

RAZISKOVALNA NALOGA S PODROČJA TEHNIKE IN TEHNOLOGIJE

Raziskovanje dejavnikov, ki vplivajo na
značajne lastnosti pol-difuznega
prehajanja snopa svetlobe skozi list
celuloznega papirja

Benjamin Gašperin, 4. letnik

Mentor: Barbara Hudovernik, uni. dipl. ing. fiz.



Gimnazija Kranj

Gimnazija Kranj

April, 2024

Povzetek

V raziskovalni nalogi predstavim nov model pol-difuznega prepuščanja svetlobe skozi list oziroma ploščo iz poljubnega materiala, ki sipa svetlobo. Model upošteva tako regularno oziroma spekularno kot difuzno komponento prepuščanja svetlobe in se lahko uporablja pri določanju celokupne prepustnosti materiala ter deleža vpadne svetlobe, ki se prepušča difuzno, brez uporabe dragih meritnih naprav. Model preizkusim z meritvijo spremembe v prepustnosti v odvisnosti od razdalje med virom svetlobe in listom belega celulognega tiskalnega papirja. S ponovitvijo poskusa pri različnih oddaljenostih med virom svetlobe in svetlobnim senzorjem, določim vrednost prepustnosti enega lista papirja kot 0.74 ± 0.04 , delež difuzno prepuščene svetlobe pa kot 0.992 ± 0.002 . Kasneje spremjam še debelino lista papirja tako, da spojim več listov papirja skupaj (do vključno 4 listov papirja). Med celokupno prepustnostjo in debelino lista papirja določim logaritemsko odvisnost ter določim vrednost absorpcijskega koeficiente. Pri analizi podatkov si pomagam z novo matematično analizo snopov funkcij z dvema neznanima parametroma.

Ključne besede: *pol-difuzno prepuščanje, difuzno prepuščanje, sipanje svetlobe, prepustnost lista papirja.*

Abstract

In this paper I introduce a new model of semi-diffuse transmission for light passing through a sheet of light-scattering material. The model takes into consideration both the specular and diffuse component of light transmission and can be used to determine the overall transmittance of a sheet material, as well as the ratio of incident light that is transmitted diffusely, without the use of costly apparatus. The model was put to the test by observing the change in transmittance as the distance between the light source and a sheet of white printer paper was varied. By repeating the measurements for various distances between the light source and sensor I acquired the values of transmittance and the ratio of diffusely transmitted light for a single sheet of paper to be 0.74 ± 0.04 and 0.992 ± 0.002 respectively. Afterwards, the width of the paper sheet was increased by joining multiple sheets (to a total of 4) together. A logarithmic relationship between the overall transmittance and the width of the paper sheet was found and the value of the linear attenuation coefficient was determined. Additionally, a new method of mathematical analysis of sets of functions with two unknown parameters was introduced to aid with the data processing.

Key words: *semi-diffuse transmission, diffuse transmission, light scattering, transmittance of paper.*

Kazalo vsebin

1.	Uvod	4
2.	Teorija	5
2.1.	Izražanje komponente osvetljenosti na senzorju zaradi difuznega prehajanja svetlobe	6
2.1.	Izražanje komponente osvetljenosti na senzorju zaradi regularnega prehajanja svetlobe ..	11
2.2.	Končni izraz osvetljenosti na senzorju	12
3.	Metoda dela in analiza podatkov	13
3.1.	Pripomočki in orodja	13
3.2.	Določanje lastnosti vira svetlobe	13
3.3.	Spreminjanje razdalje med virom in listom papirja (r)	15
3.4.	Spreminjanje števila listov papirja (N)	19
4.	Ugotovitve in evalvacija	22
5.	Praktična aplikacija	24
5.1.	Določanje koncentracije nečistoč v materialih	24
5.2.	Merjenje majhnih debelin	25
5.3.	Računalniško ustvarjene slike	25
6.	Virji in literatura	26
6.1.	Uporabljene aplikacije	27
7.	Priloge	28
7.1.	Priloga 1	28
7.2.	Priloga 2	31
7.3.	Priloga 3	33

Kazalo slik in tabel

Slika 1: Dvodimenzionalna postavitev na katri bazirajo moji izračuni	6
Slika 2: Slika, ki prikazuje površine na katere vpada enaka količina svetlobnega toka	8
Slika 3: Slikovna utemeljitev izraza za neskončno majhen delež površine $dAs = 2\pi ad a$	10
Slika 4: Prikaz efektivnega vira svetlobe in popravka Δd	14
Slika 5: Snop funkcij T v odvisnosti od α za vse pare eksperimentalno določenih vrednosti r in E_s , kjer je $d = 0.20$ m	16
Slika 6: Snop grafov α v odvisnosti od $T - 1$, kjer je $d = 0.20$ m	17
Slika 7: Graf $-\ln T$ za vsak N	21
Slika 8: Shema prikaza določanja koncentracije nečistoč	24
Slika 9: Izvorna slika (levo), difuzna komponenta odboja (sredina) in regularna komponenta odboja (desno)	25
Tabela 1: Vrednosti T in α za različne vrednosti d	18
Tabela 2: Obdelane vrednosti T in α pri različnih razdaljah d za vsak N , hkrati pa tudi vrednosti T , α , in $-\ln T$ za vsak N	20

1. Uvod

V svetu materialov poznamo mnogo snovi, ki dovoljujejo prehajanje svetlobe, vendar značaj prepuščene svetlobe variira od materiala do materiala. Če pogledamo skozi stekleno ploščo, na primer, bo vse videti jasno in ostro, pogled skozi list papirja bo pa nejasen in zamegljen. Kakšen bo značaj svetlobe, ki preide skozi določen material, je odvisen od svetlobne *prepustnosti* ter *sipanja*, tega materiala.

Prepustnost (ang. *transmittance*) je lastnost predmeta, ki nam pove, kakšen delež svetlobe prepušča — definirana je kot razmerje med svetlobo, ki preide skozi neko snov, ter vpadno svetlobo na isto snov (Braslavsky, 2007):

$$T = \frac{E}{E_0}$$

[1.1]

kjer je T prepustnost, E_0 osvetljenost¹ vpadne svetlobe in E osvetljenost prepuščene svetlobe. Predmet s prepustnostjo $T = 0.5$ bi tako prepuščal svetlobo s polovično osvetljenostjo vpadne svetlobe na ta predmet.

Sipanje žarkov na vlaknih ali znotraj nepravilnih kristalnih celicah lahko povzroči, da je prepuščena svetloba razpršena — razpršeno prepuščanje je proces, ki ga opazimo, ko svetloba preide skozi list papirja in se ob stiku s celuloznimi vlakni v njem naključno odbije v vse smeri (»Diffuse reflection«, 2023). Pri popolnoma difuznih materialih se svetloba razprši enakomerno v vse smeri, obstaja pa tudi možnost pol-difuznega prepuščanja svetlobe. To pomeni, da se del svetlobe prepušča regularno oziroma spekularno, preostanek pa difuzno (Höpe, 2014; Tan et al., 2004):

$$\Phi = \alpha\Phi_{difuzno} + (1 - \alpha)\Phi_{regularno}$$

[1.2]

kjer je Φ svetlobni tok² vse prepuščene svetlobe; $\Phi_{difuzno}$ komponenta svetlobnega toka, ki preide difuzno; $\Phi_{regularno}$ komponenta svetlobnega toka, ki preide regularno; in α razmerje svetlobnega toka, ki je prešlo difuzno, napram celotnemu prepuščenemu svetlobnemu toku.

¹Osvetljenost si lahko predstavljamo kot »jakost svetlobe«.

²Svetlobni tok si lahko predstavljamo kot »moč« oddane oziroma sprejete svetlobe.

V tej raziskovalni nalogi bom raziskoval sipanje in svetlobno prepustnost belega celuloznega tiskalnega papirja. Fotometrične lastnosti papirja so v preteklosti že bile preučevane (Kawahara, 2020), vendar so bile uporabljene naprave v teh študijah navadno drage in težko dostopne. V nadaljevanju bom raziskoval alternativni način določanja sipanja in prepustnosti papirja s pomočjo na novo izpeljane enačbe, ki mi bo omogočala modeliranje osvetljenosti prepuščenega snopa svetlobe na poljubni razdalji od svetlobnega vira.

S pomočjo novega modela želim odgovoriti na naslednje raziskovalno vprašanje

Kako dejavniki, kot sta a) razdalja med virom svetlobe in listom papirja ter b) debelina lista papirja, vplivajo na svetlobno prepustnost belega celuloznega papirja?

2. Teorija

V uvodu sem omenil dve s količino, osvetljenost E in svetlobni tok Φ , ki ju povezuje naslednji izraz (Braslavsky, 2007):

$$E = \frac{\Phi}{A} \quad [2.1]$$

kjer je E osvetljenost svetlobe, Φ svetlobni tok in A površina preko katere je svetlobni tok porazdeljen. Če svetloba vstopi in izstopi skozi enako površino ($A = \text{konst.}$), lahko uporabimo enačbo [2.1], da izraz [1.2] preobrazimo v:

$$E_s = \alpha E_{\text{difuzno}} + (1 - \alpha) E_{\text{regularno}} \quad [2.2]$$

kjer je E_s celokupna osvetljenost prepuščene svetlobe, ki jo zaznamo na senzorju; E_{difuzno} komponenta osvetljenosti, ki preide difuzno; in $E_{\text{regularno}}$ osvetljenost, ki preide regularno. V primeru, ko je $\alpha = 1$ govorimo o popolnoma difuznem prehajanju svetlobe, pri $\alpha = 0$ pa je prehajanje popolnoma spekularno (regularno). Če upoštevamo enačbo [2.2] in razmerje, opisano z enačbo [1.1] ($E_s = E = TE_0$), vidimo, da sta tako E_{difuzno} kot $E_{\text{regularno}}$ odvisna od vrednosti T .

V nadaljevanju bom razvil enačbo [2.2] tako, da se bom posebej osredotočil na izražanje osvetljenosti $E_{difuzno}$ nato pa še $E_{regularno}$.

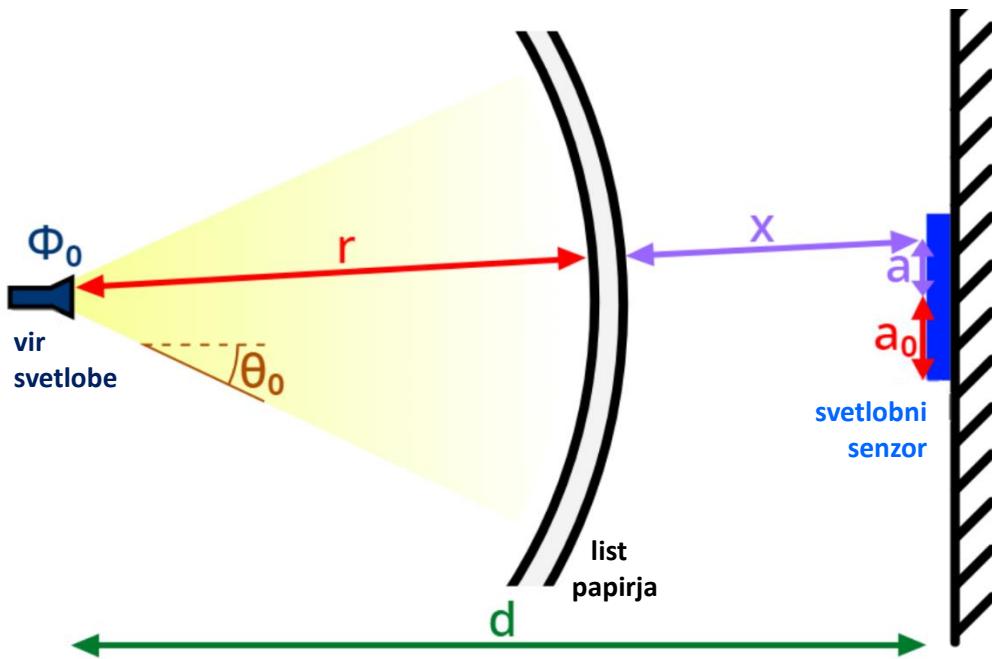
2.1. Izražanje komponente osvetljenosti na senzorju zaradi difuznega prehajanja svetlobe

Najprej se bom osredotočil na izražanje prvega člena enačbe [2.2]: osvetljenost na senzorju zaradi difuznega prenosa svetlobe ($E_{difuzno}$).

V spodnji sliki sem skiciral eksperimentalno postavitev, na kateri temeljijo moji izračuni. Postavitev sestavlja vir usmerjene svetlobe, list papirja in svetlobni senzor.

Slika 1

Dvodimenzionalna postavitev na kateri bazirajo moji izračuni



Opomba: konstantne količine na zgornji skici so: Φ_0 , ki je svetlobni tok vira svetlobe; θ_0 , ki je ravinski (2-D) polovični kot snopa svetlobe; r , ki je razdalja med virom svetlobe in listom papirja; d , ki je razdalja med virom svetlobe in svetlobnim senzorjem; ter a_0 , ki je polmer okroglega senzorja. Količinama x in a vrednosti variirata: a je razdalja od središča svetlobnega senzorja; x pa odsek premice, ki teče med skozi svetlobe in svetlobni senzor (na razdalji a od njegovega središča), ki ga omejujeta senzor in list papirja.

