

GIMNAZIJA POLJANE

Matic Blazina
STOŽNICE

Raziskovalna naloga

Mentor: prof. Blaž Ivanuša
Somentor: prof. dr. Primož Moravec

Ljubljana, 2024

KAZALO

1. Uvod	4
2. Linearne transformacije Ravnine	5
3. Bijektivne preslikave	9
4. Rotacija okoli koordinatnega izhodišča	11
5. Rotacija okoli poljubne točke	13
6. Zrcaljenje čez premico, ki poteka skozi točko $(0, 0)$	15
7. Zrcaljenje čez poljubno premico	17
8. Krivulje drugega reda	19
9. Elipsa	21
10. Hiperbola	25
11. Parabola	28
12. Rotacije stožnic	31
Literatura	36

STOŽNICE

POVZETEK

V raziskovalni nalogi obravnavamo nekatere afine transformacije ravnine, kot so rotacije, zrcaljenja in raztegi, predvsem pa se ukvarjamo s stožnicami in krivuljami drugega reda, ki jih analiziramo še bolj podrobno, kot smo jih pri pouku v gimnaziji. Izpeljemo formulo za rotacijo koordinatnega sistema in jo uporabimo za rotiranje stožnic, ne da bi si pri tem pomagali z matrikami. Stožnice definiramo na drugačen način kot pri pouku in jih tako tudi obravnavamo. Mimogrede si dobro ogledamo tudi izrojene stožnice in ugotovimo, kdaj se pojavljajo.

1. UVOD

Pojma *krivulje drugega reda* in *stožnice* se pogosto uporabljata kot sopomenki, čeprav to gotovo nista. Krivulje drugega reda namreč poleg stožnic vsebujejo še vse njihove izrojene oblike, ki jim kljub njihovim zanimivim lastnostim profesorji v srednji šoli ponavadi ne namenijo veliko časa in pozornosti. Zato si bomo v raziskovalni nalogi poskušali dobro ogledati vse oblike krivulj drugega reda in pokazati, pod katerimi pogoji se določene oblike pojavljajo. Enačba, ki predstavlja vse krivulje drugega reda je

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

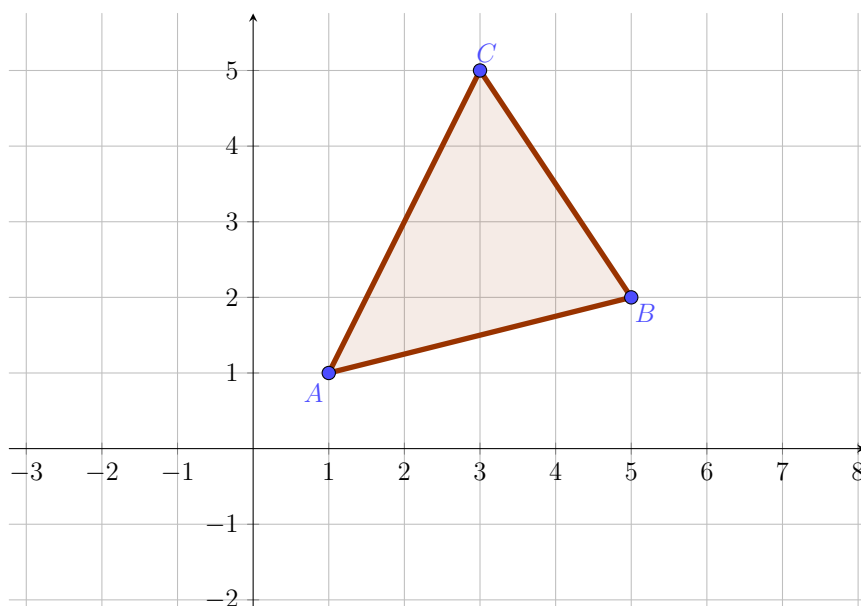
V srednji šoli ne rišemo stožnic, ki vsebujejo mešani člen xy . V nalogah so samo stožnice, pri katerih je $B = 0$ oziroma pri katerih so osi simetrije vzporedne s koordinatnima osema. Cilj naloge je, da bomo znali narisati tudi krivulje, ki vsebujejo člen xy z znanjem srednješolske matematike in brez uporabe matrik.

2. LINEARNE TRANSFORMACIJE RAVNINE

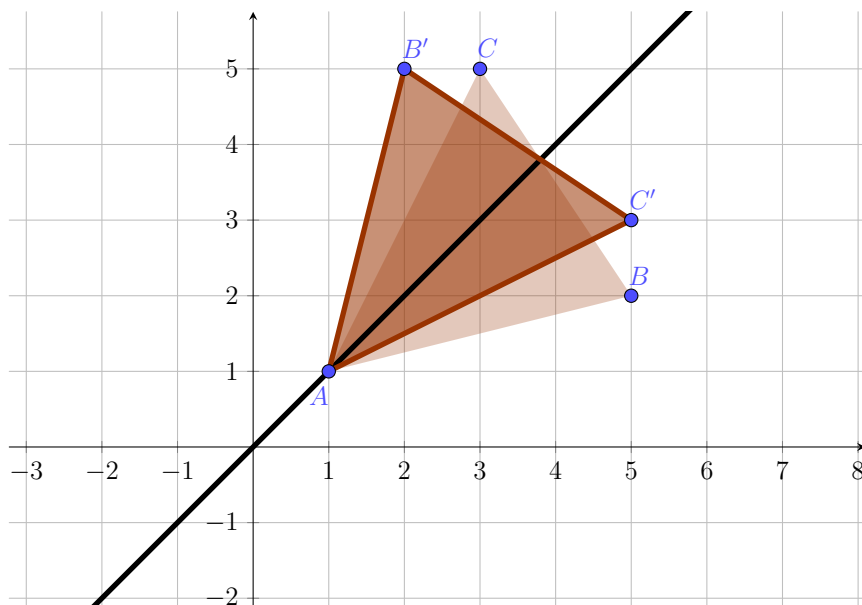
Definicija 2.1. Linearna transformacija oziroma preslikava ravnine $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je vsaka preslikava s predpisom: $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$.

Linearna transformacija vedno preslika točko $(0, 0)$ v točko $(0, 0)$. Primeri osnovnih linearnih preslikav so:

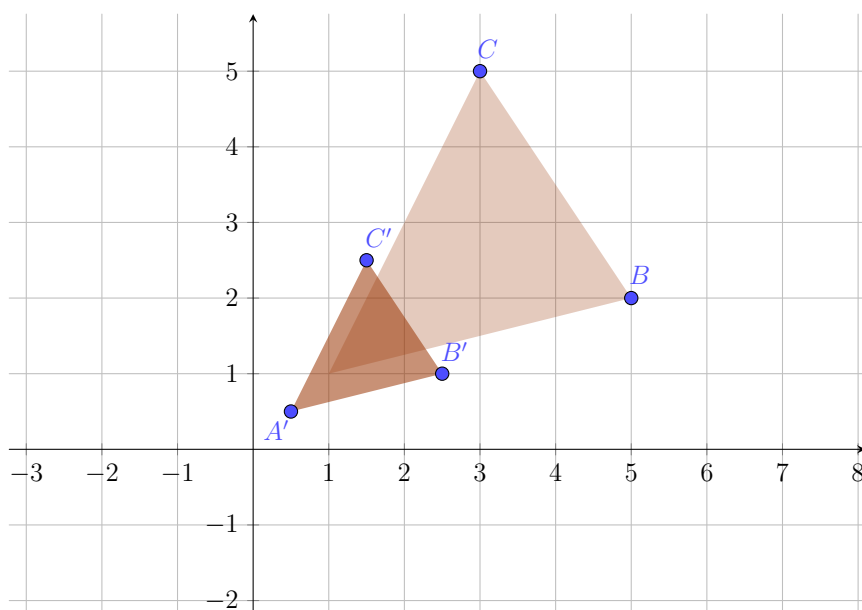
- identična preslikava: $f(x, y) = (x, y)$
- zrcaljenje čez simetralo lihih kvadrantov: $f(x, y) = (y, x)$
- razteg za faktor a : $f(x, y) = (ax, ay)$
- zrcaljenje čez izhodišče: $f(x, y) = (-x, -y)$
- projekcija točke na x os: $f(x, y) = (x, 0)$
- preslikava v koordinatno izhodišče: $f(x, y) = (0, 0)$



