

**Mladi raziskovalci Slovenije 2025**  
**59. srečanje**

**KOLIKO JE VSOT?**

Matematika ali logika  
Raziskovalna naloga

OŠ Bojana Iliča, Maribor

Avtorja: Vito Bilalović

Klara Ozmec

Mentor: Jožef Senekovič

Maribor 2025

## KAZALO

<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2. VSOTE NARAVNIH ŠTEVIL .....</b>	<b>3</b>
<b>3. NA KOLIKO NAČINOV LAHKO ZAPIŠEMO ŠTEVILO? .....</b>	<b>9</b>
<b>3.1 ZAKAJ NI ŠTEVILA S ŠTIRIMI VSOTAMI?.....</b>	<b>10</b>
<b>4. VSOTE ENAKIH NARAVNIH ŠTEVIL.....</b>	<b>11</b>
<b>5. PRODUKTI NARAVNIH ŠTEVIL .....</b>	<b>12</b>
<b>6. ZAKLJUČEK .....</b>	<b>15</b>
<b>7. DRUŽBENA ODGOVORNOST .....</b>	<b>16</b>
<b>8. VIRI .....</b>	<b>16</b>

---

## **POVZETEK**

Zamislimo si naravno število. Lahko ga zapišemo s produktom dveh ali več naravnih števil, lahko ga zapišemo tudi z vsoto dveh ali več naravnih števil. Možnosti vsot je seveda veliko. V raziskovalni nalogi nas je zanimalo s koliko različnimi vsotami zaporednih naravnih števil lahko zapišemo poljubno naravno število. Ugotavljali smo ali je zapis odvisen od lastnosti naravnega števila (praštevilo, sestavljeno število). Števila smo razvrstili glede na število možnih zapisov vsot in tudi produktov in tako ugotovili, kako napovemo s koliko vsotami zaporednih naravnih števil lahko število zapišemo.

Ključne besede: naravna števila, vsota zaporednih naravnih števil, praštevila, razcep na prafaktorje

---

# 1. UVOD

Poznamo naravna števila. Naravno število je katerokoli število iz neskončne množice pozitivnih celih števil  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ . Z naravnimi števili štejemo ali pa razvrščamo. Označujemo jih z oznako  $\mathbb{N}$ .

Naravna števila so samo števila, ki so zapisana s celim delom. Najmanjše naravno število je po dogovoru število 1. Lahko bi se dogovorili tudi drugače in kot najmanjše naravno število določili 0. Tako se odločijo ponekod v tujini, vendar je pri nas (in še marsikje) sprejet dogovor o številu 1 kot najmanjšem naravnem številu.

Vsako naravno število ima naslednika (torej je množica naravnih števil neskončno velika), vsa (razen 1), pa imajo tudi predhodnika. Med naravnimi števili razlikujemo soda oziroma parna, liha oziroma neparna, sestavljena števila ter enostavna ali praštevila.

Naravna števila lahko zapišemo tudi z razcepom na prafaktorje. Prafaktorji so naravna števila, ki so praštevila. Vsako naravno število lahko zapišemo s produktom praštevil na en sam način. Primer razcepa za število  $12 = 2^2 \cdot 3$ . V razcepu ni števila 1, ker število 1 ni praštevilo.

Ena izmed zanimivih lastnosti je tudi, da lahko recimo naravno število zapišemo z vsoto dveh ali več naravnih števil ali tudi s produktom dveh ali več naravnih števil.

Primer zapisa števila 12 in števila 11 z vsoto:

$$12 = 5 + 7, 11 = 5 + 6.$$

Vidimo, da števila 12 ne moremo zapisati z vsoto dveh zaporednih števil, število 11 pa lahko zapišemo z vsoto dveh zaporednih števil.

V raziskovalni nalogi bomo naravna števila razdelili glede na to, ali jih lahko zapišemo z vsoto zaporednih naravnih števil in raziskovali, na koliko načinov lahko to naredimo.

Vsako naravno število ima tudi delitelje. Za vsak delitelj števila  $n$ , če je  $d$  delitelj števila  $n$ , je količnik  $n : d$  naravno število. Na primer, za število 12 so delitelji števila 1, 2, 3, 4, 6 in 12.

