GIMNAZIJA KRANJ V ZLATEM REZU

RAZISKOVALNA NALOGA S PODROČJA MATEMATIKE

Avtorici: Tija Stritih in Tea Krč

Mentorica: Žana Lampič

Leto izdelave: 2023/2024

KAZALO

SEZNAM SLIK

SEZNAM TABEL

POVZETEK

Zlati rez je razmerje, ki se nam zdi popolno in lepega videza. Daljico deli na dva neenaka dela, tako da je razmerje dolžine večjega dela daljice proti manjšemu enako razmerju celotne daljice proti daljšemu delu. To razmerje znaša približno $1{,}618$ in ima neskončno mnogo decimalk. V teoretičnem delu naloge je predstavljena zgodovina zlatega reza ter njegova prisotnost v naravi, človeškem telesu in umetnosti. Poleg tega ga najdemo tudi v arhitekturi, saj ga zaradi njegove lepote arhitekti pogosto uporabljajo pri načrtovanju zgradb. Še bolj zanimiva pa je njegova veličina v matematiki. Raziskovali in dokazovali smo njegove lastnosti in povezavo s Fibonaccijevim zaporedjem. Nadaljevali smo z izvedbo različnih geometrijskih konstrukcij zlatega reza in dokazovanjem njegove prisotnost v raznih geometrijskih likih. Teoretične osnove smo prenesli v raziskovalni del naloge, kjer smo želeli ugotoviti, ali je razlog lepega videza Gimnazije Kranj pravzaprav v zlatem rezu. Poseben poudarek smo torej namenili dokazovanju prisotnosti zlatega reza v arhitekturnih elementih Gimnazije Kranj s pomočjo meritev iz arhitekturnega načrta in laserskih meritev Gimnazije ter konstrukcij zlatega reza. Za pomoč pri iskanju zlatega reza smo izdelali sistem točk za iskanje zlatega reza v računalniškem programu GeoGebra ter šestilo za iskanje zlatega reza. Namen oziroma cilj raziskovalne naloge je torej raziskati pomen zlatega reza v matematiki in ugotoviti, ali je Gimnazija Kranj grajena v zlatem rezu. Na koncu smo njegovo prisotnost na Gimnaziji lahko potrdili, poleg njega pa smo na stavbi opazili tudi zlate spirale in zlate pravokotnike.

Ključne besede: zlati rez, razmerje, Fibonaccijevo zaporedje, konstrukcija, Gimnazija Kranj.

ABSTRACT

The golden ratio is the ratio we consider perfect and good-looking. It divides a line segment into two unequal parts so that the ratio of the length of the larger line segment to the smaller one is equal to the ratio of the whole length to the longer length of line segment. This ratio is approximate $1{,}618$ and has infinitely many decimal places. The theoretical part of the thesis presents the history of the golden ratio and its presence in nature, the human body and art. It is also found in architecture, where, because of its beauty, architects often use it in the design of buildings. Even more interesting is its greatness in mathematics. We have been exploring and proving its properties and its relationship with the Fibonacci sequence. We continued by performing different geometrical constructions of the golden section and proving its presence in different geometrical figures. We transferred the theoretical basics into the research part of the thesis, where we wanted to find out whether the reason for the beautiful appearance of Gimnazija Kranj is actually due to the golden ratio. We therefore paid special attention to proving the presence of the golden ratio in the architectural elements of Gimnazija Kranj, using measurements from the architectural design and laser measurements of Gimnazija and the golden section constructions. To help find the golden section, we have created a system of points for finding the golden ratio in the GeoGebra computer program and made a pair of compasses for the golden section. The aim or objective of this research paper is therefore to investigate the meaning of the golden ratio in mathematics and to find out whether Gimnazija Kranj is built in the golden ratio. In the end, we were able to confirm its presence in Gimnazija, and we also observed golden spirals and golden rectangles on the building.

Keywords: golden ratio, proportion, Fibonacci sequence, construction, Gimnazija Kranj

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujeva najini mentorici, profesorici matematike, Žani Lampič, ki naju je pri nastajanju raziskovalne naloge spodbujala in nama pomagala.

Zahvaljujeva se tudi arhitektu Juretu Hrovatu, ki je sodeloval pri prenovi gimnazije in nama tako posredoval načrt Gimnazije Kranj ter drugim, ki so pripomogli k odličnosti naloge.

1. UVOD

Gimnazija Kranj stoji na predelu mesta, imenovanem Kokriško predmestje, ki ima danes osrednjo upravno, izobraževalno in kulturno funkcijo mesta.

Slika 1: Pogled na park Zvezda in Gimnazijo Kranj.

Na južnem delu Gimnazije se danes nahaja Hotel Creina, nekoč pa je na tem mestu stala Majdičeva hiša. Nasproti Gimnazije se razprostira Slovenski trg, za njim pa se dviga Delavski dom. Južno od trga se nahaja blagovnica Globus, v kateri je mestna knjižnica, severno pa je zgradba Mestne občine Kranj in Agencije za plačilni promet.

Ko so v Mestni občini Kranj iskali prostor, kamor bi umestili gimnazijo, so na razpisu prejeli kar nekaj ponudb. Tako bi lahko naša šola stala na mestih, kjer stoji grad Khislstein, na Slovenskem trgu (nekdanji park Zvezda, ki ga lahko vidimo na sliki 1), ali pa na eni izmed posesti v Kokriškem predmestju. Za mesto, kjer stoji grad, se niso odločili, saj je v njem bival okrajni glavar, prav tako niso želeli uničiti na novo zasajenega drevoreda v parku Zvezda. Tako so se odločili za gradnjo na območju nekdanje župnijske in Križnarjeve pristave.

Prve podrobnejše načrte za Gimnazijo Kranj je izdelal arhitekt Viljem Treo. Z izkopnimi deli je Kranjska stavbinska družba začela leta 1896, dobro leto kasneje pa so jo že slovesno odprli.

Kmalu po izgradnji so ugotovili, da je stavba premajhna glede na število učencev, ki so jo obiskovali. Prva dograditev se je zgodila leta 1897. Druga, s katero so stavbo naredili simetrično glede na južni in severni krak, pa se je začela leta 1902 in končala leto kasneje. Vodilni pri dograditvi je bil stavbenik Josef Fuso, dela pa je nadziral inženir Alojzij Muck. Med drugo svetovno vojno je stavbo zasedla nemška vojska, ki je preoblikovala notranjost ter izdelala instalacije za centralno gretje.

Slika 2: Gimnazija Kranj v 60. letih.

V šestdesetih letih so po načrtih tržaškega arhitekta Maksa Strenarja obnovili fasado, preoblikovali glavni vhod, mu dozidali veliki balkon ter odstranili ograjo okoli stavbe. Leta 1978 so pripravili načrte za gradnjo prizidka, s katerim je šola pridobila 40 odstotkov dodatnih prostorov. Ti so se še povečali, ko so preuredili podstrešne etaže leta 1986 in v obdobju 2016-2017. (Gimnazija Kranj, 2024)

Idejo za raziskovanje zlatega reza sva dobili, ko je v razred kot nadomestni profesor prišel nekdanji ravnatelj Gimnazije Kranj mag. Franc Rozman in nam predaval o zlatem rezu. Takrat je omenil, da naj bi bila gimnazija prav tako grajena v zlatem razmerju. Zato sva se odločili, da bova preverili, ali to drži.

1.1. Namen, raziskovalno vprašanje in hipoteze

Namen te naloge je proučevanje matematičnih lastnosti zlatega reza in njegove povezave s Fibonaccijevim zaporedjem, saj je na to temo zelo malo literature v slovenščini. Poleg tega je cilj naloge tudi raziskovanje in analiziranje prisotnosti zlatega reza na Gimnaziji Kranj.

Raziskovalno vprašanje: Kakšen je pomen zlatega reza v matematiki ter ali je Gimnazija Kranj grajena v zlatem rezu oziroma kje se ti nahajajo in ali lahko z njihovo pomočjo opazimo tudi zlate pravokotnike in zlato spiralo?

Po določitvi namena in raziskovalnega vprašanja smo postavili naslednje hipoteze:

- Zlati rez in Fibonaccijevo zaporedje sta tesno povezana, poleg tega lahko iz Fibonaccijevega zaporedja izpeljemo tudi definicijo zlatega števila.
- Predvidevamo, da bomo na Gimnazij Kranj zaznali prisotnost zlatega reza, predvsem med razmerji oken, vrat, višino in dolžino stavbe ter v različnih detajlih na fasadi. Hkrati pa bomo z njihovo pomočjo opazili tudi zlate pravokotnike in zlato spiralo.
- S pomočjo petkotnika in njegovih diagonal, ki naj bi bile v zlatem rezu ter podobnih zlatih trikotnikov lahko dokažemo oziroma potrdimo pravilnost šestila za zlati rez.

1.2. Metode dela

Za potrditev zgoraj postavljenih hipotez smo izpeljali in dokazali različne lastnosti zlatega reza. Pri iskanju zlatega reza pa smo si pomagali z meritvami na arhitekturnem načrtu in laserskimi meritvami Gimnazije ter s konstrukcijami zlatega reza. Poleg tega smo izdelali sistem točk za iskanje zlatega reza v računalniškem programu GeoGebra ter šestilo za iskanje zlatega reza.

2. TEORETIČNI DEL

2.1. Zgodovina zlatega reza

2.1.1. Antična Grčija

Najstarejši primer uporabe zlatega reza je viden že v egipčanski arhitekturi, natančneje v Veliki ali Keopsovi piramidi v Gizi. Ta je prav tako opazen na Partenonu v Grčiji, katerega načrt naj bi bil v celoti v skladu z zlatim rezom. Tudi kipi na njem, ki jih je ustvaril grški kipar Phidias, so v zlatem rezu.

Prvi, ki je zapisal in konstruiral zlati rez ter čigar zapisi so nam znani kot prvi, je bil starogrški matematik Evklid. Napisal je 13 knjig v starogrščini, znanih kot »Stoicheia« (Elementi), v katerih je sistematično zbral in dokazal matematično znanje tistega časa. Mnogi zgodovinarji menijo, da dela v Elementih niso izvirno njegova. Zato se postavlja vprašanje, kdo je proučeval zlati rez pred Evklidom. Gradivo, napisano v knjigi II., naj bi prvotno proučeval Teodor iz Kiren, medtem ko drugi zgodovinarji to pripisujejo pitagorejcem oziroma Pitagori. Po navajanju virov naj bi bila peterokraka zvezda, pri kateri so različne daljice in razmerja med njimi v zlatem rezu, simbol njegove šole. Poleg njih naj bi se z zlatim rezom ukvarjal tudi Evdoks, Platonov učenec, astronom in matematik. Platon, grški filozof, je v svojem delu »Timaeus« (Timaj) opisal vesolje, ki je sestavljeno iz petih elementov, ti pa predstavljajo pet temeljnih geometrijskih teles, znanih tudi kot Platonska telesa. Prav tako je v svojem delu pisal o vprašanju razmerij, kjer omenja tudi to, kar danes imenujemo zlati rez.

Zlati rez se v Evklidovih delih pojavlja v različnih konstrukcijah - od II. knjige, kjer je prvič uporabljen, a še ne definiran, pa do VI. in XIII. knjige, kjer so prikazane različne konstrukcije in primeri ekstremnih in ponavljajočih se razmerij (Evklidovo poimenovanje za zlati rez). (Meisner, 2018)

2.1.2. Srednji vek in prva polovica novega veka

V povezavi z zlatim rezom poznamo tudi Fibonaccijevo zaporedje. To je poimenovano po Leonardu Pisanu Fibonacciju, italijanskemu matematiku. Samo zaporedje je bilo znano že v 2. ali 3. stoletju pred našim štetjem. Takrat je indijski matematik Achary Pingal v svojih delih naštel različne vzorce sanskrtske poezije, ki bi se lahko oblikovala iz zlogov dveh dolžin. Fibonacci pa je leta 1202 v knjigi »Liber Abaci« (Knjiga o abakusu) uvedel zaporedje v zahodnoevropsko matematiko, in sicer v obliki matematičnega problema o vzreji zajcev, ki ga bomo opisali kasneje. A kljub vsemu ni znano, ali se je do takrat kdo zavedal povezave zaporedja z zlatim rezom.

Leta 1509 je Fra Luca Pacioli, frančiškanski pater in matematik, napisal delo »De Divina Proportione« (Božansko razmerje). V tem delu je obravnaval že znana dejstva o zlatem rezu. K delu je prispeval tudi Leonardo da Vinci, italijanski slikar, arhitekt in izumitelj, z risbami oziroma konstrukcijami petih Platonovih teles, v katerih je uporabil zlati rez. On naj bi tudi prvi latinsko poimenoval zlati rez kot »sectio aurea«. Pacioli je to razmerje imenoval božansko razmerje, saj je verjel, da ima božanske lastnosti. Izdal je tudi svojo izdajo Evklidovih Elementov, v kateri je nekdo prvič opazil in zapisal, da kvocient zaporednih Fibonaccijevih števil konvergira proti zlatemu rezu.