S pomočjo zgornje skice lahko spremenljivo količino x izrazimo s spremenljivkama a in d z uporabo Pitagorovega izreka:

$$d^2 + a^2 = (r + x)^2$$

$$x = \sqrt{d^2 + a^2} - r$$

[2.3]

Izračunamo lahko tudi površino papirnate sfere, ki jo osvetljuje snop svetlobe:

$$A = \Omega r^2$$

[2.4]

kjer Ω predstavlja prostorski kot svetlobnega žarka (»Prostorski kot«, 2020). Prostorski koti si lahko predstavljamo kot tridimenzionalni kot, ki ga določajo stožasta oblika. Razmerje med prostorskim kotom in dvodimenzionalnim ravninskim kotom θ_0 je prikazano v tej enačbi (»Steradian«, 2023):

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$$

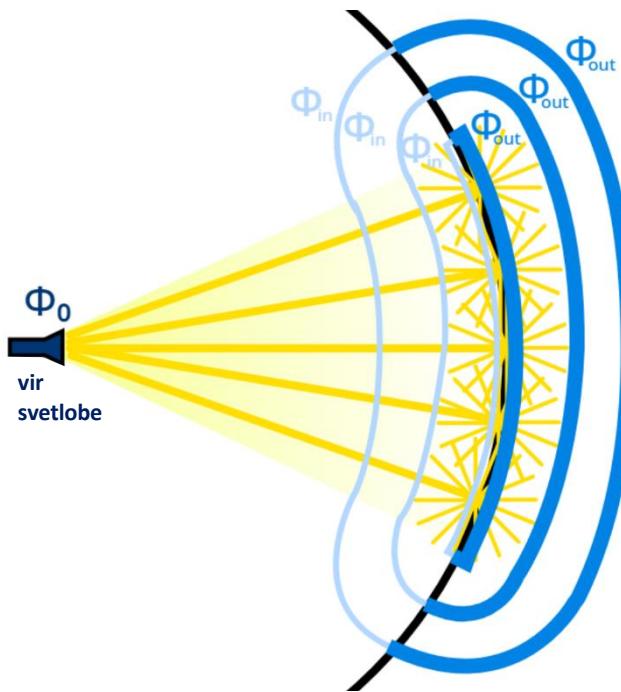
[2.5]

Odločil sem se za risanje sferično ukrivljenega lista papirja, saj je na ta način svetlobni tok svetlobnega vira Φ_0 enakomerno porazdeljen po celotni osvetljeni površini lista papirja (saj je vsaka točka na listu papirja oddaljena za enako razdaljo r od vira svetlobe). Svetlobni tok, ki ga list papirja sprejme, je enak svetlobnemu toku, ki ga vir svetlobe odda, torej: Φ_0 . V skladu z zakonom o ohranitvi energije mora list papirja oddajati (odbiti oziroma prepuščati) in absorbirati enako količino energije, kot jo je prejel $\Phi_0 = \Phi_{absorbirano} + \Phi_{emitirano}$ (Höpe, 2014).

Na spodnji skici modre črte (svetlo (Φ_{in}) in temno modre (Φ_{out})) skupaj predstavljajo površine, na katere je celokupni svetlobni tok odbite oziroma prepuščene svetlobe enak Φ_0 . Bolj ko se svetlobni tok porazdeli (bolj kot se oddaljujemo od lista papirja), večja je površina, na katero vpada svetlobni tok Φ_0 — in tem manjša je tam osvetlenost.

Slika 2

Slika, ki prikazuje površine na katere vpada enaka količina svetlobnega toka



Vpadni snop svetlobe si lahko predstavljamo kot mnogo posameznih žarkov, ki se ob interakciji s kosom papirja sipajo v vse smeri — efektivno vsak posamezen žarek postane neusmerjen vir svetlobe (na Sliki 2 to ponazarjajo majhne rumene črte) (First Principles of Computer Vision, 2021; »Lambert's cosine law«, 2023). V skladu s Huygensovim načelom se vsi ti neodvisni svetlobni viri lahko seštejejo v en nov svetlobni vir, kater svetloba se enakomerno širi v vse smeri (»Huygensovo načelo«, 2022). Svetloba se bo enakomerno širila na vse strani osvetljenega kosa papirja — nekaj je bo potovalo navzven, nekaj pa navznoter. To je prikazano s svetlo in temno modrimi površinami, ki predstavljata svetlobni tok, ki potuje navznotraj (Φ_{in}) oziroma ven iz papirnate sfere (Φ_{out}). Ker velja, da je $\Phi_0 = \Phi_{in} + \Phi_{out}$ in da je na območjih konstante osvetljenosti (modre površine prikazujejo območja konstantne osvetljenosti) svetlobni tok sorazmeren z vpadno površino, lahko izpeljemo, da je razmerje med svetlobnim tokom, ki potuje navzven, in skupnim svetlobnim tokom enako razmerju med zunanjim vpadnim površinom (temno modre črte) in celotno vpadno površino:

$$\frac{A_{out}}{A_{tot}} = \frac{\Phi_{out}}{\Phi_0}$$

[2.6]

kjer A_{out} predstavlja vpadno površino zunaj papirnate sfere (temno modra površina), A_{tot} pa vsoto svetlo modre površine ter temno modre površine.

Svetlobni tok, ki se potuje izven papirne sfere, mora najprej potovati skozi sam papirni list. Dejanski svetlobni tok, ki ga zaznamo na drugi strani papirne sfere, bo torej, kot smo že omenili,

$$\Phi' = T\Phi_{out}$$

[2.7]

kjer je Φ' svetlobni tok prepuščene svetlobe.

Če zdaj želimo določiti osvetljenost svetlobe, ki preide skozi list papirja, jo lahko izrazimo z enačbo:

$$E = \frac{\Phi'}{A_{out}}$$

[2.8]

V zgornji enačbi sem uporabil A_{out} , saj je to površina preko katere se porazdeli prepuščen svetlobni tok. Če v tej enačbi substituiramo Φ' z $T\Phi_{out}$ iz izraza [2.7] ter Φ_{out} z $\frac{A_{out}}{A_{tot}}\Phi_0$ iz enačbe [2.6], dobimo naslednje:

$$E = \frac{T\Phi_{out}}{A_{out}} = \frac{T}{A_{out}} \frac{A_{out}}{A_{tot}} \Phi_0$$

$$E = \frac{T\Phi_0}{A_{tot}}$$

[2.9]

Prej smo že razpravljali, da se celotna površina, preko katere je porazdeljen svetlobni tok (A_{tot}), povečuje z oddaljenostjo od lista papirja. Površino A_{tot} mi je uspelo izraziti kot:

$$A_{tot} = 2\pi(1 - \cos \theta_0)((r + x_v)^2 + (r - x_v)^2) + 2\pi^2 x_v \left(\left(r \cos \theta_0 - \frac{2x_v}{\pi} \sin \theta_0 \right) \tan \theta_0 + \frac{2x_v}{\pi \cos \theta_0} \right)$$

[2.10]

kjer x_v predstavlja razdaljo od osvetljene površine papirja. Izpeljavo zgornjega izraza si lahko ogledate v *Prilogi 1*.

Če se ponovno ozremo na *Sliko 3*, vidimo, da smo razdaljo med osvetljeno površino in senzorjem označili z x . To pomeni, da če želimo izračunati osvetljenost na določeni točki na svetlobnem senzorju, moramo v enačbi [2.10] x_v nadomestiti z x . Vpadni svetlobni tok na takem infinitezimalno majhnem območju na svetlobnem senzorju bo prav tako neskončno majhen:

$$d\Phi_s = E \cdot dA_s$$

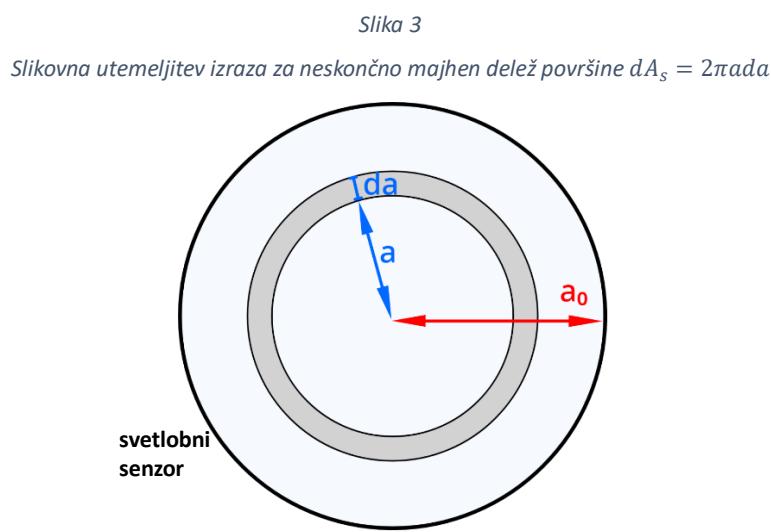
[2.11]

kjer $d\Phi_s$ predstavlja neskončno majhen del svetlobnega toka, ki vpada na svetlobni senzor; dA_s pa neskončno majhen delež površine tega senzorja. dA_s lahko izrazimo kot:

$$dA_s = 2\pi a da$$

[2.12]

kjer je da infinitezimalna sprememba v razdalji med središčem senzorja, kar lahko vidimo v spodnji shemi:



Infinitezimalno vrednost svetlobnega toka na poljubni točki na senzorju je lahko izrazimo z da (enačbi [2.11] in [2.12]) in integriramo, da dobimo vrednost svetlobnega toka na svetlobnem senzorju Φ_s :

$$d\Phi_s = E 2\pi a da$$

$$\int_{\Phi_s=0}^{\Phi_{s0}} d\Phi_s = \Phi_{s0} = 2\pi \int_{a=0}^{a_0} E a da$$

[2.13]

Če želimo najti vrednost povprečne osvetljenosti na senzorju zaradi difuznega prehajanja svetlobe, bomo delili Φ_s s celotno površino senzorja A_s , ki ima vrednost $A_s = \pi a_0^2$:

$$E_{difuzno} = \frac{\Phi_{s0}}{A_s} = \frac{\Phi_{s0}}{\pi a_0^2}$$

[2.14]

Zdaj lahko pričnemo vstavljati in združevati vse izraze, ki smo jih izračunali: najprej združimo enačbo [2.14] z enačbo [2.13], nato pa še z izrazi [2.9], [2.10] in [2.3]:

$$\begin{aligned} E_{difuzno} &= \frac{2\pi}{\pi a_0^2} \int_{a=0}^{a_0} Eada \\ E_{difuzno} &= \frac{2}{a_0^2} \int_{a=0}^{a_0} \frac{T\Phi_0}{A_{tot}} ada \\ E_{difuzno} &= \frac{2T\Phi_0}{a_0^2} \int_{a=0}^{a_0} \frac{a}{2\pi(1 - \cos \theta_0)((r + x_v)^2 + (r - x_v)^2) + 2\pi^2 x_v \left(\left(r \cos \theta_0 - \frac{2x_v}{\pi} \sin \theta_0\right) \tan \theta_0 + \frac{2x_v}{\pi \cos \theta_0} \right)} da \\ E_{difuzno} &= \frac{T\Phi_0}{\pi a_0^2} \int_{a=0}^{a_0} \frac{a}{(1 - \cos \theta_0) \left(d^2 + a^2 + (\sqrt{d^2 + a^2} - 2r)^2 \right) + (\sqrt{d^2 + a^2} - r)(\pi r \sin \theta_0 + 2(\sqrt{d^2 + a^2} - r) \cos \theta_0)} da \end{aligned} \quad [2.15]$$

Ker premer svetlobnega senzorja običajno ne presega dolžine nekaj milimetrov, lahko predpostavimo, da je $a_0 \ll d$, kar nam omogoča, da enačbo [2.15] poenostavimo v:

$$\begin{aligned} E_{difuzno} &= \frac{T\Phi_0}{2\pi(1 - \cos \theta_0)(d^2 + (d - 2r)^2) + 2\pi(d - r)(\pi r \sin \theta_0 + 2(d - r) \cos \theta_0)} \\ E_{difuzno} &= \frac{T\Phi_0}{2\pi(r^2(4 - 2 \cos \theta_0 - \pi \sin \theta_0) + rd(\pi \sin \theta_0 - 4) + 2d^2)} \end{aligned} \quad [2.16]$$

2.1. Izražanje komponente osvetljenosti na senzorju zaradi regularnega prehajanja svetlobe

Zdaj, ko sem definiral osvetlitev na senzorju zaradi difuznega prehajanja svetlobe, bom nadaljeval z iskanjem izraza za osvetljenost na senzorju zaradi regularnega prehajanja ($E_{regularno}$).