Količniki so:

$$12 : 1 = 12$$

$$12 : 2 = 6$$

$$12 : 3 = 4$$

$$12 : 4 = 3$$

$$12 : 6 = 2$$

$$12 : 12 = 1$$

Pri iskanju števila deliteljev nam lahko pomaga razcep števila na prafaktorje (Vir (1)). Tako ima recimo število 12 šest deliteljev, kot smo jih že zapisali. Lahko pa število deliteljev ugotovimo iz razcepa  $12 = 2^2 \cdot 3$ , za potenco  $2^2$  lahko izvemo da ima 3 delitelje, praštevilo 3 pa ima dva delitelja, skupaj pa  $3 \cdot 2 = 6$  deliteljev.

Na splošno ima potenca  $p^n$  vedno  $n + 1$  deliteljev, kjer je  $p$  praštevilo.

## 2. VSOTE NARAVNIH ŠTEVIL

V nadaljevanju zapišimo števila od 1 do 50 z vsotami zaporednih naravnih števil. Pri tem bomo z zeleno barvo označili števila, ki jih zapišemo z vsoto na dva načina, z rdečo bomo označili števila, ki jih zapišemo s tremi različnimi vsotami.

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$3 + 4 = 7$$

$$4 + 5 = 9, 2 + 3 + 4 = 9$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$5 + 6 = 11$$

$$3 + 4 + 5 = 12$$

$$6 + 7 = 13$$

$$2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$7 + 8 = 15, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, 4 + 5 + 6 = 15$$

$$8 + 9 = 17$$

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18, 5 + 6 + 7 = 18$$

$$9 + 10 = 19$$

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$$

$$10 + 11 = 21, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, 6 + 7 + 8 = 21$$

$$4 + 5 + 6 + 7 = 22$$

$$11 + 12 = 23$$

$$7 + 8 + 9 = 24$$

$$12 + 13 = 25, 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$$

$$5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

$$13 + 14 = 27, 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27, 8 + 9 + 10 = 27$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

$$14 + 15 = 29$$

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30, 9 + 10 + 11 = 30, 6 + 7 + 8 + 9 = 30$$

$$15 + 16 = 31$$

$$16 + 17 = 33, 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33, 10 + 11 + 12 = 33$$

$$7 + 8 + 9 + 10 = 34$$

$$17 + 18 = 35, 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35, 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36, 11 + 12 + 13 = 36$$

$$18 + 19 = 37$$

$$8 + 9 + 10 + 11 = 38$$

$$19 + 20 = 39, 12 + 13 + 14 = 39$$

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$$

$$20 + 21 = 41$$

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 42, 13 + 14 + 15 = 42, 9 + 10 + 11 + 12 = 42$$

$$21 + 22 = 43$$

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44$$

$$22 + 23 = 45, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, 14 + 15 + 16 = 45, 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 45, 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$$

$$10 + 11 + 12 + 13 = 46$$

$$23 + 24 = 47$$

$$15 + 16 + 17 = 48$$

$$24 + 25 = 49, 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 49$$

$$8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 50, 11 + 12 + 13 + 14 = 50$$

Z vijolično barvo smo označili število 45, ki je prvo naravno število, ki ga zapišemo z vsoto zaporednih naravnih števil na 5 različnih načinov.

Ugotovimo, da števil 2, 4, 8, 16, 32 ni mogoče zapisati z vsoto zaporednih naravnih števil. Ta števila zapišemo s potenco z osnovo 2. Tako je  $2 = 2^1$ ,  $4 = 2^2$ ,  $8 = 2^3$ ,  $16 = 2^4$ . Ker lahko zapišemo potence z osnovo 2 tudi z višjimi stopnjami, ugotovimo, da tudi števila  $2^5 = 32$ ,  $2^6 = 64 \dots$  ne moremo zapisati z vsoto zaporednih naravnih števil.

Ugotovimo, da z dvema vsotama lahko zapišemo števila 9, 18, 25, 36, 39, 49, 50.

S tremi vsotami lahko zapišemo števila 15, 21, 27, 30, 33, 35, 42.

S petimi vsotami lahko zapišemo samo število 45.

Soda števila ne moremo zapisati z vsoto dveh zaporednih naravnih števil, saj sta dve zaporedni naravni števili vedno sodo in liho. Vsota sodega in lihega naravnega števila pa je vedno liho število.

Števila vnesemo v preglednico vsot (Preglednica 1).