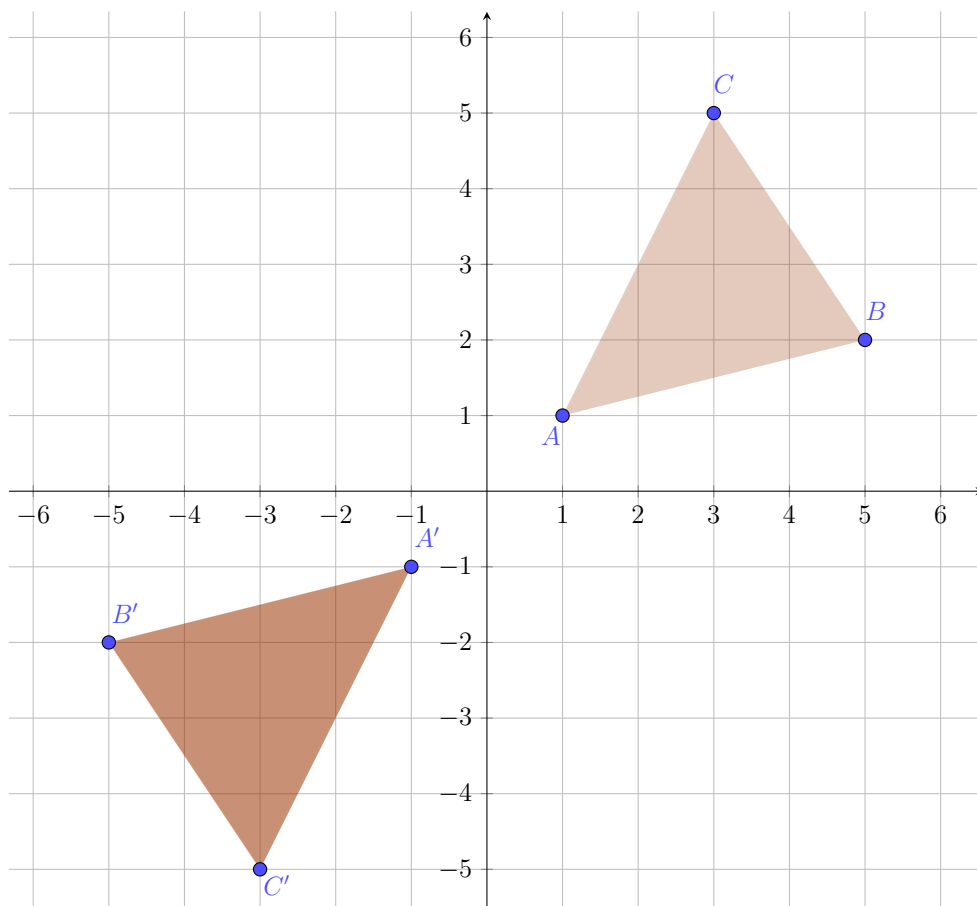
SLIKA 1. Identična preslikava: $f(x, y) = (x, y)$.



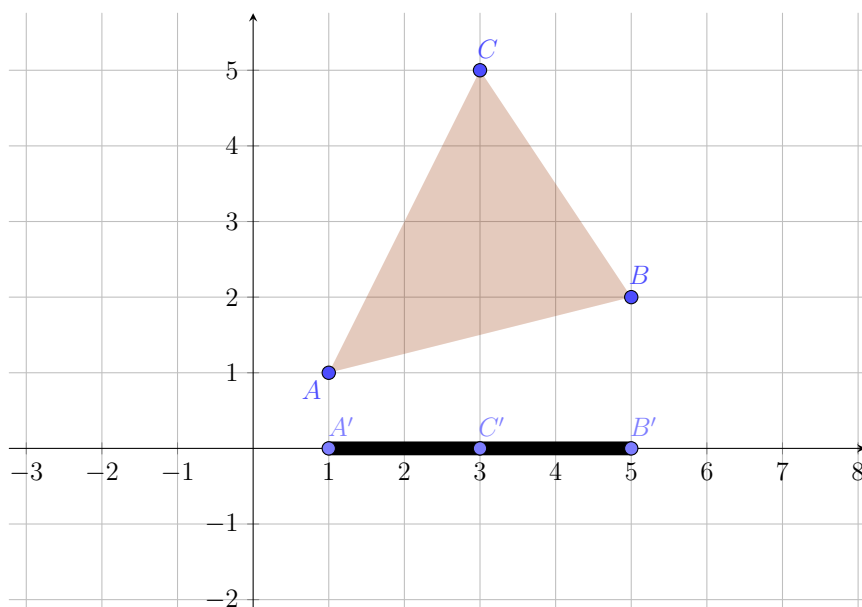
SLIKA 2. Zrcaljenje čez simetralo lihih kvadrantov: $f(x, y) = (y, x)$.



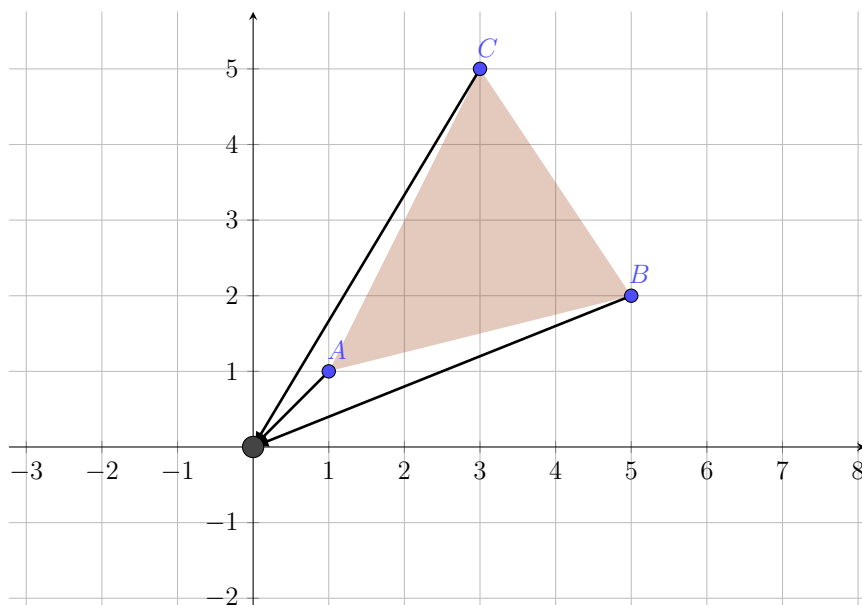
SLIKA 3. Razteg za faktor $a = 0,5$: $f(x, y) = (0,5x, 0,5y)$.



SLIKA 4. Zrcaljenje čez koordinatno izhodišče: $f(x, y) = (-x, -y)$.



SLIKA 5. Projekcija na x os: $f(x, y) = (x, 0)$.

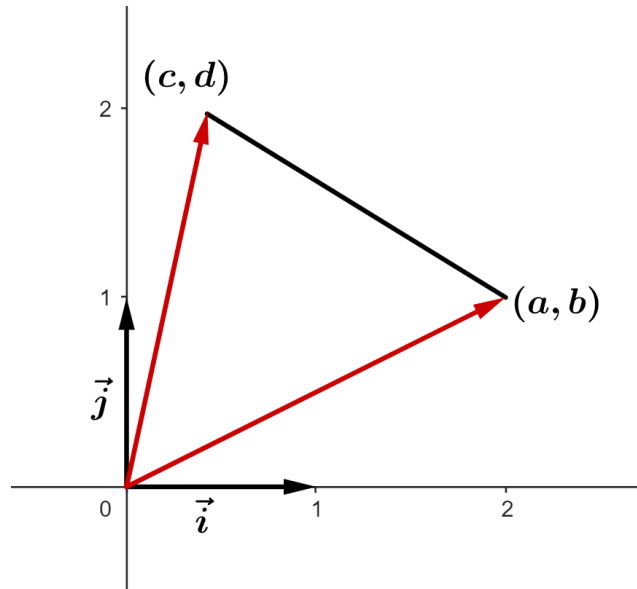


SLIKA 6. Preslikava v točko $(0,0)$: $f(x,y) = (0,0)$.

3. BIJEKTIVNE PRESLIKAVE

Definicija 3.1. Bijektivna preslikava ravnine je vsaka preslikava oblike $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$, za katero velja tudi $ad - bc \neq 0$.

Trditev 3.2. *Bijektivna preslikava ohrani orientacijo v ravnini, če je $ad - bc > 0$, če pa je $ad - bc < 0$, se orientacija obrne.*



SLIKA 7. Orientacija pri bijektivnih preslikavah.