Ker že predpostavljam, da je dolžina a_0 zanemarljiva napram d , lahko izračunam $E_{regularno}$ kot osvetljenost v točki na sredini senzorja na razdalji d od vira svetlobe. $E_{regularno}$ tako lahko izrazim kot:

$$E_{regularno} = \frac{T\Phi_0}{\Omega d^2}$$

[2.17]

kjer Ωd^2 opisuje površini na papirni sferi, ki ga snop svetlobe osvetljuje na določeni razdalji d od svetlobnega vira. Z vstavljanjem enačbe [2.5] v zgornja dobimo:

$$E_{regularno} = \frac{T\Phi_0}{2\pi(1 - \cos \theta_0)d^2}$$

[2.18]

2.2. Končni izraz osvetljenosti na senzorju

Zdaj, ko sem izrazil $E_{difuzno}$ in $E_{regularno}$, lahko vstavim enačbi [2.16] in [2.18] v enačbo [2.2], da dobim izraz za osvetljenost na senzorju (E_s). Izraz izgleda takole:

$$E_s = \frac{T\Phi_0\alpha}{2\pi(r^2(4 - 2 \cos \theta_0 - \pi \sin \theta_0) + rd(\pi \sin \theta_0 - 4) + 2d^2)} + \frac{T\Phi_0(1 - \alpha)}{2\pi(1 - \cos \theta_0)d^2}$$

[2.19]

To je izraz, ki ga bom v tej raziskovalni nalogi uporabljal za modeliranje osvetljenosti prepuščenega snopa svetlobe na senzorju.

3. Metoda dela in analiza podatkov

V naslednjem delu te raziskovalne naloge, bom opisal svoj eksperimentalni postopek in analizo podatkov, ki sem jo uporabil za interpretacijo pridobljenih podatkov.

3.1. Pripomočki in orodja

Pripomočki in orodja, ki sem jih uporabil v eksperimentu, so bila naslednja:

- vir svetlobe (bela svetilka)
- listi belega celuloznega papirja (razred³ 80 g/m²)
- stojala in druge strukturne podpore, ki sem jih uporabil za postavitev eksperimenta
- svetlobni senzor (na mojem pametnem telefonu) z negotovostjo ± 1 lx (luks)⁴
- merilni trak z napako $\pm 0,005$ m
- kljunasto merilo z napako $\pm 0,0005$ m

Meritve sem izvajal v zatemnjeni sobi. Podatke sem zbiral s pomočjo mobilne aplikacije *Phyphox*. Za analizo in predstavitev podatkov sem uporabljal programe *LoggerPro*, *Excel* in *Desmos*. Skice in diagrami so bili ustvarjeni v urejevalniku slik *Scratch* in *SketchUp*.

3.2. Določanje lastnosti vira svetlobe

Preden sem lahko nadaljeval s kakršnim koli eksperimentalnim delom, sem najprej moral določiti lastnosti snopa svetlobe, ki sem ga uporabil; določiti sem moral ravinski polovični kot žarka (do zdaj sem ga označeval kot θ_0) in svetlobni tok, ki ga je svetilka oddajala (označen kot Φ_0). Vrednosti teh dveh količin sem določil tako, da sem svetlobni žarek usmeril pravokotno na ravno belo steno z različnih razdalj (d) in izmeril osvetljenost (E) in premer (D) osvetljene lise na steni. *Priloga 2* prikazuje vrednosti razdalj, osvetljenosti in premerov, ki sem jih izmeril. Potrebno je omeniti, da sem d izmeril kot razdaljo med koncem svetilke in steno oziroma senzorjem ter da sem osvetljenost meril na sredini osvetljene

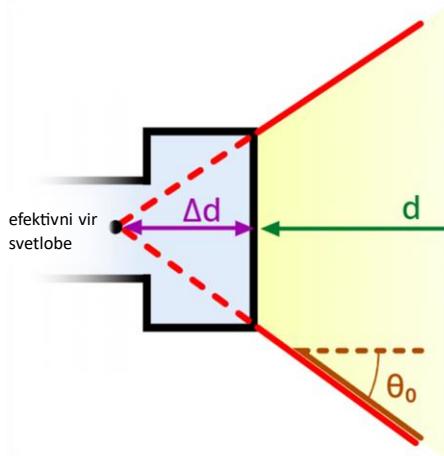
³ Poznamo več razredov komercialnega papirja, ki se razlikujejo v gramaturi (tj. masa kvadratnega metra papirja) (Weiss, 2019; Biermann, 1996)

⁴ lx je oznaka za luks. Zapis v osnovnih enotah SI: $lx = cd \cdot m^2/m^4$ (kandela steradian na kvadratni meter).

lise. Na spodnji skici lahko vidimo, da efektivni vir svetlobe ne leži na koncu svetilke, temveč znotraj nje, zato bilo potrebno pri razdaljo d upoštevati popravek v vrednosti Δd :

Slika 4

Prikaz efektivnega vira svetlobe in popravka Δd



Vrednost θ_0 je bom zato izračunal kot:

$$\theta_0 = \arctan \frac{D}{2(d + \Delta d)}$$

[3.1]

Kjer je d razdalja med svetilko in steno, D premer osvetljene površine na steni in Δd popravek za d . Ker vrednosti Δd ne poznamo, sem se odločil prikazati graf funkcije D v odvisnosti od d . Ta graf je bil linearen, horizontalno premaknjen za $-\Delta d$ ter imel naklon enak $m = \frac{\text{change in } D}{\text{change in } d}$. Z računanjem arcus tangensa polovične vrednosti naklona $\left(\frac{m}{2}\right)$ sem izračunal, da je vrednost θ_0 enaka 0.162.

Z znano vrednostjo ravninskega polovičnega kota, lahko preprosto izračunamo vrednost prostorskega kot Ω :

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta_0) = 2\pi(1 - \cos 0.1620)$$

$$\Omega = 0.0822$$

[3.2]

Pri določanju vrednosti svetlobnega toka vira svetlobe Φ_0 sem zopet moral upoštevati popravek razdalje Δd , hkrati pa tudi debelino senzorja (telefona), ki sem jo izmeril kot $w = 0.0140 \text{ m} \pm 0.0005 \text{ m}$:

$$\Phi_0 = E \cdot A = E \cdot \Omega(d + \Delta d - w)^2$$

[3.3]

Tokrat, da bi se izognil ukvarjanju s popravki ($\Delta d - w$), sem narisal graf dolžine d kot funkcijo recipročne vrednosti kvadratnega korena osvetljenosti ($\sqrt{E^{-1}}$), s čimer sem dobil linearni graf, ki je navpično premaknjen za vrednosti ($\Delta d - w$) in ima naklon $m = \frac{\text{change in } d}{\text{change in } \sqrt{E^{-1}}} = d \cdot \sqrt{E}$. S kvadriranjem naklona m in množenjem kvadrata z Ω sem lahko izračunal, da je vrednost $\Phi_0 = 4,23 \text{ lm}^5$. Začetna vrednost grafa je bila $-(\Delta d - w)$ in je imela vrednost $-0,1416 \text{ m}$. Vrednost Δd sem tako izračunal kot $0,1556 \text{ m}$.

Grafa D v odvisnosti od d in d v odvisnosti od $\sqrt{E^{-1}}$ sta prav tako podana v *Prilogi 2*.

3.3. Spreminjanje razdalje med virom in listom papirja (r)

V prvem delu eksperimenta sem raziskoval, kako se spreminja osvetljenost na senzorju (E_s) s tem, ko spremjam položaj lista papirja med virom svetlobe in senzorjem (r). Razdalja r je bila neodvisna spremenljivka in je bila izmerjena z merilnim trakom z napako $\pm 0,005 \text{ m}$, medtem ko je bila osvetljenost (odvisna spremenljivka) določena s svetlobnim senzorjem na mojem telefonu, ki ima napako $\pm 1 \text{ lx}$.

Surovi neobdelani podatki teh meritev so podani v *Prilogi 3*. V enačbi, ki sem jo izpeljal v teoretičnem delu ([2.19]), lahko vidimo, kakšno bi vila teoretična odvisnost med količinama E_s in r :

$$E_s = \frac{T\Phi_0\alpha}{2\pi(r^2(4 - 2\cos\theta_0 - \pi\sin\theta_0) + rd(\pi\sin\theta_0 - 4) + 2d^2)} + \frac{T\Phi_0(1 - \alpha)}{2\pi(1 - \cos\theta_0)d^2}$$

[2.19]

V zgornji enačbi ne poznamo vrednosti dveh količin: prepustnosti T in razmerja difuzno prepuščene svetlobe α . Za določitev teh dveh količin lahko najprej izrazimo eno količino kot funkcijo druge (saj je osnovno funkcijo E_s v odvisnosti od r nemogoče linearizirati). S preurejanjem enačbe [2.19] sem izrazil T kot funkcijo α :

⁵ lm je oznaka za *lumen*. Zapis v osnovnih enotah SI: lm = cd · m²/m² (kandela steradian)

$$T = \frac{E_s}{\Phi_0 \left(\frac{\alpha}{2\pi(r^2(4 - 2\cos\theta_0 - \pi\sin\theta_0) + rd(\pi\sin\theta_0 - 4) + 2d^2)} + \frac{(1-\alpha)}{2\pi(1 - \cos\theta_0)d^2} \right)}$$

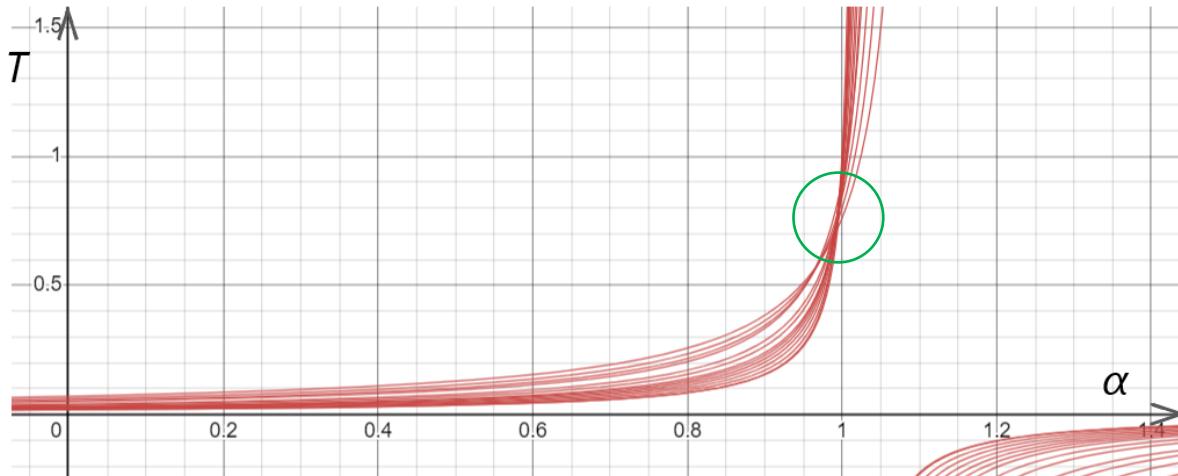
[3.4]

Nato sem narisal zgornjo funkcijo $T(\alpha)$ za vsak par eksperimentalno izmerjenih r in E_s . Tako sem dobil snop krivulj, ki so prikazane na *Sliko 5* (vrednost razdalje d za ta snop funkcij je $d = 0,20$ m). Vrednosti, ki so očitno izstopale sem izločil—pomembno je poudariti, da so imele vse izstopajoče vrednosti vrednost r podobno vrednosti d (glej *Prilog 3*).

Na *Sliki 5* opazimo, da se večina grafov seka v nekem ožjem območju, ki sem ga označil z zelenim krogom. Tukaj snop funkcij tvori najožji pas in tu se nahajat vrednosti T in α , ki se najbolje prilegata snopu funkcij.

Slika 5

Snop funkcij T v odvisnosti od α za vse pare eksperimentalno določenih vrednosti r in E_s , kjer je $d = 0.20$ m



Opomba: zeleni krog označuje najožji pas, ki ga tvori snop funkcij. Graf je narejen v grafičnem kalkulatorju Desmos. Vidimo, da se snop funkcij nadaljuje v spodnjem desnem kotu, vendar vrednosti funkcij tam nimajo smisla – prepustnost namreč ne more zavzemati negativnih vrednosti (T je omejen na interval $[0,1]$).

