OŠ RIHARDA JAKOPIČA

KONSTRUKCIJA ZNAMENITIH TOČK TRIKOTNIKA S PROGRAMOM GEOGEBRA

PODROČJE: MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

IMAN KERANOVIĆ

7. razred

MENTORICA: GLORIA VIDMAR

MAREC 2025

KAZALO VSEBIN

KAZALO SLIK

POVZETEK

V raziskovalni nalogi sem se posvetil raziskovanju trikotnikov in njihovim znamenitim točkam. Vseh znamenitih točk je kar 3587, v raziskovalni sem opisal in s programom GeoGebra konstruiral nekaj takih, ki jih bomo v sedmem razredu obravnavali pri pouku in nekaj takih, ki sem jih odkril pri raziskovanju. Predstavil bom še premico in krožnico, ki te točke povezujeta. Trikotniki so zanimivi že sami po sebi – so eni najboljših konstrukcijskih elementov v gradbeništvu. Delimo jih glede na dolžino stranic in glede na velikosti notranjih kotov.

1. UVOD

Za raziskovalno nalogo sem se odločil, ker imam rad matematiko in me zanimajo trikotniki oziroma geometrija nasploh. Že med počitnicami sem iz dolgčasa pregledoval učbenik in videl, da trikotniku lahko določimo višinsko točko, težišče, središča krožnic …

V raziskovalni nalogi bodo opisane vrste trikotnikov, nekatere znamenite točke trikotnika ter njihova zgodovina. Pri raziskovalni nalogi sem si pomagal z GeoGebro. To je aplikacija za geometrijo, risanje grafov, ugotavljanje verjetnosti, simbolno računanje in lahko služi kot 3D grafični kalkulator. V raziskovalni nalogi bo uporabljena kot pripomoček za risanje. Za vsako konstrukcijo sem uporabljal orodje "mnogokotniki" za risanje trikotnikov, druga pogosta orodja so bila risanje središča daljice, risanje pravokotnic, krožnic in podobni ukazi. Vse slike v raziskovalni nalogi sem narisal sam v GeoGebri.

Moja raziskovalna vprašanja so bila naslednja:

Ali s pomočjo GeoGebre hitreje poiščeš težišče kot prostoročno?

Ali s pomočjo GeoGebre hitreje poiščeš središče krožnice devetih točk kot prostoročno?

Ali s pomočjo GeoGebre hitreje poiščeš očrtano ali včrtano krožico?

Na podlagi vprašanj sem oblikoval naslednje hipoteze:

Hipoteza 1: S pomočjo GeoGebre narišem težišče hitreje kot prostoročno.

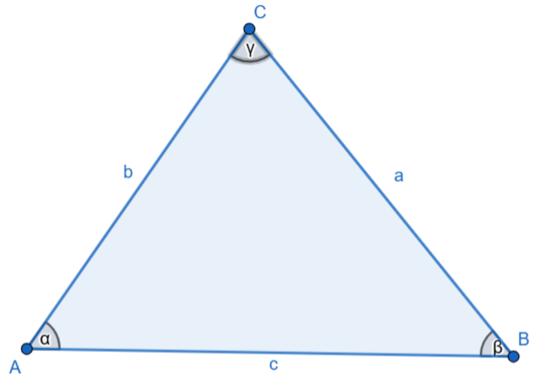
Hipoteza 2: S pomočjo GeoGebre hitreje narišemo krožnico 9 točk kot prostoročno.

Hipoteza 3: S pomočjo GeoGebre hitreje narišeš včrtano krožnico kot očrtano.

2. TEORETIČNI DEL

2.1. LASTNOSTNI TRIKOTNIKOV

Trikotnik je geometrijski lik, ki je določen s tremi točkami, ki jim rečemo oglišča. Ima tri stranice (to so daljice, ki povezujejo oglišča) in tri notranje kote. Oglišča označimo z velikimi tiskanimi črkami, stranice pa z malimi. Nasproti oglišča A leži stranica a. Notranje kote označujemo z grškimi črkami. Vsi notranji koti skupaj merijo 180°. Najdaljša stranica trikotnika leži nasproti njegovega največjega kota, nasproti najmanjšega kota pa leži najkrajša stranica. V vsakem trikotniku velja trikotniška neenakost. To pomeni, da je vsota dolžin dveh stranic v trikotniku večja od dolžine tretje stranice: $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$.



a, b, c — stranice trikotnika,

A, B, C — oglišča,

α, β, γ — notranji koti.

Slika 1: Trikotnik z označenimi stranicami, oglišči in notranjimi koti.

