Mladi raziskovalci Slovenije 2025
59. srečanje

ENOTSKI ULOMKI

Matematika ali logika
Raziskovalna naloga

OŠ Bojana Ilicha, Maribor

Avtorja: Žiga Podgornik

Hana Kolednik

Mentor: Jožef Senekovič

Maribor 2025

KAZALO

1. UVOD ... 1

2. EGIPČANSKI ULOMKI ... 4

3. ZAPIS ENOTSKIH ULOMKOV Z VSOTO ... 5

3.1 ZAPIS Z VSOTO DVEH ČLENOV ... 5
3.2 ZAPIS Z VSOTO VEČ ČLENOV ... 8

4. ZAPIS ENOTSKIH ULOMKOV Z VSOTO ENOTSKIH ULOMKOV ... 9

5. ŠE NEKAJ LASTNOSTI ENOTSKIH ULOMKOV ... 13

6. POLJUBNI ENOTSKI ULOMKI V RAČUNSKIH OPERACIJAH ... 18

7. ULOMKI S ŠTEVCI, RAZLIČNIMI OD 1 ... 19

8. ZAKLJUČEK ... 21

9. DRUŽBENA ODGOVORNOST ... 22

10. VIRI ... 22

Povzetek

V Leibnizovem trikotniku smo pri matematični delavnici spoznali enotske ulomke. To so ulomki, ki imajo v števcu število 1. Spoznali smo, da enotske ulomke lahko zapišemo z vsoto, tako je recimo $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. V raziskovalni nalogi raziščemo ali lahko vsak enotski ulomek zapišemo z vsoto dveh ali celo več enotskih ulomkov. Prav tako raziščemo ali lahko z vsoto ulomkov zapišemo tudi ulomke, ki imajo števec različen od 1. Ob tem predstavimo še nekaj zanimivih lastnosti računskih operacij z enotskimi ulomki.

Ključne besede: enotski ulomki

1. UVOD

Ulomki so bistveni del matematike, saj omogočajo izražanje delov celot in njihovo manipulacijo v različnih operacijah. Za lažje delo z ulomki je pomembno razumeti njihove lastnosti, kot so **krajšanje**, **razširjanje** in osnovne **računske operacije** (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje).

1. Krajšanje ulomkov (Poenostavljanje)

Krajšanje ulomka pomeni, da poiščemo največji skupni delitelj (NSD) števca in imenovalca ter delimo oba z njim, da dobimo najpreprostejši izraz za ulomek.

Kako krajšamo ulomek:

- Poiščemo **največji skupni delitelj** (NSD) števca in imenovalca.
- Delimo števec in imenovalec z NSD.

Primer:

$$\frac{12}{18}$$

Najprej poiščemo NSD števca (12) in imenovalca (18), ki je 6. Nato delimo števec in imenovalec s 6:

$$\frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$$

Tako smo ulomek **poenostavili** (krajšali) na $\frac{2}{3}$.

Pomembno: Ulomek je okrajšan, če števec in imenovalec nimata skupnih deliteljev razen 1 (ko so v njuni **največji skupni delitelj** enak 1). To je **najbolj poenostavljena oblika ulomka**.

2. Razširjanje ulomkov

Razširjanje ulomka pomeni množenje števca in imenovalca z istim številom, da se ohrani vrednost ulomka, vendar lahko omogoči lažje računanje v določenih primerih (na primer pri seštevanju ulomkov z različnimi imenovalci).

Kako razširimo ulomek:

- Množimo števec in imenovalec z istim številom (ne smejo biti nič), da ohranimo vrednost ulomka.

Primer:

$$\frac{2}{3}$$

Če želimo ulomek razširiti s 5, pomnožimo števec in imenovalec s 5:

$$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

Tako smo ulomek **razširili** na $\frac{10}{15}$, vendar njegova vrednost ostaja enaka.

Razširjanje je uporabno pri iskanju skupnih imenovalcev za seštevanje ali odštevanje ulomkov.