Ena vsota	Dve vsoti	Tri vsote	Štiri vsote	Pet vsot	Ne gre zapisati z vsoto
1, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 29, 31, 34, 37, 38, 40, 41, 43, 44, 46, 47, 48	9, 18, 25, 36, 49, 50	15, 21, 27, 30, 33, 35, 42	Ni nobene	45	2, 4, 8, 16, 32

Preglednica 1: preglednica vsot

## ŠTEVILA, ZAPISANA Z ENO VSOTO

Števila, ki so zapisana z eno vsoto so vsa praštevila, razen števila 2. Praštevila imajo natanko dva delitelja. Drugih lihih takih števil ni. Je pa nekaj sodih števil, zapisanih z natanko eno vsoto. Zapišimo vsa soda števila, zapisana z eno vsoto z razcepom na prafaktorje (Preglednica 2).

Število	Razcep na prafaktorje	Število deliteljev
6	$2 \cdot 3$	4
10	$2 \cdot 5$	4
12	$2^2 \cdot 3$	6
14	$2 \cdot 7$	4
20	$2^2 \cdot 5$	6
22	$2 \cdot 11$	4
24	$2^3 \cdot 3$	8
26	$2 \cdot 13$	4
28	$2^2 \cdot 7$	6
34	$2 \cdot 17$	4
38	$2 \cdot 19$	4
40	$2^3 \cdot 5$	8
44	$2^2 \cdot 11$	6
46	$2 \cdot 23$	4
48	$2^4 \cdot 3$	10

Preglednica 2: ena vsota, soda števila

Ugotovimo, da je vsak razcep sestavljen iz produkta enega praštevila s stopnjo ena in števila 2 oziroma njegove potence.

Ugotovimo tudi, da je število deliteljev odvisno od stopnje potence z osnovo 2. Če je stopnja ena, ima število štiri delitelje, če je stopnja dva, ima število šest deliteljev, če je stopnja tri, ima število osem deliteljev, če ima stopnjo štiri, je deliteljev deset. Sklepamo dalje, da bi v primeru recimo produkta  $2^5 \cdot 3$  to število imelo dvanajst deliteljev, z vsoto pa bi ga zapisali samo na en način. Ker je  $2^5 \cdot 3 = 96$ , delitelji števila 96 so 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, torej jih je res dvanajst. Vsota, s katero zapišemo število  $96 = 31 + 32 + 33$ .

## ŠTEVILA, ZAPISANA Z DVEMA VSOTAMA

Števila, ki so zapisana z dvema vsotama imajo tri delitelje (9, 25, 49) ali šest deliteljev (18, 50) ali 9 deliteljev (36). Zapišimo njihove razcepe na prafaktorje (Preglednica 3).

Število	Razcep na prafaktorje	Število deliteljev
9	$3^2$	3
18	$2 \cdot 3^2$	6
25	$5^2$	3
36	$2^2 \cdot 3^2$	9
49	$7^2$	3
50	$2 \cdot 5^2$	6

Preglednica 3: števila zapisana z dvema vsotama

Števila, ki jih razcepimo, so tako soda kot liha. Razcep teh števil je ali s potenco kjer je osnova liho praštevilo (npr.  $7^2$ ) ali pa je gre za produkt dveh potenc, kjer je ena potenca z osnovo dva in druga potenca z osnovo praštevilo različnim od dva in stopnjo 2. Ugotovimo tudi število deliteljev, ki je v primeru potence  $7^2$  tri, v primeru produkta s potenco z osnovo 2 pa šest. Primer števila npr.  $11^2=121$ , ki ima natanko tri delitelje, 1, 11 in 121. Število zapišemo z dvema vsotama,  $121 = 60 + 61$ ,  $121 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$ .

## ŠTEVILA, ZAPISANA S TREMI VSOTAMI

Števila, ki so zapisana s tremi vsotami, imajo štiri (15, 21, 27, 33, 35) delitelje ali osem deliteljev (30, 42). Zapišimo njihove razcepe in število deliteljev (Preglednica 4).