Dokaz. Pri dokazu si pomagamo s sliko 7: enotska vektorja $\vec{i} = (1, 0)$ in $\vec{j} = (0, 1)$ preslikamo s preslikavo $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$. Nova vektorja, označena z rdečo, imata komponente (a, b) in (c, d) . Formula za ploščino trikotnika, ki ga tvorita, je: $S_{\Delta} o = \begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} = ad - bc$. Simbol o v enačbi predstavlja orientacijo trikotnika (če je ta pozitivna, je $o = 1$, če je negativna, pa je $o = -1$). Ker ploščina trikotnika ne more biti negativna vrednost, morata veljati naslednji trditvi:

$$ad - bc > 0 \Rightarrow o = 1$$

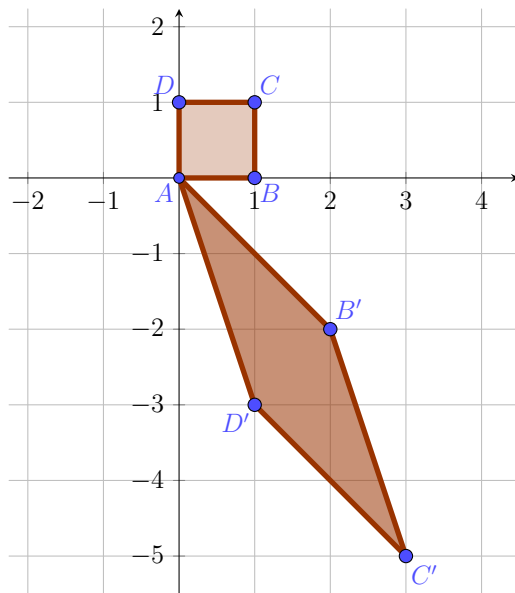
$$ad - bc < 0 \Rightarrow o = -1.$$

S tem smo dokazali, kar smo želeli. □

Poligoni pri bijektivni preslikavi ohranijo število oglišč. Bijektivna preslikava vedno preslika:

- vzporednici v vzporednici
- daljico v daljico
- paralelogram v paralelogram

Primer 3.3. Oglejmo si primer preslikave: $f(x, y) = (2x + y, -2x - 3y)$. Najprej lahko preverimo, ali je ta preslikava bijektivna: $2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 \neq 0$ drži, torej je $f(x, y)$ bijektivna preslikava. Preslikali bomo kvadrat s stranico dolgo 1 enoto, ki ima oglišča v točkah $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$. Ker vemo, da se bo število oglišč ohranilo in da bo dani poligon ostal paralelogram, je dovolj, da preslikamo samo oglišča:

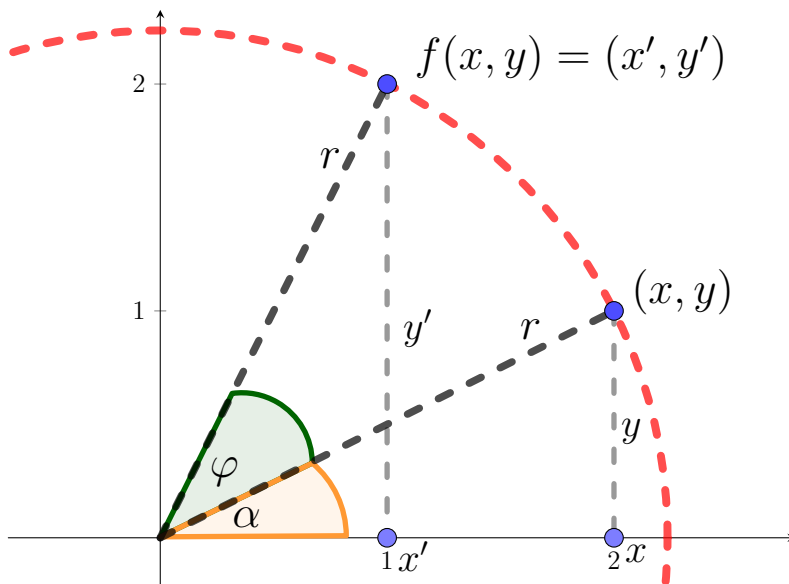


SLIKA 8. Primer bijektivne preslikave.

Pri tej preslikavi je $ad - bc < 0$, torej se je orientacija ravnine obrnila, kar je razvidno tudi na sliki.

4. ROTACIJA OKOLI KOORDINATNEGA IZHODIŠČA

Zelo uporabne preslikave so rotacije, sploh pa rotacije okoli koordinatnega izhodišča.



SLIKA 9. Rotacija točke okoli koordinatnega izhodišča.

Točko (x, y) smo zavrteli okoli izhodišča za kot φ , da smo dobili točko (x', y') . Njeni koordinati si želimo izraziti z x in y :

$$x' = r \cos(\varphi + \alpha) = r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y' = r \sin(\varphi + \alpha) = r \cos \alpha \sin \varphi + r \sin \alpha \cos \varphi = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

Predpis $\mathbf{f}(x, y) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi)$ je torej rotacija točke okoli izhodišča. Ker je oblike $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$, je to linearna transformacija ravnine. Preverimo, če je tudi bijektivna. Pogoji za bijektivnost preslikave je: $ad - bc \neq 0$. Če v to formulo vstavimo naš primer rotacije, dobimo $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, kar pa ustreza pogoju. To pomeni, da je rotacija okoli izhodišča bijektivna preslikava. Poleg tega se vedno ohrani tudi orientacija ravnine, saj je $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi > 0$.

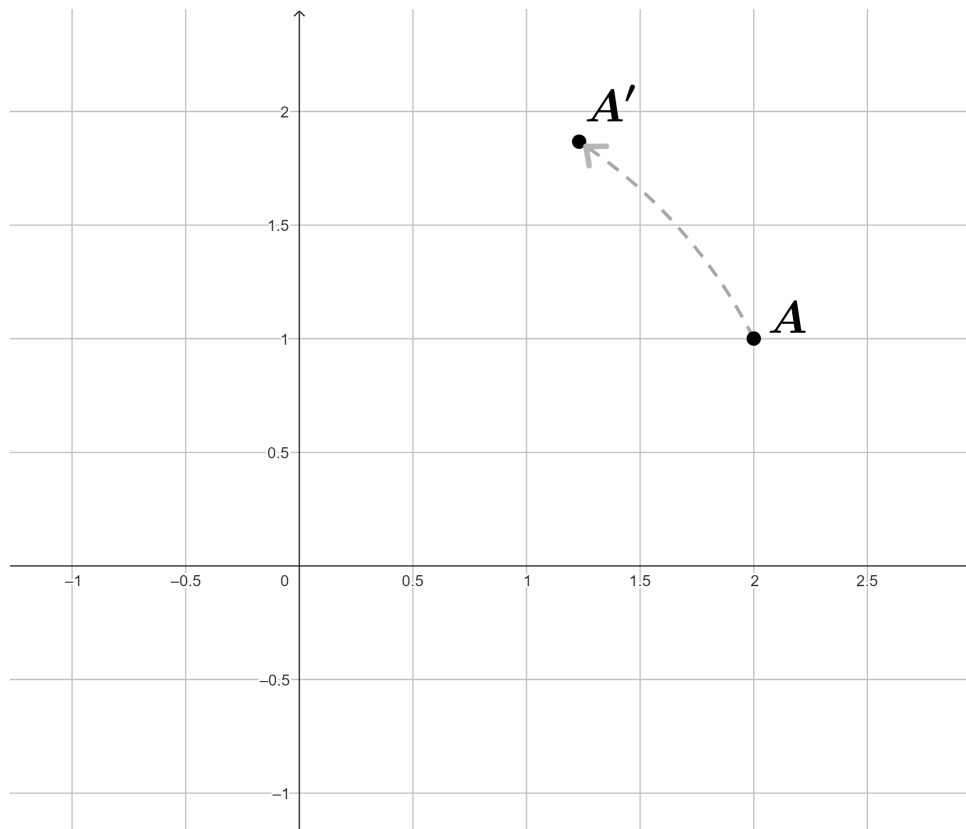
Primer 4.1. Zarotirajmo točko $A(2, 1)$ za 30° . Koordinati točke A vstavimo v formulo za rotacijo okoli izhodišča in dobimo

$$f(2, 1) = (2 \cos \varphi - 1 \sin \varphi, 2 \sin \varphi + 1 \cos \varphi).$$

Namesto φ vstavimo 30° :