3. Računske operacije z ulomki

Za delo z ulomki moramo poznati osnovne operacije: **seštevanje**, **odštevanje**, **množenje** in **deljenje**.

a) Seštevanje in odštevanje ulomkov

Da bi lahko sešteli ali odšteli ulomke, moramo najprej poenotiti imenovalce. To pomeni, da moramo ulomke zapisati z **istim imenovalcem** (najpogosteje iščemo **najmanjši skupni imenovalec** - NSI).

- **Seštevanje**: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- **Odštevanje**: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

Primer seštevanja:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

Najprej poiščemo **najmanjši skupni imenovalec (NSI)**, ki je 12. Nato razširimo oba ulomka na isti imenovalec:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Sedaj se lahko seštejemo:

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

Tako smo izračunali vsoto.

b) Množenje ulomkov

Pri množenju ulomkov preprosto pomnožimo števec z drugim števcem in imenovalec z drugim imenovalcem.

- **Množenje**: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Primer:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Pomnožimo števce (2 in 4) ter imenovalce (3 in 5).

c) Deljenje ulomkov

Pri deljenju ulomkov obrnemo drugi ulomek (zamenjamo števec in imenovalec) in nato izvedemo množenje.

- **Deljenje**: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Primer:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$$

Tu smo zapisali obratno vrednost delitelja ($\frac{4}{5}$ postane $\frac{5}{4}$) in nato izvedli množenje.

4. Pretvorbe med mešanimi ulomki in ulomki

- **Mešani ulomek** je ulomek, kjer je celoten del in ulomek. Na primer, $2\frac{1}{4}$ pomeni 2 celoti in $\frac{1}{4}$.
- Da pretvorimo **mešani ulomek v ulomek**, pomnožimo celotni del z imenovalcem in dodamo števec: $2\frac{1}{4} = \frac{2\times 4+1}{4} = \frac{9}{4}$
- Da pretvorimo **ulomek v mešani ulomek**, delimo števec z imenovalcem in dobimo celoten del, preostanek pa postane števec mešanega ulomka: $\frac{9}{4} = 2\,\frac{1}{4}$ (ker je 9 : 4 = 2 in preostanek je 1).

5. Pomen in uporaba ulomkov

Ulomki so ključni pri delu z deli celot, pri merjenju in deljenju, v znanstvenih izračunih, pri analizi razmerij in številnih drugih področjih matematike in vsakdanjega življenja.

2. EGIPČANSKI ULOMKI

Egipčanski ulomki so bili del starodavnega egipčanskega sistema za zapisovanje racionalnih števil. V tem sistemu so uporabljali **enotske ulomke**, kar pomeni, da je števec vedno bil 1 (na primer $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ...).

Lastnosti egipčanskih ulomkov:

1. **Enotski ulomki**: Egipčani so pogosto zapisovali racionalne številke kot vsoto enotskih ulomkov. Na primer, $\frac{2}{3}$ bi zapisali kot $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, saj so vedno iskali način, da števila izrazijo kot vsoto različnih enotskih ulomkov.
2. **Posebni simboli za pogoste ulomke**: Vendar pa so za nekaj posebnih ulomkov, kot so $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ in podobni, imeli **posebne hieroglife**. Na primer, $\frac{2}{3}$ so zapisali s posebnim simbolom, ne da bi ga morali izraziti kot vsoto enotskih ulomkov. Tako so se izognili zapletom pri zapisu pogosto uporabljenih vrednosti.
3. **Brez "kompleksnih" ulomkov**: Egipčani niso poznali ulomkov, kjer števec ni bil enak 1 (kot je to običajno v sodobnem zapisu ulomkov). Namesto tega so iskali vse mogoče načine za razdelitev števila na vsote enotskih ulomkov.

4. **Primer**:
    a. Ulomek $\frac{2}{3}$so zapisali s **posebnim simbolom**, ki je bil specifičen za ta ulomek.
    b. Če pa bi želeli zapisati ulomek, kot je $\frac{5}{6}$, bi ga zapisali kot $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, saj je bila to ustaljena praksa pri zapisu ulomkov, ki niso imeli svojih lastnih simbolov.

Egipčanski ulomki so bili ključni za njihovo vsakdanje življenje, zlasti pri izračunih za gradbeništvo, trgovino in davčne postopke. Egipčani so jih pogosto uporabljali pri merjenju površin (na primer pri določanju površine zemlje ali gradbenih površin), gradnji piramid in pri računskih operacijah, ki so bile potrebne za administrativno in davčno obvladovanje.

