



Števne in neštevne neskončne množice

Področje: Matematika in logika

Avtorici: Zara Škrlj in Mia Drobež
Mentorica: Tjaša Gašpar

Osnovna šola Frana Albrehta Kamnik
Šolska ulica 1, 1241 Kamnik

2025, Kamnik

POVZETEK

Najino zanimanje je pritegnil pojem neskončnosti, ker nama je ta pojem še dokaj neznan. V raziskovalni nalogi predstaviva Cantorjeva razmišljanja in diagonalni argument ter kardinalnost neskončnih množic. Predstaviva tudi matematični pojem neskončnosti in razvoj pojma neskončnosti skozi zgodovino. Opredelili sva števno in neštevno neskončnost ter našteali nekaj primerov takšnih množic. S teoretičnim znanjem, ki sva ga pridobili, sva poiskali nekaj neskončnih množic ter opredelili in dokazali, ali so števno ali neštevno neskončne. Zanimalo naju je, če bi lahko s prej pridobljenim znanjem lahko naštele in dokazale, zakaj spadajo v to skupino. Dokaze, ki sva jih v teoretičnem delu razložili, jih v praktičnem delu uporabljava za metodologijo, ki sva jo natančneje opisali v uvodu v praktičen del. Rezultati so naju presenetili, saj nisva vedeli, da je neskončnosti veliko tudi izven matematike.

Ključne besede: neskončnost, Cantor, kardinalnost, števna neskončnost, neštevna neskončnost

ABSTRACT

Our interest was drawn to the concept of infinity, because this concept is still quite unknown to us. In the research paper, we present Cantor's diagonal argument and the cardinality of infinite sets. We also present the mathematical concept of infinity and the development of the concept of infinity throughout history. We defined countable and uncountable infinity and listed some basic sets. We summarized Cantor's thoughts and his proof (diagonal argument). Using the theoretical knowledge we acquired, we found some infinite sets and defined and proved whether they are countable or uncountable. We were interested in whether we could list and prove why they belong to this group using the knowledge we had previously acquired. The proofs we explained in the theoretical part are used in the practical part for the methodology we described in more detail in the introduction to the practical part. The results surprised us, because we did not know that there are so many examples of infinity outside of mathematics.

Keywords: infinity, Cantor, cardinality, countable infinity, uncountable infinity

KAZALO

UVOD	4
HIPOTEZE	4
TEORETIČNI DEL.....	5
Kaj je neskončnost?	5
Kdaj se prvič pojavi pojem neskončnosti?	5
Števena in neštevna neskončnost	6
Kardinalno število	7
PRAKTIČEN DEL.....	8
Kako je bil narejen praktičen del?	8
Metodologija	8
Primeri števno neskončnih množic (kardinalno število \aleph_0):	8
Primeri neštevno neskončnih množic (kardinalno število \aleph_1):	10
POTRDITVE IN OVRŽBE HIPOTEZ TER REZULTATI	12
ZAKLJUČEK.....	12
VIRI IN LITERATURA	13

UVOD

Cilj najine raziskovalne naloge je bil raziskati pojem neskončnosti in njeno zgodovino ter pokazati razliko med števničimi in neštevničimi neskončnimi množicami ter narediti čim bolj zanimiv praktičen del. V teoretičnem delu sva predstavili množice, ki so števno ali neštevno neskončne, ter vključili dokaze z bijektivno preslikavo ali Cantorjevo diagonalizacijo. Pomagali sva si z različnimi viri, kot so knjige in splet. Največ informacij sva dobili v knjigah: Knjiga o številih [3] in Na vrtiljaku števil [4]. V praktičnem delu raziskovalne naloge sva poiskali nekaj primerov neskončnih množic ter dokazali, zakaj so števno oziroma neštevno neskončne.

HIPOTEZE

Hipoteza 1: Lahko se spomniva vsaj 5 števno neskončnih množic.

Hipoteza 2: Lahko se spomniva vsaj 5 neštevno neskončnih množic.

Hipoteza 3: Števna neskončnost je lahko tudi v naravi, ne le v matematiki.

Hipoteza 4: Neštevna neskončnost je lahko tudi v naravi, ne le v matematiki.

TEORETIČNI DEL

Kaj je neskončnost?

» Neskončnost je značilnost, ki pomeni, da nekaj ni omejeno ali nima mej.«
[1]

» Matematična neskončnost je koncept, ki označuje nekaj brezmejnega, neomejenega ali večjega od katere koli končne vrednosti.« [2]

Kdaj se prvič pojavi pojem neskončnosti?