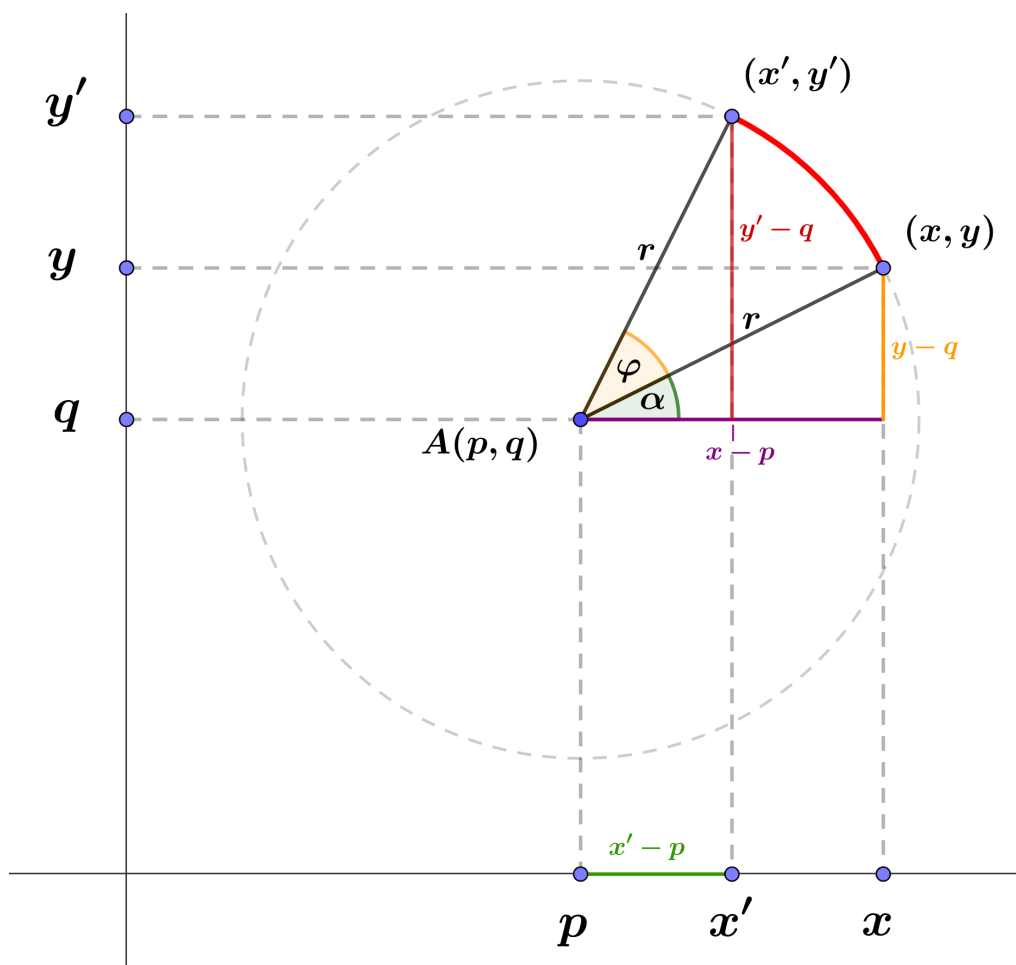
$$f(2, 1) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Dobili smo koordinati točke A , zarotirane za 30° , ki jo označimo z A' . Torej smo dobili $A'(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.



SLIKA 10. Rotacija točke A za 30° .

5. ROTACIJA OKOLI POLJUBNE TOČKE



SLIKA 11. Rotacija okoli naključne točke.

Tokrat točko (x, y) zarotiramo okoli točke $A(p, q)$ za kot φ , da dobimo točko (x', y') . Spet poskušamo novi koordinati x' in y' izraziti z x in y :

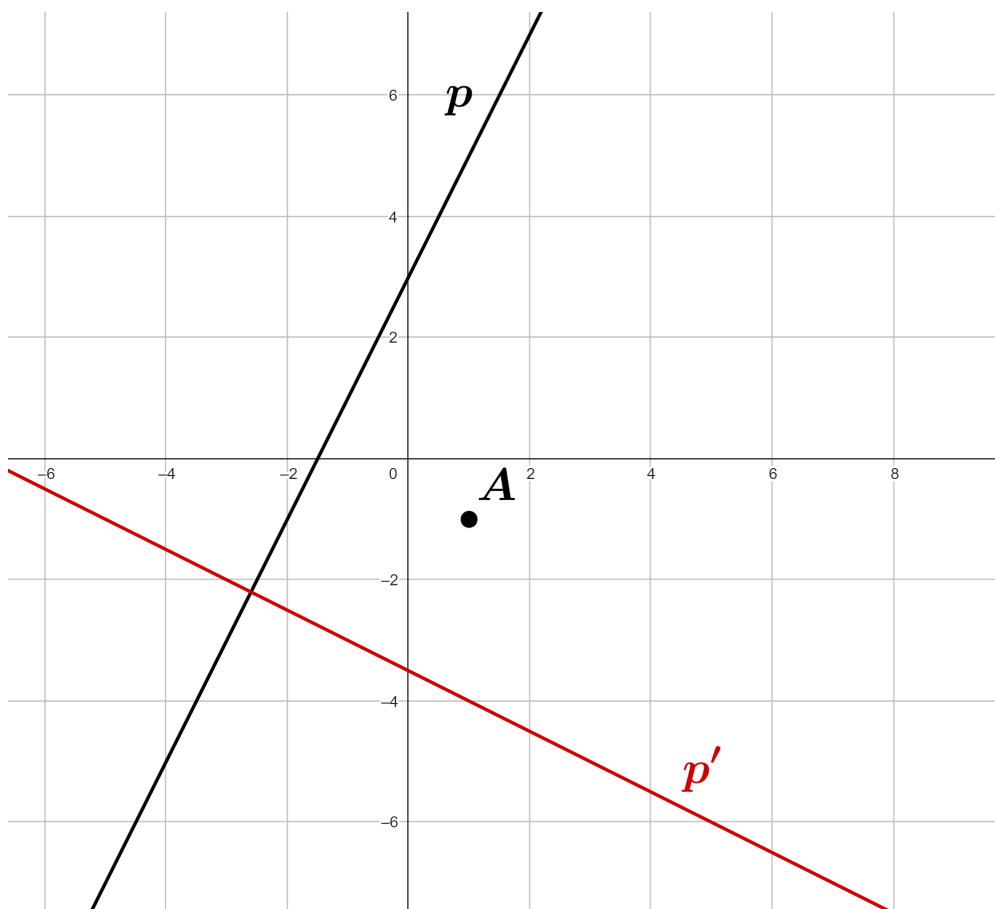
$$\begin{aligned}\cos(\varphi + \alpha) &= \frac{x' - p}{r} \\ r \cos(\varphi + \alpha) &= x' - p \\ x' &= r \cos(\varphi + \alpha) + p \\ x' &= r(\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha) + p \\ x' &= r \cos \varphi \cos \alpha - r \sin \varphi \sin \alpha + p \\ \mathbf{x' = (x - p) \cos \varphi - (y - q) \sin \varphi + p}\end{aligned}$$

Podobno pridemo tudi do y' :

$$\mathbf{y' = (x - p) \sin \varphi + (y - q) \cos \varphi + q}$$

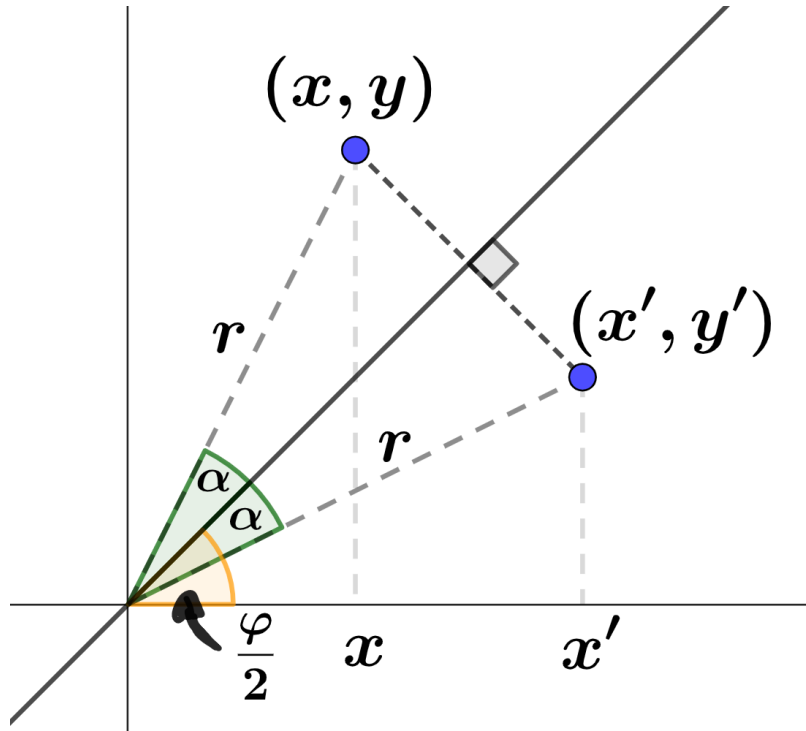
Ker preslikava ni oblike $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$, ni linearna transformacija ravnine (opazimo tudi, da se točka $(0, 0)$ ne preslika sama vase).