Število	Razcep na prafaktorje	Število deliteljev
15	$3 \cdot 5$	4
21	$3 \cdot 7$	4
27	$3^3$	4
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	8
33	$3 \cdot 11$	4
35	$5 \cdot 7$	4
42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	8

Preglednica 4: števila zapisana s tremi vsotami

Pri razcepu števil opazimo, da so to produkti dveh praštevil, od katerih nobeno ni število 2. Ali gre za produkt treh praštevil, od katerih je lahko en faktor tudi število 2. Števila, ki imajo v razcepu dve praštevili imajo štiri delitelje, števila, ki imajo v razcepu tri prafaktorje imajo osem deliteljev. Tretja možnost je potenca z osnovo praštevilom in stopnjo tri. Tako število ima prav tako štiri delitelje.

Primer števil.

Za število  $5^3 = 125$  ugotovimo da ima štiri delitelje: 1, 5, 25, 125. Zapišemo ga z vsotami  $125 = 23 + 24 + 25 + 26 + 27$ ,  $125 = 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17$ ;  $125 = 62 + 63$ .

Za število  $5 \cdot 11 = 55$  ugotovimo da ima delitelje 1, 5, 11, 55. Vsote so  $55 = 27 + 28$ ,  $55 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13$ ,  $55 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ .

Za število  $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$  ugotovimo da ima 8 deliteljev, to so 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66. Zapišemo ga s tremi vsotami. Vsote so  $66 = 21 + 22 + 23$ ,  $66 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$ ,  $66 = 15 + 16 + 17 + 18$ .

### ŠTEVILA ZAPISANA S PETIMI VSOTAMI

Število 45 ima 6 deliteljev (Preglednica 5).

Število	Razcep na prafaktorje	Število deliteljev
45	$5 \cdot 3^2$	6

Preglednica 5: števila zapisana s petimi vsotami

Število 45 je zapisano s produktom dveh potenc z osnovo praštevilom, stopnja ene potence je dva. Pri tem nobena osnova ni število 2. Število ima šest deliteljev.

Poglejmo primer za število  $75 = 3 \cdot 5^2$ . Delitelji števila 75 so 1, 3, 5, 15, 25, 75. Vsote za število 75 so  $75 = 24 + 25 + 26$ ,  $75 = 13 + 14 + 15 + 16 + 17$ ,  $75 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$ ,  $75 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$ ,  $75 = 37 + 38$ .

### 3. NA KOLIKO NAČINOV LAHKO ZAPIŠEMO ŠTEVILO?

Zapisati želimo naravno število z vsoto zaporednih naravnih števil. V prejšnjem poglavju smo zapisali možne vsote za prvih petdeset števil. Da ugotovimo, kako naravno število zapišemo z vsoto zaporednih naravnih števil, lahko uporabimo ugotovitve raziskovalne naloge »Vsota zaporednih naravnih števil« (Vir (1)).

Za poljubno naravno število  $y$  določimo vsoto zaporednih naravnih števil s pomočjo enačbe

$$n = \frac{y}{x} - \frac{x-1}{2}$$

Število  $x$  je delitelj poljubnega naravnega števila  $y$ . Število  $n$  je prvo naravno število v zaporedju. Število  $x$  je hkrati tudi število členov vsote.

Poglejmo primera:

Število  $y = 27$  je liho število. Delitelji števila 27 so 1, 3, 9, 27. Tako je  $x$  lahko eno od teh števil.

Uporabimo formulo

$$\text{Za } x = 1, n = \frac{27}{1} - \frac{1-1}{2} = 27, \text{ število } 27 = 27.$$

$$\text{Za } x = 3, n = \frac{27}{3} - \frac{3-1}{2} = 8, \text{ število } 27 = 8 + 9 + 10.$$

Za  $x = 9, n = \frac{27}{9} - \frac{9-1}{2} = 3 - 4 = -1$ , število  $27 = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ , vendar vsota ne vsebuje samo naravnih števil, ampak tudi negativna števila. Vsota nasprotnih števil 1 in  $-1$  je število 0, tako preostane vsota števil  $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ .

Za  $x = 27, n = \frac{27}{27} - \frac{27-1}{2} = -12$ , seštejemo sedemindvajset števil od števila  $-12$  do 14, vendar vsota ne vsebuje samo naravnih števil. Vsota parov nasprotnih števil od  $-12$  do 12 je za vsak par število 0. Zato ostaneta v vsoti člena  $13 + 14 = 27$ .

Tako število 27 zapišemo z vsoto naravnih števil na tri različne načine.