3. ZAPIS ENOTSKIH ULOMKOV Z VSOTO

Ali lahko vse ulomke zapišemo kot vsoto enotskih ulomkov?

Ali potrebujemo samo dva ali jih potrebujemo več?

Primer: $\frac{4}{10}$ = ?

3.1 Zapis z vsoto dveh členov

Ali lahko vse ulomke napišemo z vsoto samo dveh enotskih ulomkov?

Če imamo ulomek $\frac{4}{10}$ ga lahko zapišemo z vsoto dveh enotskih ulomkov in sicer:

$$\frac{4}{10}=\frac{1}{15}+\frac{1}{3}$$

Ampak mi potrebujemo nekaj, kar bo uporabno za katerikoli primer.

Torej vemo, da je v števcu vedno 1 v imenovalcu pa neznano število. V števec vstavimo število ena v imenovalcu pa *n* oz. *m* (*n* in *m* sta poljubni naravni števili). Torej:

$$\frac{4}{10}=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$$

Potem lahko v imenovalcu zapišemo $n \cdot m$, saj tako dobimo skupni imenovalec. V števcu moramo razširiti člena zato jo pomnožimo z imenovalcem drugega faktorja. To izgleda tako:

$$\frac{4}{10} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1m + 1n}{nm} = \frac{m+n}{nm}$$

Nato se v tej enačbi rešimo ulomkov tako, da enačbo pomnožimo s skupnim imenovalcem:

$$\frac{4}{10} = \frac{n+m}{mn} \quad / \cdot 10mn$$

$$4mn = 10m + 10n$$

Potem iz enačbe izrazimo *m*:

$$4mn - 10m = 10n$$

$$m(2n - 5) = 5n$$

$$m = \frac{5n}{2n - 5}$$

Oblikujemo tabelo (tabela 1), kjer vstavljamo vrednosti za spremenljivko *n* in računamo vrednost spremenljivke *m* (torej obe vrednosti morata bit naravni števili). Za *n* vstavljamo naravna števila od 1 naprej.

n	števec	imenovalec	*m*
1	5	-3	$-\frac{3}{5}$
2	10	-1	-10
3	15	1	15

Tabela 1: Računanje spremenljivk, $\frac{4}{10}$

Ker je ulomek $\frac{4}{10}$ neokrajšani, ga okrajšamo, $\frac{2}{5}$. Ali lahko tudi ta ulomek zapišemo z vsoto dveh enotskih ulomkov?

Tako je $\frac{2}{5} = \frac{n+m}{mn}$ in $2mn = 5n + 5m$, izpostavimo *m* in zapišemo $m(2n – 5) = 5n$. Ker dobimo enak izraz kot za ulomek $\frac{4}{10}$, $m = \frac{5n}{2n-5}$, je seveda rešitev enaka.

Za poljuben ulomek $\frac{a}{b}$ bi potem zapisali enakost $\frac{a}{b} = \frac{n+m}{mn}$.

Potem velja tudi $amn = bn + bm$. Preoblikujemo in izpostavimo *m*,

$m(an – b) = bn$, tako je $m = \frac{bn}{an-b}$.

Poglejmo recimo primer za ulomek $\frac{7}{9}$, ki je okrajšani ulomek. Potem je $a = 7$, $b = 9$. Tako je $m = \frac{9n}{7n-9}$. Pomagamo si s preglednico (tabela 2).

n	števec	imenovalec	m
1	9	–2	$-\frac{9}{2}$
2	18	5	$\frac{18}{5}$
3	27	12	$\frac{27}{12}$
4	36	19	$\frac{36}{19}$
5	45	26	$\frac{45}{26}$
6	54	33	$\frac{54}{33}$
7	63	40	$\frac{63}{40}$