Primer 5.1. Zarotirajmo premico $p : 2x - y + 3 = 0$ okoli točke $A(1, -1)$ za $\frac{\pi}{2}$. Ker premico določata dve točki, je dovolj da si izberemo dve točki na premici p in ju zarotiramo okoli točke A . Premica, ki jo določata novi točki, je zarotirana premica p' , ki jo želimo dobiti in jo poimenujemo p' . Izberemo si točki $T_1(0, 3)$ in $T_2(1, 5)$. Ko ju vstavimo v formulo za rotacijo okoli A , dobimo $T'_1(-3, -2)$ in $T'_2(-5, -1)$. Ker vemo, da velja $p' \perp p$, bi zadoščala že samo ena zarotirana točka. Ko v eksplicitno enačbo premice vstavimo T'_1 in T'_2 , dobimo enačbo premice p' : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$. Lahko jo preoblikujemo tudi v implicitno obliko: $x + 2y + 7 = 0$.



SLIKA 12. Rotacija premice p okoli točke A za kot $\frac{\pi}{2}$.

6. ZRCALJENJE ČEZ PREMICO, KI POTEKA SKOZI TOČKO $(0, 0)$



SLIKA 13. Zrcaljenje točke čez premico, ki poteka skozi koordinatno izhodišče.

Naklonski kot premice označimo s $\frac{\varphi}{2}$ namesto s φ , zato da se pri izpeljavi formule izognemo dvojnemu kotu v rezultatu. Enačba premice, ki poteka skozi izhodišče je $y = kx$, pri čemer je $k = \tan \frac{\varphi}{2}$.

Opazimo, da je $x' = r \cos \left(\frac{\varphi}{2} - \alpha \right)$ ter $y' = r \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \alpha \right)$, x in y pa lahko izrazimo tako: $x = r \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha \right)$ in $y = r \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha \right)$. Torej je:

$$\begin{aligned} x \cos \varphi + y \sin \varphi &= r \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha \right) \cos \varphi + r \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha \right) \sin \varphi \\ &= r \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha - \varphi \right) \\ &= x' \end{aligned}$$

in:

$$\begin{aligned} x \sin \varphi - y \cos \varphi &= r \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha \right) \sin \varphi - r \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha \right) \cos \varphi \\ &= r \sin \left(\varphi - \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha - \varphi \right) \right) \\ &= y'. \end{aligned}$$

Dobili smo :

$$f(x, y) = (x', y') = (x \cos \varphi + y \sin \varphi, x \sin \varphi - y \cos \varphi).$$

Opazimo, da je zrcaljenje čez premico, ki poteka skozi točko $(0, 0)$ bijektivna linearna transformacija. Posebni primeri so:

$$\text{zrcaljenje čez os } x: \quad f(x, y) = (x, -y)$$

$$\text{zrcaljenje čez os } y: \quad f(x, y) = (-x, y)$$

$$\text{zrcaljenje čez premico } y = x: \quad f(x, y) = (y, x)$$

Primer 6.1. Prezrcalimo točko $A(3, 1)$ čez premico $p: y = \frac{1}{2}x$. Koeficient premice p je $\frac{1}{2}$, torej je $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}$. Ker potrebujemo $\sin \varphi$ in $\cos \varphi$, moramo najprej izračunati, koliko je $\tan \varphi$. Uporabimo formulo za dvojni kot:

$$\tan \varphi = \tan 2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2 \tan \frac{\varphi}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Iz zvez

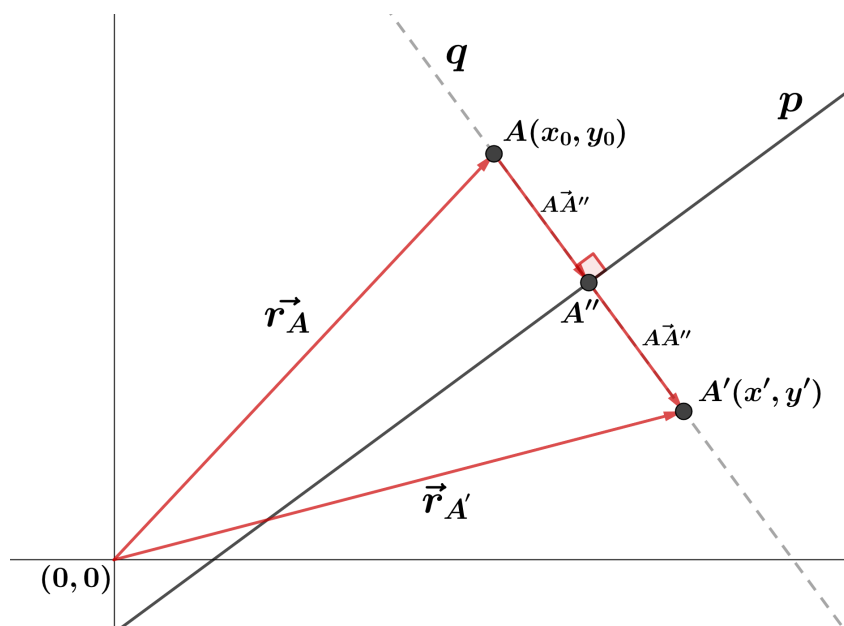
$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \varphi}}$$

in

$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 - \tan^2 \varphi}}$$

dobimo vse potrebne podatke za izračun koordinat točke A' (izpeljava zgornjih zvez je na strani—). V formulo $f(x, y) = (x \cos \varphi + y \sin \varphi, x \sin \varphi - y \cos \varphi)$ zdaj lahko vstavimo vse podatke in dobimo $A'(\frac{13}{5}, \frac{9}{5})$.

7. ZRCALJENJE ČEZ POLJUBNO PREMICO



SLIKA 14. Zrcaljenje točke čez poljubno premico.

Na sliki 14 je točka A s koordinatama (x_0, y_0) preslikana čez premico p v točko A' s koordinatama (x', y') . Postavimo si vprašanje, ali lahko zrcaljenje čez poljubno premico zapišemo v obliki $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$? Očitno je, da je odgovor ne, saj se točka $(0, 0)$ pri zrcaljenju premakne.

Trditev 7.1. *Zrcaljenje čez poljubno premico ni linearna preslikava ravnine.*

Dokaz. Pomagamo si z vektorji, ki so na sliki 14 označeni z rdečo barvo. Naj bo premica p podana z enačbo $ax + by - c = 0$. Poiskati moramo enačbo premice q , ki je pravokotna na p in poteka skozi točko A , tako da bo naša iskana točka A' ležala na njej. Ker je q pravokotnica na p , vemo, da je njena enačba $-bx + ay - d = 0$. Da se znebimo neznanega člena d , moramo v enačbo namesto x in y vstaviti koordinati točke A :

$$\begin{aligned} -bx_0 + ay_0 - d &= 0 \\ d &= -bx_0 + ay_0 \end{aligned}$$

Enačba premice q je torej $-bx + ay + bx_0 - ay_0 = 0$. Opazimo, da je $\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + 2\vec{AA''}$, pri čemer je A'' presečišče premic p in q . Poiskali ga bomo tako, da bomo rešili sistem enačb premic p in q :

$$\begin{aligned} ax + by - c &= 0 & / \cdot (-b) \\ -bx + ay + bx_0 - ay_0 &= 0 & / \cdot (a) \end{aligned}$$

Enačbi med sabo odštejemo, da se znebimo člena z x :

$$-b^2y - a^2y + bc - abx_0 + a^2y_0 = 0$$

$$y = \frac{a^2y_0 - abx_0 + bc}{a^2 + b^2}.$$

Dobljeno vstavimo v eno izmed zgornjih enačb in dobimo

$$x = \frac{b^2x_0 - aby_0 + ac}{a^2 + b^2}.$$

Izračunali smo koordinati presečišča premic:

$$A''\left(\frac{b^2x_0 - aby_0 + ac}{a^2 + b^2}, \frac{a^2y_0 - abx_0 + bc}{a^2 + b^2}\right).$$

Zdaj imamo vse potrebne podatke za izračun $\vec{r}_{A'}$:

$$\vec{r}_{A'} = \left(\frac{(b^2 - a^2)x_0 - 2aby_0 + 2ac}{a^2 + b^2}, \frac{(a^2 - b^2)y_0 - 2abx_0 + 2bc}{a^2 + b^2}\right).$$

S tem smo dobili koordinati točke A' . Torej lahko zapišemo formulo za preslikavo čez premico:

$$f(x, y) = \left(\frac{(b^2 - a^2)x_0 - 2aby_0 + 2ac}{a^2 + b^2}, \frac{(a^2 - b^2)y_0 - 2abx_0 + 2bc}{a^2 + b^2}\right).$$

Ker preslikava ni oblike $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$ smo tudi računsko dokazali, da zrcaljenje čez premico, ki ne poteka skozi koordinatno izhodišče, ni linearna transformacija ravnine. $\square$

8. KRIVULJE DRUGEGA REDA

Definicija 8.1. Polinom dveh spremenljivk je izraz

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^n A_k(x)y^k = A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2 + \dots + A_n(x)y^n,$$

kjer so A_k poljubni polinomi spremenljivke x . Množica točk na ravnini, ki ustreza enačbi $P(x, y) = 0$, kjer je $P(x, y)$ polinom stopnje $s \geq 1$, je **krivulja s -tega reda**.