Trikotnik je eden najboljših konstrukcijskih elementov v gradbeništvu, tudi med arhitekti je zelo pogosto uporabljena oblika, saj ima močno bazo in zagotavlja veliko podporo. Nekaj najbolj znanih svetovnih arhitekturnih čudes, kot je Eiffelov stolp, Velike piramide v Gizi in piramida Louvre uporabljajo za podporo trikotnike za izdelavo čudovitih in vzdržljivih konstrukcij. Dva najpogosteje uporabljena trikotnika v arhitekturi sta trikotnik z notranjimi koti 30º-60º-90º (polovica enakostraničnega trikotnika) in trikotnik z notranjimi koti 45º-45º-90º (enakokraki pravokotni trikotnik).

2.2 VRSTE TRIKOTNIKOV

Obstajajo različne vrste trikotnikov. Delimo jih glede na dolžine stranic:

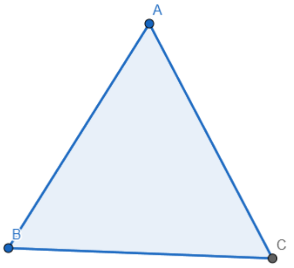
- enakostranični trikotnik, ki ima tri enako dolge stranice,
- enakokraki trikotnik z dvema enakima stranicama in
- raznostranični trikotnik, ki ima različno dolge stranice.

Trikotnike delimo tudi glede na velikost notranjih kotov:

- pravokotni trikotnik, ki ima en pravi kot,
- topokotni trikotnik, ki ima en topi kot in
- ostrokotni trikotnik, v katerem so vsi koti ostri.

2.2.1 ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK

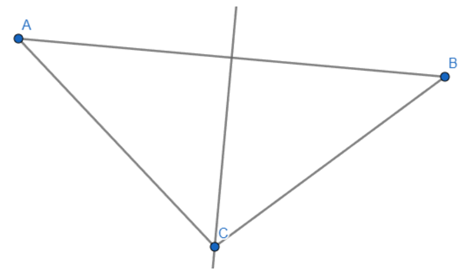
Enakostranični trikotnik je trikotnik, ki ima vse stranice enako dolge in vse notranje kote enako velike, vsak kot meri 60°. Enakostranični trikotnik je poseben tudi zaradi znamenitih točk – kar nekaj točk je na istem mestu, sovpadajo pa tudi njegove težiščnice in višine ter simetrale kotov in stranic.



Slika 2: Enakostranični trikotnik.

2.3.2. ENAKOKRAKI TRIKOTNIK

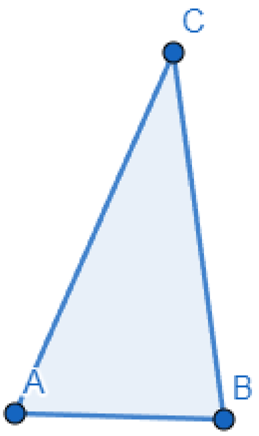
Enakokraki trikotnik je trikotnik, ki ima dve enako dolgi stranici. Kota nasproti teh dveh stranic sta skladna oz. enako velika. Enako dolgima stranicama rečemo kraka, tretji stranici pa osnovnica. Simetrala osnovnice je hkrati tudi simetrijska os trikotnika.



Slika 3: Enakokraki trikotnik in njegova os simetrije.

2.2.3 RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIK

Raznostranični trikotnik je trikotnik, ki ima tri različno velike kote in tri različno dolge stranice.



Slika 4: Raznostranični trikotnik.

2.2.4 PRAVOKOTNI TRIKOTNIK

Pravokotni trikotnik je trikotnik, v katerem je en notranji kot pravi. Stranica nasproti pravega kota je najdaljša stranica in se imenuje hipotenuza, drugi dve stranici se imenujeta kateti.

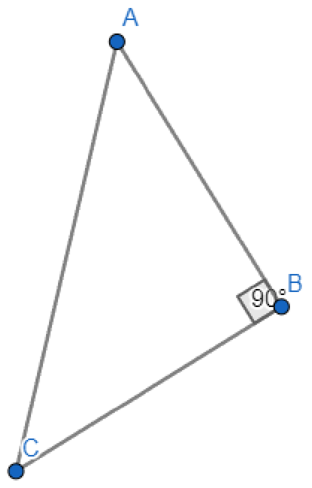
V pravokotnem trikotniku veljajo nekateri znani izreki:

→ **Pitagorov izrek:** $a^2 + b^2 = c^2$. Če poznamo dolžini dveh stranic, lahko izračunamo dolžino tretje.

→ **Talesov izrek** nam pove, da je trikotnik, katerega osnovnica je premer kroga, tretje oglišče pa leži na polkrogu, pravokoten.

→ **Evklidov izrek:** $a^2 = a_1\ c$, $b^2 = b_1\ c$. Kvadrat dolžine katete je enak produktu dolžine hipotenuze in dolžine pravokotne projekcije katete na hipotenuzo.