Približno leta 490 pred Kr. se je v Grčiji rodil Zenon, ki je bil eden izmed prvih ljudi, ki so raziskovali neskončnost. Zenon je napisal knjigo paradoksov, ki je dolgo časa frustrirala filozofe (nekateri še danes), zaradi svojih kompleksnih argumentov, ki so izzivali osnovne koncepte prostora, časa in gibanja ter tako kazali protislovje. Pomembni so za razvoj teorije o neskončnosti. Dva Zenonova paradoksa o neskončnosti sta:

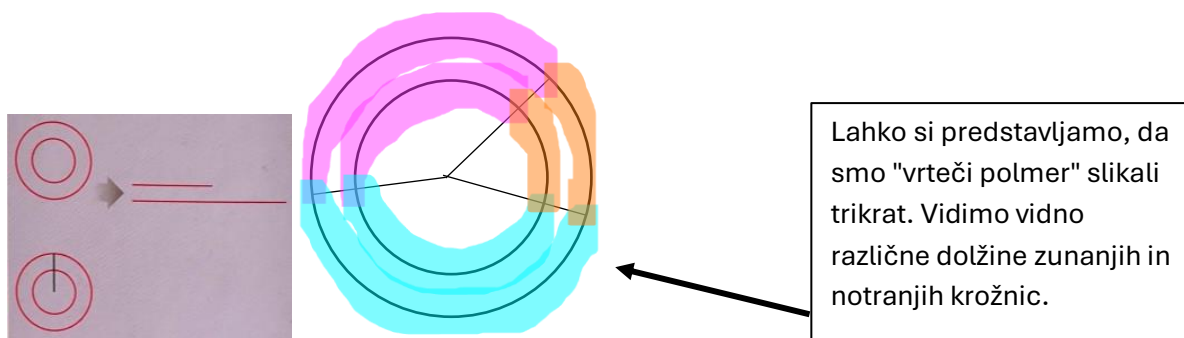
- Ahil in želva: Ahil, ki teče hitreje od želve, je kljub temu ne more ujeti, če je želva vedno za majhno razdaljo pred njim. Paradoks poudarja neskončno deljivost prostora in časa.
- Dihotomija: Preden dosežemo določeno točko, moramo najprej doseči polovico te razdalje, nato četrtno, nato osmino itd. To nas vodi v neskončno zaporedje korakov.

Leta 384 pred Kr. se je rodil Aristotel, kateremu so se zdeli Zenonovi sklepi napačni, a še vseeno ni mogel zanikati dokazov za neskončnost.

V letu 1548 je Bruno Giordano, ki ni bil matematik ali fizik, napisal knjigo O neskončnem vesolju in svetovih.

S pojmom neskončnost se je ukvarjal Galileo (1564 – 1642). Spraševal se je, če imata dve različno veliki koncentrični krožnici enako število točk. Obe krožnici imata neskončno točk, a na krajši jih je manj kot na večji. To si je predstavljal tako, da je naredil polmer, ki se je premikal kot urin kazalec. Vseeno kako hitro se bo polmer premikal, vedno bo presekal enako število točk na obeh krožnicah. Na daljši krožnici bodo točke bolj oddaljene kot na krajši. To pomeni, da na daljši krožnici potrebujemo več točk, da jo zapolnimo kot na krajši. [3]

Slika za lažje razumevanje:



Vir [3]

Pomemben korak je naredil Georg Cantor (1845 – 1918). Raziskoval je števno in neštevno neskončnost. O njem je več omenjeno v naslednjem poglavju - števna in neštevna neskončnost.

Števna in neštevna neskončnost

S pojmom neskončnosti se je ukvarjal matematik Georg Cantor (zgoraj omenjeni), ki je utemeljitelj teorije množic in teorije neskončnosti (o števni in neštevni neskončnosti). Njegovi teoriji je nasprotovalo veliko matematikov, še posebej pa mu je nasprotoval Leopold Kronecker, ki je pravil, da je bog ustvaril le naravna števila, vse ostalo pa je človeško delo. Menil je, da lahko vso matematiko razložimo z naravnimi števili. Vsa nasprotovanja in razmišljanje o neskončnosti ga je pripeljalo v umobolnico. Danes je splošno znano, da je to eno izmed obveznih znanj v matematiki.[4]

Cantor je ločil števno in neštevno neskončnost. Govoril je o različnih »velikostih« neskončnosti in neskončnosti v številskih množicah.