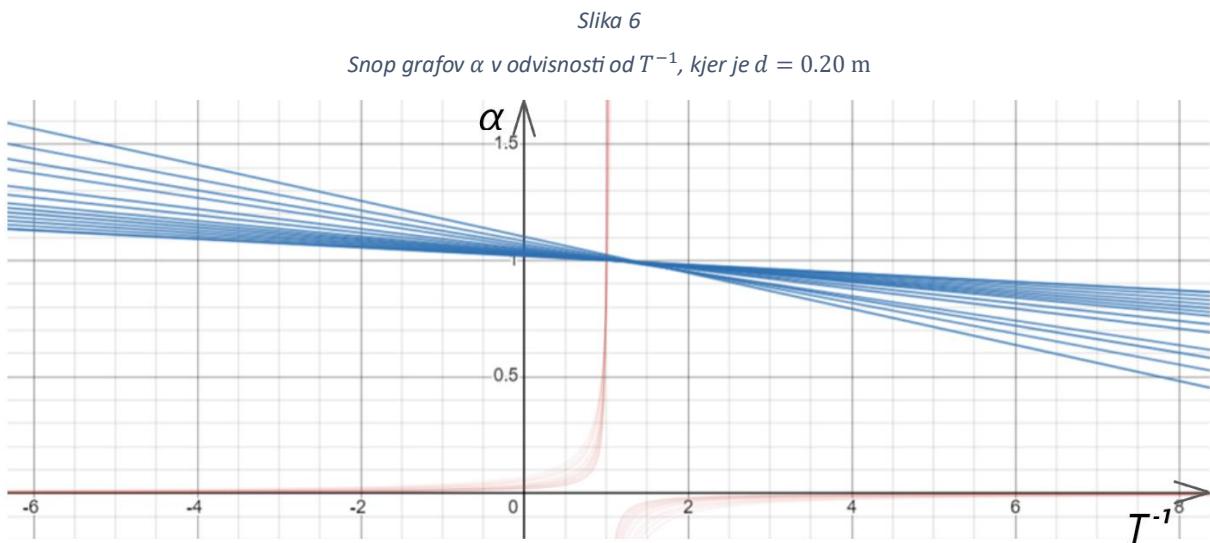
Da sem ugotovil, pri kateri vrednosti T je snop funkcij najožji, sem lineariziral funkcijo $T(\alpha)$ tako, da sem enačbo [3.4] preuredil v naslednji izraz:

$$\alpha = \frac{\frac{E_s}{\Phi_0 T} - \frac{1}{2\pi(1 - \cos\theta_0)d^2}}{\frac{1}{2\pi(r^2(4 - 2\cos\theta_0 - \pi\sin\theta_0) + rd(\pi\sin\theta_0 - 4) + 2d^2)} - \frac{1}{2\pi(1 - \cos\theta_0)d^2}}$$

[3.5]

kjer je α linearno sorazmeren z T^{-1} . Z uporabo spletnega grafičnega kalkulatorja *Desmos* sem nato izrisal graf funkcije standardnega odklona $\alpha(T^{-1})$ za vse pare E_s in r v odvisnosti T^{-1} . Na ta način mi je uspelo najti vrednost T^{-1} , pri kateri so bele vrednosti snopa funkcij $\alpha(T^{-1})$ najmanj razpršene. Za primeru, ko je bil $d = 0,20$ m, sem določil, da je bila razpršenost (standardni odklon) vrednosti $\alpha(T^{-1})$ najmanjša takrat, ko je bila vrednost $T^{-1} = 1,3498$.

Spodnja slika prikazuje snop lineariziranih grafov $\alpha(T^{-1})$. Pri vrednosti $T^{-1} = 1,3498$ se vrednosti snopa funkcij $\alpha(T^{-1})$ najbolj približajo eni skupni vrednosti:



Opomba: graf je bil narejen v Desmosu. Prosojne rdeče črte v ozadju so originalen (nelineariziran) snop grafov.

Vrednost T sem izračunal kot:

$$T = \frac{1}{T^{-1}} = 0.7409$$

[3.6]

Tako sem ugotovil, da je prepustnost papirja na razdalji $d = 0.20$ m znašala 0.7409. Prepustnosti pri ostalih dolžinah d so podane v *Tabeli 1*.

Da sem našel še vrednost α , sem preprosto vstavil sveže izračunano vrednost T v zgornjo funkcijo $\alpha(T^{-1})$ za vsak par vrednosti r in E_s ter izračunal aritmetično sredino dobljenih vrednosti. Za primer, ko je bil $d = 0,20$ m, je aritmetična sredina α znašala 0,9929. To pomeni, da se 99,29 % vse svetlobe, prepuščene skozi papir, razprši, preostalih 0,71 % pa ostane nerazpršenih. Vrednosti α pri ostalih vrednosti d so prikazane v spodnji tabeli:

Tabela 1

d (m) \pm 0.005 m	T (prepustnosť)	α (delež razpršene svetlobe)
0.100	0.5803	0.9826
0.150	0.6919	0.9910
0.200	0.7409	0.9927
0.250	0.7414	0.9939
0.300	0.7491	0.9931
0.350	0.7513	0.9916
0.400	0.7435	0.9914
0.450	0.7432	0.9932
0.500	0.7281	0.9913

V Tabeli 1 vidimo, da pri manjših vrednostih d vrednosti svetlobne prepustnosti začnejo odstopati od ostalih. Zato sem izračunane podatke, pridobljene na razdalji $d=0,100$ m, izločil. Povprečne vrednosti prepustnosti T in deleža razpršene prepuščene svetlobe α so torej:

$$\bar{T} = \frac{T_2 + T_3 + T_4 + \dots + T_9}{8} = \frac{0.6919 + 0.7409 + 0.7414 + \dots + 0.7281}{8} = 0.7362$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_9}{8} = \frac{0.9910 + 0.9927 + 0.9939 + \cdots + 0.9913}{8} = 0.9923$$

[3.7]

kjer T_n in α_n predstavljata n -te vrednosti T in α pri n -ti dolžini d . Absolutne napake \bar{T} in $\bar{\alpha}$ sem izračunal kot največje odstopanje med povprečnimi vrednostmi in posameznimi vrednostmi T in α :

$$\Delta \bar{T} = \pm(\bar{T} - T_2) = \pm(0.7362 - 0.6919) = \pm 0.044$$

$$\Delta \bar{\alpha} = \pm(\bar{\alpha} - \alpha_4) = \pm(0.9923 - 0.9939) = \pm 0.0016$$

[3.8]

Vrednosti \bar{T} in $\bar{\alpha}$, ki sem ju dobil za svetlobo, ki prehaja skozi list belega tiskarskega papirja, sta:

$$\bar{T} = 0.74 \pm 0.04 \quad \bar{\alpha} = 0.992 \pm 0.002$$

[3.9]

To pomeni, da $74\% \pm 4\%$ vpadle svetlobe preide skozi list papirja in da je $99.2\% \pm 0.2\%$ te svetlobe prepuščene v obliki difuzno prepuščene svetlobe.

3.4. Spreminjanje števila listov papirja (N)

V drugem delu raziskovalne naloge sem raziskoval, kako se prepustnost papirja spreminja glede na debelino papirja, skozi katero svetloba prehaja. Razmerje med prepustnostjo (T) in dolžino poti, ki jo svetloba prepotuje skozi določen material (l), je definirano z naslednjim izrazom (Glick, 2024):

$$T = e^{-\mu l}$$

[3.10]

kjer je μ linearji absorpcijski koeficient materiala, l pa debelina materiala. Ključna opazka, ki jo moramo tu razbrati, je odvisnost med T in l , ki jo lahko opišemo kot $T \propto e^{-l}$.

Če logaritmiramo obe strani enačbe [3.10], dobimo nov izraz:

$$-\ln T = \mu l$$

[3.11]

Moje nadaljnje raziskovanje bo temeljilo na predpostavki, da svetloba prehaja skozi papir v skladno z enačbo [3.11] in, da bo moč opaziti logaritemsko odvisnost med prepustnostjo in debelino papirja, skozi katerega potuje svetloba.

Za ta del poskusa sem ponovil meritve in analizo podatkov, ki sem jih uporabil v prvem delu raziskovalne naloge, toda tokrat sem svetil skozi 2, 3 in 4 spojene liste papirja. Surovi podatki za te meritve so podani v *Prilogi 3. Tabela 2* spodaj prikazuje že obdelane podatke (ki sem jih obdelal na enak način kot v prvem delu), hkrati pa tudi povprečja deležev razpršene svetlobe ($\bar{\alpha}$), povprečja prepustnosti (\bar{T}) ter vrednosti njihovih negativnih logaritmov ($-\ln \bar{T}$) za posamezno število listov papirja (N).

Tukaj je primer, kako sem izračunal vrednosti in napake negativnih logaritmov povprečnih prepustnosti ($-\ln \bar{T}$) za $N = 2$. Absolutno napako ($\Delta(-\ln \bar{T})$) sem izračunal po naslednji formuli (Toggerson & Philbin, 2020):

$$\Delta \ln y = \frac{\Delta y}{y}$$

[3.12]

kjer y predstavlja poljubno količino. Absolutna napaka negativnega logaritma povprečne prepustnosti pri $N = 2$ je torej naslednja:

$$\Delta(-\ln \bar{T}) = \frac{\Delta \bar{T}}{\bar{T}} = \frac{\pm 0.0445}{0.3784} = \pm 0.12$$

[3.13]

Tabela 2

Obdelane vrednosti T in α pri različnih razdaljah d za vsak N , hkrati pa tudi vrednosti \bar{T} , $\bar{\alpha}$, in $-\ln \bar{T}$ za vsak N

N	d (m) ± 0.005 m	T	α	\bar{T}	$\bar{\alpha}$	$-\ln \bar{T}$
1	0.100	0.5803	0.9826	0.74 ± 0.04	0.992 ± 0.002	0.30 ± 0.02
	0.150	0.6919	0.9910			
	0.200	0.7409	0.9927			
	0.250	0.7414	0.9939			
	0.300	0.7491	0.9931			
	0.350	0.7513	0.9916			
	0.400	0.7435	0.9914			
	0.450	0.7432	0.9932			
	0.500	0.7281	0.9913			
2	0.250	0.3889	0.9974	0.38 ± 0.04	0.996 ± 0.007	0.98 ± 0.12
	0.300	0.3918	0.9969			
	0.350	0.3343	0.9887			
	0.400	0.3432	0.9909			
	0.450	0.3893	1.0006			
	0.500	0.4229	0.9993			
3	0.250	0.2119	0.9968	0.23 ± 0.02	0.995 ± 0.009	1.46 ± 0.09
	0.300	0.2402	0.9990			
	0.350	0.2295	0.9988			
	0.400	0.2524	0.9860			
4	0.250	0.1278	0.9901	0.12 ± 0.01	0.984 ± 0.008	2.09 ± 0.09
	0.300	0.1124	0.9789			
	0.350	0.1310	0.9912			
	0.400	0.1224	0.9756			

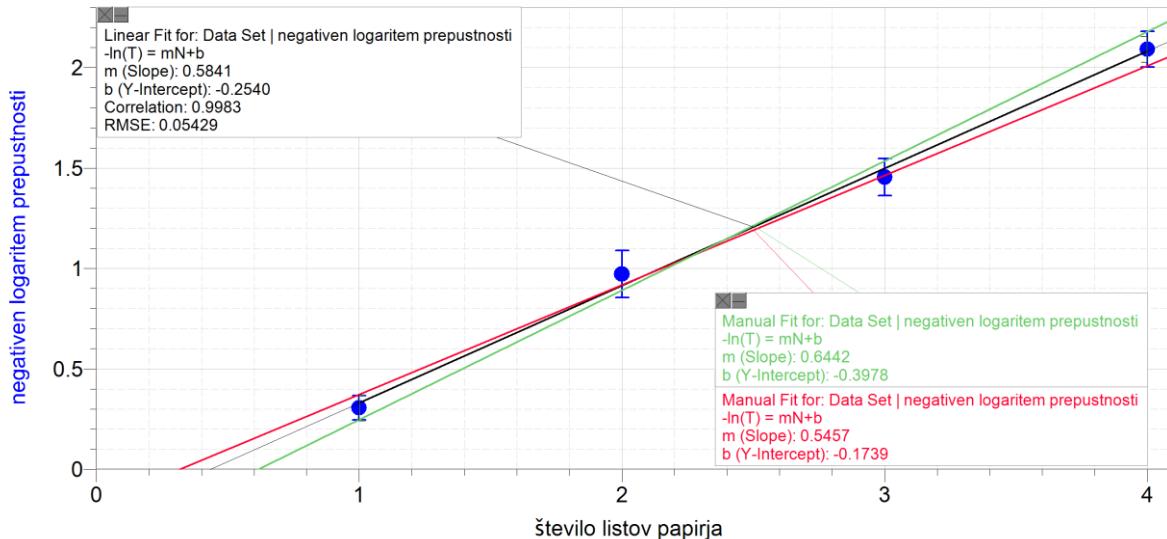
Opombe: vrednosti pri $N = 1$ in $d = 0.100$ m so obarvane rdeče, saj odstopajo in jih nisem vključil v izračune.

Pomembno je omeniti, da so bile vrednosti pri $N = 1$ in $d = 0.100$ m izključene zaradi odstopanj. Poleg tega vrednost α ne sme presegati vrednosti 1 (saj se lahko difuzno prepušča največ 100 % svetlobe); vendar, kot vidimo, to ne drži za vrednost α pri $N = 2$ in $d = 0.450$ m, kjer je $\alpha = 1.0006$. Ta vrednost je sicer le malo večja od 1 in je tako zgolj zaradi naključnih napak.