Prvi znan izračun zlatega reza kot števila je bil podan v pismu Michaela Mästlina leta 1597, ki ga je poslal nekdanjemu učencu Johannesu Keplerju, nemškemu astronomu in matematiku. V njem je bila navedena približna vrednost 0.6180340 za dolžino daljšega odseka daljice dolžine 1, deljene v zlatem razmerju. Tudi sam je začel preučevati zlati rez in leta 1609 zapisal, da tudi on pozna konvergenco Fibonaccijevih kvocientov.

Poleg njega je zlati rez preučeval tudi Albert Girard, francoski matematik, katerega rezultati so bili objavljeni leta 1634, dve leti po njegovi smrti. Kasneje, leta 1753, je rezultat podal in dokazal tudi škotski matematik Robert Simson. (Meisner, 2018)

2.1.3. Novi vek od 18. stoletja dalje

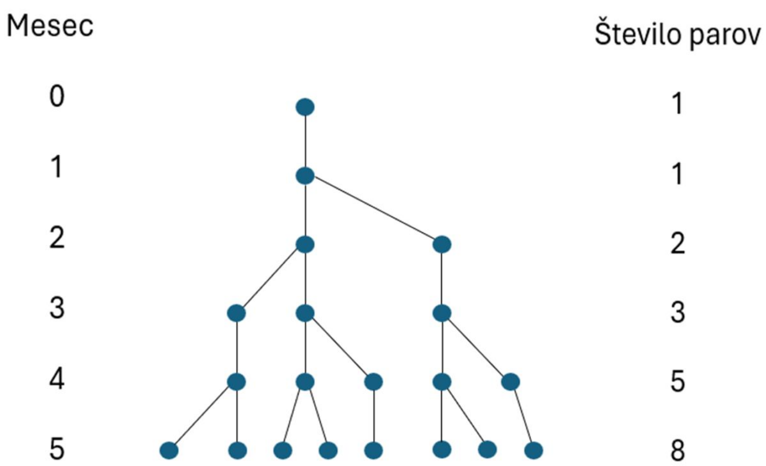
Samo ime zlati rez se je pojavilo dosti kasneje, in sicer v 19. stoletju, ko je nemški matematik Martin Ohm leta 1835, v drugem izvodu knjige »Die Reine Elementar-Mathematik« (Čista elementarna matematika), uporabil izraz »goldener schnitt« (zlati rez) v opombi. A izraza si ni izmislil on, saj v knjigi še vedno uporablja izraz ekstremno in ponavljajoče razmerje. Prva znana uporaba izraza zlati rez v angleščini je bila leta 1875, v članku o estetiki v »Encyclopedia Britannica« (Enciklopedija Britannica).

Oznako ϕ, ki bo uporabljena v nadaljevanju naloge, je v prvi polovici 20. stoletja uvedel Mark Barr, ameriški fizik in izumitelj, za poimenovanje zlatega reza. Fi je prva črka v imenu Phidias, zato je Barr v njegovo čast uporabil to grško črko, saj naj bi, kot je omenjeno že prej, zlati rez uporabil v Partenonu. (Meisner, 2018)

2.2. Zlati rez v naravi, umetnosti in arhitekturi

2.2.1. Zlati rez v naravi

Prvotni problem, ki ga je preučeval Fibonacci leta 1202, je bil o tem, kako hitro se lahko zajci razmnožujejo v idealnih okoliščinah. Predpostavimo, da na novo skoteni par zajcev (samec in samica) postavimo v nek opazovan prostor. Vemo, da se zajci lahko parijo pri starosti enega meseca in da samica ob koncu drugega meseca že skoti nov par. Fibonaccija je zanimalo, koliko parov zajcev bo skotenih v enem letu, če v tem času noben par ne pogine in da samica od drugega meseca dalje skoti en nov par. To je prikazano na sliki 3, kjer vsak moder krog predstavlja en par:



Slika 3: Število zajcev v polju na začetku meseca.

Števila parov si glede na sliko 3 sledijo v Fibonaccijevem zaporedju. Konec prvega meseca se zajca parita, vendar je še vedno samo en par. Konec drugega meseca samica skoti nov par, tako da sta zdaj v prostoru dva para zajcev. Ob koncu tretjega meseca prvotna samica skoti drugi par, tako da so v prostoru skupaj trije pari. Ob koncu četrtega meseca je prvotna samica proizvedla še en nov par, samica, rojena pred dvema mesecema, je prav tako skotila svoj prvi par, kar pomeni, da je sedaj v prostoru pet parov in tako dalje.

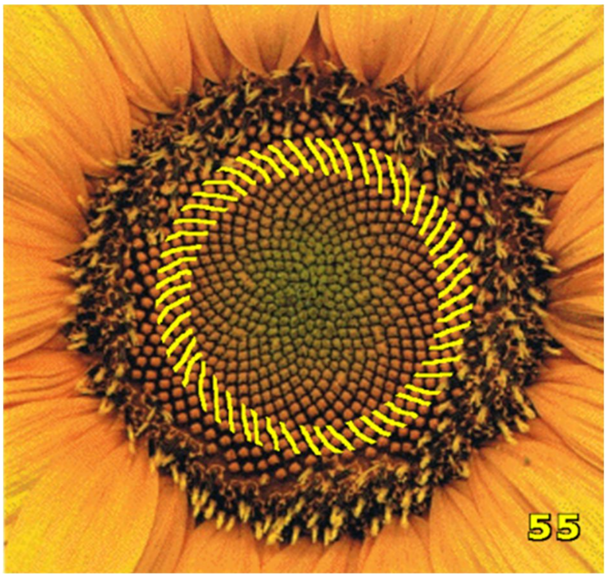
Fibonaccijevo zaporedje opazimo tudi pri razmnoževanju čebel. Troti nastanejo iz neoplojenih jajčec, ki jih izleže le matica. Če pogledamo število prednikov ene čebele, opazimo podoben vzorec kot pri Fibonaccijevem zaporedju: mati čebele (matica) ima dva starša, medtem ko ima oče čebele (trot) le enega. Babica čebele (mati matice) ima dva starša, dedek čebele (oče matice) pa le enega. In tako dalje. To je prikazano v tabeli 1:

Število:	Starši	Stari starši	Prastarši	Pra prastarši	Pra pra prastarši
Čebela	2	3	5	8	13
Trot	1	2	3	5	8

Tabela 1: Prikaz Fibonaccijevega zaporedja pri razmnoževanju čebel in trotov.

Fibonaccijevo zaporedje in zlati rez se prav tako pojavita pri razporeditvi in številu cvetnih listov ter semen v cvetu. Najbolj znani primeri so: lilija (3 cvetni listi), divja vrtnica (5 cvetnih listov), zlatica (5 cvetnih listov), ostrožni (8 cvetnih listov) in tako dalje. Razporeditev cvetnih listov sledi idealni postavitvi, kjer vsak cvetni list zavzema približno 0.618034 - dela celotnega kroga, kar omogoča najboljšo možno izpostavljenost soncu. Najboljši primer za prikaz razporeditve semen v cvetu je sončnica, saj se semena razporejajo v nasprotnih spiralah v razmerju $\frac{1}{\phi}:1$, pri čemer je število semen vedno Fibonaccijevo število.

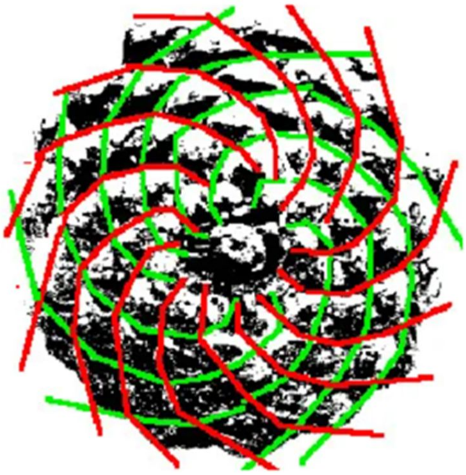
Slika 4: Število spiral v smeri urinega kazalca.



Slika 5: Število spiral v nasprotni smeri urinega kazalca.

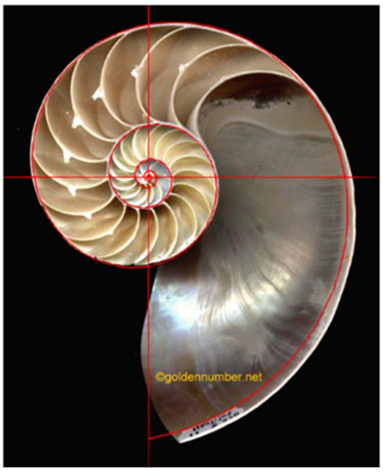
Število spiral v smeri urinega kazalca (na sliki 4) je 34, v nasprotni smeri (na sliki 5) pa 55. Ti dve števili se ujemata s števili v Fibonaccijevem zaporedju.

Zlati rez je možno opaziti v razmerju med spiralno razporeditvijo storževih lusk. Na sliki 6 je razvidno, da je število rdečih spiral 13, število zelenih pa 8. Omenjeni številki sta si zaporedni v Fibonaccijevem zaporedju. Podobno je tudi pri cvetači.



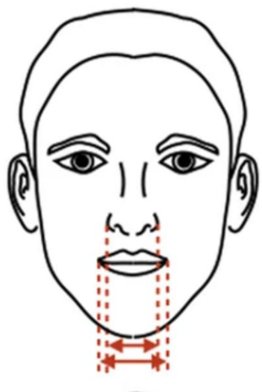
Slika 6: Prikaz števila spiral na luskah storža.

Morska školjka nautilus predstavlja primer zlate spirale. Med svojo rastjo glavonožci potrebujejo več prostora, kar najučinkoviteje zagotavlja logaritemska spirala. Pri tem se volumen eksponentno povečuje. Če narišemo črto od središča navzven in poiščemo dve mesti, kjer se ta dotakne lupine, bo točka za približno $1{,}6$-krat oddaljena od središča in tako bo tudi z vsako naslednjo. To pomeni, da se lupina z vsako spiralo poveča za ϕ, kar je vidno tudi na sliki 7. (Knott, 2016)



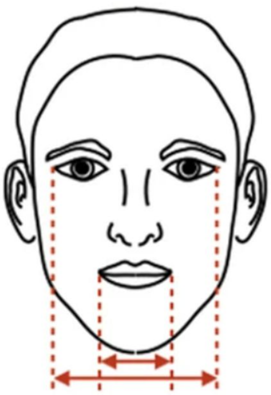
Slika 7: Primer zlate spirale v školjki nautilus.

Tudi pri ljudeh in živalih lahko najdemo zlati rez. Če pri človeku vzamemo za primer obraz, zlati rez lahko najdemo v razdalji med širino ustnic in širino nosu v njegovi najširši točki, kar prikazuje slika 8.

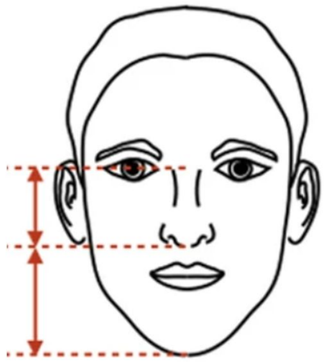


Slika 8: Zlati rez v razdalji med širino ustnic in širino nosu v njegovi najširši točki.

Zlati rez prav tako najdemo na razdalji med širino ustnic in širino zunanjega dela oči - kot vidimo na sliki 9. Zlati rez, na sliki 10, se pojavi na razdalji od sredine šarenice do spodnjega dela nosu in razdaljo od spodnjega dela nosu do spodnjega dela brade. (Meisner, 2012)



Slika 9: Zlati rez med širino ustnic in širino zunanjega dela oči.

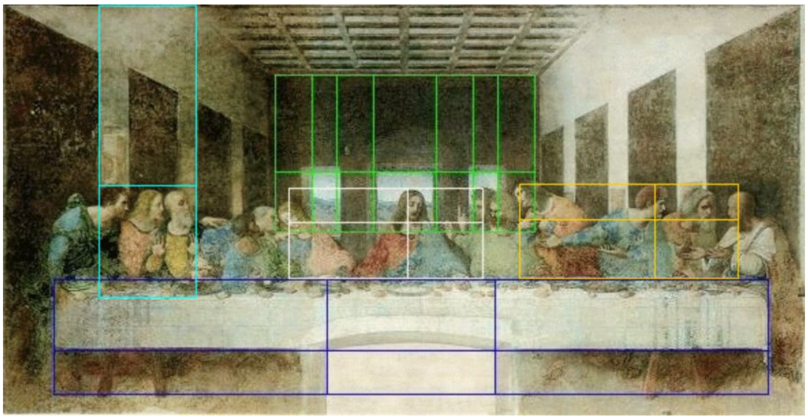


Slika 10: Zlati rez med očmi in brado.