Število  $y = 28$  je sodo število. Delitelji števila 28 so 1, 2, 4, 7, 14, 28. Tako je  $x$  lahko eno izmed teh števil. Zaradi ulomka  $\frac{x-1}{2}$ , ki bo naravno (celo) število samo, ko bo števec sodo število (saj mora biti deljivo s številom 2), je smiselna rešitev samo število 7. Razlika lihega števila  $x$  in števila 1 je namreč sodo število, deljivo z 2.

$$\text{Za } x = 7, n = \frac{28}{7} - \frac{7-1}{2} = 4 - 3 = 1, \text{ število } 28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Poglejmo še primer za število 50, za katerega smo ugotovili, da ima dve različni vsoti naravnih števil. Razcep števila  $50 = 2 \cdot 5^2$ , liha delitelja sta 5 in 25.

Za  $x = 5$ ,  $n = \frac{50}{5} - \frac{5-1}{2} = 10 - 2 = 8$ , število  $50 = 8 + 9 + 10 + 11 + 12$ .

Za  $x = 25$ ,  $n = \frac{50}{25} - \frac{25-1}{2} = 2 - 12 = -10$ . Ker je vsota nasprotnih števil vedno 0, je vsota posameznih parov števil od -10 do 10 enaka 0, v tej vsoti je 21 števil (deset negativnih, število 0 in deset pozitivnih), tako ostanejo še štiri števila, vsota  $50 = 11 + 12 + 13 + 14$ .

Ugotovimo, da lahko vsako liho naravno število zapišemo z vsoto zaporednih naravnih števil, za soda števila pa lahko v primerih, ko je med delitelji števila tudi lihi delitelj.

### 3.1 ZAKAJ NI ŠTEVILA S ŠTIRIMI VSOTAMI?

V preglednici 1 (stran 5) smo opazili, da med petdesetimi naravnimi števili ni takega, ki bi ga lahko zapisali z vsoto zaporednih naravnih števil na štiri različne načine.

Ugotovili smo, da je število različnih načinov odvisno od števila lihih deliteljev naravnega števila. Za število 5, ki je liho in praštevilo vemo, da ima en lihi delitelj (vedno izvzamemo število 1), kar pomeni, da ga zapišemo na en način z vsoto zaporednih naravnih števil. Število 9 ima dva liha delitelja (3 in 9), zato ga lahko zapišemo z vsoto zaporednih naravnih števil na dva načina. Število 15 ima tri lihe delitelje, to je število samo in števili 3 in 5 (število 15 je produkt teh števil). Zato ga zapišemo z vsotami na tri različne načine. Vemo, da je produkt dveh lihih števil spet liho število.

Če želimo zapisati neko naravno število s štirimi različnimi vsotami, bi moralo število imeti štiri različne lihe delitelje. To bi moralo biti število samo in še trije lihi delitelji. Recimo, da ima neko naravno število tri lihe delitelje  $l_1, l_2, l_3$ . Pri tem so delitelji tudi produkti  $l_1 \cdot l_2, l_1 \cdot l_3, l_1 \cdot l_2, l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$ . Vsi ti delitelji so lihi. Tako ima izbrano število skupaj kar 7 lihih deliteljev. Ugotovimo, da ni naravnega števila s štirimi lihimi delitelji (če izvzamemo število 1).

## 4. VSOTE ENAKIH NARAVNIH ŠTEVIL

V nadaljevanju zapišimo možnosti, ko so členi vsote enaka števila. Seveda lahko vsako naravno število zapišemo z vsoto samih enic.

$$1 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 1 + 1 = 3$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4, 2 + 2 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6, 2 + 2 + 2 = 6, 3 + 3 = 6$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8, 2 + 2 + 2 + 2 = 8, 4 + 4 = 8$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9, 3 + 3 + 3 = 9$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10, 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10, 5 + 5 = 10$$

Tako lahko nadaljujemo. Ugotovimo, da je vsota enakih členov odvisna od števila deliteljev izbranega števila. Za število 10 vemo da ima 4 delitelje, to so števila 1, 2, 5 in 10. Ker je  $10 = 1 \cdot 10$ , lahko zapišemo število 10 z vsoto desetih enic ali ene desetke. Ker je  $10 = 2 \cdot 5$ , lahko zapišemo število 10 z vsoto petih dvojk ali dveh petic.