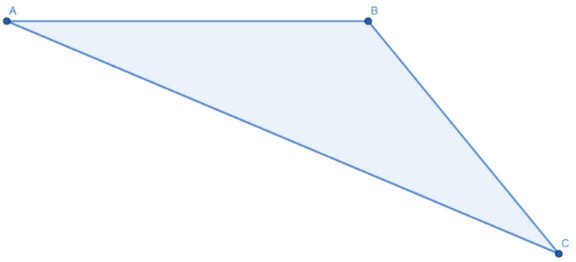
→ **Višinski izrek:** $v^2 = a_1\ b_1$. Kvadrat višine na hipotenuzo je enak produktu pravokotnih projekcij katet na hipotenuzo.



Slika 5: Pravokotni trikotnik.

2.2.5 TOPOKOTNI TRIKOTNIK

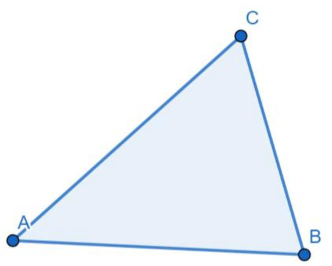
Topokotni trikotnik je trikotnik, ki ima en notranji kot večji od 90°. Nasproti topega kota leži najdaljša stranica.



Slika 6: Topokotni trikotnik.

2.2.6 OSTROKOTNI TRIKOTNIK

Ostrokotni trikotnik je trikotnik, ki ima vse notranje kote ostre (manjše od 90°).



Slika 7: Ostrokotni trikotnik.

2.3 ZGODOVINA ZNAMETNITIH TOČK

Z znamenitimi točkami trikotnika so se ukvarjali že Stari Grki. Konstruirali so štiri točke: incenter (središčni center), kroglični center (cirkumcenter), ortocenter (orto) in težišče (centroid). V 17. in 19. stoletju so odkrili in opisali peto in šesto: ekviorcenter in Nagelovo točko. Leta 1994 je izšel katalog 101 točk, štiri leta kasneje je število znamenitih točk zraslo na 400, leta 2002 je bilo katalogiranih 1114 znamenitih točk, osem let kasneje pa kar 3587 točk.

Vse točke so sedaj zbrane v Encyclopedia of Triangle Centers (ETC – Enciklopedija znamenitih točk trikotnika). Vsaka od točk je dobilo svoje enolično ime in oznako, ki jo sestavljata X in kot indeks zaporedna številka iz Enciklopedije.

Tabela 1: Klasične znamenite točke trikotnika.

(Povzeto po Wikipediji:https://sl.wikipedia.org/wiki/Znamenite_to%C4%8Dke_trikotnika)

mesto v ETC	ime	oznaka	trilinearni koordinatni sistem*
X_1	središče včrtane krožnice	I	$1 : 1 : 1$
X_2	težišče	G	$bc : ca : ab$
X_3	središče očrtane krožnice	O	$\cos A : \cos B : \cos C$
X_4	višinska točka	H	$\sec A : \sec B : \sec C$
X_5	središče krožnice devetih točk	N	$\cos(B - C) : \cos(C - A) : \cos(A - B)$
X_6	simedianska točka	K	$a : b : c$
X_7	Gergonnova točka	G_e	$bc/(b + c - a) : ca/(c + a - b) : ab/(a + b - c)$
X_8	Nagelova točka	N_a	$(b + c - a)/a : (c + a - b)/b: (a + b - c)/c$
X_9	mittenpunkt	M	$b + c - a : c + a - b : a + b - c$
X_{10}	Spiekerjeva točka	S_p	$bc(b + c) : ca(c + a) : ab(a + b)$
X_{11}	Feuerbachova točka	F	$1 - \cos(B - C) : 1 - \cos(C - A) : 1 - \cos(A - B)$
X_{13}	Fermatova točka	X	$\csc(A + \pi/3) : \csc(B + \pi/3) : \csc(C + \pi/3)$ *
X_{15} X_{16}	izodinamični točki	S S'	$\sin(A + \pi/3) : \sin(B + \pi/3) : \sin(C + \pi/3)$ $\sin(A - \pi/3) : \sin(B - \pi/3) : \sin(C - \pi/3)$
X_{17} X_{18}	Napoleonove točke	N N'	$\sec(A - \pi/3) : \sec(B - \pi/3) : \sec(C - \pi/3)$ $\sec(A + \pi/3) : \sec(B + \pi/3) : \sec(C + \pi/3)$
X_{99}	Steinerjeva točka	S	$bc/(b^2 - c^2) : ca/(c^2 - a^2) : ab/(a^2 - b^2)$

* Trilinearni koordinatni sistem opisuje lege točk glede na dani trikotnik.