Tabela 2: Računanje spremenljivk, $\frac{7}{9}$

Ker se vrednost ulomka približuje številu 1, je očitno da na ta način ne moremo ulomka zapisati z vsoto dveh ulomkov. Potreben je razmislek. Največji ulomek s števcem 1 je ulomek $\frac{1}{2}$. Ker je ulomek $\frac{7}{9}$ večji od ulomka $\frac{1}{2}$, pomeni da je prvi člen v vsoti prav ulomek $\frac{1}{2}$. Zato izračunamo razliko $\frac{7}{9} - \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$. Zato zapišemo ta ulomek z vsoto dveh enotskih ulomkov. Potem je $a = 5$, $b = 18$. Tako je $m = \frac{18n}{5n-18}$. Pomagamo si s preglednico (tabela 3).

n	števec	imenovalec	m
1	18	–13	$-\frac{18}{13}$
2	36	–8	$-\frac{36}{8}$
3	54	–3	$-\frac{54}{3}$
4	72	2	36

Tabela 3: Računanje spremenljivk, $\frac{5}{18}$

Ulomek $\frac{5}{18} = \frac{1}{4} + \frac{1}{36}$. Zato lahko ulomek $\frac{7}{9}$ zapišemo z vsoto treh enotskih ulomkov, $\frac{7}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36}$.

Ugotovimo, da s pomočjo enačb najdemo pravilo s katerim lahko ulomke, manjše od $\frac{1}{2}$ napišemo kot vsoto dveh enotskih ulomkov.

Poglejmo še en primer takega ulomka, recimo $\frac{3}{11}$. Potem je $a = 3$ in $b = 11$. Tako je $m = \frac{11n}{3n-11}$. Spet zapišemo preglednico (tabela 4).

n	števec	imenovalec	m
1	11	–8	$-\frac{11}{8}$
2	22	–5	$-\frac{22}{5}$
3	33	–2	$-\frac{33}{2}$
4	44	1	44

Tabela 4: Računanje spremenljivk, $\frac{3}{11}$

Ulomek $\frac{3}{11}$ lahko zapišemo z vsoto dveh členov, $\frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{44}$.

3.2 Zapis z vsoto več členov

Ugotovili smo že, da ulomek, večji od $\frac{1}{2}$ zapišemo z vsoto treh enotskih ulomkov. Tako je v primeru ulomka $\frac{7}{8}$, ki je večji od $\frac{1}{2}$ in manjši od 1, prvi člen prav ulomek $\frac{1}{2}$.

Zato bomo uporabili drugačen postopek in sicer od ulomka odštejemo največji možen enotski ulomek, da ne dobimo negativnega rezultata ali rezultata enakega 0. Postopek ponavljamo toliko časa, dokler rezultat ni enotski ulomek.

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Sedaj bi lahko nadaljevali s preglednico, lahko pa nadaljujemo z odštevanjem naslednjega največjega možnega enotskega ulomka, to je $\frac{1}{3}$,

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24} .$$

Zato je

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} .$$

Kako pa je z ulomki, večjimi od 1?

Ker je število 1 vsota dveh ulomkov $\frac{1}{2}$, seveda vsak ulomek večji od 1 zapišemo z vsaj dvema enakima ulomkoma $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$) in nato po spoznanem postopku še preostali ulomek.

4. ZAPIS ENOTSKIH ULOMKOV Z VSOTO ENOTSKIH ULOMKOV

Ali lahko tudi enotski ulomek zapišemo z vsoto enotskih ulomkov na različne načine?

Poglejmo nekaj znanih primerov.

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$$

Za vse primere je a = 1 in b = 6. Tako je $m = \frac{6n}{1n-6}$. Spet zapišemo preglednico (tabela 5).

$\frac{a}{b}$	n	m
$\frac{1}{6}$	7	42
$\frac{1}{6}$	8	24
$\frac{1}{6}$	9	18
$\frac{1}{6}$	10	15
$\frac{1}{6}$	12	12

Tabela 5: Vsota enotskih ulomkov, $\frac{1}{6}$

Za vrednosti spremenljivke n = 7, 8, 9, 10, 12 je števec večkratnik imenovalca.

Poskusimo za a = 1 in b = 4. Tako je $m = \frac{4n}{1n-4}$. Spet zapišemo preglednico (tabela 6).