Števna neskončnost je tista, ki ima enako število elementov kot naravna množica. Ta neskončnost je najmanjša. Primeri neskončnih številskih množic, ki so števne so:

- množica naravnih števil \mathbb{N} ,
- množica celih \mathbb{Z} in
- množica racionalnih \mathbb{Q} števil.

Pod števno neskončnost spadajo tudi vsa periodična števila, saj lahko na primer $0,33333\dots$ ali $0,\bar{3}$ zapišemo kot ulomek $\frac{1}{3}$, kar je racionalno število. [7]

Neštevna neskončnost

Neštevna neskončnost je tista, ki nima nekega zaporedja, da bi lahko naštel vsa števila te množice. Takšna množica sta množici iracionalnih in realnih števil \mathbb{R} . [7] Eden izmed Cantorjevih pomembnejših dokazov je, da je množica realnih števil večja od ostalih.

Dokaz:

$$r_1 = 0, \underline{a_{11}} a_{12} a_{13} \dots$$

$$r_2 = 0, a_{21} \underline{a_{22}} a_{23} \dots$$

$$r_3 = 0, a_{31} a_{32} \underline{a_{33}} \dots$$

$$D = 0, (a_{11} + 1)(a_{22} + 1)(a_{33} + 1)\dots$$

Postopek se imenuje Cantorjeva diagonalizacija ozirna Cantorjev diagonalni argument. [4] Deluje tako, da napišemo realna števila »zaporedje«, za katerega mislimo, da vsebuje vsa realna števila. Če po diagonalni vzamemo vsako decimalno in jo spremenimo, dobimo novo realno število, ki ga v tem »zaporedju« ni.

Kardinalno število

Kardinalno število je v matematiki posplošeno število, ki izraža moč ali kardinalnost množice. Torej je to število, ki pove, koliko členov je v množici.

Neskončne števne množice imajo kardinalno število (\aleph_0 alef nič), neštevne množice pa imajo kardinalno število ena (\aleph_1 alef). [8]

Da imajo neskončne množice, ki so števne, enako kardinalnost, lahko dokažemo z bijektivno preslikavo. To je dokaz, da so lahko množice, tudi če so neskončne, enako ali različno velike. Bijekcija je funkcija, ki preslika en element prve množice v drugi element druge množice. Uporabimo simbolni zapis $f: A \rightarrow B$. [9]

Dokaz si lahko predstavljamo takole:

»Dve skupini otrok sta tako enako veliki, če se lahko vsak otrok iz prve skupine prime za roko v par z otrokom iz druge skupine.« (Dolenc, 2007)

**RAZISKOVALNO VPRAŠANJE**

ALI LAHKO NAJDEVA ČIM VEČ VRST NESKONČNOSTI, KI JIH OPREDELIVA IN DOKAŽEVA?

Kako je bil narejen praktičen del?

Praktičen del sva naredili tako, da sva le iz pridobljenega znanja naredili števne in neštevne neskončne množice in pri tem poskušali uresničiti vse hipoteze. Iz pridobljenega znanja v teoretičnem delu sva za te množice tudi dokazali, zakaj spadajo v to kardinalnost.

Metodologija

Metodologija, ki sva jo uporabljali, temelji na dokazovanju števnih in neštevnih neskončnih množic. Pri dokazovanju števnih neskončnih množic sva večinoma (povsod, razen v množici letnic) uporabljali bijektivno preslikavo oz. bijekcijo, pri množici letnic pa sva uporabili primerjavo kardinalnosti s celimi števili. Za dokazovanje neštevno neskončnih množic sva uporabljali dokaz kardinalnosti s primerjavo z realnimi števili.

Primeri števno neskončnih množic (kardinalno število \aleph_0):

- Množica letnic
Zamislimo si letnice začetka antike, srednjega veka in novega veka. Letnice so: antika 800 pr. n. št., to bi kot število napisali – 800; srednji vek 500 po n. št. ali kot število 500; novi vek 1492 po n. št. ali 1492 kot število. Vse te letnice (lahko si predstavljamo prihodnost in preteklost) so v množici celih števil. Ker je množica celih števil (\mathbb{Z}) neskončno števna množica, tja spada tudi množica letnic.
- Množica vodikovih atom v vesolju
Če si vesolje predstavljamo kot neskončno, je s številom vodikovih atomov enako kot z množico naravnih števil (\mathbb{N}), saj lahko vsakemu vodiku priredimo svoje naravno število. Dokaz s funkcijo bijektivne preslikave:
 $f = 1 H (\text{vodikov atom}) \rightarrow 1$
 $f = 2 H \rightarrow 2$
 $f = 3 H \rightarrow 3$
...