Vrednosti za $-\ln \bar{T}$ za vsak N iz Tabele 2 lahko tudi grafično predstavimo. Tak graf je prikazan v spodnji sliki:

Slika 7

Graf $-\ln \bar{T}$ za vsak N



Opomba: črna krivulja predstavlja linearno regresijo. Rdeča in zelena krivulja predstavljata premici z najmanjšim in največjim naklonom.

Linearna regresija iz Slike 7 ima 99,83% korelacijo in teče znotraj meja napake vseh narisanih točk. Graf bi moral potekati skozi koordinatno izhodišče, saj bi morala prepustnost, ko ni papirja ($N=0$), znašati 1 (in $-\ln \bar{T} = 0$); torej ima graf sistematično napako v navpični smeri za $-0,2540$.

Iz enačbe [3.11] lahko razberemo, da je linearни absorpcijski koeficient μ (prilagojenega na število listov papirja) enak naklonu zgornjega grafa. Z uporabo premic najmanjšega in največjega naklona lahko določimo absolutno napako μ :

$$\Delta\mu = \pm \frac{m_{max} - m_{min}}{2} = \pm \frac{0.6442 - 0.5457}{2} = \pm 0.049 \frac{1}{\text{št. listov papirja}}$$

[3.14]

Kjer je $\frac{1}{\text{št. listov papirja}}$ enota za količino μ . Vrednost μ bo tako:

$$\mu = 0.58 \frac{1}{\text{št. listov papirja}} \pm 0.05 \frac{1}{\text{št. listov papirja}}$$

[3.15]

Vrednost μ je podana v enotah $\frac{1}{\text{št. listov papirja}}$, saj nisem imel na razpolago opreme potrebno za natančno merjenje debeline uporabljenih listov papirja.

4. Ugotovitve in evalvacija

V tej raziskovalni nalogi sem izpeljal nov model za opisovanje pol-difuznega prehajanja snopa svetlobe skozi tanko plast difuznega materiala. Izpeljani model sem tudi preizkusil med raziskovanjem lastnosti svetlobe, ki prehaja skozi bel celulozni papir.

Optične lastnosti papirja so bile predhodno obsežno raziskane in mnogo raziskav je bilo že opravljenih v povezavi s svetlobno prepustnostjo papirja. Rezultati izvedenega eksperimenta kažejo, da en sam list belega celuloznega tiskalnega papirja (z gramaturo 80 g/m^2) prepušča $0,74 \pm 0,04$ svetlobe. Te rezultate je težko primerjati z vrednostmi v literaturi, saj obstaja veliko dejavnikov, ki vplivajo na prepustnost papirja, vključno s premerom celuloznih vlaken, debelino lista in prisotnostjo drugih kemikalij — v literaturi vrednosti prepustnosti listov papirja segajo od 10 % do preko 90 % (Zhu et al., 2013; Zhang et al., 2018). Za svetlobno prepustnost tiskalnega papirja, ki sem ga uporabil, mi v literaturi ni uspelo najti nobenih že določenih vrednosti, saj se za opisovanje fotometričnih lastnosti komercialnih vrst papirja običajno uporablja količini *motnost* in *prosojnost*, ki ju definira izključno regularna komponento prepuščene svetlobe (Burley et al., 2004; DiLaura et al., 2011).

Poleg vrednosti svetlobne prepustnosti sem izračunal tudi delež vse prepuščene svetlobe, ki skozi list papirja preide difuzno: vrednost α , ki sem jo pridobil, je znašala $0,992 \pm 0,002$. Ta rezultat je intuitivno koherenten, saj je kateri koli predmet, ki ga postavimo za list papirja, nerazpoznaven — svetloba, ki preide skozi list papirja, je v visoke meri razpršena. Druge študije tudi kažejo na to, da je svetloba prepuščena skozi papir pretežno difuzna in ne regularna (Zhu et al., 2013).

Naslednja ugotovitev te raziskovalne naloge je, da sta prepustnost in debelina lista papirja sorazmerni ena z drugo, skladno z izrazom $T = e^{-\mu l}$. Ugotovil sem, da pri večjem številu spojenih listov papirja količina prepuščene svetlobe pada eksponentno s korelacijo 99,83 % (to je razvidno iz *Slike 7*). Poleg velikega korelacijskega koeficiente je druga prednost pridobljenih rezultatov njihova konsistentnost nizka razpršenost, kar je vidno v relativno nizkih napakah, ki jih je mogoče videti v *Tabeli 2*. Po drugi strani, pa ima graf na *Sliki 7* sistematično napako, ki znaša $-0,2540$. Eden od možnih izvorov te

sistematične napake je morebitna nehomogenost svetilke — to bi pomenilo, da svetlobni tok ni bil enakomerno porazdeljen preko celotnega snopa. Drugi vzrok za napako verjetno izvira iz neprimerne okolice v kateri sem izvajal poskus; kljub temu, da je bil poskus izveden v zatemnjeni sobi, so stene in tla sobe svetlih barv, in so zato dobro odbijale svetlubo. To bi lahko povzročilo dodatne, neželene odboje svetlobe proti senzorju, kar bi povzročilo napako v meritvah. Možna rešitev te težave bi bila, da vse površine prekril z materialom z visoko absorpcijo, kot je na primer črn tekstil.

Tudi model, ki sem ga izpeljal, ima omejitve, ki izhajajo iz poenostavitev, ki so bile narejene. Prva poenostavitev je bila predpostavka, da si lahko sicer raven list papirja predstavljam kot sferično ukrivljenega in s središčem v izvoru snopa svetlobe. Ta predpostavka drži v primerih, ko so razdalje med listom papirja in senzorjem (x) dovolj velike, saj lahko predstavljam, da je vrednosti x med senzorjem in katero koli točko na osvetljenem odseku sferične površine konstantna (model se v tem primeru ne bi močno raziskoval od dejanskega stanja). Pri manjših razdaljah med listom papirja in senzorjem pa ta poenostavitev preneha držati. To lahko opazimo v neobdelanih podatkih (glej *Prilog 3*), kjer meritve E – ko sta si vrednosti r in d podobni – začnejo odstopati in so posledično bile izločene. Poleg tega je izračunana vrednost prepustnosti lista papirja pri $N = 1$ in $d = 0,100$ m prav tako izstopala od ostalih vrednosti, saj je pri takoj majhni razdalji med izvorom in senzorjem vrednost x vedno premajhna. Druga poenostavitev, ki sem jo uporabil, je pa bila ta, da je premer svetlobnega senzorja na mojem telefonu veliko manjši od razdalje med svetilko in senzorjem ($a_0 \ll d$), kar je omogočilo poenostavitev mojega modela. Ta predpostavka, za razliko od prejšnje, ni povzročala težav.

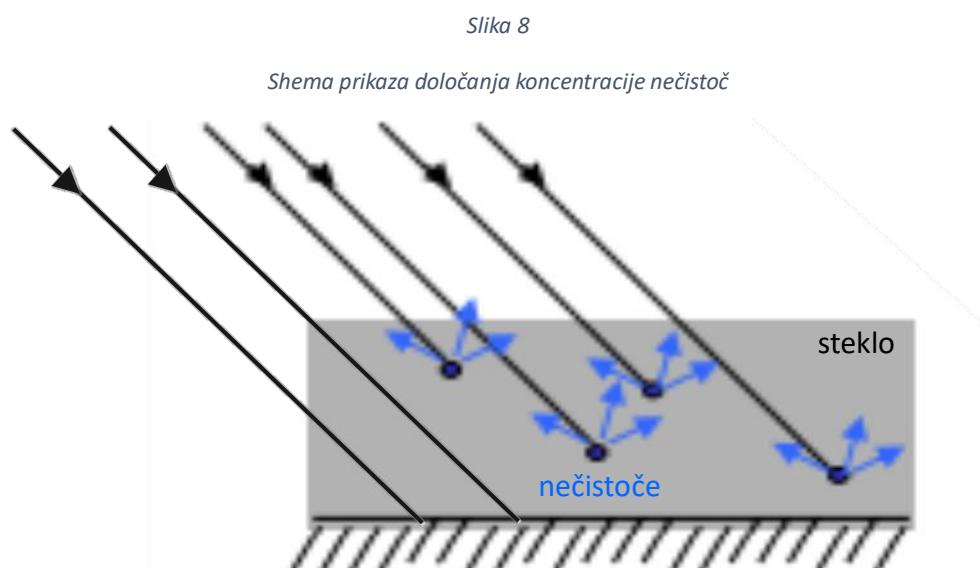
Omejitev moje nove analize podatkov je – poleg njene kompleksnosti – ta, da lahko izračuna nesmiselne vrednosti. Na primer, ko sem računal vrednost α pri $N = 2$ in $d = 0,450$ m, je izračunala vrednost prišla 1,0006. To bi pomenilo, da je več kot 100 % prepuščene svetlobe prešlo difuzno. Ta vrednost pa je le malo večja od 1 in je najverjetneje posledica naključnih napak neobdelanih podatkov. Sicer sta pa moj model in analiza podatkov uspela dosledno določiti vrednosti α pri različnih N in d . Vse izračunane vrednosti α so bile v območju 0,9756 in 0,9993 (brez upoštevanja 1,0006). Ta doslednost rezultatov pozitivno prispeva k veljavnosti rezultatov raziskovalne naloge.

5. Praktična aplikacija

Fizikalni model, ki sem ga razvil v tej raziskovalni nalogi se lahko aplicira v naslednjih praktičnih situacijah. Predstavljenih predlogov še niso praktično preizkušene in zato ponujajo možnosti za nadaljnje raziskovanje.

5.1. Določanje koncentracije nečistoč v materialih

V primeru, ko imamo material, ki svetlobo pretežno prepušča regularno (kot na primer steklo) in ki vsebuje delce, ki sipajo svetlobo (nečistoče) – kot je prikazano na *Sliko 8* – bi bilo z mojim modelom moč določati koncentracijo teh nečistoč.



Opomba: prirejeno po sliki iz članka Pfaff (2022).

Z modelom bi lahko izračunali vrednost deleža razpršene svetlobe α , ki pa je sorazmeren s koncentracijo nečistoč, ki difuzno sipajo svetlobo. Znotraj optike že obstajajo uveljavljene odvisnosti med fotometričnimi količinami in koncentracijo preučevanih delcev, kot na primer v Beer-Lambertovem zakonu (Rafferty, 2023):

$$A = \varepsilon lc$$

[5.1]

kjer je A absorbanca, ε molarni absorpcijski koeficient, c pa koncentracija absorbirajoče snovi. Odvisnost med α in c ni nujno premo sorazmerna kot med A in c , in bi jo bilo treba določiti z nadaljnjam raziskovanjem.

5.2. Merjenje majhnih debelin

Pri merjenju tankih membran in lističev, bi si prav tako lahko pomagali z razvitim modelom. Če določimo vrednost prepustnost T , lahko ob poznovanju linearnega absorpcijskega koeficiente μ določimo razdaljo, ki jo je svetloba prepotuje skozi material. Izraz [3.10] ($T = e^{-\mu l}$), s katerim smo se že srečali, lahko preuredimo tako, da izrazimo debelino materiala:

$$l = -\frac{\ln T}{\mu}$$

[5.2]

Takšen pristop k merjenju debelin materialov bi si izbrali, če je material pretanek, da bi ga natančno določili z napravami za merjenje razdalj.

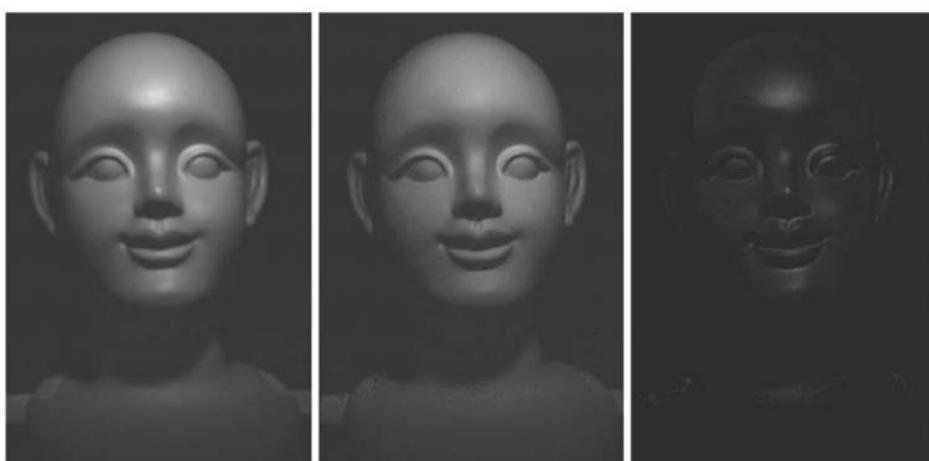
5.3. Računalniško ustvarjene slike

Zadnja praktična aplikacija modela, ki bi jo izpostavil, je v računalniškem ustvarjanju slik oziroma CGI (ang. *Computer-generated imagery*). Ena izmed večjih problemov s katerimi se programerji soočajo pri simuliraju realnega sveta je imitacija svetlobe in njenih interakcij z raznimi snovmi. Pri simulaciji difuznega in regularnega prehajanja ter odboja svetlobe si zato pomagajo s fizikalnimi modeli, kot je ta, ki ga predstavim v nalogi.

