 18) .....	26
Slika 18: Iskanje ideje dokaza trditve 6: primerjava sestavljanek in Dyckovih poti za Catalanovo število $C_3 = 5$ .....	29
Slika 19: Primer prehoda od sestavljanke k nizu z delnimi nenegativnimi delnimi vsotami. ...	29
Slika 20: Pravilni pari sestavljanek $2 \times 4$ in Dyckovih poti .....	30
Slika 21: Primer Dyckove poti GDGGDGDD .....	30
Slika 22: Prehod od sestavljanke do triangulacije .....	31
Slika 23: Program, ki prešteje in izpiše vse označene kvadratke, enake T .....	33

## Kazalo tabel

Tabela 1: Izpis vseh možnih sestavljanek traku $2 \times n, n = 2, 3, 4$ in $5$ za vsak osnovni delček .....	17
Tabela 2: Skupine osnovnih delčkov, ki dajo enaka zaporedja pri sestavljanju traka .....	18
Tabela 3: Grafični prikaz osnovnih delčkov, ki dajo enaka zaporedja .....	19
Tabela 4: Število vseh označenih kvadratkov in število tistih, ki so enaki T .....	33

## Seznam prilog

Priloga 1: Izpis označenih kvadratkov, ki so enaki osnovnemu delčku T .....	36
---	----

## Povzetek

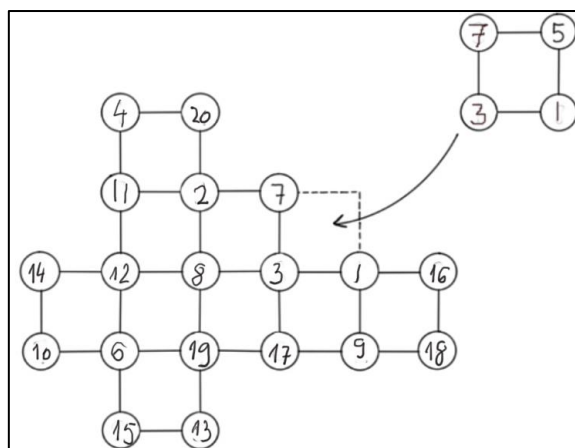
Sestavljanje puzzlov lahko spremenimo v matematično igro. V nalogi sestavljamo lik v obliki vodoravnega traku, ki je sestavljen iz neoznačenih kvadratkov. Število navpičnih stranic označimo z  $n$ . Tak trak ima  $m = 2n$  oglišč. Za osnovne gradnike (puzzle) vzamemo kvadratke, ki so označeni s števili od 1 do 4. Izberemo si en osnovni gradnik (vseh je 24). Nato izmed kvadratkov, ki so označeni s števili od 1 do  $m$ , določimo tiste, ki imajo enak vrstni red oznak kot izbrani osnovni gradnik. S temi označenimi kvadrati sestavimo trak tako, da se oznake v ogliščih ujemajo. Ključni del naloge je, da pri dani dolžini traku preštejemo, na koliko načinov lahko sestavimo trak. Sestavljanke gradimo »peš« ali s pomočjo programa Python. To naredimo pri trakovih, ki imajo 2, 3, 4 in 5 navpičnih stranic. Pri vsakem osnovnem gradniku dobimo začetne člene nekega zaporedja. Cilj naloge je proučevanje teh zaporedij. Poleg dveh konstantnih zaporedij smo dobili tudi nekaj začetnih členov zaporedja 1, 2, 5, 14 ... Postavili smo domnevo, da gre za zaporedje Catalanovih števil. Domnevo smo dokazali. Za sestavljanke traku, povezane s Catalanovimi števili, smo odkrili preprost način, kako jih sestavimo brez računalniškega programa.

**Ključne besede:** sestavljanke, puzzle, zaporedje, Catalanova števila

# 1. Uvod

## 1.1. Opis splošne matematične sestavljanke

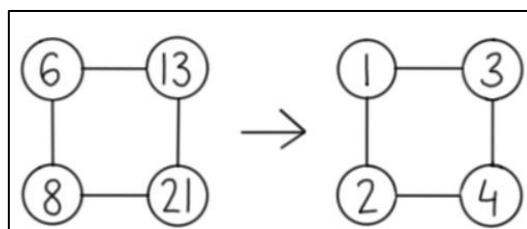
Sestavljanke (puzzles) so zelo pogosta igra. Običajno gre za sliko, ki je razrezana na več nepravilnih oblik. Vse koščke sestavimo in nastane slika, ki je bila razrezana. Slovenski pravopis Fran opiše "puzzle" kot "sestavljanka iz ploščic nepravilnih oblik z narisanim delom slike, ki nastane na koncu sestavljanja." Idejo za raziskavo smo našli v članku *Enumeration of Standard Puzzles* (Han, 2011). Na splošno lahko sestavljamo poljuben lik, ki je zgrajen iz neoznačenih kvadratkov. S številom  $m$  označimo število vseh oglišč v liku, ki si ga zamislimo. Pripravimo si množico gradnikov  $P_u$  tako, da vanjo uvrstimo vse kvadratke (puzzle), ki jih označimo s števili od 1 do  $m$  tako, da so v vsakem kvadratu različna števila. Iz te množice  $P_u$  bomo jemali puzzle in jih zlagali v pripravljeni lik tako, da jih lahko vzporedno premikamo, da se oznake ujemajo in tako, da jih ne smemo niti zrcaliti niti zasukati. V dobljeni sestavljanke morajo biti vsa oglišča paroma različna, vsebovati mora vsa števila od 1 do  $m$ . Primer je na Sliki 1.



Slika 1: Dodajanje označenega kvadratka v sestavljanke

Definirajmo pojem redukcija in enakost kvadratkov.

**Definicija 1. Redukcija** kvadratka je postopek, pri katerem kvadratek preštevilčimo tako, da so nove oznake določene z vrstnim redom števil v ogliščih. *Primer je na Sliki 2.*



Slika 2: Primer redukcije

V prvem kvadratu na Sliki 2 smo upoštevali vrstni red po velikosti od najmanjše do največje oznake in oglišča označili z dobljenim vrstnim redom.

**Definicija 2:** Dva označena kvadrata sta **enaka**, če se oznake ujemajo po redukciji.

*Primer:* Označena kvadrata na Sliki 2 sta enaka.

**Definicija 3:** Osnovni delček je kvadrater, ki je označen s števili  $\{1, 2, 3, 4\}$ , tako da je vsako oglišče označeno z enim izmed teh števil.

O tem, koliko je vseh osnovnih delčkov, govori trditev 1.

**Trditev 1: Vseh osnovnih delčkov je 24.**

*Dokaz:* Vsakega izmed štirih oglišč označimo z enim izmed števil 1, 2, 3 ali 4. Izberemo si eno izmed oglišč. To oglišče lahko označimo na štiri načine, naslednje s tremi, predzadnje z dvema načinoma. Za zadnje oglišče ostane samo ena možnost. Vseh možnosti je tako

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

konec dokaza

Profesor Guo-Niu Han je vse osnovne delčke označil s črkami od A do Z (nekaj vmesnih črk je izpustil) (glej Hu, 2011, stran 3). V nalogi se bomo držali njegovih oznak (Slika 3).

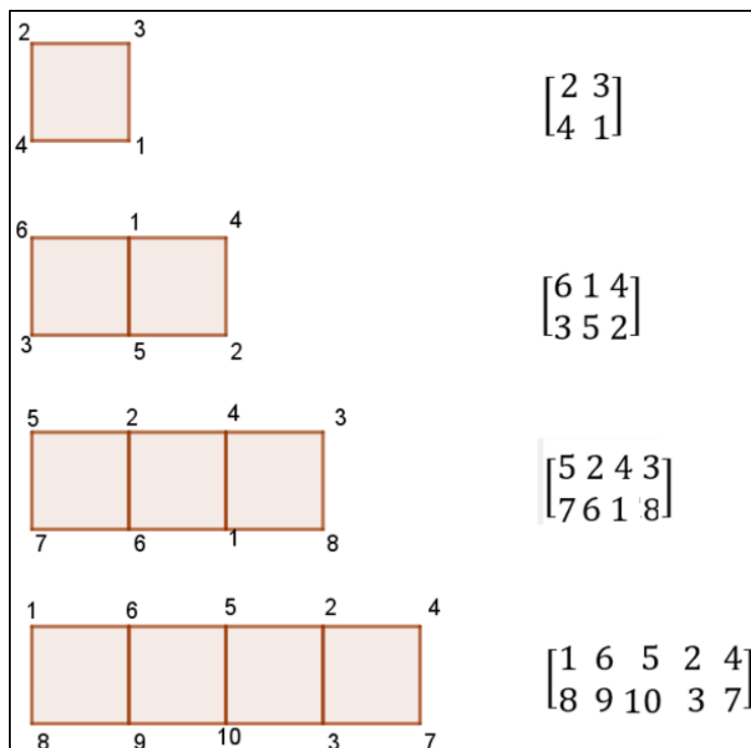
$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
$G = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$H = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	$K = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
$N = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$V = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$W = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Slika 3: Seznam osnovnih delčkov (Vir: Han, 2011, stran 3)

Ker sami nismo našli druge literature o tej temi, smo se obrnili na avtorja dr. Guoniu Hana. Odgovoril nam je, da sam ni več raziskoval te tematike. Predlagal nam je članek (Fu, Shishuo, Jiayi, 2021)<sup>1</sup>. Njegov odgovor je zapisan v opombi 1. Članek je napisan zelo strokovno in ga z našim znanjem nismo razumeli.

## 1.2. Opis raziskovalnega problema

V raziskovalni nalogi bomo obravnavali sestavljanke v obliki traku (glej primere na Sliki 4). Take sestavljanke bomo krajše zapisali v obliki matrike  $2 \times n$ . Število 2 pomeni število vrstic, število  $n$  pa število stolpcev (število navpičnih stranic). Na sliki 4 so tudi zapisi sestavljanek v obliki matrik.