$\frac{a}{b}$	n	m
$\frac{1}{4}$	5	20
$\frac{1}{4}$	6	12
$\frac{1}{4}$	8	8
$\frac{1}{4}$	12	6
$\frac{1}{4}$	20	5

Tabela 6: Vsota enotskih ulomkov, $\frac{1}{4}$

Poskusimo za a = 1 in b = 2. Tako je $m = \frac{2n}{1n-2}$. Spet zapišemo preglednico (tabela 7).

$\frac{a}{b}$	n	m
$\frac{1}{2}$	3	6
$\frac{1}{2}$	4	4
$\frac{1}{2}$	6	3

Tabela 7: Vsota enotskih ulomkov, $\frac{1}{2}$

Poskusimo še za a = 1 in b = 8. Tako je $m = \frac{8n}{1n-8}$. Spet zapišemo preglednico (tabela 8).

$\frac{a}{b}$	n	m
$\frac{1}{8}$	9	72
$\frac{1}{8}$	10	80
$\frac{1}{8}$	12	24
$\frac{1}{8}$	16	16
$\frac{1}{8}$	24	12

Tabela 8: Vsota enotskih ulomkov, $\frac{1}{8}$

$\frac{1}{8}$	80	10

Ugotovimo, da je pri sodih številih več možnosti, torej *n* je manjši in *m* je večji, *m* in *n* sta enaka, ko *b* pomnožimo z 2 in *m* je večji *n* je manjši.

Prva vrednost spremenljivke *n* v preglednici je vedno za 1 večja od imenovalca (recimo pri imenovalcih 2, 4, 6, 8 so prve vrednosti za n 3, 5, 7 in 9).

Prav tako opazimo simetrijo parov vrednosti (*n*, *m*).

V vseh primerih se pojavi par enakih vrednosti za m in n. Pri imenovalcu 8 je to (16, 16), pri imenovalcu 6 je to (12, 12), pri imenovalcu 4 je to (8, 8) in pri imenovalcu 2 je to (4, 4). Sklepamo, da je pri vsakem enotskem ulomku, ki ima za imenovalec sodo število *a*, par imenovalcev (2a, 2a) za zapis vsote. Recimo $\frac{1}{10} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20}$. Kar preprosto pokažemo $\frac{1}{a} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{2}{2a}$.

Kako pa je z enotskimi ulomki, ki imajo v imenovalcu liho število.

Poglejmo primer enotskega ulomka $\frac{1}{5}$. Za vse primere je *a* = 1 in *b* = 5. Tako je $m = \frac{5n}{1n-5}$. Spet zapišemo preglednico (tabela 9).

$\frac{a}{b}$	n	m
$\frac{1}{5}$	6	30
$\frac{1}{5}$	10	10
$\frac{1}{5}$	30	6

Tabela 9: Vsota enotskih ulomkov, $\frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$$

Opazimo simetričnost (6, 30) in možnost enakosti imenovalcev. Prav tako je prva vrednost spremenljivke *n* za 1 večja od imenovalca ulomka.

Poglejmo primer enotskega ulomka $\frac{1}{3}$. Za vse primere je $a = 1$ in $b = 3$. Tako je $m = \frac{3n}{1n-3}$. Spet zapišemo preglednico (tabela 10).

$\frac{a}{b}$	n	m
$\frac{1}{3}$	4	12
$\frac{1}{3}$	6	6
$\frac{1}{3}$	12	4

Tabela 10: Vsota enotskih ulomkov, $\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

Opazimo simetričnost (4, 12) in možnost enakosti imenovalcev. Prav tako je prva vrednost spremenljivke *n* za 1 večja od imenovalca ulomka.

Pa še primer za imenovalec ulomka 7, torej enotskega ulomka $\frac{1}{7}$. Za vse primere je $a = 1$ in $b = 7$. Tako je $m = \frac{7n}{1n-7}$. Spet zapišemo preglednico (tabela 11).

$\frac{a}{b}$	n	m
$\frac{1}{7}$	8	56
$\frac{1}{7}$	14	14
$\frac{1}{7}$	56	8

Tabela 11: Vsota enotskih ulomkov, $\frac{1}{7}$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14}$$

Spet opazimo simetričnost (8, 56) in možnost enakosti imenovalcev. Prav tako je prva vrednost spremenljivke n za 1 večja od imenovalca ulomka.