Na spodnji sliki je prikazan rezultat študije Tan et al. (2004), kjer so se lotili prav te problematike. Na Sliki 9 je predstavljeno, kako so raziskovalci računalniško ločili difuzno in regularno komponento odboja svetlobe posnete fotografije s pomočjo fizikalnega modela, ki je opisoval razmerje med difuzno in regularno odbito svetobo:

Slika 9

Izvorna slika (levo), difuzna komponenta odboja (sredina) in regularna komponenta odboja (desno)



Opomba: vir slike iz študije Tan et al. (2004).

6. Viri in literatura

Biermann, C. J. (1996). Handbook of pulping and papermaking. *Elsevier*.

<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-097362-0.X5000-6>

Braslavsky, S. E. (2007). Glossary of terms used in photochemistry, 3rd Edition (IUPAC

Recommendations 2006). *Pure and Applied Chemistry*. <https://doi.org/10.1351/pac200779030293>

Burley, J., Evans, J., & Youngquist, J. A. (2004). Encyclopedia of Forest Sciences. *Elsevier*.

Diffuse reflection. (2023). *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Diffuse_reflection#cite_note-5

DiLaura, D. L., Houser, K. W., Mistrick, R. G., Steffy, G. R. (2011) The Lighting Handbook, Tenth Edition: Reference and Application. *Illuminating Engineering Society*.

First Principles of Computer Vision. (2021). Reflectance Models | Radiometry and Reflectance [Video].

YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=HPNW0we-ft0>

Glick, Y. (2024). Linear attenuation coefficient. *Radiopaedia*. <https://radiopaedia.org/articles/linear-attenuation-coefficient>

Höpe, A. (2014). Diffuse reflectance and transmittance. *Experimental Methods in The Physical Sciences*. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-386022-4.00006-6>

Huygensovo načelo. (2022). *Wikipedija*. https://sl.wikipedia.org/wiki/Huygensovo_na%C4%8Delo

Kawahara, K. (2020). Evaluation of Dispersibility of Individualized Cellulose Nanofiber (CNF). *Shimadzu corporation*. <https://www.shimadzu.com/an/literature/uv/jpa120011.html>

Lambert's cosine law. (2023). *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert%27s_cosine_law

Pfaff, G. (2022). The world of inorganic pigments. *ChemTexts*. <https://doi.org/10.1007/s40828-022-00166-1>

Prostorski kot. (2020). *Wikipedija*. https://sl.wikipedia.org/wiki/Prostorski_kot

Rafferty, J. P. (2023). Beer's law. *Encyclopaedia Britannica*.

<https://www.britannica.com/science/Beers-law>

Steradian. (2023). *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/wiki/Steradian>

Tan, R. T., Nishino, K., & Ikeuchi, K. (2004). Separating Reflection Components Based on Chromaticity and Noise Analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*.

<https://doi.org/10.1109/TPAMI.2004.90>

Toggerson, B. & Philbin, A. (2020). Physics 132 Lab Manual: Understanding Data. *University of Massachusetts Amherst Libraries*. <https://openbooks.library.umass.edu/p132-lab-manual/chapter/uncertainty-for-natural-logarithms>

Weiss, P. (2019). Zakaj besede »gramatura« ni v SSKJ. *Jezikovna svetovalnica*. <https://svetovalnica.zrc-sazu.si/topic/3765/zakaj-besede-gramatura-ni-v-sskj>

Weisstein, E. W. (n.d.) Pappus's Centroid Theorem. *MathWorld*.

<https://mathworld.wolfram.com/PappussCentroidTheorem.html>

Zhang, X., Xiao, N., Wang, H., Liu, C., & Pan, X. (2018). Preparation and Characterization of Regenerated Cellulose Film from a Solution in Lithium Bromide Molten Salt Hydrate. *Polymers*. <https://doi.org/10.3390/polym10060614>

Zhu, H., Parvinian, S., Preston, C., Vaaland, O., Ruan, Z., & Hu, L. (2013). Transparent nanopaper with tailored optical properties. *Nanoscale*. <https://doi.org/10.1039/C3NR00520H>

6.1. Uporabljene aplikacije

Desmos Studio. (2024). *Desmos Graphing Calculator* [online graphing calculator].

<https://www.desmos.com/calculator>

Google. (2017). *SketchUp* (version 17.2.2555) [computer software]. Trimble Inc.

<https://help.sketchup.com/en/downloading-older-versions>

RWTH Aachen University. (2024). *phyphox* (version 1.1.13) [mobile app]. Google Play.

https://play.google.com/store/apps/details?id=de.rwth_aachen.phyphox

Scratch Foundation. (2024). *Scratch* [online paint editor]. <https://scratch.mit.edu/>

Vernier Software & Technology. (2023). *Logger Pro* (version 3.4.8.2) [computer software]. Vernier.

Link: <https://www.vernier.com/product/logger-pro-3/>

7. Priloge

7.1. Priloga 1

Računanje A_{tot} na razdalji x_v od lista papirja

V nadaljevanju te priloge bom določil izraz za površino A_{tot} v odvisnosti od razdalje od osvetljene površine lista papirja.

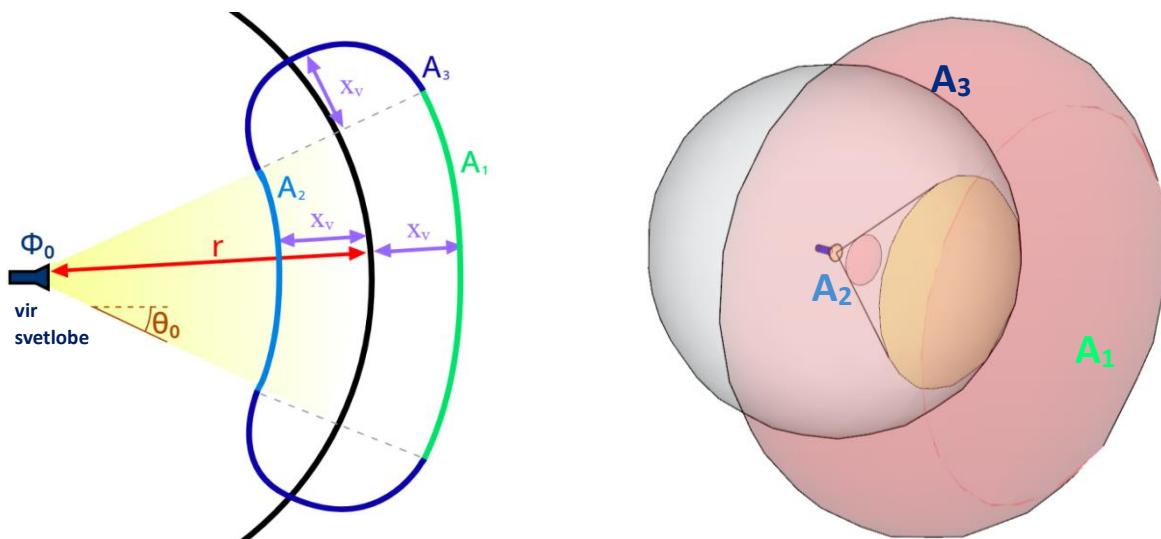
Na Sliki 10 vidimo, da je celotna površina v resnici vsota treh manjših površin, ki sem jih označil z A_1 , A_2 in A_3 (površina A_3 je označena le enkrat na dvodimenzionalni skici, saj se ovije okoli, kot lahko vidimo na trodimenzionalni skici):

$$A_{tot} = A_1 + A_2 + A_3$$

[2.10.1]

Slika 10

Dvo- in trodimenzionalna skica površine A_{tot}



Opomba: dvo- in trodimenzionalni skici nista v razmerju. Rumena površina v trodimenzionalni skici predstavlja osvetljeno površino na papirnatih sferah. Trodimenzionalna skica je bila narejena v programu SketchUp.

Na Sliki 10 vidimo, da sem razdaljo od osvetljene površine papirja označil z x_v .

Površini A_1 in A_2 lahko izrazimo s prostorskimi koti, ki smo jih definirali v enačbah [2.4] in [2.5]. Če ju izrazim z x_v , bosta enačbi za površini A_1 in A_2 izgledali takole:

$$A_1 = \Omega(r + x_v)^2 \quad A_2 = \Omega(r - x_v)^2$$

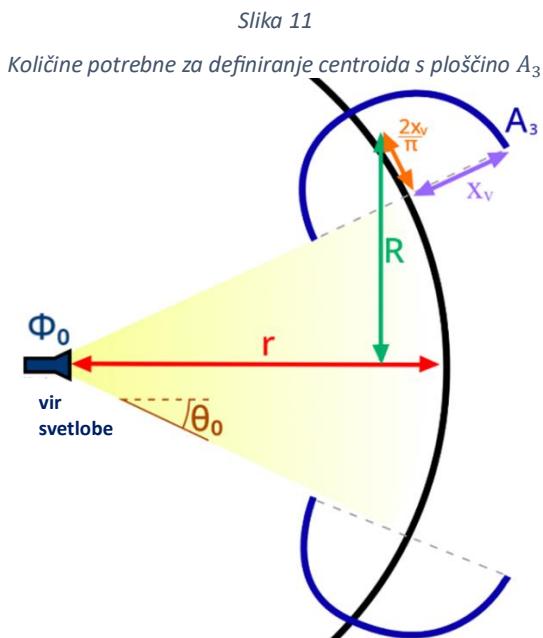
[2.10.2]

Računanje površine A_3 bo malo bolj kompleksno, a si lahko pomagamo s Pappusovim teoremu o centroidih (Weisstein, n.d.). Ta teorem trdi, da lahko površino predmeta z rotacijsko simetrijo (ki jo A_3 ima) izrazimo z enačbo:

$$A = 2\pi R c$$

[2.10.3]

kjer je R razdalja med geometrijsko centroido (g_c) in središčem vrtenja, c dolžina krožnega loka (v našem primeru bo $c = \pi x_v$, saj je presek A_3 pol-krožnica). Geometrijsko centroido si lahko predstavljamo kot »težišče«, ki se v pol-krožnici nahaja $\frac{2x_v}{\pi}$ nad središčem kroga. Razdalja R in geometrijska centroida sta prikazani na *Sliki 11*:



Z nekaj preračunavanja lahko izrazimo razdaljo R kot:

$$R = \left(r \cos \theta_0 - \frac{2x_v}{\pi} \sin \theta_0 \right) \tan \theta_0 + \frac{2x_v}{\pi \cos \theta_0}$$

[2.10.4]

in izrazimo A_3 :

$$A_3 = 2\pi^2 x_v \left(\left(r \cos \theta_0 - \frac{2x_v}{\pi} \sin \theta_0 \right) \tan \theta_0 + \frac{2x_v}{\pi \cos \theta_0} \right)$$

[2.10.5]

Na koncu lahko izrazimo celokupno površino na razdalji x_v od osvetljene površine kot:

$$A_{tot} = \Omega(r + x_v)^2 + \Omega(r - x_v)^2 + 2\pi^2 x_v \left(\left(r \cos \theta_0 - \frac{2x_v}{\pi} \sin \theta_0 \right) \tan \theta_0 + \frac{2x_v}{\pi \cos \theta_0} \right)$$

[2.10.6]

in substitucijo z enačbo [2.5] lahko izraz dopolnimo v:

$$A_{tot} = 2\pi(1 - \cos \theta_0)((r + x_v)^2 + (r - x_v)^2) + 2\pi^2 x_v \left(\left(r \cos \theta_0 - \frac{2x_v}{\pi} \sin \theta_0 \right) \tan \theta_0 + \frac{2x_v}{\pi \cos \theta_0} \right)$$

[2.10]