Enako velja za vsako naravno število, poznati moramo samo delitelje števila.

Primer za število 25.

Delitelji števila 25 so 1, 5 in 25. ker je  $25 = 1 \cdot 25$ , zapišemo 25 z vsoto petindvajsetih enic ali ene petindvajsetice. Ker je  $25 = 5 \cdot 5$ , zapišemo 25 z vsoto petih petk.

## 5. PRODUKTI NARAVNIH ŠTEVIL

V nadaljevanju zapišimo naravna števila z vsemi možnimi produkti. Vsako število lahko zapišemo kot produkt s številom 1.

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$1 \cdot 4 = 4, 2 \cdot 2 = 4$$

$$1 \cdot 5 = 5$$

$$1 \cdot 6 = 6, 2 \cdot 3 = 6$$

$$1 \cdot 7 = 7$$

$$1 \cdot 8 = 8, 2 \cdot 4 = 8, 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$1 \cdot 9 = 9, 3 \cdot 3 = 9$$

$$1 \cdot 10 = 10, 2 \cdot 5 = 10$$

$$1 \cdot 11 = 11$$

$$1 \cdot 12 = 12, 2 \cdot 6 = 12, 3 \cdot 4 = 12, 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$1 \cdot 13 = 13$$

$$1 \cdot 14 = 14, 2 \cdot 7 = 14$$

$$1 \cdot 15 = 15, 3 \cdot 5 = 15$$

$$1 \cdot 16 = 16, 2 \cdot 8 = 16, 4 \cdot 4 = 16, 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16, 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$1 \cdot 17 = 17$$

$$1 \cdot 18 = 18, 2 \cdot 9 = 18, 3 \cdot 6 = 18, 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$

$$1 \cdot 19 = 19$$

$$1 \cdot 20 = 20, 2 \cdot 10 = 20, 4 \cdot 5 = 20, 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

$$1 \cdot 21 = 21, 3 \cdot 7 = 21$$

$$1 \cdot 22 = 22, 2 \cdot 11 = 22$$

$$1 \cdot 23 = 23$$

$$1 \cdot 24 = 24, 2 \cdot 12 = 24, 4 \cdot 6 = 24, 3 \cdot 8 = 24, 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24, 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

$$1 \cdot 25 = 25, 5 \cdot 5 = 25$$

Ugotovimo, da lahko vsa praštevila zapišemo samo z eno vsoto in produktom (Preglednica 6).

Število	Število produktov	Število deliteljev	Število vsot
1	1	1	1
2	1	2	0
3	1	2	1
4	2	3	0
5	1	2	1
6	2	4	1
7	1	2	1
8	3	4	0
9	2	3	2
10	2	4	1
11	1	2	1
12	4	6	1
13	1	2	1
14	2	4	1
15	2	4	3
16	5	5	0
17	1	2	1
18	4	6	2
19	1	2	1
20	4	6	1
21	2	4	3
22	2	4	1
23	1	2	1
24	7	8	1
25	2	3	2

Preglednica 6: produkti, delitelji, vsote

Primerjamo podatke iz preglednice.

Za števila z dvema deliteljema ugotovimo, da vsako število zapišemo samo z enim produktom. Kar je razumljivo, saj so to praštevila. Število vsot se razlikuje, od 0 vsot (recimo število 2) in ena vsota. Ker ima praštevilo dva delitelja in je vsako praštevilo liho (razen števila 2), je zato samo ena možnost zapisa vsote (ker ima praštevilo delitelja 1 in samega sebe – kar je liho število).

Za števila s tremi delitelji ugotovimo, da ima vsako število dva produkta. To so recimo števila 9, 25, 49 ... .Ta števila imajo ali nič vsot (število 4) ali dve vsoti. Ker gre pri teh številih za

potence praštevil (npr.  $9 = 3^2$ ), ima število dva liha delitelja in ga zato lahko zapišemo z dvema različnima vsotama.

Za števila s štirimi delitelji ugotovimo, da ima vsako število dva produkta, izjema je število 8 ki ima tri produkte. Število 8 je kub števila 2. Nekatera števila (npr. 22, 14) imajo eno vsoto, druga (npr. 21, 15) imajo tri različne vsote. Število 8 ne moremo zapisati z vsoto zaporednih naravnih števil.