V vseh primerih je torej $a = 1$. Potem lahko zapišemo $m = \frac{bn}{n-b}$. Števec bn mora biti večkratnik imenovalca, torej mora biti $n - b$ delitelj števca bn. Pri tem je $n > b$. V preglednici torej začnemo s števili, večjimi od b.

Ugotovimo, da so pri lihih imenovalcih vedno samo tri možnosti, torej n je manjši in m je večji, m in n sta enaka ali se vrednosti m in n iz prvega primera zamenjata. Kar pravzaprav pomeni, da sta samo dve različni možnosti zaradi zakona o zamenjavi za seštevanje ulomkov.

Za ulomek $\frac{1}{11}$ je $b = 11$.

Tako je $m = \frac{11n}{n-11}$ in rešitvi sta za $n = 12$, $m = 132$ ter $n = 22$, $m = 22$.

Vsoti sta $\frac{1}{11} = \frac{1}{12} + \frac{1}{132}$ in $\frac{1}{11} = \frac{1}{22} + \frac{1}{22}$.

Za poljuben enotski ulomek $\frac{1}{b}$, kjer je b liho število, sta ulomka v vsoti $\frac{1}{b} = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b(b+1)}$ in $\frac{1}{b} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b}$.

5. ŠE NEKAJ LASTNOSTI ENOTSKIH ULOMKOV

Opazujemo vzorec številskih izrazov, vsot, s katerimi zapišemo zaporedne enotske ulomke:

$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$,

$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$,

$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$,

$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$,

$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$,

$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$,

$\frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72}$,

...

Do posplošitve pridemo z opazovanjem imenovalcev enotskega ulomka in imenovalcev členov vsote. Imenovalec prvega člena vsote je za ena večje število, kot je imenovalec enotskega ulomka, imenovalec drugega člena je produkt imenovalca enotskega ulomka in imenovalca prvega člena vsote.

Za poljuben enotski ulomek $\frac{1}{b}$, je vsota vedno $\frac{1}{b} = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b(b+1)}$.

Kaj pa če seštejemo dva enotska ulomka, katerih imenovalca sta naravni zaporedni števili $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$? Poglejmo primere.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{15}{56}$$

Vsi primeri grejo po istem pravilu:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} = \frac{a+1+a}{a \cdot (a+1)} = \frac{2a+1}{a^2+a}$$

Pri tem ugotovimo naslednje:

- števec je vedno liho število, saj vedno seštevamo eno liho in eno sodo število,
- imenovalec je vedno sodo število saj vedno množimo eno sodo in eno liho število.

Poglejmo primere za odštevanje zaporednih enotskih ulomkov:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$$

Pri teh primerih pa je pravilo takšno:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{(a+1) - a}{a \cdot (a+1)} = \frac{1}{a^2 + a}$$

Ugotovimo, da

- je števec razlike vedno ena, saj v števcu odštejemo zaporedni naravni števili,
- da je imenovalec kot v primeru vsot vedno sodo število, ker množimo eno sodo in eno liho število.

Poglejmo primere množenja in deljenja zaporednih enotskih ulomkov.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$$

Velja enako pravilo kot pri odštevanju, produkt ulomkov je $\frac{1}{a^2 + a}$.

Za deljenje zapišemo primere

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5} : \frac{1}{6} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

$\frac{1}{6} : \frac{1}{7} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

Opazimo lahko, da je v števcu produkta večji člen zaporedja, v imenovalcu pa manjši: $\frac{1}{a} : \frac{1}{a+1} = \frac{a+1}{a}$ ali $1\frac{1}{a}$.

Zapišimo enotske ulomke s produktom enotskih ulomkov:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{5}{6}}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\frac{7}{8}}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{8}{9}}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}}$$

...

Ugotovimo, da enotski ulomek zapišemo kot produkt dveh enotskih ulomkov tako, da je en od teh ulomkov naslednji zaporedni enotski ulomek. V drugem faktorju je števec 1, imenovalec faktorja je ulomek, ki ima imenovalec enotskega ulomka (n) v števcu, v imenovalcu pa imenovalec prvega faktorja (n + 1).