7.2. Priloga 2

Določanje lastnosti vira svetlobe—surovi podatki in grafi

Tabela 3

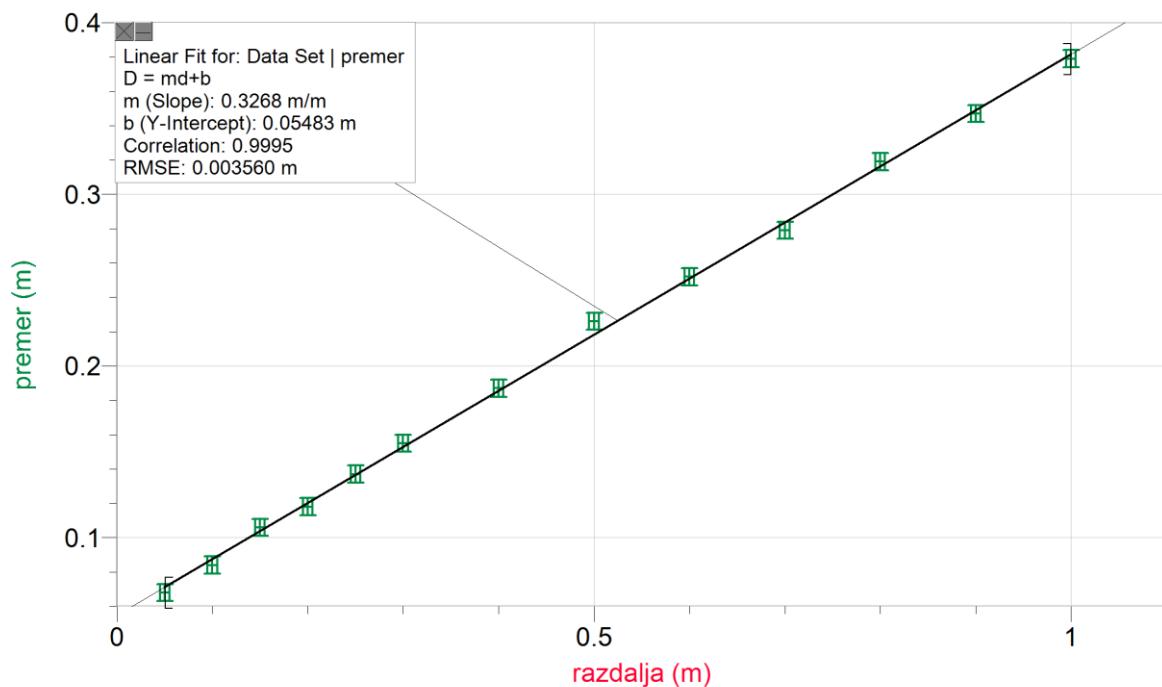
Surovi podatki uporabljeni pri določanju lastnosti vira svetlob; vrednosti D in E za vsako vrednost d

$d(\text{m}) \pm 0.005 \text{ m}$	$D(\text{m}) \pm 0.005 \text{ m}$	$E(\text{lx}) \pm 1 \text{ lx}$
0.050	0.068	1304
0.100	0.084	924
0.150	0.106	626
0.200	0.118	446
0.250	0.137	338
0.300	0.155	264
0.400	0.187	173
0.500	0.226	125
0.600	0.252	93
0.700	0.279	71
0.800	0.319	59
0.900	0.347	47
1.000	0.379	40

Spodnja grafa sta bila uporabljena za določanje naklonov funkcij $D(d)$ in $d(E^{-0.5})$:

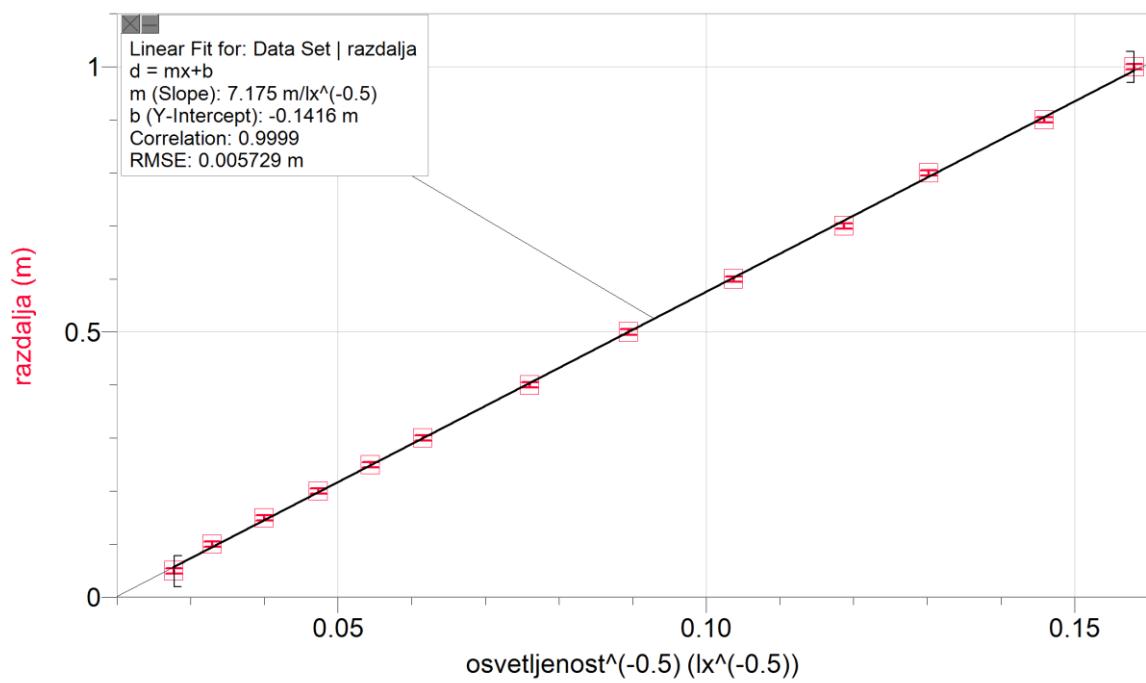
Slika 12

Graf premera D v odvisnosti od razdalje d



Slika 13

Graf razdalje d v odvisnosti od osvetljenosti na potenco minus ene polovice $E^{-\frac{1}{2}}$



7.3. Priloga 3

Surovi podatki

Naslednje tabele prikazujejo surove podatke, ki sem jih akumuliral tukaj tega eksperimenta. Podatki vključujejo popravljene vrednosti r za popravek Δd , ki sem ga izračunal kot 0.1556m. Popravljene vrednosti so označene z $r_{corr.}$.

Opomba: meritve, ki so obarvane rdeče so izločene, saj odstopajo od ostalih meritev.

Spreminjanje razdalje med virom in listom papirja (r)

Naslednjih nekaj tabel vključuje podatke za svetlubo, ki je prehajala skozi 1 list papirja ($N = 1$).

Tabela 4
Vrednosti E pri različnih r za d = 0.500m ± 0.005m

$r(m)$ ± 0.005m	$E(lx)$ ± 1lx	$r_{corr.}(m)$ ($r + \Delta d$)	$r(m)$ ± 0.005m	$E(lx)$ ± 1lx	$r_{corr.}(m)$ ($r + \Delta d$)	$r(m)$ ± 0.005m	$E(lx)$ ± 1lx	$r_{corr.}(m)$ ($r + \Delta d$)
0.000	2	0.1556	0.160	2	0.3156	0.310	6	0.4656
0.010	2	0.1656	0.170	2	0.3256	0.320	6	0.4756
0.020	2	0.1756	0.180	2	0.3356	0.330	6	0.4856
0.030	2	0.1856	0.190	3	0.3456	0.340	7	0.4956
0.040	2	0.1956	0.200	3	0.3556	0.350	7	0.5056
0.050	2	0.2056	0.210	3	0.3656	0.360	8	0.5156
0.060	2	0.2156	0.220	3	0.3756	0.370	8	0.5256
0.070	2	0.2256	0.230	4	0.3856	0.380	9	0.5356
0.080	2	0.2356	0.240	4	0.3956	0.390	9	0.5456
0.090	2	0.2456	0.250	4	0.4056	0.400	10	0.5556
0.100	2	0.2556	0.260	5	0.4156	0.410	11	0.5656
0.110	2	0.2656	0.270	5	0.4256	0.420	12	0.5756
0.120	2	0.2756	0.280	5	0.4356	0.430	13	0.5856
0.130	2	0.2856	0.290	5	0.4456	0.440	14	0.5956
0.140	2	0.2956	0.300	5	0.4556	0.450	15	0.6056
0.150	2	0.3056						

Tabela 5
Vrednosti E pri različnih r za d = 0.450m ± 0.005m

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.000	1	0.1556
0.010	1	0.1656
0.020	2	0.1756
0.030	2	0.1856
0.040	2	0.1956
0.050	2	0.2056
0.060	2	0.2156
0.070	2	0.2256
0.080	3	0.2356
0.090	3	0.2456
0.100	3	0.2556
0.110	3	0.2656
0.120	3	0.2756
0.130	3	0.2856

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.140	3	0.2956
0.150	3	0.3056
0.160	3	0.3156
0.170	3	0.3256
0.180	3	0.3356
0.190	4	0.3456
0.200	4	0.3556
0.210	4	0.3656
0.220	5	0.3756
0.230	5	0.3856
0.240	5	0.3956
0.250	6	0.4056
0.260	6	0.4156
0.270	6	0.4256

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.280	7	0.4356
0.290	7	0.4456
0.300	8	0.4556
0.310	8	0.4656
0.320	9	0.4756
0.330	10	0.4856
0.340	10	0.4956
0.350	11	0.5056
0.360	12	0.5156
0.370	13	0.5256
0.380	13	0.5356
0.390	14	0.5456
0.400	16	0.5556

Tabela 6
Vrednosti E pri različnih r za d = 0.400m ± 0.005m

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.000	2	0.1556
0.010	2	0.1656
0.020	2	0.1756
0.030	3	0.1856
0.040	3	0.1956
0.050	3	0.2056
0.060	3	0.2156
0.070	3	0.2256
0.080	3	0.2356
0.090	3	0.2456
0.100	3	0.2556

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.110	4	0.2656
0.120	4	0.2756
0.130	4	0.2856
0.140	4	0.2956
0.150	4	0.3056
0.160	5	0.3156
0.170	6	0.3256
0.180	6	0.3356
0.190	6	0.3456
0.200	6	0.3556
0.210	6	0.3656

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.220	7	0.3756
0.230	8	0.3856
0.240	8	0.3956
0.250	9	0.4056
0.260	10	0.4156
0.270	10	0.4256
0.280	11	0.4356
0.290	12	0.4456
0.300	13	0.4556
0.313	14	0.4686
0.344	16	0.4996

Tabela 7
Vrednosti E pri različnih r za d = 0.350m ± 0.005m

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.000	3	0.1556
0.010	3	0.1656
0.020	3	0.1756
0.030	3	0.1856
0.040	3	0.1956
0.050	4	0.2056
0.060	4	0.2156
0.070	4	0.2256
0.080	4	0.2356
0.090	5	0.2456
0.100	5	0.2556

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.110	5	0.2656
0.120	5	0.2756
0.130	5	0.2856
0.140	6	0.2956
0.150	7	0.3056
0.160	7	0.3156
0.170	8	0.3256
0.180	8	0.3356
0.190	9	0.3456
0.200	10	0.3556

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.210	11	0.3656
0.220	12	0.3756
0.230	13	0.3856
0.240	14	0.3956
0.250	15	0.4056
0.260	16	0.4156
0.270	17	0.4256
0.280	18	0.4356
0.290	19	0.4456
0.300	20	0.4556

Tabela 8
Vrednosti E pri različnih r za d = 0.300m ± 0.005m

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.000	3	0.1556
0.010	4	0.1656
0.020	4	0.1756
0.030	4	0.1856
0.040	4	0.1956
0.050	5	0.2056
0.060	5	0.2156
0.070	5	0.2256
0.080	6	0.2356

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.090	6	0.2456
0.100	7	0.2556
0.110	7	0.2656
0.120	8	0.2756
0.130	9	0.2856
0.140	10	0.2956
0.150	10	0.3056
0.160	11	0.3156
0.170	12	0.3256

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.180	14	0.3356
0.190	15	0.3456
0.200	17	0.3556
0.210	19	0.3656
0.220	21	0.3756
0.230	23	0.3856
0.240	24	0.3956
0.250	25	0.4056

Tabela 9
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.250m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.000	5	0.1556
0.010	5	0.1656
0.020	5	0.1756
0.030	6	0.1856
0.040	7	0.1956
0.050	7	0.2056
0.060	8	0.2156

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.070	8	0.2256
0.080	9	0.2356
0.090	10	0.2456
0.100	11	0.2556
0.110	12	0.2656
0.120	13	0.2756
0.130	14	0.2856

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.140	16	0.2956
0.150	18	0.3056
0.160	20	0.3156
0.170	23	0.3256
0.180	25	0.3356
0.190	27	0.3456
0.200	30	0.3556

Tabela 10
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.200m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.000	8	0.1556
0.010	8	0.1656
0.020	9	0.1756
0.030	10	0.1856
0.040	11	0.1956
0.050	12	0.2056

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.060	13	0.2156
0.070	14	0.2256
0.080	16	0.2356
0.090	18	0.2456
0.100	22	0.2556

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.110	24	0.2656
0.120	27	0.2756
0.130	31	0.2856
0.140	35	0.2956
0.150	40	0.3056

Tabela 11
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.150m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.000	13	0.1556
0.010	14	0.1656
0.020	15	0.1756
0.030	17	0.1856

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.040	20	0.1956
0.050	23	0.2056
0.060	28	0.2156
0.070	31	0.2256

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.080	36	0.2356
0.090	42	0.2456
0.100	48	0.2556

Tabela 12
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.100m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.000	26	0.1556
0.010	32	0.1656
0.020	35	0.1756

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.030	38	0.1856
0.040	45	0.1956
0.050	62	0.2056

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.060	74	0.2156
0.070	81	0.2256

Spreminjanje števila listov papirja (N)

Naslednjih nekaj tabel vključuje podatke za svetlobo, ki je prehajala skozi 2 lista papirja ($N = 2$).