Pri živalih je lahko zlati rez videti v razmerju med dolžino telesa in dolžino posameznih delov telesa, kot so glava, vrat, okončine itd. (Meisner, 2012)

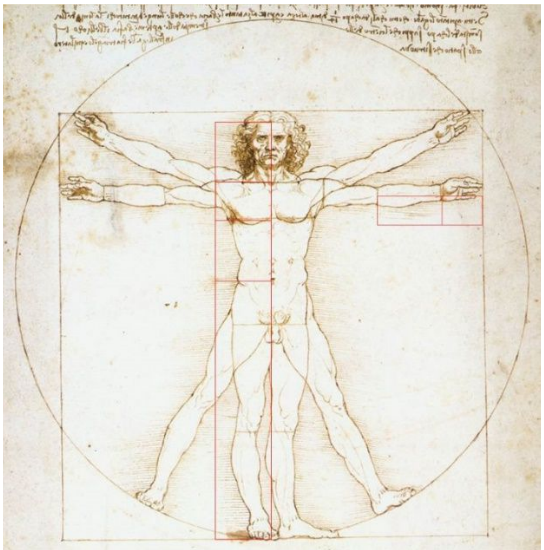
2.2.2. Zlati rez v umetnosti

Leonardo da Vinci je v svojih delih večkrat uporabil zlati rez. Med njegovimi najbolj znanimi deli je nedvomno Zadnja večerja, kjer je ujel trenutek, ko Jezus napove izdajo enega od svojih učencev. Na sliki 11 je z vijolično označena daljica, pri kateri večji del daljice proti manjšemu tvorita zlato razmerje. Z modro je označena razdalja od vrha mize do stropa, apostoli pa predstavljajo zlato točko. Na sliki pa je tudi nekaj drugih elementov v zlatem rezu, ki so označeni z drugimi barvami.



Slika 11: Zlata reza na da Vincijevi sliki Zadnja večerja.

Leta 1487 je ustvaril znamenitega Vitruvijskega človeka. Ta predstavlja sliko moškega telesa, obkroženega s krogom in kvadratom. Roke in noge so razmaknjene ter postavljene v dveh različnih položajih. Na sliki 12 je z rdečo barvo označenih več razmerij. Eno izmed njih je razdalja od vrha glave do popka in razdalja od popka do podplatov. Če bi ti dve razdalji med seboj delili, bi dobili rezultat podoben zlatemu številu. Podoben rezultat bi prav tako dobili, če bi delili razdaljo med popkom in vratom ter razdaljo med vratom in vrhom glave ali pa če bi med seboj delili razdaljo od prstov do zapestja in razdaljo od komolca do zapestja. (Meisner, 2014)



Slika 12: Vitruvijski človek v zlatem rezu.

Zlato razmerje so v svoji umetnosti uporabljali še številni drugi umetniki kot sta na primer Rafael (delo: Atenska šola) in Michelangelo (delo: Stvarjenje Adama).

2.2.3. Zlati rez v arhitekturi

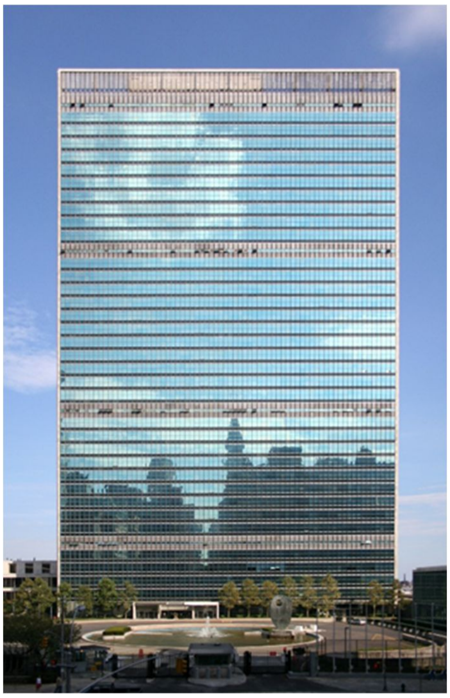
Velika piramida v Gizi, na sliki 13, je eno izmed sedmih čudes sveta. Zlati rez naj bi bil možen v razmerju med višino stranske stranice in razdaljo od ploskve do središča osnovnice. Čeprav ne obstajajo neposredni dokazi, ki bi nedvomno potrdili uporabo zlatega reza v načrtovanju ali gradnji piramide, so nekateri raziskovalci in teoretiki podali domneve o možni povezavi. Sama piramida se je skozi čas močno spremenila od svojega prvotnega stanja, zato so meritve, na podlagi katerih se navaja zlati rez, le posledica določenih predpostavk in sklepanj. (Meisner, 2016)

Slika 13: Velika piramida v Gizi.

Zlati rez naj bi bil viden tudi v Partenonu, vendar ponovno ni dokazov, da je bil uporabljen z namenom. Zgrajen je bil okoli leta 447 pr. n. št. in naj bi vključeval številne pravokotnike z zlatim razmerjem na zahodni fasadi, kjer naj bi bila celotna stran v zlatem rezu kot je vidno na sliki 14. Prav tako lahko zlate pravokotnike opazimo tudi na sliki 15, kjer se nahajajo na pročelju. (Meisner, 2020)

Slika 14: Zahodna fasada Partenona.

Slika 15: Zlati rez na pročelju Partenona.



Slika 16: Stavba Združenih narodov v New Yorku.

Stavba Združenih narodov v New Yorku na sliki 16 je sodoben primer zlatega reza v arhitekturi, kjer naj bi bila višina stavbe 1,6-krat večja od njene širine. (Fidanci, 2023)

2.3. Pomen zlatega reza v matematiki

2.3.1. Splošna definicija

Kaj pa zlati rez pravzaprav predstavlja v matematiki?

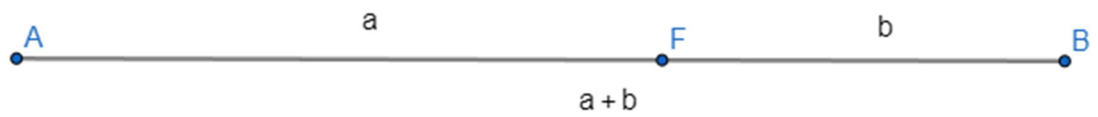
Definicija: Zlati rez je razmerje, ki neko poljubno daljico AB z zlato točko (na sliki 17 označeno s F) razdeli na dva dela, tako da je razmerje celotne dolžine proti večjemu delu enako razmerju večjega dela proti manjšemu:

$$\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AF|}{|FB|} = \phi \ ,$$

Če dolžino $|AF|$ označimo z a, $|FB|$ pa z b, dobimo enakost

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \ . \qquad (2.1)$$

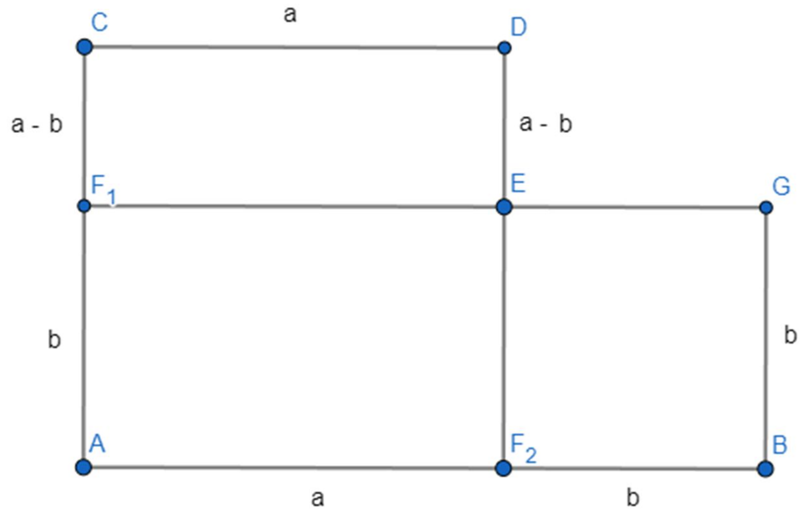
To število imenujemo zlato število in ga označimo s ϕ. Prikaz zlatega reza vidimo na sliki 17.



Slika 17: Prikaz zlatega reza na daljici.

2.3.2. Evklidova definicija

Kot smo že prej omenili, je Evklid, izjemen antični matematik in geometer, eden izmed prvih, ki so se ukvarjali z zlatim rezom. V knjigi Elementi (V, 11. trditev) je kot prvi postavil sledeč problem o zlatem razmerju: *»Dano daljico razdeli na dva neenaka dela tako, da bo ploščina pravokotnika, očrtanega nad celotno daljico, z višino manjšega dela daljice, enaka ploščini kvadrata, očrtanega na večjem delu daljice.«*



Slika 18: Prikaz Evklidove definicije.

Njegova konstrukcija, ki jo vidimo na sliki 18, privede do delitve daljice v razmerju zlatega reza. Evklid je posamezne dele daljice označil in ugotovil, da za njih velja, da je razmerje celotne dolžine proti večjemu delu daljice, enako razmerju večjega dela proti manjšemu, kar opisuje enakost (2.1). Pri konstrukciji s slike 21 to predstavljajo daljice v razmerju

$$\frac{|AB|}{|AF_2|} = \frac{|AF_2|}{|FB|} = \phi.$$

Dokaz ujemanja Evklidove definicije in razmerja (2.1): ker sta ploščina pravokotnika $ABGF_1$ in ploščina kvadrata AF_1DC enaki, lahko zapišemo enačbo

$$b(a+b) = a^2.$$

Ker nas zanima razmerje $\frac{|AF_2|}{|F_2B|}$ oziroma $\frac{a}{b}$ enačbo preoblikujemo tako, da jo delimo z a in b. Tako dobimo

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b},$$

kar je enako razmerju (2.1).

Sedaj pa dobljeno razmerje še izračunajmo. Če za celotno daljico AB vzamemo dolžino 1 in dolžino daljice F_2B z b, dobimo, da je dolžina daljice AF_2, ki smo jo označili z a, enaka $a = 1 - b$. To vstavimo v razmerje (2.1) in dobimo enakost

$$\frac{1}{1-b} = \frac{1-b}{b}. \tag{2.2}$$

Z enakostjo (2.2) lahko izračunamo b, in sicer dobimo $(1-b)(1-b)=b \Rightarrow$ $b^2-3b+1=0$. S pomočjo formule za izračun rešitev kvadratne enačbe lahko izračunamo b. Dobimo, da je

$$b_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} \Rightarrow b_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ b_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ .$$

Rešitev b_1 tukaj ni smiselna, saj vemo, da iščemo manjši del daljice, ki pa ne more biti večji od celotne daljice, za katero smo vzeli dolžino 1. Tako dobimo rešitev

$$b=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Da bi izračunali zlato število, moramo b vstaviti v zgornjo enakost (2.2).

$$\phi=\frac{1}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\frac{2-3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\cdot(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})\cdot(-1-\sqrt{5})}=\frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4}=$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1,61803398\ldots$$

Dobimo, da je $\phi \approx 1,618033988\ldots$

Označimo ga kot zunanji zlati rez, saj lahko izračunamo tudi notranji zlati rez. Dobimo ga tako, da razmerje (2.1) obrnemo, in sicer dobimo enakost

$$\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a}.$$

Torej iščemo razmerje manjšega dela daljice proti večjemu, če storimo enako kot smo prej in vstavimo, da je $a=1-b$, dobimo

$$\frac{1-b}{1}=\frac{b}{1-b}\ . \tag{2.3}$$

Če že prej izračunan b vstavimo v enakost (2.3), dobimo

$$\frac{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{1}=\frac{2-3+\sqrt{5}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}61803398\ldots$$

Izračunali smo število, ki ga bomo označevali kot φ. In sicer je $\varphi \approx 0{,}618033988\ldots$ Ker smo enakost (2.1) ravno obrnili, je to število obratna vrednost zlatemu številu, kar lahko zapišemo kot $\phi=\frac{1}{\varphi}$. Da se prepričamo, da to res drži, namesto φ vstavimo ravnokar izračunano število v algebrski obliki:

$$\phi=\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})}=\frac{2(-1-\sqrt{5})}{-1-5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{-2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi.$$

2.3.3. Zanimivosti zlatega števila

Zanimivo je, da se zlato število - ϕ in njegova obratna vrednost - φ razlikujeta točno za 1. To pa lahko zapišemo tudi kot $\phi = 1 + \varphi$ oziroma, če φ zapišemo z obratno vrednostjo zlatega števila velja:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}. \tag{2.4}$$

Dokaz enačbe (2.4):

Enačbo lahko dokažemo tako, da vanjo vstavimo ϕ v algebrski obliki:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{-3+\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5}{-4} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ker ima ϕ neskončno mnogo ne ponavljajočih se decimalk, rečemo, da je iracionalno število. Ta števila pa lahko zapišemo tudi s pomočjo neskončnih verižnih ulomkov. Verižne ulomke se zapiše, kot

$$b = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}},$$

kjer je a_0 neko celo število, vsa druga števila a_n pa so naravna števila (oziroma pozitivna cela števila) in se imenujejo delni količniki. To lahko v skrajšani obliki zapišemo tudi kot

$$b = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots].$$

(»Verižni ulomki«, 2023)

Torej, ker je zlato število iracionalno, ga lahko zapišemo kot neskončni verižni ulomek, in sicer s pomočjo enačbe (2.4):

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}} = [1; \overline{1}].$$

Če pa enačbo (2.4) pomnožimo s ϕ in korenimo, dobimo drugo zanimivost

$$\phi = \sqrt{1+\phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\phi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}},$$

ki se prav tako ponavlja v neskončnost.