Krivulje drugega reda določajo vse enačbe $P(x, y) = 0$ druge stopnje. Splošno enačbo krivulje drugega reda napišemo takole:

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

pri čemer prvi trije koeficienti niso istočasno vsi enaki 0, saj bi v tem primeru dobili enačbo prve stopnje, torej krivuljo prvega reda (premico). To zapišemo tako: $|a| + |b| + |c| \neq 0$. Krivulje 2. reda z drugim imenom imenujemo stožnice, saj jih oblikuje pokončni stožec pri sekanju z ravnino na različne načine. Stožnice delimo na 3 tipe: eliptični tip, hiperbolični tip in parabolični tip (ta poimenovanja uporabljamo, da lahko kategoriziramo tudi izrojene primere. Na primer par vzporednih premic je parabolični tip stožnice). Pri določanju za kateri tip stožnice gre, si pomagamo z invarianto Δ , ki ima vrednost $ac - b^2$. Če je $\Delta > 0$, je stožnica eliptičnega tipa, če je $\Delta < 0$, je stožnica hiperboličnega tipa, če je $\Delta = 0$, je stožnica paraboličnega tipa. Stožnica je lahko izrojena, pri čemer se njena enačba da razstaviti v produkt dveh linearnih faktorjev $(a_1x + a_2y + a_3)(b_1x + b_2y + b_3) = 0$. To se zgodi, ko je

$$G = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

V poglavjih 9, 10 in 11 bomo dokazali, da to zagotovo drži. Graf izrojene stožnice je lahko prazna množica, točka ali par premic.

$\Delta > 0$	$G \neq 0$	Elipsa a) $G(a+c) < 0$ - realna b) $G(a+c) > 0$ - imaginarna (enačba predstavlja prazno množico)
	$G = 0$	Enačba predstavlja točko
$\Delta < 0$	$G \neq 0$	Hiperbola
	$G = 0$	Enačba predstavlja par sekajočih se premic
$\Delta = 0$	$G \neq 0$	Parabola
	$G = 0$	Enačba predstavlja par premic ali prazno množico

TABELA 1. Ugotavljanje vrste krivulje 2. reda.

Stožnice moramo definirati, preden si ogledamo vsako posebej.

Definicija 8.2. Stožnica je množica točk na ravnini, ki imajo enako razmerje razdalj od gorišča in vodnice ($\frac{d(T,G)}{d(T,v)} = konst.$). Temu razmerju pravimo numerična ekscentričnost stožnice, označujemo pa jo z ε .

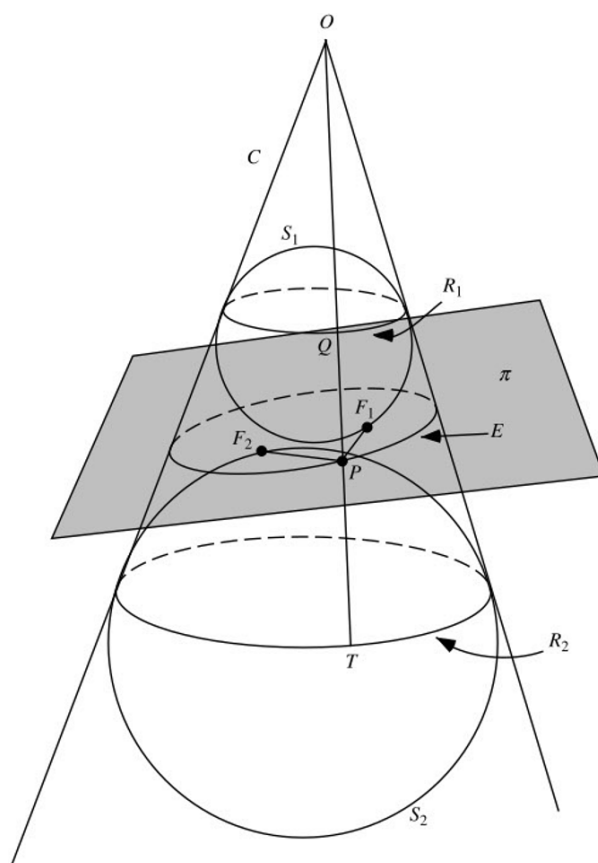
Opomba 8.3. Edina pomankljivost te definicije je krožnica, saj je pri vsaki krožnici $\varepsilon = 0$, torej (kot bomo videli v naslednjem poglavju) vodnica ne obstaja.

Opomba 8.4. V srednji šoli pojma stožnice nismo definirali. Definirali smo pojem krivulje drugega reda in pa vsako stožnico posebej.

9. ELIPSA

Definicija 9.1. Elipsa je množica točk na ravnini, ki imajo enako vsoto razdalj od dveh točk (gorišč G_1 in G_2).

Trditev 9.2. *Elipso dobimo tako, da presekamo plašč stožca z ravnino pod takim kotom, da je kot med sekajočo ravnino in ravnino, na kateri leži osnovna ploskev stožca manjši od kota ob vrhu stožca (lahko pa tudi z ravnino pod kotom presekamo plašč valja).*



SLIKA 15. Elipsa kot presek stožca.

Dokaz. Pri dokazu si pomagamo s sliko 15: z ravnino Π sekamo stožec pod majhnim kotom (ko je ravnina Π vzporedna ravnini, na kateri leži osnovna ploskev je kot, pod katerim sekamo stožec enak 0. V takem primeru je presek krožnica, ki je posebna oblika elipse z $\varepsilon = 0$). Stožcu včrtamo dve krogli tako, da je ena nad Π , druga pa pod njo. Obe krogli naj imata z ravnino Π točno eno skupno točko, ki ju označimo z F_1 in F_2 . Krožnici, ki ponazarjata dotikališči krogel in stožca pa poimenujemo $\mathcal{R}_1$ in $\mathcal{R}_2$. Nato na poljubnem mestu s tvorilko stožca povežemo vrh stožca in $\mathcal{R}_2$. Presečišče tvorilke in $\mathcal{R}_1$ imenujemo Q , presečišče s Π imenujemo P , presečišče z $\mathcal{R}_2$ pa naj bo T . Točka P je torej poljubna točka na preseku stožca in ravnine Π . Opazimo, da je vsota razdalj od P do Q ter od P do T konstantna. Prav tako velja $|PQ| = |PF_1|$ in $|PT| = |PF_2|$, saj gre za dva tangentna odseka, spuščena na kroglo

iz iste točke. Dobimo $|PF_1| + |PF_2| = \text{konst.}$, kar pomeni, da za vsako točko na preseku velja, da je vsota razdalj od dveh gorišč enaka, označimo pa jo z $2a$. $\square$

Trditev 9.3. *Krivulja je eliptičnega tipa, kadar je $\Delta > 0$, vendar dobimo elipso le, kadar poleg tega velja še $G(a+c) < 0$. V nasprotnem primeru je elipsa izrojena. Enačba takrat v koordinatnem sistemu predstavlja točko, ali pa prazno množico.*

Dokaz. Najprej si oglejmo kje v koordinatnem sistemu je definirana krivulja, ki jo predstavlja enačba (1). Najprej bomo preverili, kje je krivulja definirana na osi x . Enačbo najprej preuredimo:

$$cy^2 + (2bx + 2e)y + ax^2 + 2dx + f = 0.$$

Dobili smo kvadratno enačbo oblike $Ay^2 + By + C = 0$, pri čemer je $A = c$, $B = 2bx + 2e$ in $C = ax^2 + 2dx + f$. Kadar je diskriminanta kvadratne enačbe večja od 0, ima enačba dve realni rešitvi, kadar je diskriminanta enaka 0, ima eno realno rešitev, kadar pa je manjša od 0, enačba nima realne rešitve. Torej je krivulja definirana za tiste x , pri katerih je diskriminanta zgornje enačbe večja ali enaka 0:

$$(2bx + 2e)^2 - 4c(ax^2 + 2dx + f) \geq 0$$

$$(2) \quad (b^2 - ac)x^2 + (2be - 2cd)x + e^2 - cf \geq 0.$$

Zdaj upoštevamo pogoj za elipso: $\Delta > 0$, kar pomeni, da je koeficient kvadratnega člena negativen. Iz tega dobimo lahko tri različne rešitve.

Prva je omejen interval: $x \in [x_1, x_2]$, pri čemer sta x_1 in x_2 ničli funkcije (2):

$$x_{1,2} = \frac{be - cd \pm \sqrt{-(G \cdot c)}}{\Delta}.$$

Enačba krivulje v tem primeru lahko predstavlja le elipso, saj sta hiperbola in parabola krivulji, ki se raztezata v neskončnost. Števili x_1 in x_2 sta torej levi in desni ekstrem elipse, v primeru, da sta polosi elipse vzporedni s koordinatnima osema, pa sta hkrati tudi dve temeni elipse (levo in desno).