Slika 4: Primeri sestavljanek  $2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4$  in  $2 \times 5$

<sup>1</sup> Dear students,

I have no further research on this subject. I can only suggest you take a look at the paper: Fu, Shishuo(PRC-CHQG-MS); Lu, Jiayi(PRC-CHQG-MS); Ding, Yuanzhe(PRC-CHQG-HHS) A skeleton model to enumerate standard puzzle sequences.  
Best wishes, Guoniu Han

Naj bo sestavljanica trak z  $n$  stolpci (z  $n$  navpičnimi stranicami), torej  $2 \times n$ ,  $n \geq 2$ . Potem je število predvidenih praznih kvadratkov enako  $n - 1$ , število vseh oglišč kvadratkov (tako skupnih v notranjosti kot tistih na začetku in na koncu) je enako  $m = 2n$ . Oglišča kvadratkov so torej lahko označena z enim izmed števil od 1 do  $m$ . Vzeli bomo enega izmed osnovnih delčkov. Z njim in z vsemi drugimi, ki so njemu enaki (ki imajo enak vrstni red oznak), bomo sestavljali trak  $2 \times n$ . V dobljeni sestavljanici mora biti vsako oglišče označeno z natanko enim izmed števil od 1 do  $m$ . Nobeni dve oglišči ne smeta biti označeni z enakima oznakama. Za nekaj začetnih naravnih števil bomo prešteli možnosti, na katere lahko sestavimo trakove  $2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4, 2 \times 5$ . Število možnosti pri izbranem osnovnem delčku bo predstavljalo nekaj prvih členov zaporedja števil. V članku (Han, 2011) je brez dokaza navedeno, da je pri osnovnem delčku B prvih nekaj členov zaporedja enakih 1, 2, 5, 14 ... Prav tam in v Enciklopediji zaporedij, ki je dostopna na povezavi <https://oeis.org/>, smo videli, da se to zaporedje imenuje zaporedje Catalanovih števil. Zato smo se odločili, da se bomo pri sestavljanju traku omejili na raziskovanje tega zaporedja.

### 1.3. Cilji raziskovalne naloge

V nalogi smo si zastavili tri cilje:

- za vsak osnovni delček prešteti število načinov, na katere lahko sestavimo trak z dvema, tremi, štirimi in petimi navpičnimi stranicami in predvideti naslednje člene v zaporedju;
- analizirati dobljena zaporedja, še posebej zaporedje Catalanovih števil;
- poiskati preprost način za sestavljanje traku pri osnovnih delčkih, kjer dobimo zaporedje Catalanovih števil.

Oblikovali smo **raziskovalna vprašanja**:

- a) Katera zaporedja pri sestavljanju traku nastopajo pri sestavljanju s posameznimi osnovnimi delčki?
- b) Pri katerih osnovnih delčkih dobimo začetne člene 1, 2, 5, 14?
- c) Dokazati, da je zaporedje, kjer dobimo prve štiri člene 1, 2, 5, 14, zaporedje Catalanovih števil.
- d) Odkriti preprost način, kako graditi sestavljanke, kjer gre za zaporedje Catalanovih števil.

## 1.4. Metode dela

- Delo po strokovni literaturi,
- matematično sklepanje in dokazovanje,
- sestavljanje traka s pomočjo programa Python,
- analiziranje zaporedij po literaturi in s pomočjo Enciklopedije zaporedij (<https://oeis.org/>).

## 2. Sestavljanke trakov iz označenih kvadratkov

Kot je bilo opisano v prejšnjem poglavju, bomo gradili sestavljanke v obliki traku (ali matrike  $2 \times n, n \geq 2$ ) za vsak osnovni delec. Šteli bomo, koliko možnosti dobimo pri prvih nekaj korakih, to je pri  $2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4$  in  $2 \times 5$ . Za primer vzemimo osnovni delček  $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  in sestavljamo trak ter štejemo možnosti.

### 2.1. Sestavljanje »peš«

#### Trak z enim kvadratom ( $2 \times 2$ )

Ker sestavljamo trak, je  $T$  tudi edina možnost pri sestavljanke z enim kvadratom:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. S_1 = 1.$$

#### Trak z dvema kvadratom ( $2 \times 3$ )

V vsakem oglišču so lahko števila od 1 do 6, vendar tako, da so po redukciji oba označena kvadrata enaka osnovnemu delčku  $T$ .

S poskušanjem in izločanjem dobimo dve možnosti:  $S_2 = 2$  in sicer:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ .

#### Trak s tremi kvadrati ( $2 \times 4$ )

V vsakem oglišču so lahko števila od 1 do 8. Rešitev je pravilna, ko je vsak izmed kvadratkov po redukciji enak osnovnemu delčku  $T$  in se nobena oznaka v sestavljanke ne ponovi. Sistematično smo gradili sestavljanke. Sproti smo pazili, da smo vedno dobili delec  $T$  (enak vrstni red oznak). S precej truda in časa smo dobili pet možnosti:  $S_3 = 5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Naš rezultat smo preverili z metodo, opisano v naslednjem poglavju.

## 2.2. Zlaganje sestavljanek s programom Python

Ker je pri daljšem traku (na primer, ko so štirje prazni kvadrati v traku  $2 \times 5$ ) veliko možnosti (vseh oglišč je 10), smo si pomagali s programiranjem. Napisali smo program v Pythonu (Slika 5), ki sam poišče in izpiše vse rešitve. Pri štirih kvadratih ( $2 \times 5$ ) smo pri osnovnem delcu  $T$  dobili 14 možnosti:  $S_4 = 14$  (Slika 6).

```
def štiriT():
    for a in range(1,11):
        for b in range(1,11):
            if (b is not a):
                for c in range(1,11):
                    if (c is not a) and (c is not b):
                        for d in range(1,11):
                            if (d is not a) and (d is not b) and (d is not c):
                                for e in range(1,11):
                                    if (e is not a) and (e is not b) and (e is not c) and (e is not d):
                                        for f in range(1,11):
                                            if (f is not a) and (f is not b) and (f is not c) and (f is not d) and (f is not e):
                                                for g in range(1,11):
                                                    if (g is not a) and (g is not b) and (g is not c) and (g is not d) and (g is not e) and (g is
not f):
                                                        for h in range(1,11):
                                                            if (h is not a) and (h is not b) and (h is not c) and (h is not d) and (h is not e) and
(h is not f) and (h is not g):
                                                                for j in range(1,11):
                                                                    if (j is not a) and (j is not b) and (j is not c) and (j is not d) and (j is not e) and
(j is not f) and (j is not g) and (j is not h):
                                                                        for k in range(1,11):
                                                                            if (k is not a) and (k is not b) and (k is not c) and (k is not d) and (k is not
e) and (k is not f) and (k is not g) and (k is not h) and (k is not j):
                                                                                if (c<d) and (d<a) and (a<b) and (d<f) and (f<b) and (b<e) and (f<h)
and (h<e) and (e<g) and (h<k) and (k<g) and (g<j):
                                                                                    print(c, d, f, h, k)
                                                                                    print(a, b, e, g, j)
```

Slika 5: Program v Pythonu, ki izpiše vse možne sestavljanke traku ( $2 \times 5$ ) s štirimi osnovnimi delčki  $T$

Program je izpisal 14 možnosti (glej Sliko 6).

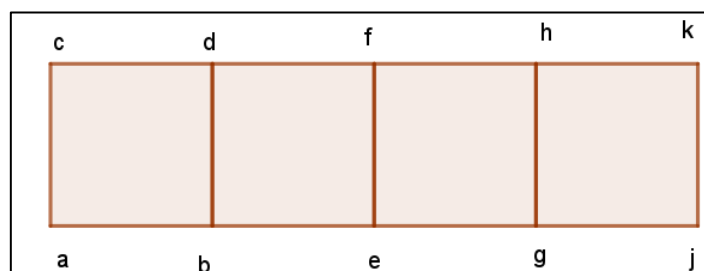
1 2 4 6 8 3 5 7 9 10	1 2 4 5 8 3 6 7 9 10	1 2 4 5 6 3 7 8 9 10	1 2 3 6 7 4 5 8 9 10	1 2 3 5 7 4 6 8 9 10	1 2 3 4 8 5 6 7 9 10	1 2 3 4 6 5 7 8 9 10
12467 3 5 8 9 10	1 2 4 5 7 3 6 8 9 10	1 2 3 6 8 4 5 7 9 10	1 2 3 5 8 4 6 7 9 10	1 2 3 5 6 4 7 8 9 10	1 2 3 4 7 5 6 8 9 10	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Slika 6: Izpis vseh možnih sestavljanj traku 2x5 s štirimi osnovnimi delčki T

Program v Pythonu smo zasnovali tako, da smo si predstavljali trak 2x5 s spremenljivkami  $a, b, c, d, e, f, g, h, j$  in  $k$ , ki označujejo oglišča kvadratkov (glej Sliko 7). Vsaka izmed spremenljivk lahko zavzame vrednosti od 1 do 10. Zaradi lastnosti programa je zapisan interval (1,11), ker se ne šteje zadnje vrednosti. Da zagotovimo različnost razporeditve oznak pri posameznem kvadratu in v končni sestavljanji, zapišemo vmesne pogoje, na primer:

if (e is not a) and (e is not b) and (e is not c) and (e is not d).

Z zadnjim pogojem v programu *if (c<d) and (d<a) and (a<b) and (d<f) and (f<b) and (b<e) and ... and (h<k) and (k<g) and (g<j)* preverimo, ali vsi štirje kvadrati v sestavljanji ustrezajo pogoju izbranega delčka, v našem primeru delčka T. Če je sklep pravilen, program izpiše sestavljanjo v dveh vrsticah brez oglatih oklepajev.