- Množica korenov sodih števil $\{\sqrt{2x}; x \in \mathbb{N}\} = \{\sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \dots\}$
ali množica korenov lihih števil; $\{\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots\}$

Vsak koren lahko preslikamo z bijektivno preslikavo v naravno število (\mathbb{N}). Dokaz s funkcijo bijektivne preslikave korenov sodih števil:

$$f = \sqrt{2} \rightarrow 1$$

$$f = \sqrt{4} \rightarrow 2$$

$$f = \sqrt{6} \rightarrow 3$$

...



Dokaz s funkcijo bijektivne preslikave korenov **sodih** števil:

$$f = \sqrt{1} \rightarrow 1$$

$$f = \sqrt{3} \rightarrow 2$$

$$f = \sqrt{5} \rightarrow 3$$

...

- Množica, ki ima ponavljajoče zaporedje $\{0,3; 0,6; 0,3; 0,6 \dots\}$

Vsako zaporedje ima neskončno mnogo členov. Vsak člen lahko preslikamo v naravno število. To je dokaz s funkcijo bijektivne preslikave v zaporedju števil 0,3 in 0,6:

$$f = 0,3 \text{ (1. člen)} \rightarrow 1$$

$$f = 0,6 \text{ (2. člen)} \rightarrow 2$$

$$f = 0,3 \text{ (3. člen)} \rightarrow 3$$

...

- Množica vseh ponavljajočih ciklov v naravi (letni časi, dan in noč, kroženje vode, apnenčev krog ...)

Predpostaviti moramo, da bo Zemlja imela podobne cikle še neskončno let. Cikli se bodo ponavljali v zaporedju. To je značilnost števne neskončne množice. Dokaz s funkcijo bijektivne preslikave:

$$f = 1. \text{ cikel} \rightarrow 1$$

...

$$f = 193. \text{ cikel} \rightarrow 193$$

...

$$f = 99145. \text{ cikel} \rightarrow 99145$$

...

Primeri neštevno neskončnih množic (kardinalno število \aleph_1):

- Premica

To je neomejena ravna črta, ki je sestavljena iz neskončno mnogo točk. Gre v neskončnost, tudi če ni tako narisana, jo nobena točka ne omejuje. To potrjuje neskončnost, na tej neskončni premici pa ne moremo prešteti vseh točk, ki sestavljajo premico, kar je neštevna neskončnost. Med vsakima dvema točkama lahko najdemo novo točko.

- Krožnica

Je sklenjena ravninska krivulja, katere točke so enako oddaljene od središča. Je tudi neskončno-kotnik. Lahko si jo predstavljamo kot vrtinčenje, ki se nikoli ne konča. Na krožnico pa gre lahko neskončno točk, ki niso v zaporedju. To pomeni, da so tudi realna števila, kar je neštevna neskončnost.

- Ravnina

Je dvodimenzionalna ravna ploskev, ki je v trirazsežnem svetu. [10] Gre v neskončnost, tudi če ni tako narisana, jo nobena daljica ali premica ne omejuje. To potrjuje neskončnost. Na ravnini ne moremo vsaki točki prirediti svojega števila, saj se med dvema točkama vedno pojavi nova.

- Množica vseh točk na ploskvi, ki je omejena

Tudi če je ploskev omejena, na njej še vedno najdemo neskončno točk. Neskončnost potrjuje to, da se med vsako točko najde nova. Točke, ki so na ploskvi lahko predstavljajo realna števila. Realna števila pa spadajo v neštevno neskončno množico, zato tja spada tudi množica vseh točk na ploskvi.

- Množica vseh točk na narisanih črtah (lahko so krivulje, daljice, itd.), ki so omejene

Tudi če je črta omejena, je na njej neskončno točk. Neskončnost potrjuje to, da se med vsako točko, ki jo najdemo na črti, najde nova. Točke, ki sestavljajo črto, si jih lahko predstavljamo kot realna števila. Realna števila spadajo v neštevno neskončno množico, zato tja spada tudi množica vseh točk na črti.