Tabela 13
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.500m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.000	0	0.1556
0.010	0	0.1656
0.020	0	0.1756
0.030	0	0.1856
0.040	0	0.1956
0.050	0	0.2056
0.060	0	0.2156
0.070	0	0.2256
0.080	0	0.2356
0.090	1	0.2456
0.100	1	0.2556
0.110	1	0.2656
0.120	1	0.2756
0.130	2	0.2856
0.140	2	0.2956
0.150	2	0.3056

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.160	2	0.3156
0.170	2	0.3256
0.180	2	0.3356
0.190	2	0.3456
0.200	2	0.3556
0.210	2	0.3656
0.220	2	0.3756
0.230	2	0.3856
0.240	2	0.3956
0.250	2	0.4056
0.260	2	0.4156
0.270	2	0.4256
0.280	2	0.4356
0.290	3	0.4456
0.300	3	0.4556

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.310	3	0.4656
0.320	3	0.4756
0.330	3	0.4856
0.340	3	0.4956
0.350	3	0.5056
0.360	3	0.5156
0.370	4	0.5256
0.380	5	0.5356
0.390	5	0.5456
0.400	5	0.5556
0.410	6	0.5656
0.420	6	0.5756
0.430	7	0.5856
0.440	7	0.5956
0.450	8	0.6056

Tabela 14
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.450m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.000	0	0.1556
0.010	0	0.1656
0.020	0	0.1756
0.030	0	0.1856
0.040	0	0.1956
0.050	0	0.2056
0.060	0	0.2156
0.070	0	0.2256
0.080	1	0.2356
0.090	1	0.2456
0.100	2	0.2556
0.110	2	0.2656
0.120	2	0.2756
0.130	2	0.2856

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.140	2	0.2956
0.150	2	0.3056
0.160	2	0.3156
0.170	2	0.3256
0.180	2	0.3356
0.190	2	0.3456
0.200	2	0.3556
0.210	2	0.3656
0.220	2	0.3756
0.230	2	0.3856
0.240	2	0.3956
0.250	2	0.4056
0.260	2	0.4156
0.270	3	0.4256

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.280	3	0.4356
0.290	3	0.4456
0.300	3	0.4556
0.310	4	0.4656
0.320	4	0.4756
0.330	5	0.4856
0.340	5	0.4956
0.350	6	0.5056
0.360	6	0.5156
0.370	7	0.5256
0.380	7	0.5356
0.390	8	0.5456
0.400	9	0.5556

Tabela 15
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.400m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.000	0	0.1556
0.010	0	0.1656
0.020	1	0.1756
0.030	2	0.1856
0.040	2	0.1956
0.050	2	0.2056
0.060	2	0.2156
0.070	2	0.2256
0.080	2	0.2356
0.090	2	0.2456
0.100	2	0.2556
0.110	2	0.2656
0.120	2	0.2756

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.130	2	0.2856
0.140	2	0.2956
0.150	2	0.3056
0.160	2	0.3156
0.170	3	0.3256
0.180	3	0.3356
0.190	3	0.3456
0.200	3	0.3556
0.210	3	0.3656
0.220	3	0.3756
0.230	3	0.3856
0.240	3	0.3956

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.250	3	0.4056
0.260	4	0.4156
0.270	4	0.4256
0.280	5	0.4356
0.290	5	0.4456
0.300	6	0.4556
0.310	6	0.4656
0.320	7	0.4756
0.330	8	0.4856
0.340	9	0.4956
0.350	10	0.5056
0.360	11	0.5156

Tabela 16
Vrednosti E pri različnih r za d = 0.350m ± 0.005m

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.000	2	0.1556
0.010	2	0.1656
0.020	2	0.1756
0.030	2	0.1856
0.040	2	0.1956
0.050	2	0.2056
0.060	2	0.2156
0.070	2	0.2256
0.080	2	0.2356
0.090	2	0.2456
0.100	3	0.2556

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.110	3	0.2656
0.120	3	0.2756
0.130	3	0.2856
0.140	3	0.2956
0.150	3	0.3056
0.160	3	0.3156
0.170	3	0.3256
0.180	3	0.3356
0.190	3	0.3456
0.200	4	0.3556

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.210	4	0.3656
0.220	5	0.3756
0.230	6	0.3856
0.240	6	0.3956
0.250	7	0.4056
0.260	7	0.4156
0.270	8	0.4256
0.280	9	0.4356
0.290	10	0.4456
0.300	11	0.4556

Tabela 17
Vrednosti E pri različnih r za d = 0.300m ± 0.005m

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.000	1	0.1556
0.010	2	0.1656
0.020	2	0.1756
0.030	2	0.1856
0.040	2	0.1956
0.050	2	0.2056
0.060	2	0.2156
0.070	2	0.2256
0.080	3	0.2356

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.090	3	0.2456
0.100	3	0.2556
0.110	3	0.2656
0.120	4	0.2756
0.130	4	0.2856
0.140	5	0.2956
0.150	5	0.3056
0.160	6	0.3156

r(m) ± 0.005m	E(lx) ± 1lx	r _{corr.} (m) (r + Δd)
0.180	7	0.3356
0.190	7	0.3456
0.200	8	0.3556
0.210	9	0.3656
0.220	10	0.3756
0.230	11	0.3856
0.240	12	0.3956
0.250	13	0.4056

Tabela 18
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.250m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.000	2	0.1556
0.010	3	0.1656
0.020	3	0.1756
0.030	3	0.1856
0.040	3	0.1956
0.050	3	0.2056
0.060	3	0.2156

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.070	4	0.2256
0.080	4	0.2356
0.090	5	0.2456
0.100	5	0.2556
0.110	5	0.2656
0.120	6	0.2756
0.130	7	0.2856

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.140	8	0.2956
0.150	9	0.3056
0.160	10	0.3156
0.170	12	0.3256
0.180	13	0.3356
0.190	15	0.3456
0.200	16	0.3556

Naslednjih nekaj tabel vključuje podatke za svetlobo, ki je prehajala skozi 3 liste papirja ($N = 3$).

Tabela 19
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.400m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.000	1	0.1556
0.010	1	0.1656
0.020	1	0.1756
0.030	1	0.1856
0.040	1	0.1956
0.050	1	0.2056
0.060	1	0.2156
0.070	1	0.2256
0.080	1	0.2356
0.090	1	0.2456
0.100	1	0.2556
0.110	1	0.2656
0.120	1	0.2756

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.130	1	0.2856
0.140	2	0.2956
0.150	2	0.3056
0.160	3	0.3156
0.170	3	0.3256
0.180	3	0.3356
0.190	3	0.3456
0.200	3	0.3556
0.210	3	0.3656
0.220	3	0.3756
0.230	3	0.3856
0.240	3	0.3956

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.250	3	0.4056
0.260	4	0.4156
0.270	4	0.4256
0.280	4	0.4356
0.290	4	0.4456
0.300	4	0.4556
0.310	5	0.4656
0.320	5	0.4756
0.330	6	0.4856
0.340	6	0.4956
0.350	7	0.5056
0.360	8	0.5156

Tabela 20
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.350m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.000	0	0.1556
0.010	0	0.1656
0.020	0	0.1756
0.030	0	0.1856
0.040	1	0.1956
0.050	1	0.2056
0.060	2	0.2156
0.070	2	0.2256
0.080	2	0.2356
0.090	2	0.2456
0.100	2	0.2556

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.110	2	0.2656
0.120	2	0.2756
0.130	2	0.2856
0.140	2	0.2956
0.150	2	0.3056
0.160	2	0.3156
0.170	2	0.3256
0.180	2	0.3356
0.190	2	0.3456
0.200	2	0.3556

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.210	2	0.3656
0.220	2	0.3756
0.230	3	0.3856
0.240	3	0.3956
0.250	3	0.4056
0.260	4	0.4156
0.270	4	0.4256
0.280	5	0.4356
0.290	6	0.4456
0.300	7	0.4556

Tabela 21
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.300m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.000	0	0.1556
0.010	0	0.1656
0.020	1	0.1756
0.030	2	0.1856
0.040	2	0.1956
0.050	2	0.2056
0.060	2	0.2156
0.070	2	0.2256
0.080	2	0.2356

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.090	2	0.2456
0.100	2	0.2556
0.110	2	0.2656
0.120	2	0.2756
0.130	2	0.2856
0.140	2	0.2956
0.150	3	0.3056
0.160	3	0.3156

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.180	3	0.3356
0.190	4	0.3456
0.200	4	0.3556
0.210	4	0.3656
0.220	5	0.3756
0.230	6	0.3856
0.240	7	0.3956
0.250	8	0.4056

Tabela 22
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.250m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.000	2	0.1556
0.010	2	0.1656
0.020	2	0.1756
0.030	2	0.1856
0.040	2	0.1956
0.050	2	0.2056
0.060	2	0.2156

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.070	2	0.2256
0.080	2	0.2356
0.090	2	0.2456
0.100	2	0.2556
0.110	3	0.2656
0.120	3	0.2756
0.130	3	0.2856

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.140	4	0.2956
0.150	5	0.3056
0.160	6	0.3156
0.170	6	0.3256
0.180	7	0.3356
0.190	8	0.3456
0.200	9	0.3556

Naslednjih nekaj tabel vključuje podatke za svetlobo, ki je prehajala skozi 4 liste papirja ($N = 4$).

Tabela 23
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.400m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.000	0	0.1556
0.010	0	0.1656
0.020	0	0.1756
0.030	0	0.1856
0.040	0	0.1956
0.050	0	0.2056
0.060	0	0.2156
0.070	0	0.2256
0.080	0	0.2356
0.090	0	0.2456
0.100	0	0.2556
0.110	0	0.2656
0.120	0	0.2756

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.130	0	0.2856
0.140	0	0.2956
0.150	0	0.3056
0.160	0	0.3156
0.170	0	0.3256
0.180	0	0.3356
0.190	0	0.3456
0.200	0	0.3556
0.210	1	0.3656
0.220	1	0.3756
0.230	2	0.3856
0.240	2	0.3956

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.250	2	0.4056
0.260	2	0.4156
0.270	2	0.4256
0.280	2	0.4356
0.290	2	0.4456
0.300	3	0.4556
0.310	3	0.4656
0.320	3	0.4756
0.330	3	0.4856
0.340	4	0.4956
0.350	4	0.5056
0.360	5	0.5156

Tabela 24
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.350m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.000	0	0.1556
0.010	0	0.1656
0.020	0	0.1756
0.030	0	0.1856
0.040	0	0.1956
0.050	0	0.2056
0.060	0	0.2156
0.070	0	0.2256
0.080	0	0.2356
0.090	0	0.2456
0.100	0	0.2556

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.110	0	0.2656
0.120	0	0.2756
0.130	0	0.2856
0.140	0	0.2956
0.150	0	0.3056
0.160	1	0.3156
0.170	1	0.3256
0.180	2	0.3356
0.190	2	0.3456
0.200	2	0.3556

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.210	2	0.3656
0.220	2	0.3756
0.230	2	0.3856
0.240	2	0.3956
0.250	2	0.4056
0.260	3	0.4156
0.270	3	0.4256
0.280	4	0.4356
0.290	4	0.4456
0.300	5	0.4556

Tabela 25
Vrednosti E pri različnih r za $d = 0.300m \pm 0.005m$

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.000	0	0.1556
0.010	0	0.1656
0.020	0	0.1756
0.030	0	0.1856
0.040	0	0.1956
0.050	0	0.2056
0.060	0	0.2156
0.070	0	0.2256
0.080	1	0.2356

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.090	1	0.2456
0.100	2	0.2556
0.110	2	0.2656
0.120	2	0.2756
0.130	2	0.2856
0.140	2	0.2956
0.150	2	0.3056
0.160	2	0.3156
0.170	2	0.3256

$r(m)$ $\pm 0.005m$	$E(lx)$ $\pm 1lx$	$r_{corr.}(m)$ $(r + \Delta d)$
0.180	2	0.3356
0.190	2	0.3456
0.200	3	0.3556
0.210	3	0.3656
0.220	3	0.3756
0.230	4	0.3856
0.240	5	0.3956
0.250	5	0.4056

Tabela 26
Vrednosti E pri različnih r za d = 0.250m ± 0.005m

$r(\text{m})$ $\pm 0.005\text{m}$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.000	0	0.1556
0.010	0	0.1656
0.020	0	0.1756
0.030	0	0.1856
0.040	1	0.1956
0.050	1	0.2056
0.060	2	0.2156

$r(\text{m})$ $\pm 0.005\text{m}$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.070	2	0.2256
0.080	2	0.2356
0.090	2	0.2456
0.100	2	0.2556
0.110	2	0.2656
0.120	2	0.2756
0.130	3	0.2856

$r(\text{m})$ $\pm 0.005\text{m}$	$E(\text{lx})$ $\pm 1\text{lx}$	$r_{corr.}(\text{m})$ $(r + \Delta d)$
0.140	3	0.2956
0.150	3	0.3056
0.160	3	0.3156
0.170	4	0.3256
0.180	5	0.3356
0.190	6	0.3456
0.200	7	0.3556