Slika 7: K razvoju programa v Pythonu

S programom smo šteli vse možnosti pri vsakem osnovnem delčku. Rezultati so prikazani v Tabeli 1. Sam program je vedno enak, le zadnji pogoj zapišemo glede na zgradbo osnovnega delčka.

Osnovni delček (2x2)	Po dva kvadratka (2x3)	Po trije kvadratki (2x4)	Po štirje kvadratki (2x5)
$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	6 5 4 1 2 3	8 7 6 5 1 2 3 4	10 9 8 7 6 1 2 3 4 5
$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	3 5 6 1 2 4  4 5 6 1 2 3	3 5 7 8 1 2 4 6  5 6 7 8 1 2 3 4  4 5 7 8 1 2 3 6  3 6 7 8 1 2 4 5  4 6 7 8 1 2 3 5	3 5 7 6 10    4 6 7 9 10 1 2 4 6 8    1 2 3 5 8  3 5 8 9 10    6 6 8 9 10 1 2 4 6 7    1 2 3 5 7  3 6 7 9 10    4 7 8 9 10 1 2 4 5 8    1 2 3 5 6  3 6 8 9 10    5 6 7 9 10 1 2 4 5 7    1 2 3 4 8  3 7 8 9 10    5 6 8 9 10 1 2 4 5 6    1 2 3 4 7  4 5 7 9 10    5 7 8 9 10 1 2 3 6 8    1 2 3 4 6  4 5 8 9 10    6 7 8 9 10 1 2 3 6 7    1 2 3 4 5
$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	0	0	0
$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	2 4 6 1 3 5	2 4 6 8 1 3 5 7	2 4 6 8 10 1 3 5 7 9
$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	0	0	0

Osnovni delček (2x2)	Po dva kvadratka (2x3)	Po trije kvadratki (2x4)	Po štirje kvadratki (2x5)	
$G = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	6 5 4 3 2 1  6 5 3 4 2 1	8 7 6 5 4 3 2 1  8 7 6 4 5 3 2 1  8 7 6 3 5 4 2 1  8 7 5 4 6 3 2 1  8 7 5 3 6 4 2 1	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1  10 9 8 7 5 6 4 3 2 1  10 9 8 7 4 6 5 3 2 1  10 9 8 7 3 6 5 4 2 1  10 9 8 6 5 7 4 3 2 1  10 9 8 6 4 7 5 3 2 1  10 9 8 6 3 7 5 4 2 1	10 9 8 5 4 7 6 3 2 1  10 9 8 5 3 7 6 4 2 1  10 9 7 6 5 8 4 3 2 1  10 9 7 6 4 8 5 3 2 1  10 9 7 6 3 8 5 4 2 1  10 9 7 5 4 8 6 3 2 1  10 9 7 5 3 8 6 4 2 1
$H = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	4 5 6 3 2 1	5 6 7 8 4 3 2 1	6 7 8 9 10 5 4 3 2 1	
$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	0	0	0	
$K = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	0	0	0	
$L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	0	0	0	
$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	1 3 5 2 4 6	1 3 5 7 2 4 6 8	1 3 5 7 9 2 4 6 8 10	
$N = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	6 4 2 5 3 1	8 6 4 2 7 5 3 1	10 8 7 6 4 2 9 7 5 3 1	
$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	0	0	0	
$Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	0	0	0	

Osnovni delček (2x2)	Po dva kvadratka (2x3)	Po trije kvadratki (2x4)	Po štirje kvadratki (2x5)
$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	0	0	0
$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	3 2 1 4 5 6	4 3 2 1 5 6 7 8	5 4 3 2 1 6 7 8 9 10
$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	1 2 4 3 5 6  1 2 3 4 5 6	1 2 4 6 3 5 7 8  1 2 4 5 3 6 7 8  1 2 3 6 4 5 7 8  1 2 3 5 4 6 7 8  1 2 3 4 5 6 7 8	1 2 4 6 8    1 2 3 5 8 3 5 7 9 10    4 6 7 9 10  1 2 4 6 7    1 2 3 5 7 3 5 8 9 10    4 6 8 9 10  1 2 4 5 8    1 2 3 5 6 3 6 7 9 10    4 7 8 9 10  1 2 4 5 7    1 2 3 4 8 3 6 8 9 10    5 6 7 9 10  1 2 4 5 6    1 2 3 4 7 3 7 8 9 10    5 6 8 9 10  1 2 3 6 8    1 2 3 4 6 4 5 7 9 10    5 7 8 9 10  1 2 3 6 7    1 2 3 4 5 4 5 8 9 10    6 7 8 9 10
$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	0	0	0
$V = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	0	0	0
$W = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	5 3 1 6 4 2	7 5 3 1 8 6 4 2	9 7 5 3 1 10 8 6 4 2
$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	0	0	0

Osnovni delček (2x2)	Po dva kvadratka (2x3)	Po trije kvadratki (2x4)	Po štiri kvadratki (2x5)	
$Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	3 2 1	4 3 2 1	5 4 3 2 1	7 6 3 2 1
	6 5 4	8 7 6 5	10 9 8 7 6	10 9 8 5 4
	4 2 1	5 3 2 1	6 4 3 2 1	7 6 4 2 1
	6 5 3	8 7 6 4	10 9 8 7 5	10 9 8 5 3
		5 4 2 1		
		8 7 6 3	6 5 3 2 1	8 4 3 2 1
		6 3 2 1	10 9 8 7 4	10 9 7 6 5
		8 7 5 4		
		6 4 2 1	6 5 4 2 1	8 5 3 2 1
		8 7 5 3	10 9 8 7 3	10 9 7 6 4
			7 4 3 2 1	8 5 4 2 1
			10 9 8 7 6 5	10 9 7 6 3
			7 5 3 2 1	8 6 3 2 1
			10 9 8 6 4	10 9 7 5 4
		7 5 4 2 1	8 6 4 2 1	
		10 9 8 6 3	10 9 7 5 3	
$Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	1 2 3	1 2 3 4	1 2 3 4 5	
	6 5 4	8 7 6 5	10 9 8 7 6	

Tabela 1: Izpis vseh možnih sestavljanek traku  $2 \times n, n = 2, 3, 4$  in 5 za vsak osnovni delček

## 2.3. Iskanje vzorcev med osnovnimi delčki

Rezultati, prikazani v Tabeli 1, so zanimivi. Dobili smo samo tri različna zaporedja (če upoštevamo prve štiri člene). To so:

Zaporedje 1: 0, 0, 0, 0 ...      Zaporedje 2: 1, 1, 1, 1, ...      Zaporedje 3: 1, 2, 5, 14 ...

Prvo in drugo zaporedje sta (sklepamo) konstantni, zanimivo pa je tretje zaporedje. Enciklopedija zaporedij na povezavi <https://oeis.org/A000108> pokaže, da gre za zaporedje Catalanovih števil z oznako [A000108](https://oeis.org/A000108). Vendar to še ni dokaz, temveč le domneva. V nadaljevanju bomo dokazali, da je dobljeno zaporedje res zaporedje Catalanovih števil.

Poglejmo osnovne delčke  $B, G, Y$  in  $T$ , kjer smo dobili to zaporedje.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Vzemimo osnovni delček  $B$ . Opazimo, da delček  $G$  dobimo tako, da v delčku  $B$  prezrcalimo stolpca preko navpične simetrale, delček  $T$  tako, da prezrcalimo vrstici preko vodoravne simetrale in delček  $Y$  tako, da v  $B$ -ju zrcalimo elemente preko središča delčka.

Tudi ostale delčke lahko na enak način razporedimo v skupine. Tako dobimo šest skupin. Prikazane so v Tabeli 2.

Osnovni delčki	Zaporedje
$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	1, 2, 5, 14...
$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	1, 1, 1, 1...
$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	1, 1, 1, 1...
$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	0, 0, 0, 0...
$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	0, 0, 0, 0...
$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	0, 0, 0, 0...

Tabela 2: Skupine osnovnih delčkov, ki dajo enaka zaporedja pri sestavljanju traka

Simetrije oziroma podobnost osnovnih delčkov pokažemo tudi tako, da narišemo poti od oglišča z najmanjšo številko do oglišča z največjo številko (glej Tabela 3).

Osnovni delčki	Zaporedje
$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , $G = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , $Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	1, 2, 5, 14...
$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , $H = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , $Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	1,1,1,1...
$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ , $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ , $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ , $W = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	1,1,1,1...
$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ , $L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ , $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ , $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	0, 0, 0, 0...
$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ , $J = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ , $R = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ , $V = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	0, 0, 0, 0...
$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ , $K = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ , $Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ , $U = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	0, 0, 0, 0...