2.3.4. Fibonaccijevo zaporedje

Fibonaccijevo zaporedje je zaporedje števil $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$ in ga pogosto najdemo v naravi. Prvi ga je omenil Fibonacci pri opazovanju rojstva zajčjih mladičev, ki smo si ga že ogledali. Videli pa bomo tudi, da je tesno povezano z zlatim številom.

Fibonaccijevo zaporedje lahko podamo rekurzivno kot:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ pri čemer je } n \geq 3 \text{ in } n \in \mathbb{N}.$$

Izkaže se, da splošni člen Fibonaccijevega zaporedja lahko izračunamo s predpisom:

$$a_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

(»Fibonaccijevo število«, 2023)

Predpisa splošnega člena zaporedja z našim srednješolskim znanjem ne znamo izpeljati iz rekurzivne formule, lahko pa ga dokažemo s pomočjo matematične indukcije.

Dokaz predpisa (2.5) s pomočjo matematične indukcije:
Da bo lažje računati, bomo predpis (2.5) preoblikovali, za ϕ pa vzeli prej izračunano število $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dobimo, da je

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{2.6}$$

Prvi korak indukcije je izračun splošne formule (2.6) za $n = 1$ in $n = 2$. Dobimo, da je

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 \text{ in}$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5-(1-2\sqrt{5}+5)}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1.$$

Dobimo enaki števili a_1 in a_2, kot sta podani v rekurzivnem predpisu. Tako lahko postavimo domnevo oziroma indukcijsko predpostavko, da predpis (2.6) velja za vsak $n \in \mathbb{N}$. Da to res drži, moramo dokazati, da velja tudi $n + 1$. To storimo tako, da namesto n v rekurzivni predpis ($a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$) in predpis (2.6) vstavimo $n + 1$. Dobimo, da je

$$a_{n+1} = a_{(n+1)-1} + a_{(n+1)-2} = a_n + a_{n-1} \text{ in}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},$$

Če nam uspe prvo enačbo preoblikovati tako, da bo enaka drugi, bomo dokazali, da predpis splošnega člena Fibonaccijevega zaporedja (2.6) drži za vsak $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} = a_{(n+1)-1} + a_{(n+1)-2} = a_n + a_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}+2}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}+2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}+2}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}+2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3+\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5}{1-5}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{1-5}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{-2\cdot(1+\sqrt{5})}{-4}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{-2\cdot(1-\sqrt{5})}{-4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

Res dobimo, da je druga enačba enaka prvi, kar pomeni, da enačba (2.6) velja za vsa števila n, pod pogojem, da je $n \in \mathbb{N}$ in $n \geq 3$.

2.3.5. Definicija zlatega števila s pomočjo limite

S predpisom (2.5) sedaj lahko dokažemo tudi definicijo zlatega števila s pomočjo limite količnika dveh sosednjih členov Fibonaccijevega zaporedja, pri kateri člene povečujemo proti neskončnosti. Izkaže se zelo zanimivo naključje, in sicer da se količnik dveh sosednjih členov Fibonaccijevega zaporedja, katera povečujemo, vse bolj približuje zlatemu številu.

Trditev: Količnik sosednjih členov Fibonaccijevega zaporedja konvergira k zlatemu številu. Trditev dokažemo s pomočjo enakosti (2.7), ki pravi, da je limita količnika dveh sosednjih členov Fibonaccijevega zaporedja, pri kateri gre n proti neskončnosti, enaka zlatemu številu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi \,. \tag{2.7}$$

Dokaz enakosti (2.7): v limito vstavimo formulo za splošni člen (2.6) in dobimo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-(n+1)}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}} =$$

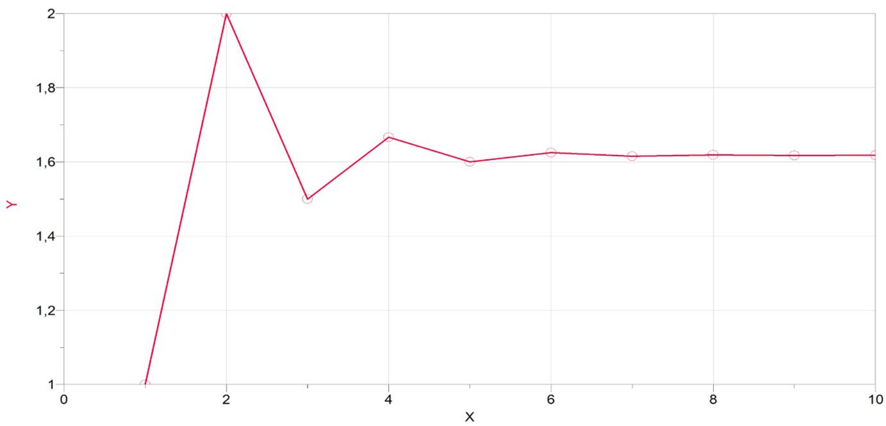
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{(n+1)}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)} \frac{/\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{/\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1^{n}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}} =$$

$$= \frac{1\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 0\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \,.$$

Trditev preverimo še s pomočjo tabele 2, ki je bila ustvarjena v Excelu, in slike 19, ki prikazuje graf, ustvarjen v aplikaciji Logger pro. Iz slike 19 ter tabele 2 takoj opazimo, da je Fibonaccijev količnik že po 5. členu zelo blizu zlatemu številu in se mu tudi naprej zelo hitro približuje.



Slika 19: Graf konvergence Fibonaccijevih kvocientov k ϕ.

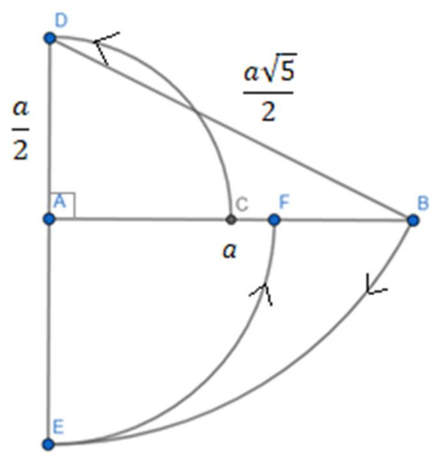
Člen	Fibonaccijevo zaporedje	Fibonaccijev količnik sosednjih členov
1	1	1
2	1	2
3	2	1,5
4	3	1,666666667
5	5	1,6
6	8	1,625
7	13	1,615384615
8	21	1,619047619
9	34	1,617647059
10	55	1,618181818
11	89	1,617977528
12	144	1,618055556
13	233	1,618025751
14	377	1,618037135
15	610	1,618032787
16	987	1,618034448
17	1597	1,618033813
18	2584	1,618034056
19	4181	1,618033963
20	6765	1,618033999

Tabela 2: Izračuni Fibonaccijevih količnikov sosednjih členov.

2.4. Konstrukcija zlatega reza v geometriji

Konstrukcije bomo močno potrebovali v raziskovalnem delu, saj bomo morali iz načrtov Gimnazije Kranj prepoznati zlati rez. Poglejmo si nekaj konstrukcij z ravnilom in šestilom, ki jih bomo ustvarili v programu za dinamično geometrijo GeoGebra.

2.4.1. Konstrukcija s pomočjo krožnic in pravokotnega trikotnika



Slika 20: Konstrukcija zlate točke F s pomočjo krožnice in pravokotnega trikotnika.

Koraki konstrukcije, ki jo lahko vidimo na sliki 20:

1. Narišemo daljico AB poljubne dolžine.
2. Vzamemo polovično dolžino daljice AB (točka C) in jo prenesemo na pravokotno daljico (točka D).
3. Potem dolžino daljice DB prenesemo na nosilko DA in dobimo točko E.
4. Dolžino daljice AE prenesemo nazaj na daljico AB in dobimo F, zlato točko te daljice.

Dokaz, da je F res zlata točka: Naj bo $|AB| = a$, potem je $|AD| = \frac{a}{2}$. S pomočjo Pitagorovega izreka izračunamo še dolžino hipotenuze DB, in dobimo, da je njena dolžina $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. S pomočjo teh stranic zapišemo še

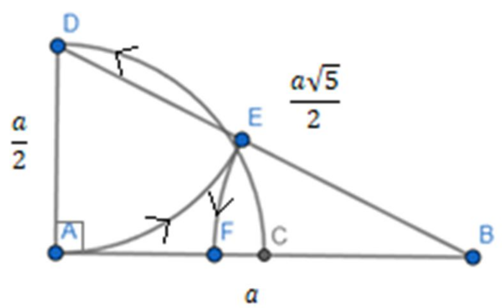
$$|AE| = |AF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}.$$ Tako dobimo

$$\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{a}{\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$ in

$$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}}{a-\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}}{a\left(1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{(-1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{-3+3\sqrt{5}-\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi\ .$$

Res velja $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AF|}{|BF|} = \phi$.

2.4.2. Konstrukcija s pomočjo šestila in Pitagorovega izreka



Slika 21: Konstrukcija zlate točke F s pomočjo šestila in Pitagorovega izreka.

Koraki konstrukcije, ki jo lahko vidimo na sliki 21:

1. Narišemo daljico AB poljubne dolžine.
2. Vzamemo polovično dolžino daljice AB (točka C) in jo prenesemo na pravokotno daljico (točka D).
3. Potem skozi točko A narišemo lok s središčem v D in na daljici DB dobimo točko E.

4. Sedaj pa skozi točko E narišemo lok s središčem v B in v presečišču tega loka in daljice AB, dobimo zlato točko F.

Dokaz, da je F res zlata točka: Naj bo spet $|AB| = a$, potem je $|AD| = \frac{a}{2}$. Kot smo že prej izračunali, je dolžina hipotenuze DB enaka $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Tako dobimo, da je

$$|BE| = |BF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}$$, kar vstavimo v razmerje

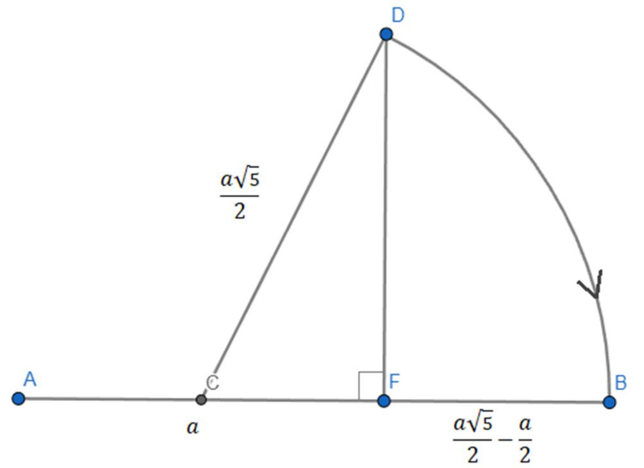
$$\frac{|AB|}{|BF|} = \frac{a}{\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$ in

$$\frac{|BF|}{|AF|} = \frac{\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}}{a-\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}}{a\left(1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{(-1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{-3+3\sqrt{5}-\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Ponovno smo dobili željeno enakost $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AF|}{|BF|} = \phi$.

2.4.3. Konstrukcija z dodatnim zunanjim delom

Pri tej konstrukciji bomo podaljšali daljico AF tako, da bo z novo daljico tvorila zlato razmerje, kar je prikazano na sliki 22.



Slika 22: Konstrukcija zlatega reza s pomočjo dodatnega zunanjega dela.

Koraki konstrukcije:

1. Narišemo daljico AF poljubne dolžine.
2. Daljico AF razpolovimo in dobimo točko C.
3. V točki F narišemo pravokotno daljico z dolžino $|AF|$.
4. Sedaj lahko narišemo del krožnice skozi točko D s središčem v točki C. Tako dobimo točko B na nosilki daljice AF.
5. Sedaj točka F predstavlja zlato točko na daljici AB.

Dokaz, da je F res zlata točka: Naj bo sedaj $|AF| = a$, potem je $|CF| = \frac{a}{2}$. Kot smo že prej izračunali, je dolžina hipotenuze CD enaka $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ker smo njeno dolžino prenesli na nosilko osnovne daljice, je tudi dolžina daljice CB enaka $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Tako dobimo, da je

$$|BF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}$$, kar vstavimo v razmerje

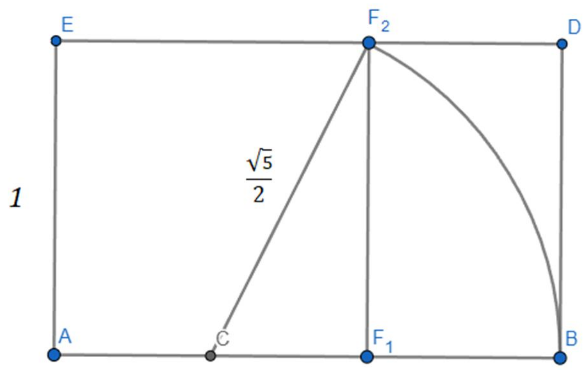
$$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{a}{\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \text{ in}$$

$$\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{a+\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{\frac{2a+a(-1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{a(2-1+\sqrt{5})}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Ponovno smo dobili iskano razmerje $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AB|}{|AF|} = \phi$.