Tabela 2: Nekatere novejše znamenite točke trikotnika.

mesto (oznaka) v ETC	**ime**	trilinearni koordinatni sistem*
X_{21}	$1/(\cos B + \cos C)$	
X_{22}	Exeterjeva točka	$a(b^4 + c^4 - a^4)$
X_{111}	Parryjeva točka	$a/(2a^2 - b^2 - c^2)$
X_{173}	$\tan(A/2) + \sec(A/2)$	
X_{174}	Yff središče kongruence	$\sec(A/2)$
X_{175}	izoperimetrična točka	$-1 + \sec(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)$
X_{179}	prva Ajima–Malfattijeva točka	$\sec^4(A/4)$
X_{181}	Apolonijeva točka	$a(b + c)^2/(b + c - a)$
X_{192}	točka enakih vzporednic	$bc(ca + ab - bc)$
X_{356}	Morleyjevo središče	$\cos(A/3) + 2\cos(B/3)\cos(C/3)$
X_{360}	Hofstadterjeva točka	A/a
X_{401}	Baileyjeva točka	$[\sin(2B)\sin(2C) - \sin^2(2A)] \csc A$

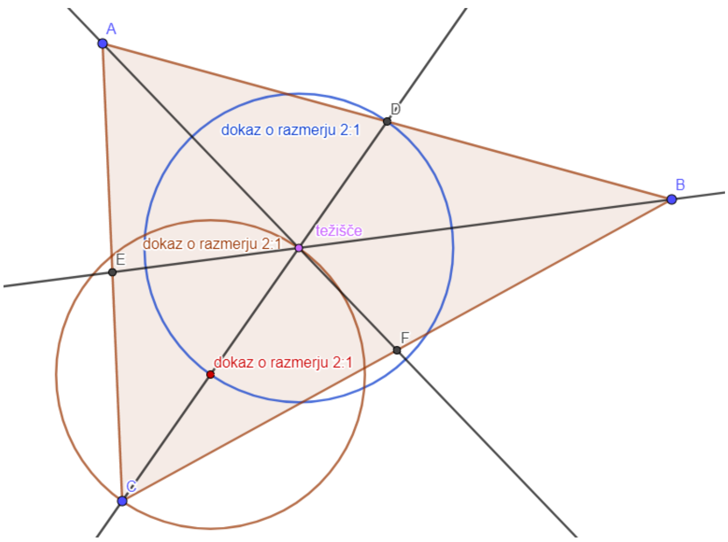
2.4 ZNAMENITE TOČKE TRIKOTNIKA

Znamenite točke trikotnika so torej posebne točke, ki imajo pomembno vlogo v geometriji trikotnika. Te točke pogosto predstavljajo določene lastnosti trikotnika in se uporabljajo pri reševanju problemov v analitični geometriji, projektivni geometriji in drugih področjih. Med porastom zanimanja za geometrijo trikotnika v letih 1980 so opazili, da imajo znamenite točke nekatere zanimive lastnosti, ki dandanes tvorijo osnovo definicije znamenitih točk trikotnika.

2.4.1 TEŽIŠČE

TEŽIŠČE TRIKOTNIKA je točka, kjer je presečišče vseh treh težiščnic trikotnika. Mednarodna oznaka je črka G, uporabljamo pa tudi črko T.

Težiščnica je daljica, ki povezuje razpolovišče stranice trikotnika z nasprotnim ogliščem trikotnika. Težišče deli vsako od težiščnic v razmerju 2:1.

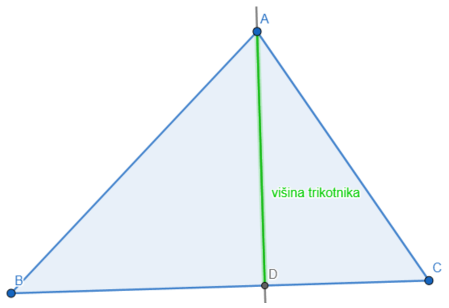


Slika 8: Težišče trikotnika.

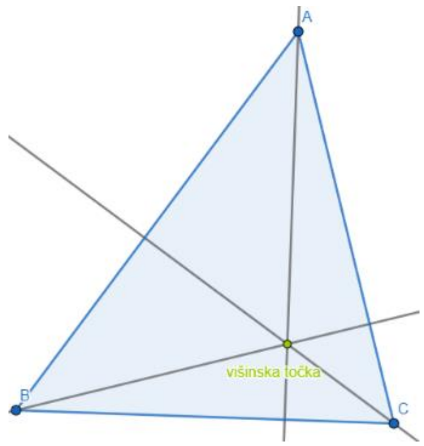
Obrazložitev zgornje slike: ko narišemo krožnico s središčem v težišču, ki poteka skozi razpolovišče ene od stranic (v zgornjem primeru do točke D), dobimo na težiščnici točko, kjer se sekata krožnica in težiščnica. Narišemo še krožnico s središčem v tej točki in polmerom do težišča. Vidimo, da težišče razdeli težiščnico v razmerju 2:1, saj je ena razdalja enaka premeru krožnice, druga pa polmeru. Da to drži, sem preveril geometrijsko z GeoGebro.