Tabela 3: Grafični prikaz osnovnih delčkov, ki dajo enaka zaporedja

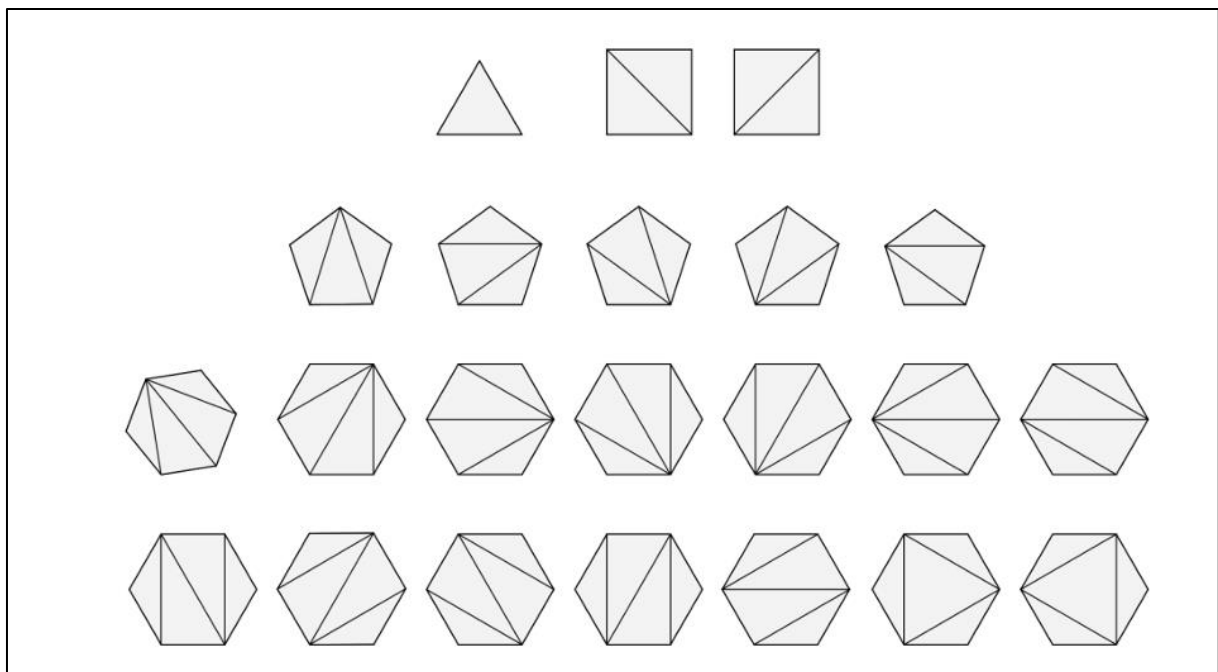
Opazimo, da so osnovni delčki pri zaporedju samih ničel takšni, da sta stolpca po smeri različna in je nemogoče, da bi prišlo do povezave delca z delcem.

### 3. Zaporedje Catalanovih števil

Naša hipoteza je bila, da so števila 1, 2, 5, 14 ..., ki smo jih dobili pri osnovnih delčkih  $B, G, Y, T$ , začetek zaporedja Catalanovih števil. V nadaljevanju si to zaporedje podrobneje ogledamo, nato pa bomo dokazali, da gre res za zaporedje Catalanovih števil.

#### 3.1. Definicija Catalanovih števil <sup>2</sup>

Vsak konveksen  $(n+2)$ -kotnik lahko z diagonalami, ki se ne sekajo v notranjosti lika, razdelimo na  $n$  trikotnikov. Temu postopku pravimo triangulacija. Na Sliki 8 so prikazane triangulacije trikotnika, kvadrata, pravilnega petkotnika in pravilnega šestkotnika.



Slika 8: Triangulacije trikotnika, kvadrata, pravilnega petkotnika in pravilnega šestkotnika (Vir: Lokar, Valič, 2017, stran 10)

<sup>2</sup> Teorijo o Catalanovih številih smo večinoma povzeli po avtoricah Lokar in Valič (Lokar, Valič, 2017)

Ko preštejemo vse možne delitve posameznega lika, dobimo zaporedje: 1, 2, 5, 14 ...

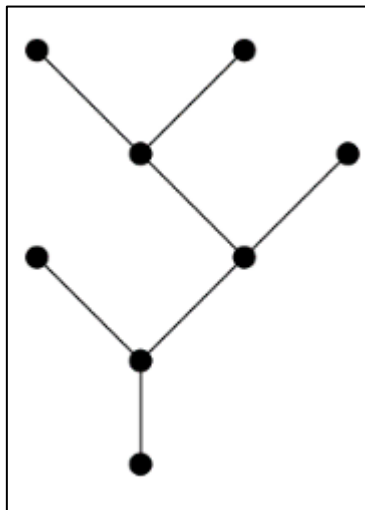
To vzamemo kot definicijo Catalanovih števil (glej Definicijo 4).

**Definicija 4:** Catalanovo število  $C_n$  je število vseh možnih triangulacij konveksnega  $(n + 2)$  –kotnika,  $n \in \mathbb{N}$ . Zaporedje števil  $C_n, n \in \mathbb{N}$  imenujemo zaporedje Catalanovih števil ali kar Catalanovo zaporedje.

### 3.2. Drugi primeri množic s Catalanovimi števili

Matematiki so ugotovili in objavili veliko primerov Catalanovih števil (glej, na primer, Stanley, 2015). Seveda je potrebno za vsako zaporedje, za katero domnevamo, da gre za zaporedje Catalanovih števil, to tudi dokazati.

#### Polna »vsajena« binarna drevesa



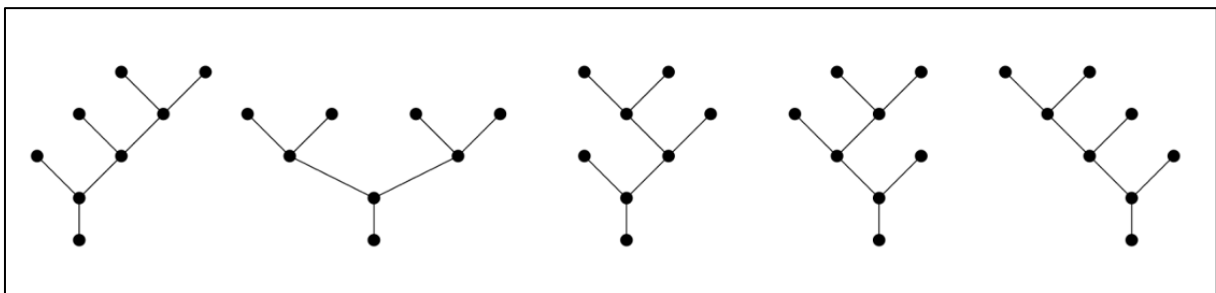
Slika 9: Polno vsajeno binarno drevo – primer (Vir: Lokar, Valič, 2017, stran 11)

Drevo je ravninski graf. Sestavljajo ga vozlišča in povezave. Potomec je povezava, ki sledi izbranemu vozlišču, predhodnik pa povezava, ki vodi v vozlišče. Binarno drevo je drevo, ki ima v vsakem vozlišču kvečjemu dva potomca. Polno binarno drevo pa je binarno drevo, pri katerem ima vsako vozlišče natanko dva potomca ali pa nobenega.

**Definicija 5: Polno vsajeno binarno drevo** je polno binarno drevo, pri katerem ima koren (začetno vozlišče) natanko enega predhodnika.

Predhodnika korenu imenujmo *deblo*. Povezava, ki nima potomcev, je *list*. Primer je na Sliki 9.

Na Sliki 10 so prikazana polna binarna drevesa s po osmimi vozlišči (štirimi listi). (Opomba: deblo ni list). Če preštejemo polna vsajena binarna drevesa pri danem številu vozlišč, dobimo spet 1, 2, 5, 14. Domnevamo, da gre za zaporedje Catalanovih števil.



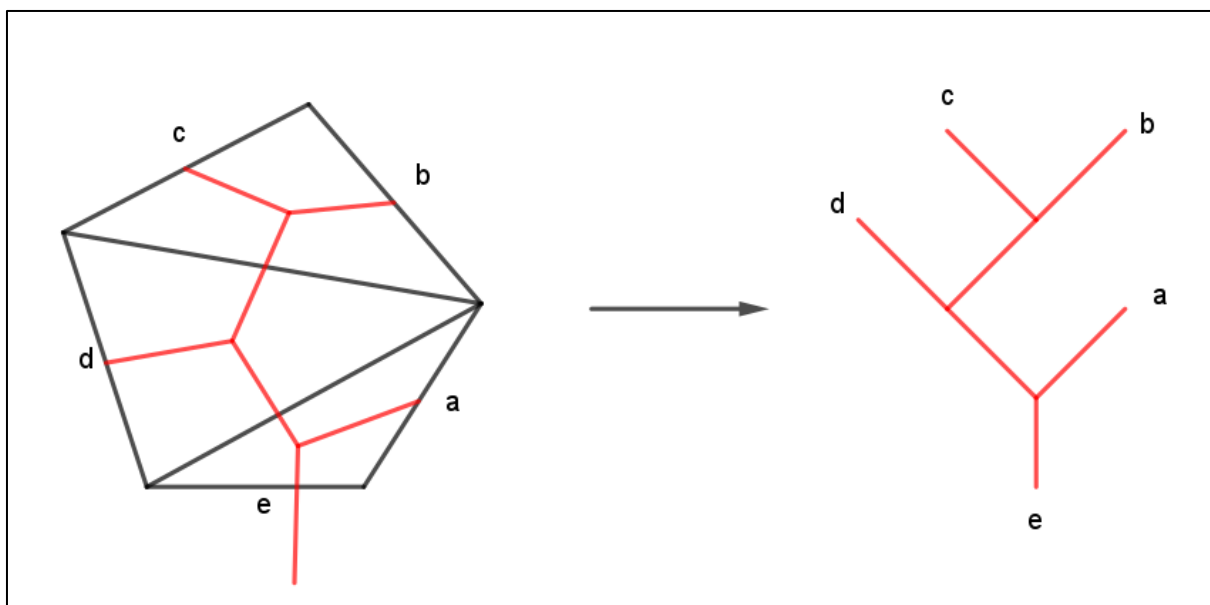
Slika 10: Polna vsajena binarna drevesa na tretjem nivoju (Vir: Lokar, Valič, 2017, stran 11)

**Trditev 2:** Vsaki triangulaciji konveksnega  $n$ -kotnika lahko priredimo polno vsajeno binarno drevo in obratno: vsakemu polnemu vsajenemu binarnemu drevesu lahko priredimo triangulacijo konveksnega  $n$ -kotnika.