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1}}$$

Opazujemo še vzorec pri zapisu deljenja enotskega ulomka s količnikom enotskih ulomkov:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} : \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} : \frac{1}{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} : \frac{1}{\frac{5}{4}}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} : \frac{1}{\frac{6}{5}}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} : \frac{1}{\frac{7}{6}}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} : \frac{1}{\frac{8}{7}}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{9} : \frac{1}{\frac{9}{8}}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} : \frac{1}{\frac{10}{9}}$$

Tukaj pa je ravno obratno kot pri množenju. Torej

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} : \frac{1}{\frac{n+1}{n}}$$

6. POLJUBNI ENOTSKI ULOMKI V RAČUNSKIH OPERACIJAH

Kaj dobimo pri vsaki računski operaciji, če zmnožimo 2 poljubna enotska ulomka? Dva poljubna enotska ulomka lahko zapišemo kot: $\frac{1}{m}$ in $\frac{1}{n}$

SEŠTEVANJE:

Kaj dobimo, če seštejemo dva poljubna enotska ulomka?

Če seštejemo dva enotska ulomka dobimo:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{n+m}{mn}$$

ODŠTEVANJE:

Kaj dobimo, če odštejemo dva poljubna enotska ulomka?

Če odštejemo dva enotska ulomka dobimo:

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{n-m}{mn}$$

MNOŽENJE:

Kaj dobimo, če zmnožimo dva poljubna enotska ulomka?

Zmnožimo dva poljubna enotska ulomka:

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{m\cdot n}$$

DELJENJE:

Kaj dobimo, če delimo dva poljubna enotska ulomka?

Če delimo dva enotska ulomka dobimo:

$$\frac{1}{m}:\frac{1}{n}=\frac{1}{m}\cdot\frac{n}{1}=\frac{n}{m}$$

7. ULOMKI S ŠTEVCI, RAZLIČNIMI OD 1

Ali lahko podobno pravilo za vsoto ugotovimo tudi za ulomke, ki imajo števec različen od 1?

Naj bo števec število 2. Uporabimo isto pravilo kot pri enotskih ulomkih, s tem, da namesto števca 1 vstavimo števec 2:

$$\frac{2}{m} + \frac{2}{n} = \frac{2n + 2m}{mn}$$

Potem za ulomek recimo $\frac{5}{9}$ zapišemo enakost in izrazimo *m*:

$$\frac{5}{9} = \frac{2n + 2m}{mn} / \cdot 9mn$$

$$5mn = 18m + 18n$$

$$5mn - 18m = 18n$$

$$m(5n - 18) = 18n$$

$$m = \frac{18n}{5n - 18}$$

Potem naredimo razpredelnico in vstavljamo *n* dokler *m* ni naravno število (tabela 12).

n	števec	imenovalec	*m*
2	36	-8	$-\frac{9}{2}$
3	54	-3	$-\frac{54}{3}$
4	72	2	36

Tabela 12: Vsota ulomkov s števcem 2, $\frac{5}{9}$

Tako je $\frac{5}{9} = \frac{2}{4} + \frac{2}{36}$, po krajšanju je $\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$.

Katerikoli števec si lahko zamislimo, saj je za *k* > 1 in $k \in \mathbb{N}$, velja $\frac{k}{m} + \frac{k}{n} = \frac{kn + km}{mn} = k \cdot (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})$.

Ugotovimo lahko, da pravilo velja za katerikoli ulomek, ki ga lahko zapišemo z vsoto dveh ulomkov s števcem različnim od 1. Poglejmo primer za števec 3.

Uporabimo isto pravilo:

$$\frac{3n + 3m}{mn}$$

Si izberemo ulomek:

$$\frac{7}{8} = \frac{3n + 3m}{mn}$$

$$m = \frac{24n}{7n - 24}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{3}{4} + \frac{3}{24} = 3 \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{24})$$

Kar je pravzaprav

$$\frac{7}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8}$$

Če člen $\frac{3}{4}$ zapišemo z vsoto enotskih ulomkov, je to $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Kar pomeni, da je $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Že prej smo ugotovili, da je ulomek $\frac{7}{8}$ večji od $\frac{1}{2}$ in ga lahko zapišemo z vsoto treh členov $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$. Tako smo ulomek $\frac{7}{8}$ zapisali z vsoto enotskih ulomkov na dva različna načina.