2.4.4. Konstrukcija zlatega pravokotnika

S pomočjo dodatnega zunanjega dela lahko konstruiramo tudi zlati pravokotnik.
Definicija: Zlati pravokotnik je pravokotnik, za katerega velja, da sta dolžini stranic v razmerju zlatega reza.



Slika 23: Konstrukcija zlatega pravokotnika.

Dokaz, da je pravokotnik na sliki 23 res zlati oziroma da sta dolžini stranic pravokotnika res v zlatem rezu: naj bo daljica $|AE| = 1$, potem iz Pitagorovega izreka sledi, da je dolžina hipotenuze CF_2 enaka $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ker je daljica AB sestavljena iz dolžine hipotenuze CF_2 in $\frac{|AF_1|}{2} = \frac{|AE|}{2} = \frac{1}{2}$, hitro opazimo, da je dolžina druge stranice pravokotnika AB enaka $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, kar je enako ϕ.

Trditev: Zlati pravokotnik ima zelo zanimivo lastnost, in sicer: če v njem ustvarimo največji možni kvadrat, preostanek ponovno tvori zlati pravokotnik, in tako dalje.

Dokaz trditve: naj bo $\frac{|AB|}{|AE|} = \phi$, torej so stranice manjšega pravokotnika BDF_1F_2 v razmerju $\frac{|BD|}{|BF_1|} = \frac{1}{\phi - 1}$. Iz enačbe (2.4) vemo, da $\phi - 1$ lahko zapišemo tudi kot φ. Tako dobimo $\frac{1}{\varphi}$, kar pa smo se že prej prepričali, da je enako ϕ. Ker sta stranici manjšega pravokotnika BDF_1F_2 res v razmerju zlatega reza: $\frac{|BD|}{|BF_1|} = \phi$, vemo, da je tudi ta pravokotnik zlati.

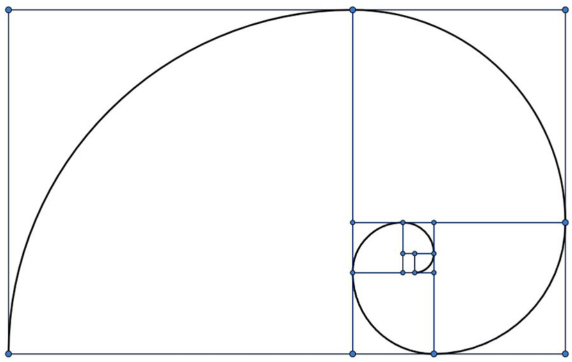
2.4.5. Konstrukcija zlate spirale

Če v zlatem pravokotniku, v katerega smo vrisali vse naslednje zlate pravokotnike, v dobljene kvadrate vrišemo četrtinske loke krožnice s polmerom stranice posameznega kvadrata, dobimo zlato spiralo, ki je prikazana na sliki 24.

Definicija: Zlata spirala je krivulja, pri kateri polmeri lokov v posameznih kvadratih predstavljajo padajoče geometrijsko zaporedje s splošnim členom

$$r_n = r_1 \cdot \varphi^{n-1} ,$$

pri čemer φ oziroma obratna vrednost zlatega števila predstavlja količnik, r_1 pa je polmer loka v največjem kvadratu.



Slika 24: Konstrukcija zlate spirale.

Ker s pomočjo geometrijskega zaporedja poznamo polmere posameznega dela krivulje, lahko izračunamo tudi dolžino zlate spirale. Sešteti moramo loke, ki so dolgi natančno četrtino celotne krožnice s polmerom velikosti stranice kvadrata v katerem je narisana. Ker vemo, da je dolžina celotne krožnice $2\pi r$, je dolžina prvega dela spirale $\frac{2\pi r_1}{4} = \frac{\pi r_1}{2}$. Torej je dolžina celotne spirale

$$\frac{\pi r_1}{2} + \frac{\pi r_2}{2} + \frac{\pi r_3}{2} + \cdots = \frac{\pi}{2}(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots).$$

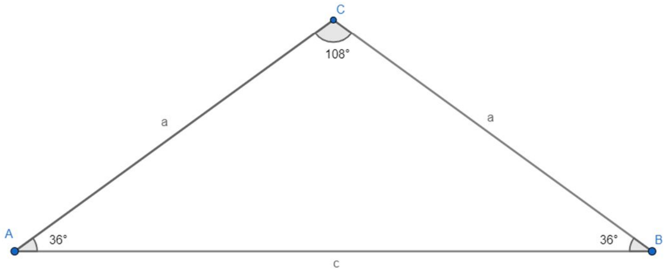
Vsota polmerov v oklepaju nam predstavlja vsoto neskončne geometrijske vrste, saj je spirala neskončna črta. Vsota neskončne vrste se lahko, pod pogojem, da je absolutna vrednost količnika geometrijske vrste manjša od 1, izračunamo po enačbi $s = \frac{a_1}{1-k}$. V našem primeru to drži, saj je $|\varphi| < 1$. Torej se jo lahko izračuna kot

$$S = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r_1}{1-\varphi}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-\varphi}\right) = \frac{\pi}{2}(1-\varphi)^{-1}.$$

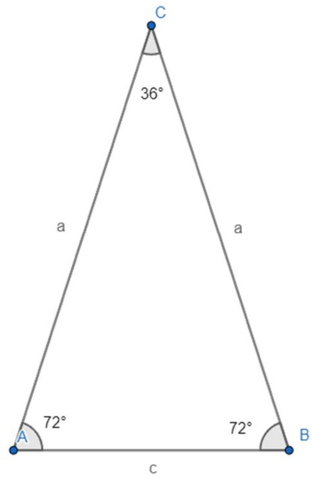
2.4.6. Konstrukcija zlatih trikotnikov

Definicija zlatega trikotnika: Zlati trikotnik je enakokrak trikotnik, pri katerem sta stranici v zlatem razmerju.

Poznamo dve vrsti zlatega trikotnika, in sicer topokotni trikotnik na sliki 25 z notranjimi koti $108°, 36°$ in $36°$ ter ostrokotni trikotnik na sliki 26 z notranjimi koti $36°, 72°$ in $72°$.



Slika 25: Topokotni zlati trikotnik.



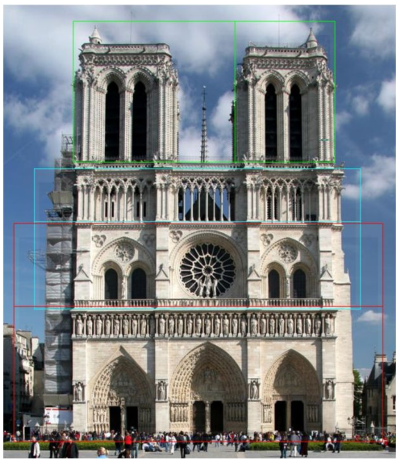
Slika 26: Ostrokotni zlati trikotnik.

3. RAZISKOVALNI DEL

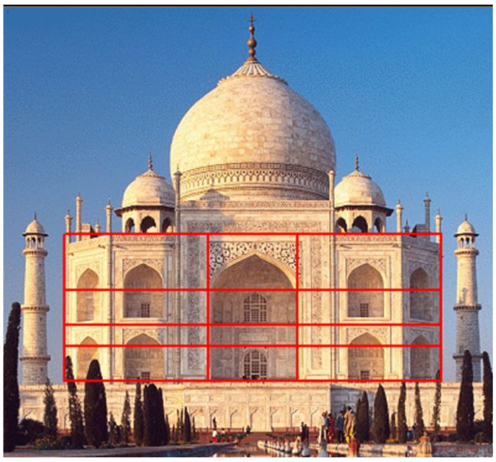
V tem delu naloge smo s pomočjo načrta Gimnazije Kranj in različnih metod raziskovanja, ugotovavljali, ali je Gimnazija grajen v zlatem rezu, kje se ti nahajajo in ali lahko z njihovo pomočjo na stavbi opazimo tudi zlate pravokotnike in zlato spiralo. Načrt smo dobili od arhitekta Jureta Hrovata, ki je sodeloval pri prenovi notranjega dela gimnazije leta 2018. Z raziskovanjem zlatega reza na Gimnaziji Kranj bomo lahko ovrgli ali potrdili postavljeni hipotezi in našli odgovor na raziskovalno vprašanje.

3.1. Znane zgradbe v zlatem rezu

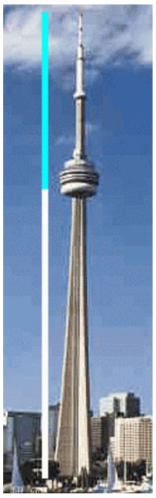
Zadeve se bomo lotili tako, da bomo najprej preučili druge zgradbe, za katere je že znano, da so zgrajene v zlatem rezu. Ene izmed njih so:



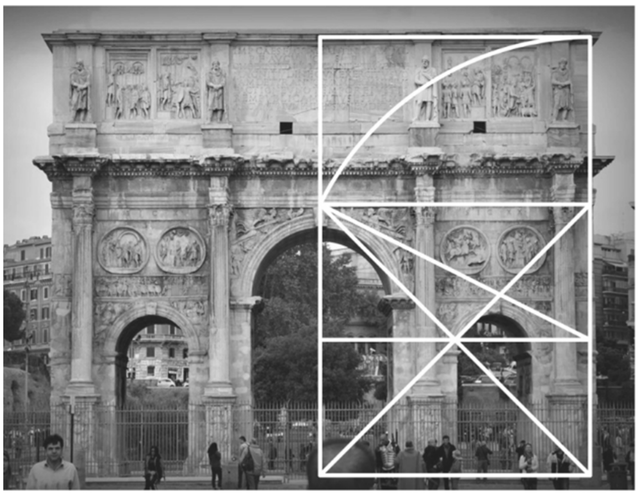
Slika 27: Zlati rez na Notre Dame.



Slika 28: Zlati rez na Taj Mahaju.



Slika 29: Zlati rez na CN Towerju.



Slika 30: Zlati rez na Konstantinovem slavoloku.

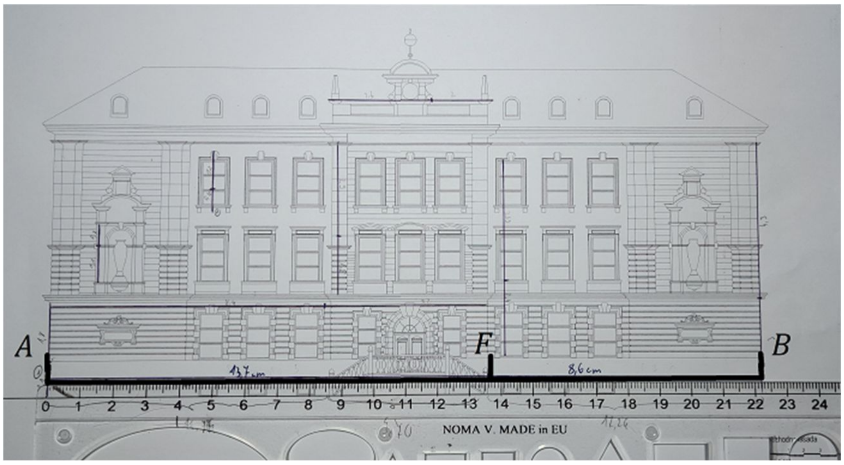
Notre Dame na sliki 27 v Franciji odraža zlata razmerja v višinah vsakega naslednjega nadstropja zgradbe kot tudi v širini stebrov na vrhu. V zlatem rezu je tudi Taj Mahaj v Indiji na sliki 28, kjer se eden izmed zlatih rezov pojavi med razmerjem v širini velikega osrednjega loka glede na njegovo celotno širino. Na sliki 29 je CN Tower v Kanadi, ki je prav tako zasnovan v zlatem razmerju. Ta se pojavi med razgledno ploščadjo in celotno višino stolpa. (Meisner, 2013)

Na sliki 30 je Konstantinov slavolok v Italiji, kjer je uporabljena konstrukcija z dodatnim zunanjim delom. V njej lahko opazimo zlati rez in pravokotnik. Vse to bomo tudi mi iskali na sprednjem delu Gimnazije Kranj, saj je ta najbolj zanimiv in kompleksen.

3.2. Iskanje zlatega reza s pomočjo meritev

Na načrtu gimnazije izberemo del stavbe oziroma daljico, za katero se nam zdi, da bi bila lahko v zlatem rezu. Izmerimo oba dela daljice in izmerjeni števili vstavimo v enakost (2.1). Tako dobimo neko število, in če je to število približno enako zlatemu številu, lahko trdimo, da je ta del gimnazije zgrajen v zlatem rezu.