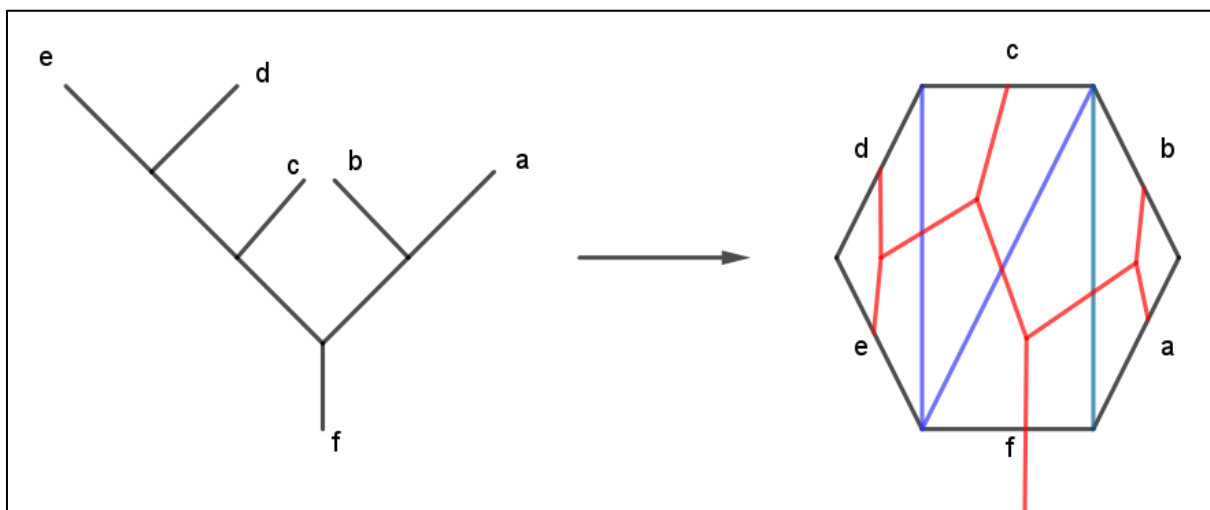
*Dokaz.*

Najprej pokažimo postopek, to je prehod med triangulacijami in polnimi vsajenimi binarnimi drevesi.

Pokažimo s primerom. Vzemimo eno izmed triangulacij konveksnega petkotnika (Slika 11). Označimo stranice in začnemo s stranico  $e$ . Ta bo predstavljala deblo. Od te daljice narišemo daljico do izbrane točke znotraj trikotnika, ki ima eno stranico  $e$ . Od te točke nadaljujemo v dveh smereh: prosti stranici  $a$  in čez narisano diagonalo. Postopek nadaljujemo. Potem si predstavljamo, da dobljeni graf (na sliki je rdeče barve) »primemo« za deblo in postavimo v obliki drevesa.



Slika 11: Polna vsajena binarna drevesa na tretjem nivoju



Slika 12: Prehod od polnega vsajenega binarnega drevesa k triangulaciji

Pokažimo s primerom še prehod od polnega vsajenega binarnega drevesa k triangulaciji. Vzemimo polno vsajeno binarno drevo (glej Sliko 12). Najprej preštejemo, koliko je listov. V našem primeru je pet listov in še deblo. Sklepamo, da gre za šestkotnik. Liste označimo s črkami  $a, b, c, d, e$  tako, da začnemo s prvim listom, ki je desno od debla in nadaljujemo v nasprotni smeri urnih kazalcev (drsimo ob drevesu, ne preskakujemo). Deblo označimo s  $f$ . Sedaj pa narišemo šestkotnik. Ker sta lista  $a$  in  $b$  sosednja, sestavljata dve stranici trikotnika. Narišemo diagonalno. Prav tako sta

sosednja lista  $e$  in  $d$  ter  $c$  in (deblo)  $f$ . Zlahka dokončamo triangulacijo. Pozorni smo pri diagonali pravokotnika s stranicama  $f$  in  $c$ .

Sklepamo, da lahko na enak način priredimo vsaki triangulaciji konveksnega  $n$ -kotnika polno vsajeno binarno drevo in obratno: vsakemu polnemu vsajenemu drevesu lahko priredimo triangulacijo. Od tod sledi, da je zaporedje, ki ga dobimo s polnimi vsajenimi binarnimi drevesi, enako zaporedju triangulacij. Torej je zaporedje, ki šteje polna vsajena binarna drevesa, zaporedje Catalanovih števil.

konec dokaza

### Niz z delnimi nenegativnimi vsotami

**Definicija 6:** Niz z delnimi nenegativnimi vsotami je niz dolžine  $2n, n \in \mathbb{N}$ , sestavljen iz števil 1 in -1 tako, da je vsota od leve proti desni vedno nenegativno število. Prvih nekaj nizov je na Sliki 13.

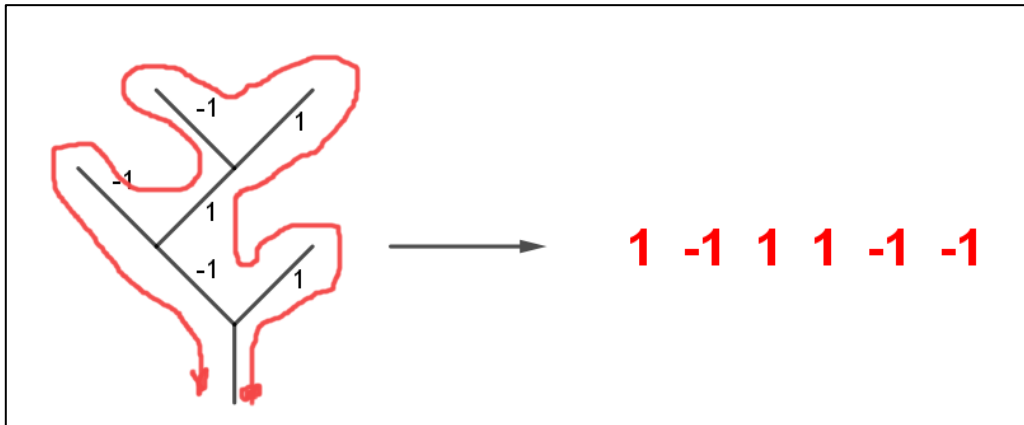
n = 1: 1 -1					
n = 2: 1 1 -1 -1	1 -1 1 -1				
n = 3: 1 1 1 -1 -1 -1	1 1 -1 1 -1 -1	1 1 -1 -1 1 -1	1 -1 1 1 -1 -1	1 -1 1 -1 1 -1	

*Slika 13: Nekaj prvih primerov nizov z delnimi nenegativnimi vsotami*

**Trditev 3:** Vsakemu polnemu vsajenemu binarnemu drevesu z  $2n + 2$  vozlišči (štejemo tudi liste in začetek debla) ustreza niz z delnimi nenegativnimi vsotami s skupno  $2n$  členi ( $z_n + 1$  in  $z_n - 1$ ) in obratno: vsakemu nizu z delnimi nenegativnimi vsotami ustreza polno vsajeno binarno drevo.

*Dokaz.* Na Sliki 14 je primer prehoda od polnega vsajenega binarnega drevesa k nizu z delnimi nenegativnimi delnimi vsotami. Polno vsajeno binarno drevo ima 8 vozlišč. Ker je  $2n + 2 = 8$ , je dolžina niza z delnimi nenegativnimi vsotami enaka  $2n = 6$ . Na polnem vsajenem binarnem drevesu označimo v vsakem vozlišču desnega naslednika z 1, levega naslednika pa z -1 (označujemo povezave, ne vozlišča). Nato pa naredimo obhod od korena (debla) tako, da najprej obiščemo celotni graf desno od vozlišča, nato

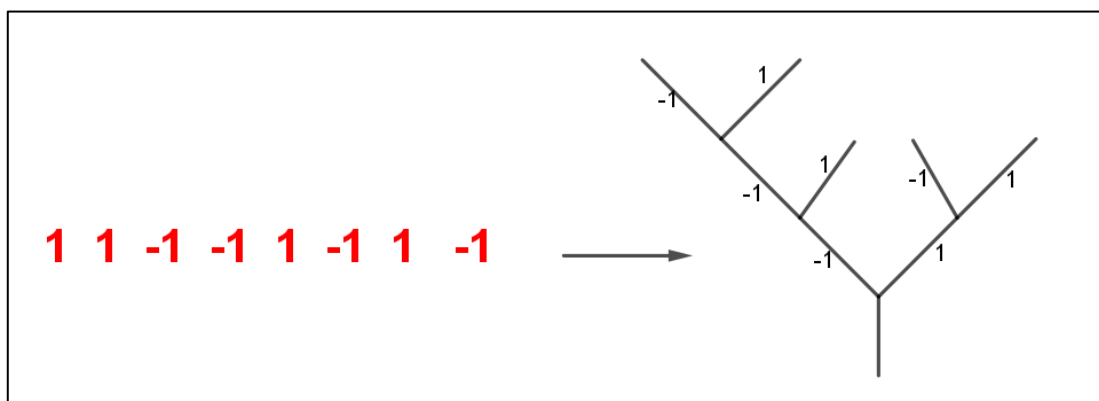
pa še levi. V vsakem vozlišču gremo najprej proti desni. Ko pridemo do zadnjega desnega lista, skočimo na levi del zadnjega vozlišča. Debla ne označimo. Vsakič izpišemo številko na povezavi, to je 1 (desno) ali  $-1$  (levo). Na Sliki 14 je z rdečo barvo označen obhod drevesa. Tako dobimo niz z delnimi nenegativnimi vsotami.



Slika 14: Polnemu vsajenemu binarnemu drevesu priredimo niz z delnimi nenegativnimi vsotami – primer

Na primeru pokažimo še postopek, kako nizu z delnimi nenegativnimi vsotami priredimo polno vsajeno binarno drevo (glej Sliko 15). Niz je dolg 8 členov, zato je  $n = 4$  in drevo bo imelo 10 vozlišč (vključno z listi in začetkom debla). Drevo narišemo tako, da najprej narišemo deblo (brez oznake), nato pa v vsakem vozlišču: če je 1, narišemo desnega naslednika, če je  $-1$ , pa levega. Kjer sta dve zaporedni  $-1$ , se prestavimo na predhodno vozlišče.