2.4.2 VIŠINA TRIKOTNIKA

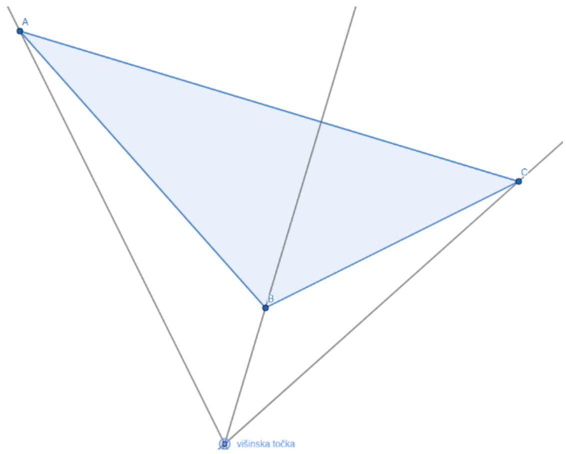
VIŠINA TRIKOTNIKA je daljica, ki povezuje oglišče trikotnika z nosilko nasprotne stranice in je nanjo pravokotna. Višinska točka je točka v kateri se sekajo vse tri višine oziroma njihove nosilke. V topokotnem trikotniku je višinska točka tam, kjer se sekajo nosilke višin – izven trikotnika. Višinsko točko po navadi označimo s črko V.



Slika 9: Višina trikotnika.



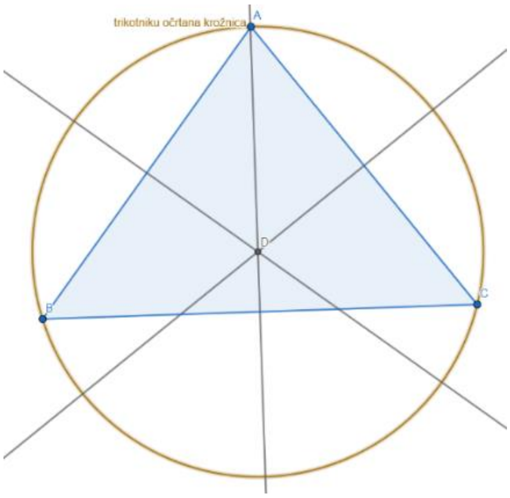
Slika 10: Višinska točka.



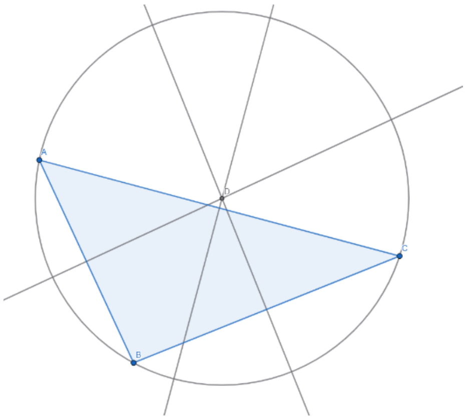
Slika 11: V topokotnem trikotniku je višinska točka izven trikotnika.

2.4.3 SREDIŠČE TRIKOTNIKU OČRTANE KROŽNICE

TRIKOTNIKU OČRTANA KROŽNICA je krožnica, ki poteka skozi vsa tri oglišča trikotnika. Množica točk, ki jo ta krožnica omejuje, se imenuje očrtani krog. Središče dobimo tako, da narišemo simetrale vseh stranic, njihovo presečišče je središče očrtane krožnice. S tem namreč dobimo točko, ki je od vseh treh oglišč enako oddaljena. V topokotnem trikotniku je središče očrtane krožnice izven trikotnika.



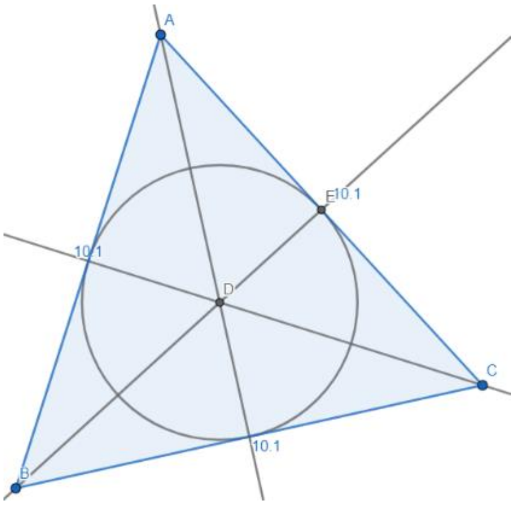
Slika 12: Trikotniku očrtana krožnica.



Slika 13: Središče očrtane krožnice v topokotnem trikotniku.