- Množica števil x^n , $x \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$

Primeri:

a) $0,325865685296413 \dots^1 = 0,325865685296413 \dots$,

b) $\pi^2 = 9,8696044 \dots$,

c) $\sqrt{2^3} = 2,82842712 \dots$

Element x je realno število, ki nam pove, da bo spadalo število v neštevno neskončnost. Tudi ker je množica realnih števil neštevna, bo po potenciranju množica še vedno neštevna. To lahko vidimo na primerih (glej zgoraj).

- Množica vseh števil med 0 in 1, $0 < x < 1$

Števil je neskončno. Če poskušamo najti najmanjše število, bomo vedno lahko našli še manjše. Na primer lahko rečemo, da je $0,00000000000001$ najmanjše število, a to ni res. Vedno bi lahko dodali še kakšno decimalno mesto in potem bi bilo število še manjše. Ta postopek bi se ponavljal v nedogled. Tako pa vemo, da števila ne bi mogli postaviti v smiselno zaporedje. Tukaj je še Cantorjev diagonalni argument s preprostejšimi števili:

$$r_1 = 0,\underline{0}001$$

$$r_2 = 0,0\underline{1}01$$

$$r_3 = 0,100\underline{1}$$

$$r_4 = 0,111\underline{0}$$

$$D = 0,0100 \text{ ali pravilnejše } 0,01$$

Dobili smo novo število, iz katerega bi lahko vedno naredili še en postopek in spet dobili novo število.

POTRDITVE IN OVRŽBE HIPOTEZ TER REZULTATI

Hipoteza 1: *Lahko se spomniva vsaj 5 števno neskončnih množic.*

- potrjena hipoteza
- našli sva 5 množic

Hipoteza 2: *Lahko se spomniva vsaj 5 neštevno neskončnih množic.*

- potrjena hipoteza
- našli sva 7 množic

Hipoteza 3: *Števna neskončnost je lahko tudi v naravi, ne le v matematiki.*

- potrjena hipoteza
- množica vseh ponavljajočih ciklov v naravi in množica vodikovih atom v vesolju

Hipoteza 4: *Neštevna neskončnost je lahko tudi v naravi, ne le v matematiki.*

- ovržena hipoteza
- v naravi je težko najti neskončnost, ki nima zaporedja, torej neštevno neskončnost
- to sva še bolj raziskali in ugotovili, da takšnih množic v naravi ni

ZAKLJUČEK

O neskončnosti sva spoznali odvijanje skozi preteklost in nekaj več o razlikovanju neskončnosti. Iz znanja sva naredili tudi nekaj primerov števne in neštevne neskončnosti ter uporabili domišljijo za čim boljše ideje. Rezultati so naju presenetili, saj pred razmišljanjem nisva verjeli, da neskončnost v naravi sploh obstaja. Upava, da bo vsem, ki jim prej ni bilo jasno, jasneje vse, česar niso vedeli ter da bo najin praktični del pritegnil tudi vaše razmišljanje in logiko.

VIRI IN LITERATURA

1. Neskončnost, Wikipedija [online], dostopno na: [Neskončnost - Wikipedija, prosta enciklopedija](#), pridobljeno 2025
2. Chat GPT, pridobljeno 2025
3. J. Benetley, Knjiga o številih, *skrivnost števil in kako so ustvarila sodobni svet*, Ljubljana: Tehniška založba Slovenije, 2010.
4. G. Pavlič, Na vrtiljaku števil, Ljubljana: Mladinska knjiga, 2019.
5. S. Dolenc. (2007).Mož, ki je preštel neskončnost [Online]. Dostopno na: <https://kvarkadabra.net/2007/03/moz-ki-je-prestel-neskoncnost/>, pridobljeno 7. 4. 2025
6. Konstanta: Neskočno zanimiva neskončnost. [Online]. Dostopno na: <https://skit.rtv slo.si/skit/podkast/konstanta-neskoncno-zanimiva-neskoncnost/723167>, pridobljeno 7. 4. 2025
7. Števna množica, Wikipedija [online], dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/%C5%A0tevna_mno%C5%BEica, pridobljeno 7. 4. 2025
8. Kardinalno število, Wikipedija [online], dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Kardinalno_%C5%A1tevalo, pridobljeno 7. 4. 2025
9. Neskončnost, Wikipedija [online], dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Bijektivna_preslikava, pridobljeno 7. 4. 2025
10. Ravnina, Wikipedija [online], dostopno na: <https://sl.wikipedia.org/wiki/Ravnina>, pridobljeno 7. 4. 2025