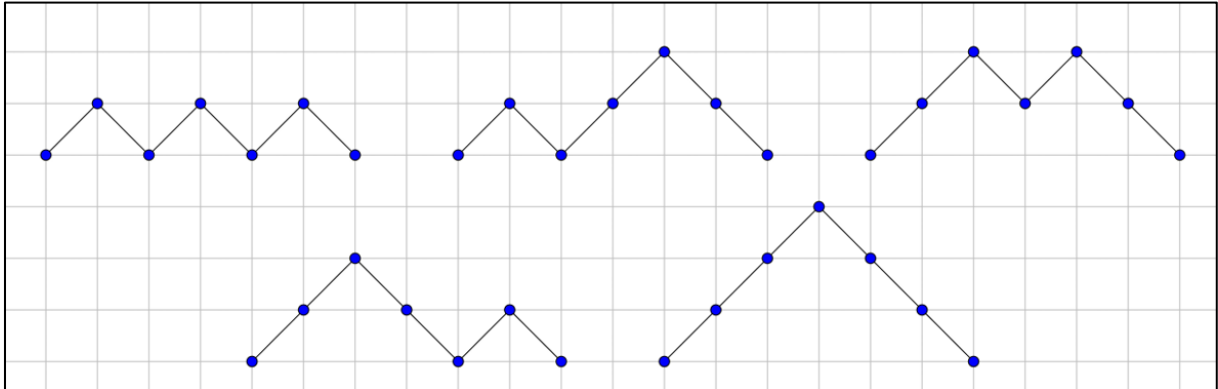
konec dokaza



Slika 15: Primer prehoda od niza z delnimi nenegativnimi vsotami k polnemu vsajenemu binarnemu drevesu.

## Dyckove poti

**Definicija 7:** Dyckova pot dolžine  $2n$  je mrežna pot od točke  $(0,0)$  do točke  $(2n, 0)$  s koraki  $(1,1)$  ali  $(1,-1)$ , kjer se nikoli ne spustimo pod  $x$ -os. Primer pri  $n = 3$  je na Sliki 16.

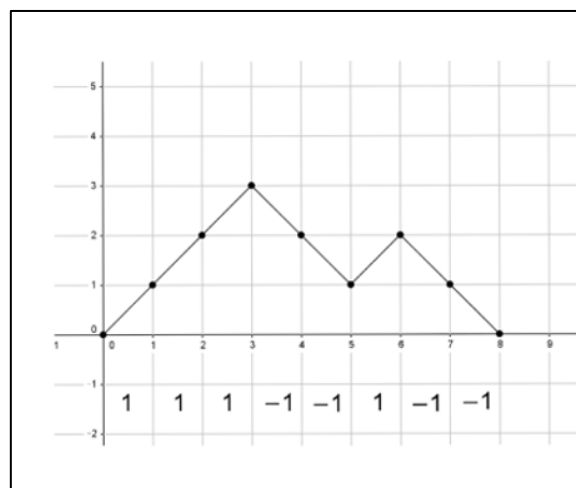


*Slika 16: Primer prehoda od niza z delnimi nenegativnimi vsotami k polnemu vsajenemu binarnemu drevesu.*

**Trditev 4:** Vsakemu nizu z delnimi nenegativnimi vsotami dolžine  $2n$  ustreza Dyckova pot dolžine  $2n$  in obratno: vsaki Dyckovi poti ustreza niz z delnimi nenegativnimi vsotami.

*Dokaz s primerom.* Na Sliki 17 je prikazan primer prehoda v obe smeri. Številci 1 ustreza gor (G), številu  $-1$  pa dol (D).

konec dokaza



*Slika 17: Primer prehoda od niza z delnimi nenegativnimi vsotami k Dyckovi poti in obratno (Vir: Lokar, Valič, 2017, stran 18).*

### 3.3. Formule za izračun Catalanovih števil

Richard P. Stanley je v svoji knjigi (Stanley, 2015) na straneh 177–189 opisal zgodovino odkrivanja Catalanovih števil. Prvi, ki je prišel do zaporedja 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430 ..., je bil švicarski matematik Leonhard Euler (1707–1783). »Catalanovo število«  $C_n$  je definiral kot število triangulacij konveksnega  $n + 2$  kotnika (glej Sliko 8). Pri trikotniku je dobil eno možnost, pri štirikotniku dve možnosti, pri petkotniku pet možnosti, pri šestkotniku 14 možnosti. Ročno je izračunal število možnosti do  $n = 8$ . Se pravi, da je pri desetkotniku preveril »peš« in dobil 1430 možnosti. Predvidel je formulo (glej Stanley, 2015, stran 178)

$$C_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n - 2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n + 1)}, n \in \mathbb{N}.$$

Več matematikov je raziskovalo ta števila. Odkrili so veliko primerov, kjer nastopajo ta števila. Med njimi je bil tudi belgijski matematik Eugene C. Catalan, ki je med drugimi raziskavami izpeljal drugačno obliko formule (glej Stanley, 2015, stran 181). Po njem so potem poimenovala ta števila Catalanovo število. Menimo, da bi bilo bolj prav, če bi jih poimenovali »Eulerjeva števila«, saj je bil Euler prvi, ki jih je odkril kot triangulacije konveksnih  $n$  –kotnikov. Catalanova formula se glasi  $C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Število  $n!$  je enako  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  (glej Stanley, 2015, stran 181).

Izračunajmo nekaj zaporednih Catalanovih števil:  $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3$  in tako dalje. Vsa ta števila sestavljajo zaporedje Catalanovih števil:

1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440 ...

Zanimiva je še ena zveza. Če pred prvi člen postavimo še en člen, in sicer  $C_0 = 1$  ter sklepamo, kako bi na primer iz prvih štirih členov 1, 1, 2, 5 izračunali peti člen, ugotovimo sledeči postopek. Zapišemo prvi niz (1, 1, 2, 5) in drugi niz v obratnem vrstnem redu (5, 2, 1, 1) ter zmnožimo enako ležeče člene in produkte seštejemo:  $1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 14$ . Splošna izpeljava je v (Lokar, Valič, 2017) na strani 22. Tej zvezi pravimo *rekurzivna zveza*.

### 3.4. Dokazi

V drugem poglavju smo ugotovili, da nam osnovni delčki  $B, G, T$  in  $Y$  dajo zaporedje Catalanovih števil pri sestavljanju traku. Dokaz, da je to res, poteka podobno, kot smo dokazovali povezave med triangulacijami konveksnih  $n$ -kotnikov, polnih vsajenih binarnih dreves, nizov z delnimi nenegativnimi vsotami in Dyckovimi potmi. Poiskati moramo postopek (preslikavo), ki vsakemu elementu iz prve množice priredi natanko določeni element v drugi množici in obratno: vsakemu elementu iz druge množice moramo poiskati natanko določeni element v prvi množici.

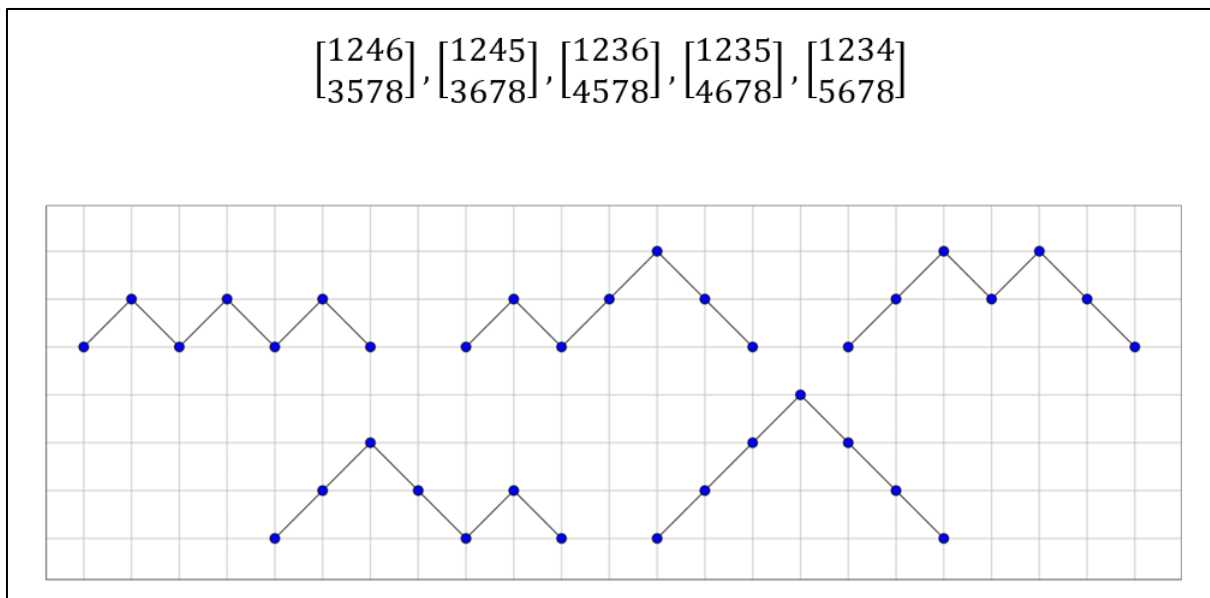
Vzemimo zaporedje, ki smo ga dobili z osnovnim delčkom  $T$ , in dokažimo trditev 5.

**Trditev 5:** Vsaki sestavljanji traku  $2xn$  z osnovnim delčkom  $T$  dolžine  $n$  pripada Dyckova pot dolžine  $2n - 2$  in obratno: Vsaki Dyckovi poti dolžine  $2n - 2$  pripada sestavljanje traku z osnovnim delčkom  $T$ .