Poglejmo si primer, ko si za daljico AB izberemo celotno dolžino Gimnazije Kranj z zlato točko F, kot je prikazano na sliki 31.



Slika 31: Iskanje zlatega reza s pomočjo ravnila

Iz načrta izmerimo, da je $|AB| = 22{,}3$ cm, $|AF| = 13{,}7$ cm in $|BF| = 8{,}6$ cm. Da bi potrdili, da je ta del gimnazije res v zlatem rezu, izmerjene dolžine vstavimo v enačbo (2.1). Dobimo razmerje

$$\frac{13{,}7\text{ cm} + 8{,}6\text{ cm}}{13{,}7\text{ cm}} \approx 1{,}6277 \approx \phi.$$

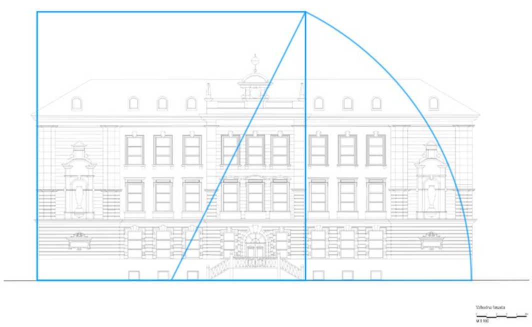
A pri tem načinu moramo upoštevati napake pri merjenju, kar vpliva na točnost izračuna. Načrt je namreč narisan v merilu in nima zapisanih točnih meritev vseh elementov. Zato izračunajmo dejanske dolžine izmerjenih daljic s pomočjo merila, ki je $1{:}\,100$.

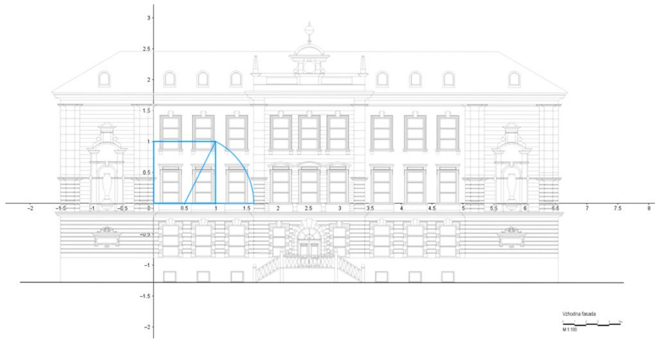
Dobimo, da je $|AB| = 44{,}6$ m, $|AF| = 27{,}4$ m in $|BF| = 17{,}2$ m. Izračunane dolžine sedaj primerjajmo s tistimi, ki jih dobimo tako, da dejanske dolžine izmerimo z laserskim metrom. Z njim izmerimo, da je $|AB| = 43{,}72$ m, $|AF| = 26{,}96$ m in $|BF| = 16{,}76$ m.

$$\frac{16{,}76\ \mathrm{m}+26{,}96\ \mathrm{m}}{26{,}96\ \mathrm{m}} \approx 1{,}6217 \approx \phi.$$

3.3. Iskanje zlatega reza s pomočjo konstrukcij

Ker ne vemo, kakšna napaka je še sprejemljiva, da lahko rečemo, da zlati rez drži, si pomagajmo s konstrukcijo z dodatnim zunanjim delom, kot je prikazana na sliki 32. Ker pri tem načinu ne potrebujemo meritev in izračunov, temveč le šestilo in ravnilo, se lahko prepričamo, da so razmerja res zlata. Na sliki 33 je prikazana še ena konstrukcija na enak način.

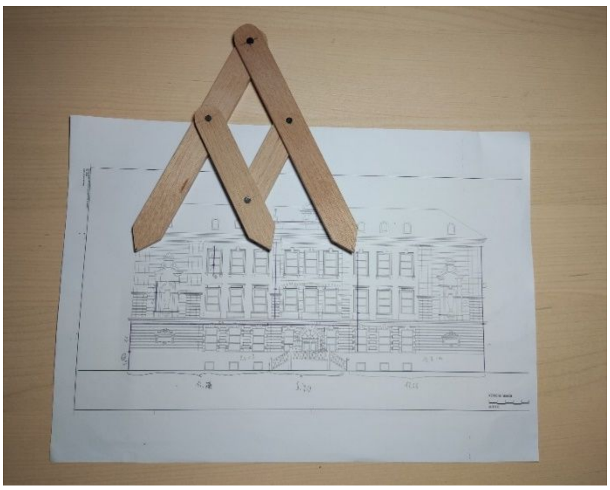




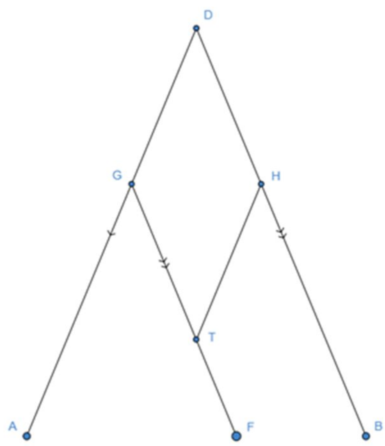
Slika 32 in slika 33: Iskanje zlatega reza na Gimnaziji Kranj s pomočjo konstrukcije z dodatnim zunanjim delom.

3.4. Šestilo za zlati rez

Med prebiranjem literature pa smo v knjigi »The Golden ratio: The Divine Beauty of Mathematics« naleteli tudi na pripomoček imenovan šestilo za zlati rez, s katerim je iskanje zlatega reza še enostavnejše (slika 34). Zgrajen je tako, da glede na to kako široko razpremo kraka, se s tem premo sorazmerno spreminja tudi srednji krak, ki predstavlja zlato točko.



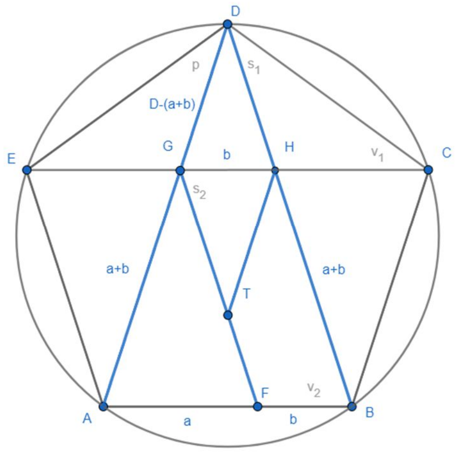
Slika 34: Iskanje zlatega reza s pomočjo šestila za zlati rez.



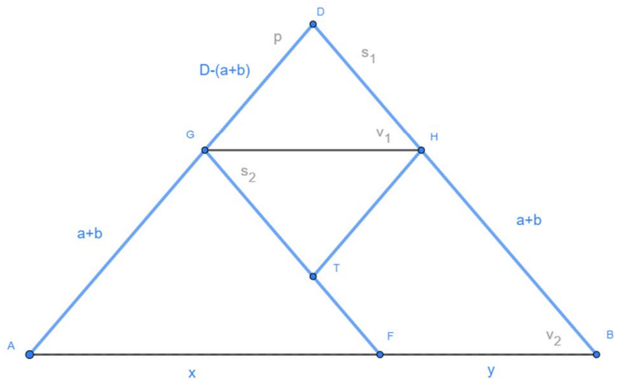
Slika 35: Konstrukcija šestila za zlati rez.

Da to šestilo res prikazuje zlati rez, poglejmo njegovo konstrukcijo (slika 35). Ta je narejena s pomočjo petkotnika , saj v njem najdemo zlati rez v diagonalah, osnovnih stranicah, prav tako pa najdemo tudi podobne zlate trikotnike.

Dokaz, da šestilo prikazuje zlati rez s pomočjo petkotnika (slika 36) in podobnih zlatih trikotnikov (slika 37):



Slika 36: Prikaz šestila za zlati rez v petkotniku.



Slika 37: Prikaz šestila za zlati rez v razmaknjeni legi.

V petkotniku na sliki 36 opazimo, da bi bili trikotniki ABD, AFG in GHD lahko podobni. Ker vzporednici v_1 in v_2 sekata kraka kota GDH, sta $\triangle ABC$ in $\triangle GHD$ podobna. Podobno velja tudi za podobna trikotnika $\triangle ABD$ in $\triangle AFG$, kjer vzporednici s_1 in s_2 sekata kraka kota BAG. Trikotnika AFG in GHD pa sta podobna, saj sta narisana na premici p, z vzporednicam s_1 in s_2, torej so njuni koti skladni, kar pa pomeni, da sta trikotnika podobna. Ker so vsi trije trikotniki med seboj podobni, za njih velja, da sta dolžini odsekov na enem kraku kota v enakem razmerju kot dolžini istoležnih odsekov na drugem kraku. Torej, če sta $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, velja $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. (Ivanec idr., b.d.)

V našem primeru iz trikotnikov ABC in AFG dobimo

$$\frac{a+b}{a} = \frac{D}{a+b}, \text{ kar bomo označili kot } \varphi_2.$$

Iz trikotnikov AFG in GHD pa dobimo

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{D-(a+b)}, \text{ kar bomo označili kot } \varphi_1.$$

Pri dokazu, si bomo sedaj pomagali z definicijo zlatega reza. Če nam uspe dokazati, da je razmerje stranic podobnih trikotnikov enako, in sicer $\varphi_1 = \varphi_2$. Nam to posledično pove, da je sama daljica AB, z enakimi dolžinami, v razmerju $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, o čimer govori definicija zlatega reza oziroma enakost (2.1).

Iz enakosti φ_1 dobimo $\varphi_1 = aD = (a+b)^2$.

Sedaj pa enakost, ki jo opisuje φ_2 preoblikujmo tako, da bo enaka φ_1.

$$\varphi_2 = (a+b)b = a(D-a-b) \Rightarrow aD - a^2 - ab = ab + b^2 \Rightarrow aD = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow$$
$$\varphi_2 = aD = (a+b)^2$$

Ker je $\varphi_1 = \varphi_2$, velja $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \phi$.

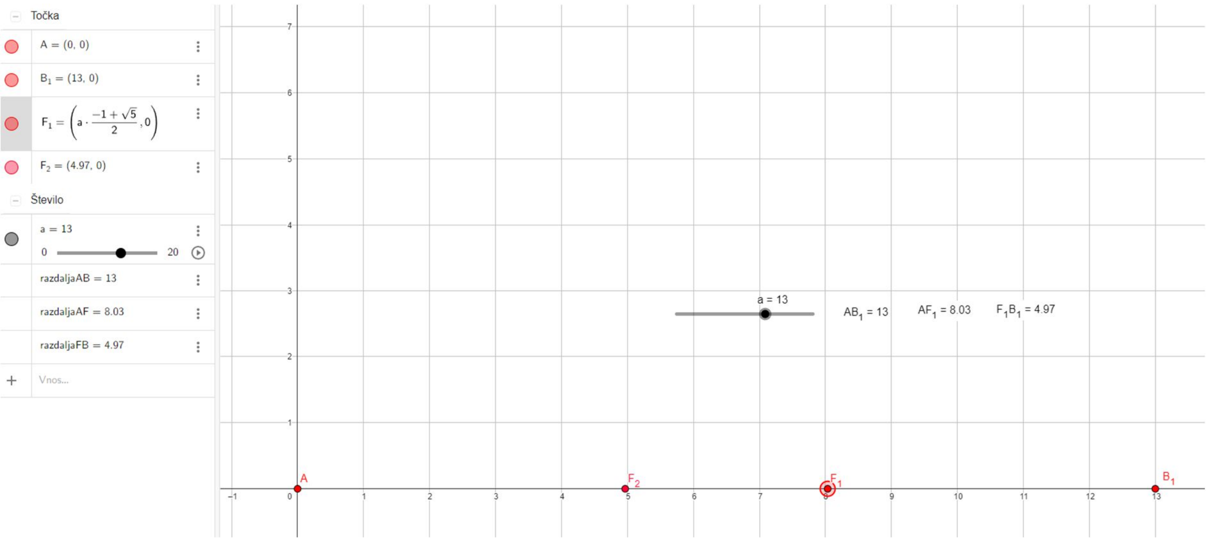
Sedaj nas zanima še, ali se to razmerje res ohrani, ko kraka šestila razmikamo. To dokažimo na primeru podobnih trikotnikov iz slike 37. Ker daljice AD, BD in GF predstavljajo dele šestila, se njihova dolžina pri razmikih ne spreminja. Na sliki smo kot x in y označili neko dolžino za katero smo kraka šestila razprli. Ker se podobnost pri trikotnikih ohrani, saj vzporednice ostajajo enake, iz trikotnikov ABD in AFG dobimo razmerja dolžin:

$$\frac{D}{x+y} = \frac{a+b}{x}.$$

Če to enakost preoblikujemo tako, da damo vse nove dolžine na eno stran dobimo $\frac{x+y}{x} = \frac{D}{a+b}$, kar smo opazili že pri φ_1. Iz tega velja $\frac{x+y}{x} = \frac{D}{a+b} = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$, torej nam šestilo, ne glede na razmik med kraki, vedno z zlato točko F prikaže zlati rez.