2.4.4 SREDIŠČE TRIKOTNIKU VČRTANE KROŽNICE

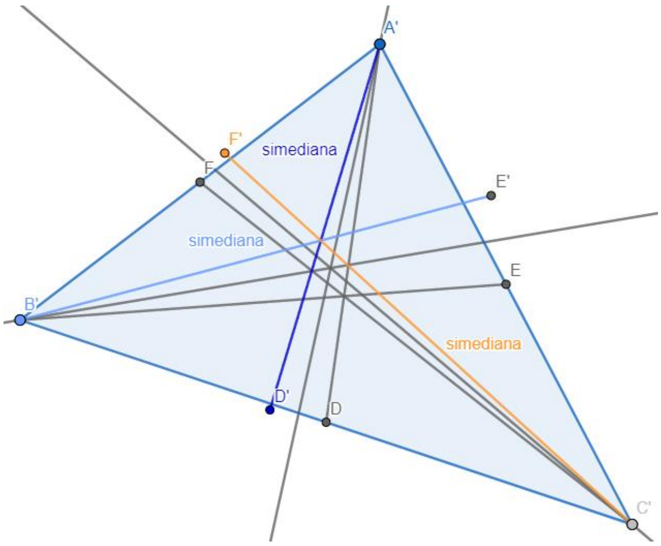
TRIKOTNIKU VČRTANA KROŽNICA je največja krožnica, ki jo lahko vrišemo v trikotnik. Krog, ki ga omejuje ta krožnica, se imenuje včrtani krog. Lok tega kroga se stranice dotika v njenem razpolovišču. Da dobimo središče, moramo konstruirati simetrale kotov in poiskati njihovo presečišče. Z risanjem simetrale kotov namreč dobimo točko, ki je od vseh stranic enako oddaljena.



Slika 14: Trikotniku včrtana krožnica.

2.4.5 SIMEDIANSKA TOČKA

Simediana je premica, ki jo dobimo tako, da težiščnico prezrcalimo preko simetrale pripadajočega kota. Vsak trikotnik ima tri simediane, sekajo pa se v točki, ki ji rečemo simedianska točka. Ima pa še dve drugi imeni: Lemoinova točka (po francoskem matematiku Émilu Lemoinu) ali Grebejeva točka (po nemškem učitelju matematike Ernstu Wilhelmu Grebeju).

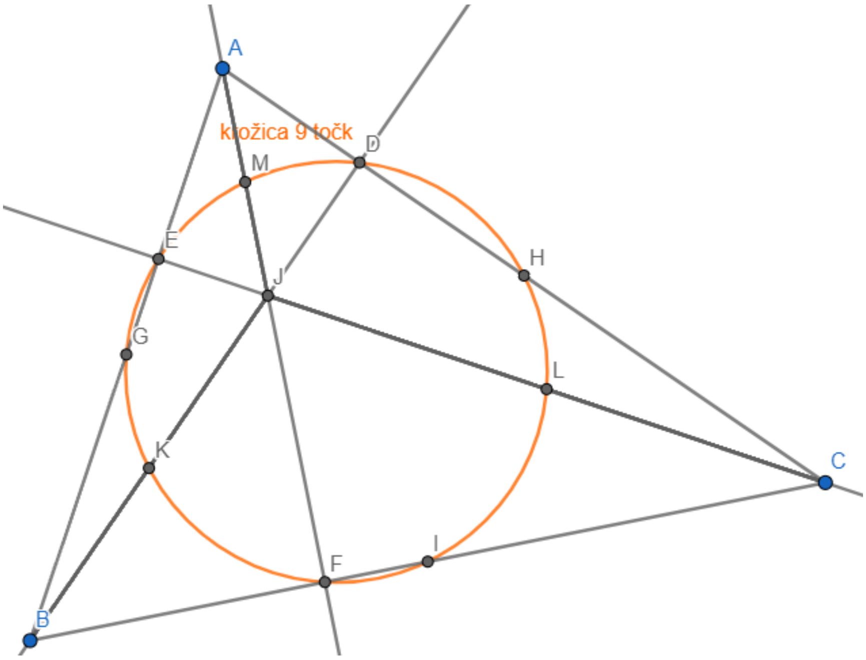


Slika 15: Simediane trikotnika.

2.4.6 KROŽNICA DEVETIH TOČK

KROŽNICA DEVETIH TOČK je krožnica, ki poteka skozi devet točk. Te točke so:

- razpolovišča stranic,
- nožišča višin (točke, kjer se sekajo višine trikotnika in stranice trikotnika),
- razpolovišča daljic (daljice, ki imajo za eno krajišče oglišče in za drugo višinsko točko).