Za ulomek $\frac{5}{9}$ bi zapisali $\frac{5}{9} = \frac{3n + 3m}{mn}$ in $m = \frac{27n}{5n - 27}$. Tako je $\frac{5}{9} = \frac{3}{6} + \frac{3}{54} = 3 \cdot (\frac{1}{6} + \frac{1}{54})$ ali $\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$.

Ugotovimo, da z vsoto dveh enotskih ulomkov lahko zapišemo tudi nekatere ulomke večje od $\frac{1}{2}$, saj je ulomek $\frac{5}{9}$ večji od ulomka $\frac{1}{2}$.

Poglejmo primer zapisa ulomka $\frac{5}{9}$ z vsoto ulomkov s števcem 4.

$$\frac{4n + 4m}{mn}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{4n + 4m}{mn}$$

$$m = \frac{36n}{5n - 36}$$

Namesto razpredelnice lahko razmislimo s koliko moramo množiti 5, da v imenovalcu ne dobimo negativnega rezultata ali rezultata enakega nič. V tem primeru je to 8 zato za vrednost *n* vstavimo 8 ali vrednosti večje od 8.

$$\frac{5}{9} = \frac{4}{8} + \frac{4}{72} = 4 \cdot (\frac{1}{8} + \frac{1}{72}) \text{ ali } \frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$$

Z uporabo zapisa: $\frac{n+m}{mn}$ lahko poljuben ulomek zapišemo z vsoto dveh ulomkov, s števcem, ki si ga izberemo sami, razen za števec 1, ko lahko zapišemo samo nekatere ulomke.

8. ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi smo spoznali in opredstavili enotske ulomke in njihove lastnosti. Ugotovili smo, da lahko katerikoli ulomek zapišemo kot vsoto dveh, treh ali večih enotskih ulomkov ter da vsote lahko zapišemo na različne načine.

Ulomke lahko zapišemo z vsoto enotskih ulomkov s pomočjo enačbe $m = \frac{bn}{an-b}$, kjer je *a* števec ulomka, *b* imenovalec ulomka.

Ulomke večje od $\frac{1}{2}$ (in tudi vse druge) lahko zapišemo z vsoto enotskih ulomkov tako, da zaporedoma od ulomka odštevamo enotske ulomkem najprej največjega, torej $\frac{1}{2}$, nato $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ...

Prav tako smo ugotovili, da lahko vsak enotski ulomek zapišemo kot vsoto naslednjega (manjšega) enotskega ulomka in še enega enotskega ulomka.

Ugotovili smo, da lahko vsak ulomek zapišemo tudi kot vsoto ulomkov s poljubnim števcem *k* (torej ne samo števcem 1), $\frac{k}{m} + \frac{k}{n} = \frac{kn+km}{mn} = k \cdot (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})$.

Ugotovili smo kako izračunati vsoto, razliko, produkt in količnik zaporednih enotskih ulomkov.

9. DRUŽBENA ODGOVORNOST

Ta naloga prispeva k uveljavljanju znanja in matematike v družbi s širjenjem novih spoznanj in rešitev, kar spodbuja večje razumevanje in cenjenje matematike v vsakdanjem življenju. S tem, ko predstavimo rezultate raziskav, vplivamo na zavedanje o pomenu matematike v različnih panogah in vsakem koraku napredka v znanosti.

Med sošolci raziskovalna naloga spodbuja raziskovalni duh in povečuje zanimanje za matematične izzive, saj lahko postane vir navdiha za nadaljnje raziskovanje. Hkrati upoštevanje avtorskih pravic v nalogi omogoča spoštovanje intelektualne lastnine drugih, kar ustvarja etično in zaupanje vredno raziskovalno okolje. S tem se razvija kultura, kjer so prizadevanja drugih cenjena in priznana, kar je ključno za zdravo akademsko skupnost.

10. VIRI

(1) https://nrich.maths.org/problems/keep-it-simple

(2) https://chatgpt.com/ - 23.11.2024

(3) Gazvoda, Senekovič, Matematika za radovedneže 7, ICO, Kamnik 2017

(4) https://sl.wikipedia.org/wiki/Egip%C4%8Danski_ulomek 28.1.2025