Za število s petimi delitelji (samo število 16) ugotovimo da ima število pet produktov. Število 16 ne moremo zapisati z vsoto zaporednih naravnih števil.

Število s petimi delitelji je tudi število  $81 = 3^4$ . Njegovi delitelji so: 1, 3, 9, 27, 81. Nadalje ima število 81 tri produkte, in sicer:  $1 \cdot 81$ ,  $3 \cdot 27$ ,  $9 \cdot 9$ . Število pa lahko zapišemo s štirimi različnimi vsotami:  $40 + 41$ ,  $26 + 27 + 28$ ,  $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$ ,  $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$ .

Za število s šestimi delitelji (npr. 12, 18, 20) ugotovimo, da ima vsako število štiri produkte. Zapišemo jih z različnim številom vsot, kar je odvisno od deliteljev števila.

Število z osmimi delitelji (24) zapišemo kar s sedmimi produkti in samo z eno vsoto, saj je med delitelji razen števila 1 lihi delitelj samo število 3.

## 6. ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi smo ugotavljali na koliko različnih načinov lahko z zaporednimi števili napišemo različna naravna števila in tudi, ali je zapis odvisen od lastnosti števila (praštevilo, sestavljeno število).

Ugotovitve raziskovalne naloge so:

- zapis števila z vsotami zaporednih naravnih števil je odvisen od tega, koliko ima to število deliteljev. V zvezi s tem smo uporabili enačba, s katero lahko izračunamo kako lahko zapišemo število z vsotami zaporednih naravnih števil. Ugotovimo prvi člen vsote in število členov.
- potenc števila 2 ne moremo zapisati z vsoto zaporednih naravnih števil, saj nimajo lihega delitelja, razen števila 1 (ki je delitelj vsakega števila).
- vsa praštevila (razen števila 2) lahko zapišemo z vsoto zaporednih naravnih števil samo na en način. Vsa liha praštevila imajo natanko en lihi delitelj. Vsa praštevila lahko zapišemo s produktom na en sam način.
- poljubno sestavljeno število lahko zapišemo z vsoto zaporednih naravnih števil na dva ali več načinov. To je odvisno od števila lihih deliteljev naravnega števila. Toliko kolikor je lihih deliteljev različnih od 1, na toliko različnih načinov lahko število zapišemo z vsoto zaporednih naravnih števil. Število deliteljev naravnega števila izračunamo s pomočjo razcepa na prafaktorje. Vsak faktor  $p^k$ , kjer je  $p$  praštevilo in  $k$  naravno število ima  $k + 1$  deliteljev.
- pri zapisu vsot zaporednih naravnih števil si pomagamo s formulo  $n = \frac{y}{x} - \frac{x-1}{2}$ , kjer je  $y$  izbrano naravno število,  $x$  je delitelj tega naravnega števila in  $n$  je prvo število v vsoti zaporednih naravnih števil.
- vsako število lahko seveda zapišemo z vsoto samih enic. Vsako število lahko zapišemo z vsoto samih enakih členov na toliko načinov, kot je različnih deliteljev števila (razen samega sebe).

## 7. DRUŽBENA ODGOVORNOST

Raziskovalna naloga je možnost za sodelovanje, izmenjavo idej in razpravljanja, kar pa vodi do skupnega učenja. Pri raziskovalni nalogi smo analizirali, primerjali, urejali podatke in sprejemali odločitve. Tako pridobivamo znanja in kompetence, ki nam bodo pomagale pri nadaljevanju šolanja. Pri tem pa je pomembno, da upoštevamo avtorske pravice, saj to zagotavlja da so prizadevanja in ideje drugih spoštovane. Raziskovalna naloga je na ta način prispevala k razvoju našega znanja, nas naučila sodelovanja in spodbudila inovativnost in kreativnost.

## 8. VIRI

- (1) Vsota zaporednih naravnih števil, raziskovalna naloga, Miha Smaka, Jakob Verlič, OŠ Bojana Iliča, 2013

[https://sl.wikipedia.org/wiki/Naravno\\_%C5%A1tevililo](https://sl.wikipedia.org/wiki/Naravno_%C5%A1tevililo), 3.11.2024

<https://eucbeniki.sio.si/vega1/7/index1.html>, 3.11.2024

<http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2002/dira/gros/splosno.html>, 3.11.2024