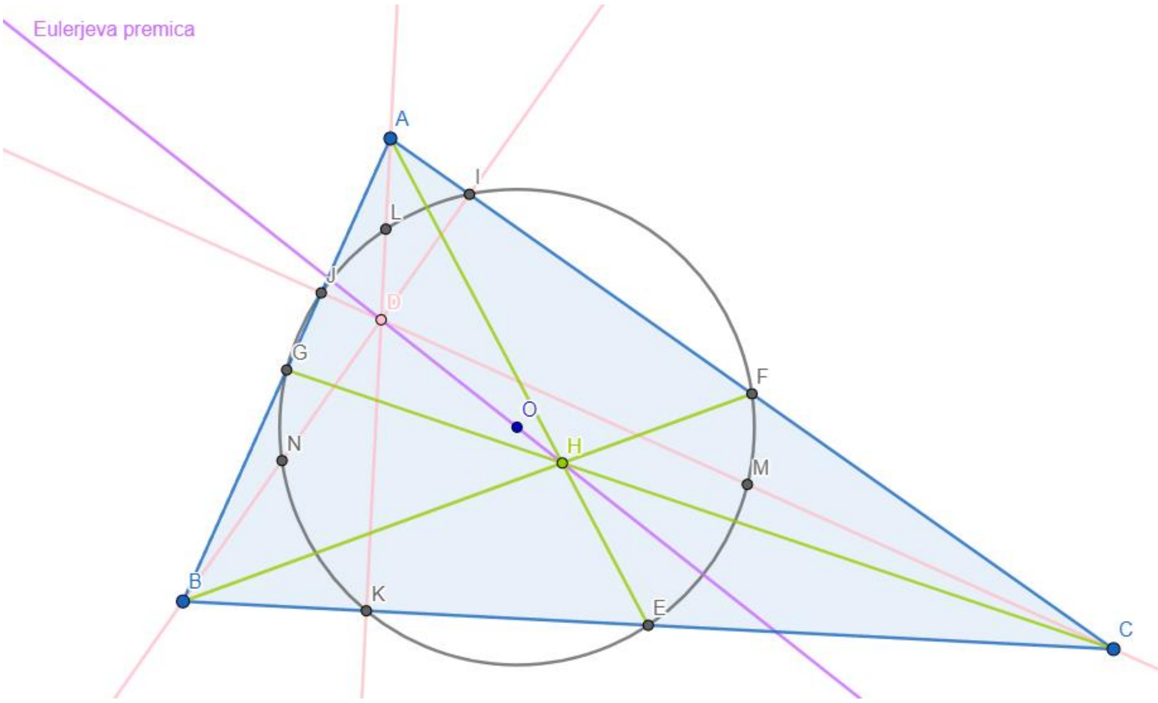
Slika 16: Krožnica devetih točk.

Na zgornjo sliki so točke G, H in I razpolovišča stranic, točke F, G in H so nožišča višin, točke M, K in L pa so razpolovišča daljic AJ, BJ in CJ. S črko J je označena višinska točka.

2.4.7 EULERJEVA PREMICA

EULERJEVA PREMICA se imenuje po švicarskemu matematiku Leonhardu Eulerju, ki je raziskoval številne znamenitosti trikotnika in drugih geometrijskih likov. Premica potuje skozi simediansko točko, težišče, središče krožnice devetih točk, kar je v bistvu višinska točka, središče očrtane krožice.

Druge pomembne točke trikotnika, ki ležijo na Eulerjevi premici, so: de Longchampsova točka, Schifflerjeva točka, Exetrova točka in druge. Središče včrtane krožnice leži na Eulerjevi premici le v enakokrakih trikotnikih.



Slika 17: Eulerjeva premica.

3. RAZISKOVALNI DEL

3.1 RAZISKOVALNA VPRAŠANJA IN HIPOTEZE

Pri raziskovanju me je zanimala primerjava časa pri risanju na roko in risanju z GeoGebro. Izbral sem si eno znamenito točko in krožnico devetih točk. Zanimalo me je še, središče katere krožnice narišem hitreje.

Moja raziskovalna vprašanja so bila naslednja.

Ali s pomočjo GeoGebre hitreje poiščeš težišče kot prostoročno?

Ali s pomočjo GeoGebre hitreje poiščeš središče krožnice devetih točk kot prostoročno?

Ali s pomočjo GeoGebre hitreje poiščeš očrtano ali včrtano krožico?

Na podlagi vprašanj sem oblikoval naslednje hipoteze.

Hipoteza 1: S pomočjo GeoGebre narišem težišče hitreje kot prostoročno.

Hipoteza 2: S pomočjo GeoGebre hitreje narišemo krožnico 9 točk kot prostoročno.

Hipoteza 3: S pomočjo GeoGebre hitreje narišeš včrtano krožnico kot očrtano.