Druga možnost je rešitev:

$$x = \frac{be - cd}{\Delta}.$$

Enačba krivulje v tem primeru predstavlja točko z absciso $\frac{be-cd}{\Delta}$. To se zgodi, ko je $G \cdot c = 0$. Ker mora veljati $ac > b^2$, je torej edina možnost, da je $G = 0$.

Tretja možnost pa je ta, da nobeno realno število x ne ustreza, oziroma je rešitev prazna množica. V tem primeru krivulja eliptičnega tipa v koordinatnem sistemu predstavlja prazno množico. To se zgodi, ko je $G \cdot c > 0$, saj bi tako pod korenem dobili negativno vrednost.

Preverili smo vse možnosti pri x , podobno pa bomo ugotovili tudi, za katere y

je krivulja definirana v množici realnih števil. Tokrat bomo enačbo preuredili tako, da bomo dobili obliko $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$ax^2 + (2by + 2d)x + cy^2 + 2ey + f = 0.$$

Po istem postopku kot prej dobimo kvadratno neenačbo, tokrat nam v njej ostane y :

$$(b^2 - ac)y^2 + (2bd - 2ae)y + d^2 - af \geq 0.$$

Spet dobimo tri različne vrste rešitev: elipso, točko in prazno množico, le da tokrat dobimo drugačne vrednosti:

Zgornji in spodnji ekstrem elipse sta y_1 in y_2 :

$$y_{1,2} = \frac{bd - ae \pm \sqrt{-(G \cdot a)}}{\Delta}.$$

Če je $G = 0$ (a ne more biti enak 0 iz istega razloga, kot tudi c ne more biti enak 0), dobimo točko z ordinato $\frac{bd-ae}{\Delta}$. Točka, ki jo predstavlja enačba, ko je $G = 0$, je torej:

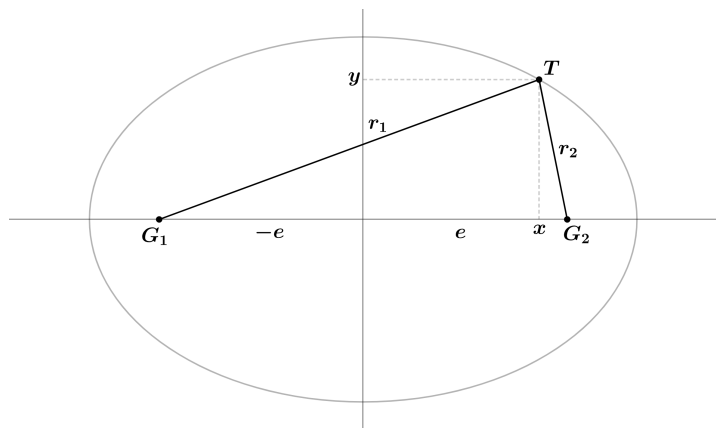
$$T\left(\frac{be - cd}{\Delta}, \frac{bd - ae}{\Delta}\right).$$

Prazno množico pa dobimo, kadar je $G \cdot a > 0$. Ker morata pri eliptičnem tipu a in c imeti isti predznak ($ac > b^2 \Rightarrow ac > 0$), lahko napišemo skupen pogoj za nastanek prazne množice pri izrojeni elipsi: $G(a + c) > 0$. $\square$

Zdaj smo si ogledali vse možnosti, ko je $\Delta > 0$, in ugotovili, da je taka krivulja vedno eliptičnega tipa.

Po definiciji stožnice ima vsaka točka na elipsi enako razmerje razdalj od gorišča in od vodnice.

Izrek 9.4. *Razmerje razdalj od točke na elipsi do gorišča elipse in od točke na elipsi do vodnice elipse je konstanta.*



SLIKA 16. Točka na elipsi.

Dokaz. Pri dokazu si pomagamo s sliko 16: opazimo, da je:

$$r_1^2 = (x + e)^2 + y^2 \quad \text{in} \quad r_2^2 = (x - e)^2 + y^2.$$

Iz tega dobimo

$$r_1^2 - r_2^2 = (x + e)^2 - (x - e)^2$$

$$(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 4ex.$$

Točka leži na elipsi, če je $(r_1 + r_2) = 2a$, torej je $(r_1 - r_2) = \frac{2ex}{a}$. Za izračun numerične ekscentričnosti si izberemo eno gorišče, recimo G_1 . Razdaljo točke T od gorišča, oziroma r_1 dobimo tako, da enačbi seštejemo. Dobimo:

$$r_1 = \frac{ex}{a} + a.$$

Potrebujemo samo še razdaljo T od vodnice. Ker je vodnica pravokotna na premico, na kateri ležita gorišči, je njena enačba $x = x_0$. Zdaj imamo formulo za ε elipse:

$$\varepsilon = \frac{\frac{ex}{a} + a}{x - x_0}.$$

Enačbo pomnožimo z $(x - x_0)$:

$$\frac{ex}{a} + a = \varepsilon(x - x_0)$$

$$= \varepsilon x - \varepsilon x_0$$

Na obeh straneh enačbe je polinom prve stopnje, zato primerjamo koeficiente pred vodilnim in pred prostim členom:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \quad x_0 = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

□

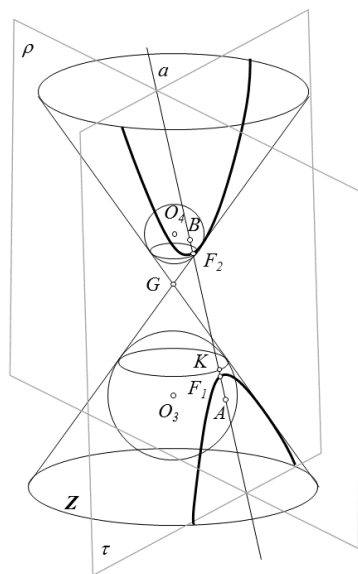
Dokazali smo da je $\frac{d(T,G)}{d(T,v)}$ pri elipsi konstanta. Ker je pri elipsi velika polos vedno večja od linearne ekscentričnosti e , velja $0 \leq \varepsilon < 1$, pri čemer je elipsa krožnica, kadar je $\varepsilon = 0$. Enačba vodnice je $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, če bi namesto G_1 izbrali G_2 , pa $x = \frac{a}{\varepsilon}$.

10. HIPERBOLA

Definicija 10.1. Hiperbola je množica točk na ravnini, ki imajo enako absolutno vrednost razlike razdalj od dveh točk (gorišč G_1 in G_2).

Trditev 10.2. hiperbolo dobimo tako, da presekamo plašč dvojnega stožca z ravnino, pri čemer je kot med sekajočo ravnino in ravnino, na kateri leži osnovna ploskev stožca, večji od kota ob vrhu stožca.

Dokaz. Dokaza se lotimo podobno kot pri dokazu za trditev 8.2, le da stožcu tokrat dodamo še zrcalno sliko na vrh, da dobimo dvojni stožec. Nato v zgornjega in spodnjega včrtamo kroglo (kot je na sliki 17) in podobno kot pri elipsi dobimo to, kar smo želeli dokazati. $\square$



SLIKA 17. Hiperbola kot presek dveh stožcev.

Trditev 10.3. Krivulja je hiperboličnega tipa, kadar je $\Delta < 0$, vendar enačba predstavlja hiperbolo le, ko velja $G \neq 0$. Ko je $G = 0$, se hiperbola izrodi in nastaneta dve sekajoči se premici.

Dokaz. Pri elipsi smo ugotovili, za katere x je definirana krivulja drugega reda: (2). Zdaj pa upoštevamo, da je $\Delta < 0$, torej je koeficient vodilnega člena pozitiven. Zdaj dobimo tri drugačne vrste rešitve, vendar se enako kot pri elipsi, razlikujejo v številu realnih ničel kvadratne funkcije v (2).

Najprej si oglejmo prvo možnost, ki je podobna kot pri elipsi, le da so tokrat rešitve (2) vsi elementi $\mathbb{R}$ razen vsa števila na intervalu: $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$. x_1 in x_2 izračunamo enako kot pri elipsi in dobimo enaki ničli kot prej. Enačba krivulje v tem primeru lahko predstavlja le hiperbolo.

Druga možnost je, da ima leva stran v (2) samo eno ničlo (oziroma $G = 0$, kot

smo ugotovili pri elipsi). Tudi tokrat je ničla enaka kot pri elipsi. Za vsak realni x torej dobimo dva y z izjemo enega x : $x = \frac{be-cd}{\Delta}$. Za ta x je določen samo en y . V tem primeru dobimo dve sekajoči se premici, abscisa njunega presečišča pa je $x = \frac{be-cd}{\Delta}$. Spet smo dobili izrojeno stožnico pri $G = 0$.