Dokaza za osnovni delček  $T$  (niti za druge osnovne delčke) nismo našli v literaturi. V članku (Han, 2011) je na strani 7 dokaz, da gre v primeru, ko sestavljamo trak z dvema delčkoma  $B$  in  $D$ , za Catalanova števila, v članku (Fu, 2021) pa je na strani 15 splošna povezava med sestavljanjami in Catalanovimi števili. Oba dokaza presegata naše matematično znanje in smo sami poiskali drug dokaz.

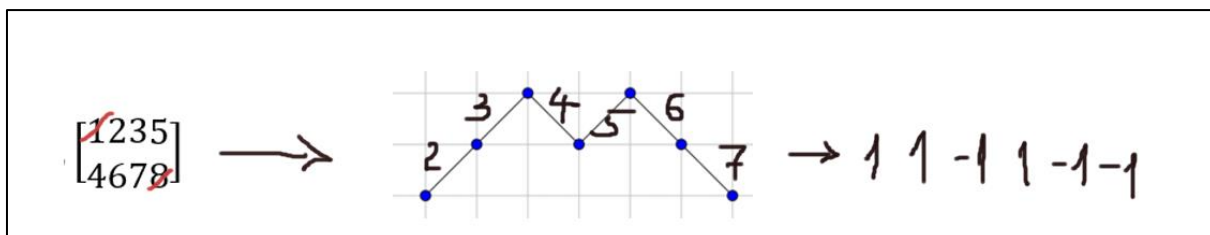
*Dokaz:*

Vzemimo situacijo, ko dobimo  $C_3 = 5$ , to je 5 možnosti. Zapišimo sestavljanke in Dyckove poti (glej Sliko 18).

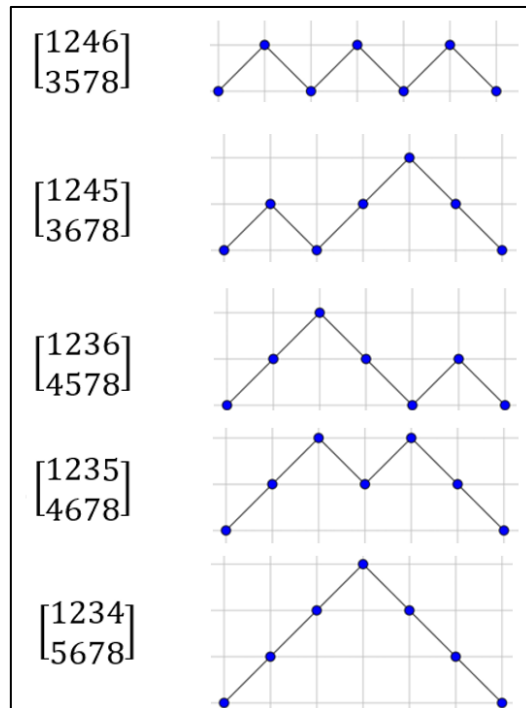


Slika 18: Iskanje ideje dokaza trditve 6: primerjava sestavljanek in Dyckovih poti za Catalanovo število  $C_3 = 5$ .

Vprašamo se, kako vsaki sestavljanke na sliki 18 priredimo eno izmed Dyckovih poti. Najprej opazimo, da je pri sestavljanke osem elementov, pri Dyckovi poti pa 6 (trikrat gor in trikrat dol). Pri sestavljanke so štiri števila v zgornji vrstici in štiri števila v spodnji vrstici. Opazimo tudi, da sta števili 1 in 8 vedno na istem mestu: število 1 je prvo v prvi vrstici, število 8 pa zadnje v drugi vrstici. Lahko ju izpustimo. Sedaj nam ostanejo tri števila v zgornji vrstici in tri števila v spodnji vrstici. Številom v zgornji vrstici lahko priredimo G(or) ali 1, številom v spodnji vrstici pa D(ol) ali -1. Uredimo jih še po vrsti in rešitev je na dlani. Postopek je torej naslednji: Številni 1 in 8 izpustimo. Nato pa niz 2, 3, 4, 5, 6, 7 spremenimo v niz z delnimi nenegativnimi delnimi vsotami tako, da številu, ki je v zgornji vrstici, določimo 1, številu, ki je v spodnji vrstici, pa -1. Primer je na Sliki 19.



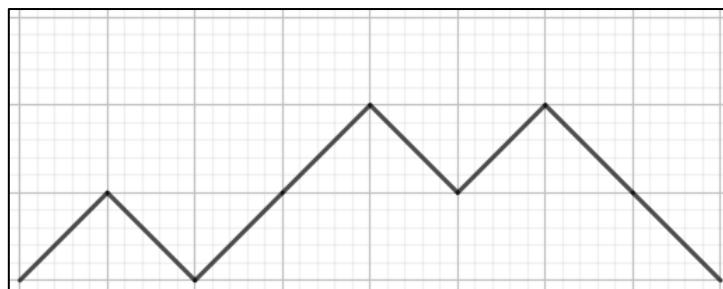
Slika 19: Primer prehoda od sestavljanke k nizu z delnimi nenegativnimi delnimi vsotami.



Slika 20: Pravilni pari sestavljanek  $2 \times 4$  in Dyckovih poti

Pravilne povezave med sestavljanjami in Dyckovimi potmi s Slike 17 so prikazane na sliki 20: na levi strani je sestavljanjka, na desni pa pripadajoča Dyckova pot.

Kaj pa obratno? Kako Dyckovi poti priredimo sestavljanjko? Pokažimo s primerom.



Slika 21: Primer Dyckove poti GDGGDGDD

Vzemimo Dyckovo pot s Slike 21. Ima osem korakov. Dyckovi poti priredimo niz z delnimi nenegativnimi vsotami:  $1 - 1 \ 1 \ 1 - 1 \ 1 - 1 - 1$ . Na začetku dodamo število 1, na koncu pa  $-1$ :  $1 \ 1 - 1 \ 1 \ 1 - 1 \ 1 - 1 - 1 - 1$ . Vemo, da bo šlo za sestavljanjko s števili od 1 do 10, se pravi oblike  $2 \times 5$ . Zadnjemu nizu priredimo niz števil od 1 do 10. Kjer je število 1, bomo dodali oznako G, kjer pa je  $-1$ , pa D, hkrati pa pozitivne

pobarvamo z modro barvo, negativne pa z rdečo barvo (zaradi lažje predstave). Tako dobimo:

$1_G, 2_G, 3_D, 4_G, 5_G, 6_D, 7_G, 8_D, 9_D, 10_D$

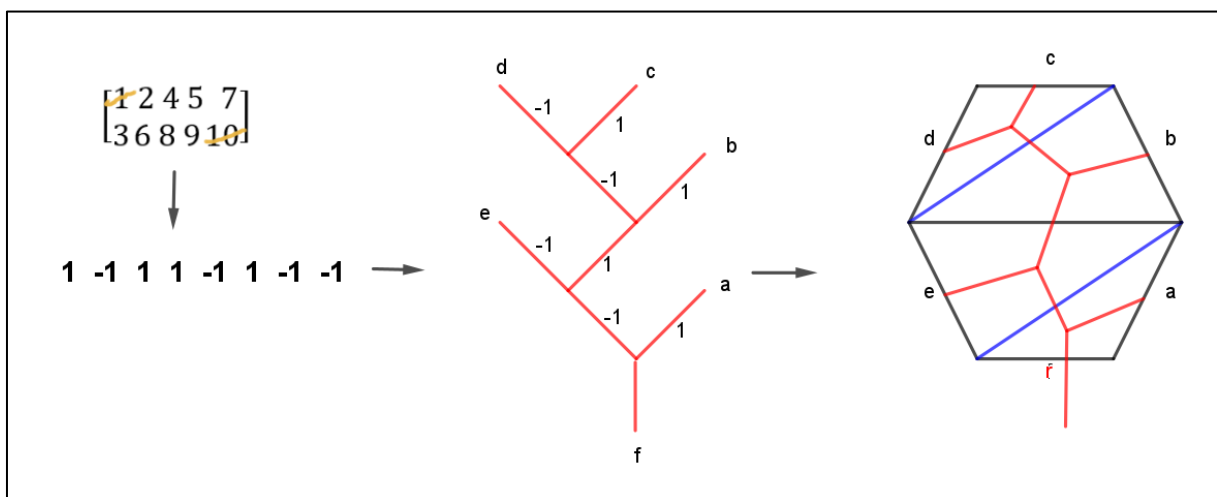
Temu nizu zlahka določimo sestavljanke: gremo po vrsti, vse modre zapišemo v zgornjo vrstico, vse rdeče pa v spodnjo vrstico:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

konec dokaza

S tem dokazom smo tudi pokazali prehod med obravnavanimi različnimi predstavitvami Catalanovih števil. Pokažimo s primerom, kako iz sestavljanke, ki smo jo obravnavali prej:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ , dobimo ustrezno triangulacijo konveksnega  $n$ -kotnika. Sestavljanke priredimo niz  $1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1$ . Ker je členov 8 ( $n = 4$ ), bo imelo ustrezno polno vsajeno binarno drevo  $2 \cdot 4 + 2 = 10$  vozlišč,  $n$ -kotnik pa bo ( $n + 2 = 6$ ) šestkotnik (glej Sliko 22).



Slika 22: Prehod od sestavljanke do triangulacije

Iz zadnjega dela dokaza trditve 6 pa lahko razberemo tudi način, kako lahko brez računalnika sestavljamo trak. Pokažimo s primerom. Recimo, da želimo sestaviti dvojni trak velikosti  $2 \times 6$ . Vemo, da bo v nizu 12 števil. Ker v sestavljanke črtamo prvo in zadnje število, bomo sestavljali nize z delnimi nenegativnimi vsotami iz 10 členov (pet s

številom 1 in pet s številom -1) ter na začetku dodali 1 in na koncu -1. Vemo, da je vseh takih možnosti  $C_5 = 42$ . Vemo, kako bi zapisali vse (lahko bi si pomagali tudi z Dyckovimi potmi). Vzemimo enega izmed njih, na primer: 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1.