3.2 RAZISKAVA

Hipoteza 1:

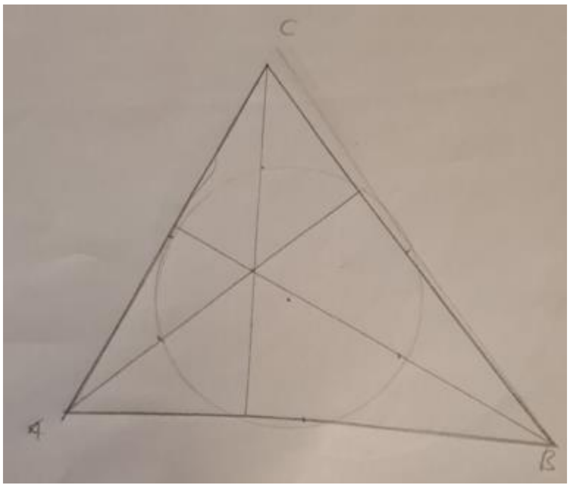
S pomočjo GeoGebre narišem težišče hitreje kot prostoročno.

Za dokaz te hipoteze sem moral v GeoGebri in prostoročno narisati težišče ter si meriti čas. Za risanje težišča z GeoGebro sem potreboval 19 sekund, prostoročno pa 47 sekund. Ugotovil sem, da težišče hitreje narišem z GeoGebro, saj so za večino elementov, ki sem jih moral narisati, v GeoGebri že pripravljeni ukazi.

Hipoteza 2:

S pomočjo GeoGebre hitreje narišemo krožnico 9 točk kot prostoročno.

Za dokaz te hipoteze sem moral v GeoGebri in prostoročno narisati krožnico devetih točk ter si meriti čas. Za risanje krožnice devetih točk z GeoGebro sem potreboval 2 minuti 22 sekund, prostoročno pa 3 minute 27 sekund. Ugotovil sem, da je hitreje narisati krožnico devetih točk z GeoGebro, saj so mi bila v veliko pomoč že pripravljena orodja. Pri risanju na roko sem bil tudi manj natančen.



Slika 18: Krožnica devetih točk, narisana na roko.

Hipoteza 3:

S pomočjo GeoGebre hitreje narišeš včrtano krožnico kot očrtano.

Za dokaz te hipoteze sem moral z GeoGebro narisati očrtano in včrtano krožnico ter si meriti čas. Za risanje očrtane krožnice sem potreboval 1 minuto 26 sekund, za risanje včrtane pa 1 minuto 45 sekund. Ugotovil sem, da hitreje narišem očrtano krožnico, ker mi je bilo nekoliko lažje narisati simetrale daljic kot simetrale kotov.

3.3 POTRJEVANJE HIPOTEZ

Hipoteza 1:

S pomočjo GeoGebre narišem težišče hitreje kot prostoročno.

POTRJENO

Hipoteza 2:

S pomočjo GeoGebre hitreje narišemo krožnico 9 točk kot prostoročno.

POTRJENO

Hipoteza 3:

S pomočjo GeoGebre hitreje narišeš včrtano krožnico kot očrtano.

OVRŽENO

4. ZAKLJUČEK

Med raziskovalno nalogo se nisem samo zabaval, ampak tudi učil. Naučil sem se veliko novega o trikotniku in njegovih znamenitih točkah. Spoznal sem, kako narisati krožnico devetih točk, simediano in Eulerjevo premico, najprej pa sem moral dobro spoznati program GeoGebra. Ugotovil sem, da je lažje risati z GeoGebro kot prostoročno, saj imam že vsa orodja v programu in je potrebno poznati samo lastnosti točk. Z uporabo računalniških orodij za risanje smo tudi bolj natančni, vendar je tudi risanje s svinčnikom, geotrikotnikom in šestilom pomembno, da se naučimo pravih postopkov, recimo pri simetralah kota ali stranice.

5. VIRI IN LITERATURA

Vorderman C. idr. (2014). Matematika po korakih do odličnega znanja. Mladinska knjiga založba.

Pavlič G. (1998). Slikovni pojmovnik matematika. Tehniška založba Slovenije.

Taborelli S. (2019). Matematika na dlani. Mladinska knjiga založba.

Željko L. idr. (2019). Matematika 7. Mladinska knjiga založba.

Spletni viri:

https://sl.wikipedia.org/wiki/Te%C5%BEi%C5%A1%C4%8De_trikotnika

https://sl.wikipedia.org/wiki/O%C4%8Drtana_kro%C5%BEnica

https://sl.wikipedia.org/wiki/Vi%C5%A1ina_trikotnika

http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2002/ura/anja/matematika.html

http://sciencemadefun.net/blog/triangles-the-strongest-shape/

https://sl.wikipedia.org/wiki/Znamenite_to%C4%8Dke_trikotnika

https://sl.wikipedia.org/wiki/Trilinearni_koordinatni_sistem

https://sl.wikipedia.org/wiki/Znamenite_to%C4%8Dke_trikotnika