3.5. Iskanje zlatega reza s sistemom točk v GeoGebri

Podoben sistem kot je uporabljen v šestilu pa lahko ustvarimo tudi v programu GeoGebra. Oba delujeta tako, da mi upravljamo z dolžino daljice, za katero nas zanima, v kateri točki ima zlati rez, onadva pa nam sama prikažeta, kje se zlata točka nahaja.
Da bo program deloval, moramo ustvariti sistem točk, ki so med seboj povezane in se premikajo sorazmerno, kot je prikazano na sliki 38.



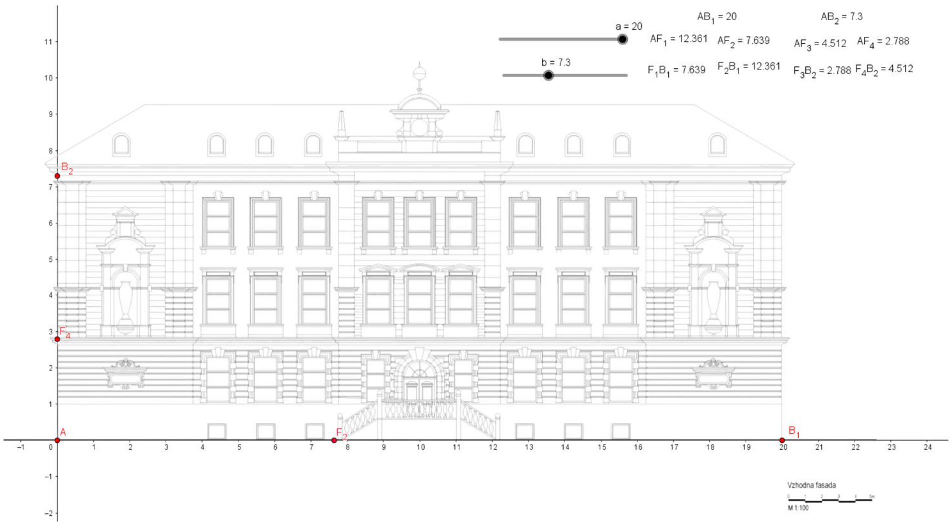
Slika 38: Prikaz delovanja sistema točk v GeoGebri za iskanje zlatega reza.

Točki F_1 in F_2 predstavljata zlati točki. Ti dve točki se spreminjata glede na to, kam premaknemo točko B_1. Vse tri točke se med seboj povezane z drsnikom a, in sicer so z njim zapisane njihove koordinatne točke: $B_1(a,0)$, $F_1\left(\frac{a\,(-1+\sqrt{5})}{2}, 0\right)$ in $F_2\left(\frac{a\,(1-(-1+\sqrt{5}))}{2}, 0\right)$. Ker želimo zlati točki najti znotraj daljice AB, torej iščemo notranji zlati rez, moramo a množiti s φ oziroma $\frac{(-1+\sqrt{5})}{2}$. Torej, ker s premikom točke B_1, spremenimo njeno koordinato a, ta preko drsnika spremeni tudi koordinati točk F_1in F_2. Na enak način bomo ustvarili tudi točki F_3 in F_4 na ordinatni osi, le da jih upravljamo s točko B_2, ki je vezana na drsnik b.

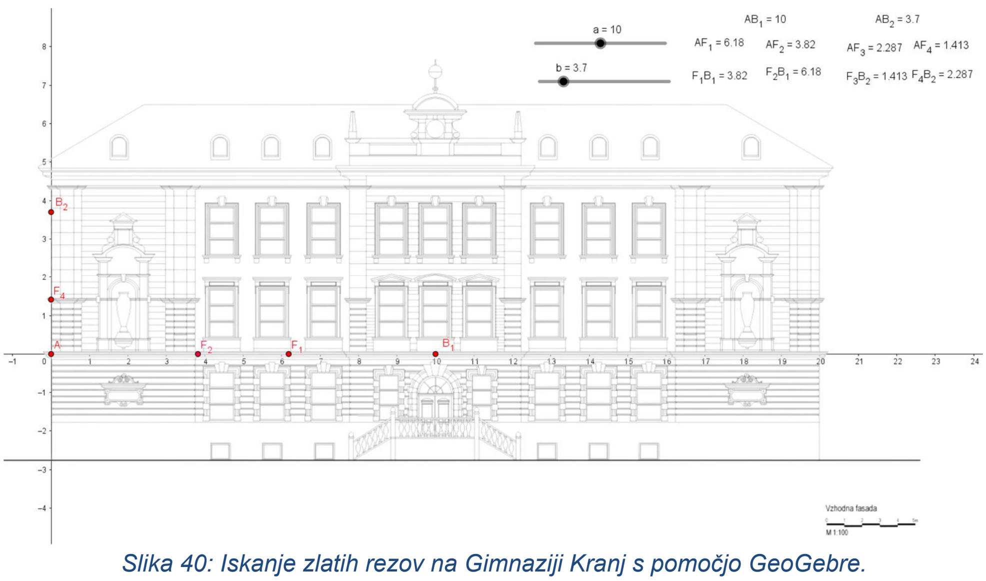
Nekaj izmed najdenih zlatih razmerij je prikazanih na sliki 39 in sliki 40. Preverimo, če daljici F_2B_1 in AF_2 z zlato točko F_2 (na sliki 39), res tvorita zlato razmerje. Ker GeoGebra sama postavi zlato točko, glede na to kam postavimo točko B_1, se nam tudi podatki za dolžine daljic izpišejo sami in jih lahko preberemo iz slike 39. Dolžini $|F_2B_1| = 12{,}361$ in $|AF_2\,| = 7{,}639$ vstavimo v enakost (2.1) in dobimo

$$\frac{|F_2B_1|}{|AF_2|} = \frac{12{,}361}{7{,}639} = 1{,}61814 \approx \phi.$$

Dobljen rezultat je v tem primeru dosti bolj natančen, kot ko smo dolžini merili z ravnilom.



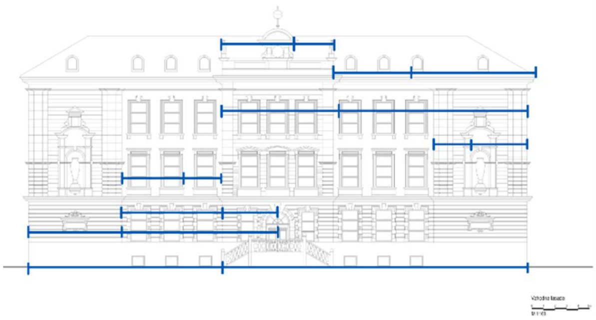
Slika 39: Iskanje zlatih rezov na Gimnaziji Kranj s pomočjo GeoGebre.



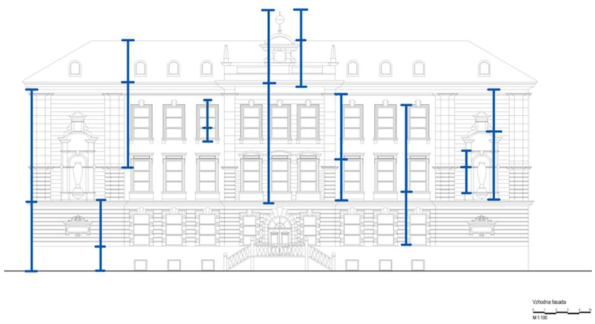
Slika 40: Iskanje zlatih rezov na Gimnaziji Kranj s pomočjo GeoGebre.

3.6. Zlati rezi, zlati pravokotniki in zlate spirale

Vsi najdeni zlati rezi so prikazani na sliki 41 in sliki 42. V zlatem rezu je tako na primer višina gimnazije do zgornjega nadstropja, ki je vidna čisto levo na sliki 42. Zlato točko ima na stiku prvega in drugega nadstropja. V zlatem rezu so tudi deli niš v katerih sta vazi, različne dolžine in višine nadstropij, razmiki med posameznimi okni in drugi deli stavbe.

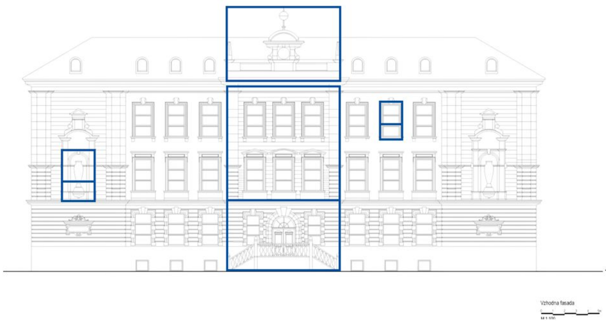


Slika 41: Zlati rezi na Gimnaziji Kranj.



Slika 42: Zlati rezi na Gimnaziji Kranj.

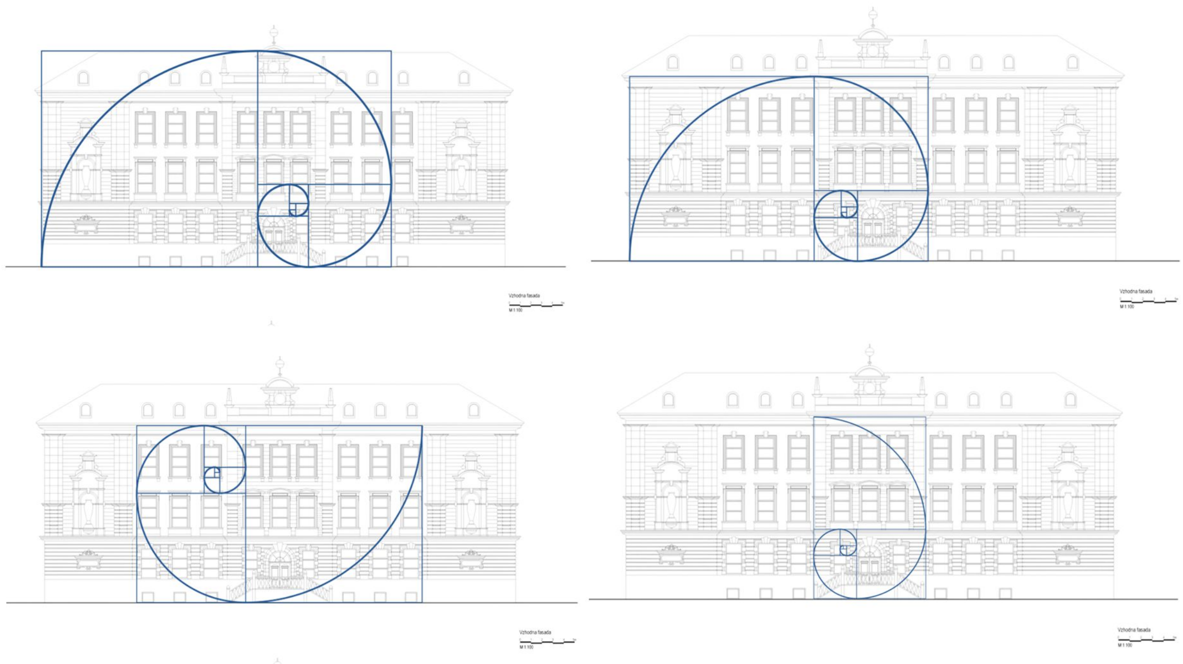
Ko imamo vsa zlata razmerja Gimnazije Kranj označene na enem mestu (slika 41 in slika 42), hitro opazimo, da ta ponekod skupaj tvorijo zlate pravokotnike, prikazane na sliki 43 in sliki 44. Opazimo, da so v zlatem rezu grajena vsa okna, sam vhod, sredinski del stavbe do zgornjega nadstropja in od zgornjega nadstropja do vrha globusa, ki stoji na strehi Gimnazije.



Slika 43: Zlati pravokotniki na Gimnaziji Kranj.

Slika 44: Zlati pravokotniki na Gimnaziji Kranj.

Ker že iz konstrukcij vemo, da se zlati pravokotniki delijo naprej, lahko to opazimo tudi na Gimnaziji. Kot vidimo na sliki 45, lahko ustvarimo zlate spirale.



Slika 45: Zlate spirale na Gimnaziji Kranj.

Vsaka izmed spiral je ustvarjena v zlatih pravokotnikih. Ti na vsaki sliki točno predstavljajo zlati rez na določenem delu Gimnazije. Na prvi spirali največji pravokotnik v zlatem rezu deli levi del stavbe in levo stranico skrajno desnih oken. Naslednji zlati pravokotnik na prvi spirali deli celotno višino stavbe v zlatem rezu, ki se nahaja na spodnjem delu sredinskih oken. In tako se še naprej ustvarjajo zlati pravokotniki, ki razdelijo vedno manjši del gimnazije v zlatem rezu. Enak potek deljenja pravokotnikov in s tem nastajanja zlatih rezov ter spiral je tudi pri ostalih treh zlatih spiralah.