Na začetku dodamo 1, na koncu pa -1: 1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1. Nato zapišemo niz števil od 1 do 12. Števila, ki so po vrsti v danem nizu pozitivna, pobarvamo modro, negativna pa rdeče:

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.**

Zdaj pa samo še zapišemo sestavljanke: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Lahko preverimo in ugotovimo, da so res vsi osnovni delčki enaki  $T$ .

Pri osnovnih delčkih  $B, G$  in  $Y$ , kjer smo tudi dobili prve štiri člene 1, 2, 5, 14, lahko na podoben način, kot je opisan v trditvi 6, dokažemo, da gre za zaporedje Catalanovih števil: upoštevamo le drugo smer, zamenjata pa se tudi vlogi prve in druge vrstice v sestavljanke.

### 3.5. Načrt za izdelavo praktične sestavljanke

Znanje, ki smo si ga pridobili s teoretičnim raziskovanjem, bomo uporabili za to, da sestavimo igro »matematična sestavljanke«. Imamo dve možnosti:

- pripravimo vse možne označene kvadratke, s katerimi lahko sestavljamo trak, ali pa
- pripravimo vse možne označene kvadratke, ki so enaki izbranemu označenemu kvadratu.

Če je število oglišč traku enako  $m$ , potem je število vseh označenih kvadratkov (puzzlov) enako  $m(m-1)(m-2)(m-3)$ . Število vseh označenih kvadratkov, ki so enaki izbranemu delčku, pa je težje izračunati, še težje določiti vse. Zato smo napisali program v Pythonu, ki izpiše in prešteje vse označene kvadratke, ki so enaki izbranemu osnovnemu delčku. Na Sliki 23 je program za izpis vseh označenih kvadratkov, ki so enaki osnovnemu delčku  $T$ .

Spremenljivka  $t$  označuje velikost traka in je vedno za 1 večja od števila oglišč. Tako na primer pri traku  $2 \times 3$  poženemo program z ukazom `OznaceniKvadratkiT(7)`. Zadnji `if` stavek testira pogoj pri izbranem osnovnem delčku, v našem primeru pogoj za osnovni delček  $T$ . Spremenljivka  $w$  šteje, koliko je vseh označenih kvadratkov, enakih osnovnemu delčku  $T$ . Za drug osnovni delček spremenimo samo ta pogoj. Pri delčkih  $B, G, T$  in  $Y$  smo dobili enaka števila možnosti. Za nekaj prvih dolžin trakov so rezultati prikazani v Tabeli 4.

```
def OznaceniKvadratkiT(t):
    w = 0
    for a in range (1,t):
        for b in range (1,t):
            if (b is not a):
                for c in range (1,t):
                    if (c is not a) and (c is not b):
                        for d in range (1,t):
                            if (d is not a) and (d is not b) and (d is not c):
                                if ((c<d)and (d<a) and (a<b)):
                                    w = w+1
                                    print(c,d)
                                    print(a,b)
                                    print("...Št:",w)
```

Slika 23: Program, ki prešteje in izpiše vse označene kvadratke, enake  $T$

Dolžina traku	Število vseh označenih kvadratkov	Število označenih kvadratkov, enakih $T$ (ter $B, G$ in $Y$ )
2x2	24	1
2x3	360	<b>15</b>
2x4	1680	<b>70</b>
2x5	5040	210
2x6	11880	495
2x7	24024	1001
2x8	43680	1820
2x9	73440	3060
2x10	116280	4845

Tabela 4: Število vseh označenih kvadratkov in število tistih, ki so enaki  $T$

Število vseh možnih označenih kvadratkov pri trakovih z dvema ( $2 \times 3$ ) in s tremi ( $2 \times 4$ ) kvadratkami je zelo veliko. Zdi se nam, da je problem pretežak. Zato smo sestavili praktične sestavljanke s trakom z dvema kvadratkoma ( $2 \times 3$ ) in s trakom s tremi kvadratkami ( $2 \times 4$ ). Za trak z dvema kvadratkoma ( $2 \times 3$ ) nam je program izpisal 15 označenih kvadratkov, ki so enaki osnovnemu delčku  $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Kvadratke s temi oznakami natisnemo, razrežemo in matematična sestavljanke je tu. Opreмимо jo še z navodili za sestavljanje:

Poiščite vse možne sestavljanke po dva kvadrata drug poleg drugega tako,

- da se oznake ujemajo,
- da kvadratke vedno postavite tako, da so številke pokončne,
- da kvadratkov ne zasukate ali zrcalite,
- da so v sestavljanke zastopana vsa števila od 1 do 6.

Pri traku s tremi kvadratkami ( $2 \times 4$ ) smo dobili 70 označenih kvadratkov, ki so enaki osnovnemu delčku  $T$  (Priloga 1). Pri daljših trakovih je število enakih označenih kvadratkov po našem mnenju preveliko, da bi bilo praktično sestavljanje smiselno.

## 4. Zaključek

V članku (Han, 2011) je predstavljen problem zlaganja sestavljanek iz matematičnih delčkov kot zelo težak problem. Avtor se je za to omejil na sestavljanje traku. Za nekatere osnovne delčke so predstavljeni rezultati – to je zaporedja možnosti pri različnih dolžinah traku  $2 \times n, n > 1$ . V nalogi smo raziskali, katera zaporedja dobimo pri vsakem posameznem osnovnem delčku. Za zaporedje Catalanovih števil v članku ni dokaza. V nalogi smo dokazali, da pri delčkih  $B, G, Y$  in  $T$  dobimo zaporedje Catalanovih

števil. Odkrili smo tudi preprost način, kako »peš« poiščemo sestavljanke pri osnovnem delčku  $T$ .

Za nadaljevanje raziskovanja predlagamo:

1. Trak bi lahko sestavljali tako, da bi šteli vse možnosti, če vzamemo po dva različna osnovna delčka (ali po tri različne osnovne delčke).
2. Lahko bi vzeli dvojni (ali trojni) trak in raziskovali zaporedja, ki jih dobimo pri enem osnovnem delčku, morda tudi pri dveh ali treh različnih osnovnih delčkih.

## 5. Viri in literatura

[1] Fu, S., Lu, J., Ding, Y.: A skeleton model to enumerate standard puzzle sequences, Aims, 2021. [online] [citirano 19. 11. 2024] Dostopno na spletnem naslovu: <https://aimspress.com/article/id/61c44e52ba35de32ad6e8401>

[2] Han, G.N.: Enumeration of Standard Puzzles, Université de Strasbourg, 2011. [online] [citirano 7. 9. 2024] Dostopno na spletnem naslovu: <https://arxiv.org/pdf/2006.14070>

[3] Lokar M., Valič T.: Kombinatorična igra Catalanovih števil, Raziskovalna naloga, ŠGV, 2017. [online] [citirano 7. 9. 2024] Dostopno na spletnem naslovu: <https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2018/06/Kombinatori%C4%8Dna-igra-Catalanovih-%C5%A1tevil.pdf>

[4] Stanley, R. P.: Catalan Numbers, Cambridge University Press, New York, 2015.

## 6. Priloge

*Priloga 1: Izpis označenih kvadratkov, ki so enaki osnovnemu delčku T*

1 2	2 3	1 2	2 4	3 4	1 2
3 4	4 5	4 8	5 6	5 7	6 7
...Št: 1	...Št: 8	...Št: 15	...Št: 22	...Št: 29	...Št: 36
1 2	1 2	1 3	3 4	1 2	1 3
3 5	4 6	4 8	5 6	5 8	6 7
...Št: 2	...Št: 9	...Št: 16	...Št: 23	...Št: 30	...Št: 37
1 2	1 3	2 3	1 2	1 3	1 4
3 6	4 6	4 8	5 7	5 8	6 7
...Št: 3	...Št: 10	...Št: 17	...Št: 24	...Št: 31	...Št: 38
1 2	2 3	1 2	1 3	1 4	1 5
3 7	4 6	5 6	5 7	5 8	6 7
...Št: 4	...Št: 11	...Št: 18	...Št: 25	...Št: 32	...Št: 39
1 2	1 2	1 3	1 4	2 3	2 3
3 8	4 7	5 6	5 7	5 8	6 7
...Št: 5	...Št: 12	...Št: 19	...Št: 26	...Št: 33	...Št: 40
1 2	1 3	1 4	2 3	2 4	2 4
4 5	4 7	5 6	5 7	5 8	6 7
...Št: 6	...Št: 13	...Št: 20	...Št: 27	...Št: 34	...Št: 41
1 3	2 3	2 3	2 4	3 4	2 5
4 5	4 7	5 6	5 7	5 8	6 7
...Št: 7	...Št: 14	...Št: 21	...Št: 28	...Št: 35	...Št: 42

	1 3	2 5	1 3	2 4	3 6
	6 8	6 8	7 8	7 8	7 8
	...Št: 47	...Št: 52	...Št: 57	...Št: 62	...Št: 67
3 4	1 4	3 4	1 4	2 5	4 5
6 7	6 8	6 8	7 8	7 8	7 8
...Št: 43	...Št: 48	...Št: 53	...Št: 58	...Št: 63	...Št: 68
3 5	1 5	3 5	1 5	2 6	4 6
6 7	6 8	6 8	7 8	7 8	7 8
...Št: 44	...Št: 49	...Št: 54	...Št: 59	...Št: 64	...Št: 69
4 5	2 3	4 5	1 6	3 4	5 6
6 7	6 8	6 8	7 8	7 8	7 8
...Št: 45	...Št: 50	...Št: 55	...Št: 60	...Št: 65	...Št: 70
1 2	2 4	1 2	2 3	3 5	
6 8	6 8	7 8	7 8	7 8	
...Št: 46	...Št: 51	...Št: 56	...Št: 61	...Št: 66	