4. ZAKLJUČEK

Glede na postavljene hipoteze, smo prišli do naslednjih zaključkov:

- Prvo hipotezo *»Zlati rez in Fibonaccijevo zaporedje sta tesno povezana, poleg tega lahko iz Fibonaccijevega zaporedja izpeljemo tudi definicijo zlatega števila.«* lahko **potrdimo**.

Med raziskavo smo namreč opazili, da se oba hkrati pojavljata v naravi, na primer kot razmerje števil med spiralno razporeditvijo storževih lusk, pri razporeditvi in številu cvetnih listov ter semen v cvetu, pri razmnoževanju čebel in zajcev, v lupini morske školjke ter na človeškem in živalskem telesu. Dokazali smo tudi, da je zlato število enako limiti količnika splošnega člena Fibonaccijevega zaporedja z njegovim predhodnikom.

- Drugo hipotezo *»Predvidevamo, da bomo na Gimnazij Kranj zaznali prisotnost zlatega reza, predvsem med razmerji oken, vrat, višino in dolžino stavbe ter v različnih detajlih na fasadi. Hkrati pa bomo z njihovo pomočjo opazili tudi zlate pravokotnike in zlato spiralo.«* lahko **delno potrdimo**.

Med seboj smo primerjali različne dele Gimnazije in ugotovilo smo, da so v zlatem rezu razmerja med okni in različnimi detajli na fasadi. Medtem ko razmerje med višino in dolžino Gimnazije ni v zlatem rezu. To smo dokazali s pomočjo meritev in konstrukcij na načrtu. S pomočjo šestila za zlati rez in sistemom točk v GeoGebri pa smo našli še več zlatih rezov, kot smo domnevali, da jih bomo. Z njihovo pomočjo smo na Gimnaziji Kranj opazili tudi zlate pravokotnike in zlate spirale.

- Tretjo hipotezo *»S pomočjo petkotnika in njegovih diagonal, ki naj bi bile v zlatem rezu ter podobnih zlatih trikotnikov lahko dokažemo oziroma potrdimo pravilnost šestila za zlati rez.«* prav tako lahko **potrdimo**.

V poglavju 3.4. smo namreč uspešno dokazali, da šestilo za zlati rez pravilno pokaže zlato točko ne glede na to, pod kakšnim kotom razpremo kraka.

Raziskovanje zlatega reza je bilo izjemno zanimivo in poučno, a vendar smo se med raziskovanjem srečali tudi z nekaterimi težavami, predvsem z netočnostjo meritev, ki smo jih dobili pri merjenju na načrtu. Tem smo se izognili z uporabo drugih metod iskanja zlatega razmerja. Poleg tega se pri iskanju zlatega reza na stavbi pojavi problem tudi v tem, da kljub načrtu ne moremo biti prepričani ali so vsi zlati rezi, spirale in pravokotniki na Gimnaziji tam z namenom ali le po naključju zaradi lepšega videza. Prav tako smo tekom iskanja literature ugotovili, da je gradiva o zlatem rezu v slovenskem jeziku zelo malo.

Sedaj, ko smo preučili arhitekturni načrt Gimnazije Kranj, zlati rez opazimo hitreje tudi na drugih stavbah. Tako bi lahko naše znanje uporabili pri načrtovanju ter prenovi zgradb v zlatem rezu. Za nadaljnje raziskovanje bi bilo zanimivo preučiti v katerem zgodovinskem obdobju so zlati rez najbolj uporabljali, saj ga v sodobni arhitekturi vse težje najdemo. Prav tako bi lahko pomagali pri analiziranju ter iskanju stavb, ki bi bile lahko grajene v zlatem razmerju. Dve stavbi, za katere menimo, da bi bili lahko v zlatem rezu sta Ljubljanski dvor in Slovenska filharmonija. Za lažje iskanje le tega, bi lahko program v GeoGebri nadgradili tako, da bi bil ta zmožen sam poiskati oziroma prepoznati zlati rez na načrtu. Prav tako bi bilo zanimivo raziskati ali je Fibonaccijevo zaporedje povezano tudi z zlato spiralo, glede na to, da je ta sestavljena iz zlatih razmerij.

VIRI IN LITERATURA

Bertrand, M. (2022). *Euclid's Greatest Hits*. https://nonagon.org/ExLibris/euclids-greatest-hits

Borissov, K. (2021). *Has the Function of the Great Pyramid of Giza Finally Come to Light?.* https://www.ancient-origins.net/ancient-places-africa/has-function-great-pyramid-giza-finally-come-light-009861

Dunlap, R.A. (1997). *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers.* https://books.google.si/books?hl=sl&lr=&id=Pq2AekTsF6oC&oi=fnd&pg=PA1&ots=yD20Z3IRd7&sig=ORtmfWy4OK_HUxYL-JEJkMC3x9o&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

ETH Zurich Library. (b.d.). *Euclid: Construction of the Golden Ratio. Library ETH Zurich.* https://library.ethz.ch/en/locations-and-media/platforms/virtual-exhibitions/fibonacci-un-ponte-sul-mediterraneo/reception-of-fibonacci-numbers-and-the-golden-ratio/euclid-construction-of-the-golden-ratio.html

Evklid. (b.d.). *Elementi*. http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookII/propII11.html

Fidanci, E. A.. (2023). *Golden Ratio Samples in Architecture #1*. https://illustrarch.com/articles/15613-golden-ratio-samples-in-architecture-1.html

Fibonaccijevo število. (3. maj, 2023). v *Wikipediji*. https://sl.wikipedia.org/wiki/Fibonaccijevo_%C5%A1tevilo#

Gimnazija Kranj. (2024). *120 let gimnazijske stavbe v Kranju*. [Razstava]. Gimnazija Kranj, Kranj, Slovenija.

GoldenNumber.net. (2014). *The Nautilus Spiral: More than a Golden Ratio Symbol.* https://www.goldennumber.net/nautilus-spiral-golden-ratio/

Hrovat, J. (2018). Gimnazija Kranj: obstoječe stanje. Kranj, Slovenija: Gimnazija Kranj.

Ivanec idr. (b.d.). *Podobnost trikotnikov*. https://eucbeniki.sio.si/vega2/243/index2.html

KUCD Interactive. (b.d.). *The Golden Ratio in Art.* [Slika] https://kucdinteractive.com/croy/golden-ratio-site/art.html

Last supper. (13. februar, 2024). v Wikipediji. [Slika] https://en.wikipedia.org/wiki/Last_Supper

Meisner, G. (2012). *The Human Face and the Golden Ratio.* https://www.goldennumber.net/face/

Meisner, G. (2012). *The Design of Life and the Golden Ratio*. https://www.goldennumber.net/life-design/

Meisner, G. (2013). *Phi and the Golden section in Architecture*. https://www.goldennumber.net/architecture/

Meisner, G. (2014). *Da Vinci and the Divine Proportion in Art Composition*. https://www.goldennumber.net/leonardo-da-vinci-golden-ratio-art/

Meisner, G. (2016). Golden ratios in Great Pyramid of Giza site topography. https://www.goldennumber.net/great-pyramid-giza-complex-golden-ratio/

Meisner, G. (2018). *The Golden Ratio: The Divine Beauty of Mathematics*. Race Point Publishing.

Pečnik, I. (2012). *Fenomen razmerij v likovnem izrazu in strukturiranost slikovne površine*. [Diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta] https://books.google.si/books/about/Fenomen_razmerij_v_likovnem_izrazu_in_st.html?id=O_AIlAEACAAJ&redir_esc=y

Pflugerville. (2017). *14 Interesting examples of the golden ratio in nature.* [Slika]. https://www.mathnasium.com/blog/14-interesting-examples-of-the-golden-ratio-in-nature

The Golden rules for Artists. (27. julij, 2024). na *YouTube*. [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=nBa6lpRqfE8

Shekhawat, K. (2015). *Why golden rectangle is used so often by architects: A mathematical approach.* https://doi.org/10.1016/j.aej.2015.03.012

Stakhov, A. (2006). *The golden section, secrets of the Egyptian civilization and harmony mathematics.* https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.11.022

United Nations Secretariat Building. (17. februar, 2016). v *Wikipediji*. [Slika]. https://en.wikipedia.org/wiki/United_Nations_Secretariat_Building

Verižni ulomki. (31. oktober, 2023). v *Wikipediji*. https://sl.wikipedia.org/wiki/Veri%C5%BEni_ulomek

Walser, H. (2001). *The Golden Section*. https://books.google.si/books?hl=sl&lr=&id=pMOVk3ladDgC&oi=fnd&pg=PA1&ots=N_CGS7-Tik&sig=A3p3k9SptoYzEnvT5q4dm2q_opo&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

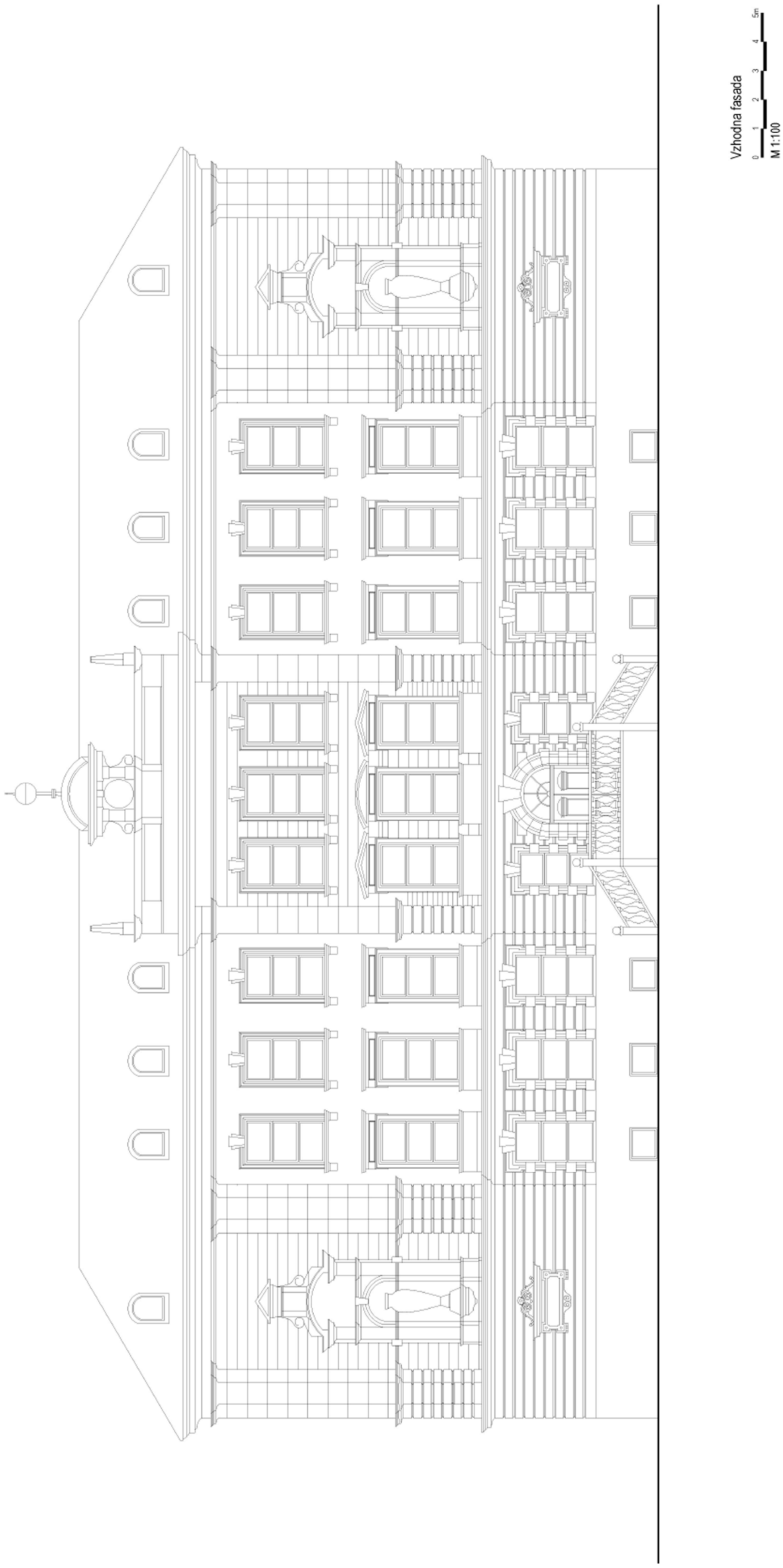
Zakošek, V. (2005). *Zlati rez skozi zgodovino*. http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2005/ura/zakosek/stran/zlati_rez/zlati_rez.pdf

Zgodovinski arhiv Gimnazije Kranj. [Slika].

Zwahlen, R.A., Tang, A.T.H., Leung, W.K. idr. (2022). *Does 3-dimensional facial attractiveness relate to golden ratio, neoclassical canons, 'ideal' ratios and 'ideal' angles?*. [Slika]. https://doi.org/10.1186/s40902-022-00358-2

PRILOGE

- Načrt Gimnazije Kranj



-