Ostane nam še zadnja možnost, pri kateri (2) nima ničel. Ker je vodilni koeficient $(b^2 - ac)$ večji od nič, dobimo navzgor obrnjeno parabolo s temenom nad osjo x . Torej za vsak realni x dobimo dva y . Iz tega lahko sklepamo, da enačba krivulje predstavlja dve vzporedni premici ali pa zarotirano hiperbolo, ki ima za vsak x , ki ga vstavimo v njeno enačbo dve rešitvi, torej moramo preveriti, katera od obeh možnosti je pravilna v tem primeru. Pri dveh vzporednih premicah mora biti njuna razdalja konstantna. Torej mora veljati $x_1 - x_2 = konst.$ in $y_1 - y_2 = konst.$ Pri hiperboli pa te razlike očitno niso enake. Splošna enačba krivulje 2. reda je $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ oziroma $ax^2 + (2by + 2d)x + cy^2 + 2ey + f = 0$. x_1 in x_2 dobimo s formulo za rešitev kvadratne enačbe:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-(2by + 2d) \pm \sqrt{(2by + 2d)^2 - 4a(cy^2 + 2ey + f)}}{2a}.$$

Zdaj lahko od x_1 odštejemo x_2 :

$$x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{(2by + 2d)^2 - 4a(cy^2 + 2ey + f)}}{2a}.$$

Ko to preuredimo, dobimo

$$x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{-\Delta y^2 + (2bd - 2ae)y + d^2 - af}}{a}.$$

Vemo, da za krivuljo hiperboličnega tipa velja $\Delta < 0$, torej razlika med x_1 in x_2 ni konstantna, kar pomeni, da lahko enačba krivulje pri kateri (2) nima ničel, predstavlja samo hiperbolo.

Podobno lahko izračunamo za y in dobimo

$$y_1 - y_2 = \frac{2\sqrt{-\Delta x^2 + (2be - 2cd)x + e^2 - cf}}{c}.$$

Tako kot smo pri elipsi pogledali vse tri možnosti še na osi y , jih bomo tudi pri hiperboli. Spet splošno enačbo preuredimo na enačbo oblike $Ax^2 + Bx + C = 0$ in pogledamo vse tri možnosti. Tako kot smo računali za x , izračunamo tudi za y in dobimo enake vrednosti kot pri elipsi. $\square$

Nekatere zarotirane hiperbole lahko zapišemo tudi kot racionalne funkcije. V takih primerih sta asimptoti hiperbole pol in asimptota racionalne funkcije.

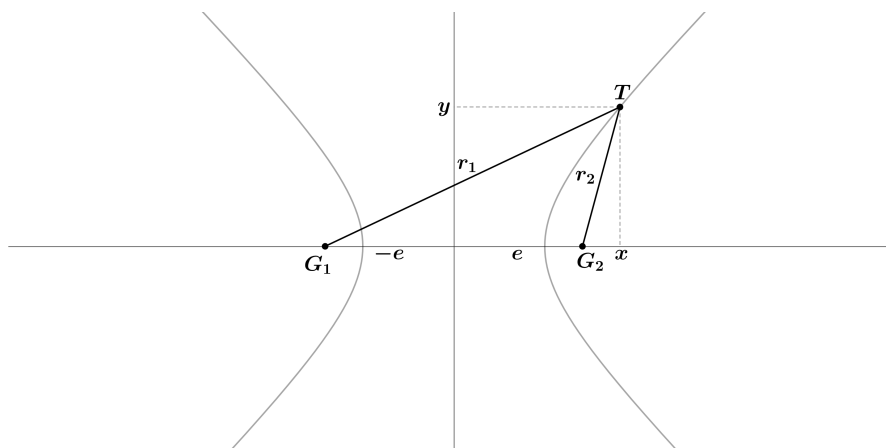
Trditev 10.4. Vse racionalne funkcije oblike $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$, pri čemer velja $a \neq 0$ in $d \neq 0$, so hiperbole.

Dokaz. To z lahkoto dokažemo tako, da namesto $f(x)$ pišemo y in enačbo pomnožimo z $dx + e$. Dobimo $ax^2 - dxy + bx - ey + c = 0$. Ker je koeficient pred y^2 enak 0 in koeficient pred xy neenak 0, ta enačba vedno predstavlja hiperbolo. $\square$

Enačbo prve asimptote dobimo tako, da polinom v imenovalcu izenačimo z 0: $x = \frac{e}{d}$. Enačbo druge asimptote pa dobimo tako, da delimo zgornji polinom s spodnjim: $y = \frac{a}{d}x + \frac{d^2}{bd - ae}$. V takem primeru je ena asimptota vzporedna z osjo y , druga pa je poševna. Če pa zapišemo isto racionalno funkcijo v spremenljivki y , pa je ena asimptota vzporedna osi x , druga pa ostane poševna.

Tudi vsaka funkcija oblike $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, pri čemer je $a \neq 0$ in $c \neq 0$, je hiperbola. To lahko dokažemo podobno kot pri zgornji trditvi. Vse racionalne funkcije take oblike imajo eno vodoravno asimptoto in en pol. Torej sta asimptoti hiperbole paroma vzporedni z koordinatnima osema.

Pri hiperboli prav tako lahko izpeljemo formulo za numerično ekscentričnost:



SLIKA 18. Točka na hiperboli.

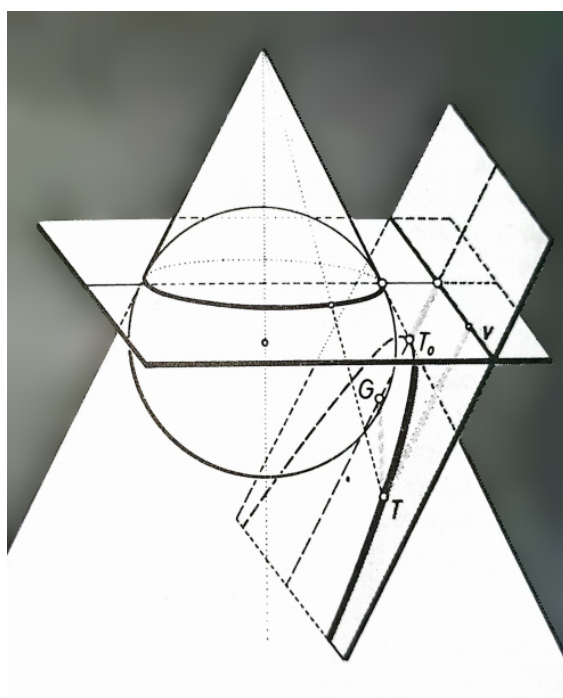
Opazimo, da je slika 18 zelo podobna sliki 16, s katero smo si pomagali v prejšnjem poglavju. Formuli za ε in za vodnico lahko izpeljemo po enakem postopku.

11. PARABOLA

Definicija 11.1. Parabola je množica vseh točk na ravnini, katerih razmerje razdalj od gorišča in vodnice je 1 ($\frac{d(T,G)}{d(T,v)} = 1$).

Posledično so vse točke na paraboli enako oddaljene od gorišča parabole G in od vodnice parabole v .

Trditev 11.2. Parabolo dobimo tako, da plašč stožca presekamo z ravnino pod takim kotom, da je kot med sekajočo ravnino in ravnino, na kateri leži osnovna ploskev enak kotu ob vrhu stožca.



SLIKA 19. Parabola kot presek stožca in ravnine.

Dokaz. Pri dokazu si pomagamo s sliko 19: dokazati moramo, da sta razdalji $d(T, G)$ in $d(T, v)$ enaki. Krožnica, ki predstavlja dotikališča krožnice in stožca se seka s tvorilko stožca, na kateri leži točka T v točki, ki na sliki ni označena. Označimo jo s K . Razdalja med T in G je enaka kot razdalja med T in K , saj sta daljici TG in TK tangentni odseka na kroglo iz iste točke. Razdalja med T in K pa je enaka kot razdalja med T in v , saj točka K in premica v ležita na isti ravnini, premici TK in Tv pa to ravnino sekata pod istim kotom. Ker je $d(T, G) = d(T, K)$ smo dokazali, kar smo želeli. $\square$

Trditev 11.3. Krivulja je paraboličnega tipa, kadar je $\Delta = 0$, vendar enačba predstavlja parabolo le, kadar velja tudi $G \neq 0$. V nasprotnem primeru se parabola izrodi v dve premici ali v prazno množico.

Dokaz. Ko v (2) vstavimo $\Delta = 0$, se kvadratni člen izgubi, na levi strani pa nam ostane polinom prve stopnje:

$$(3) \quad (2be - 2cd)x + e^2 - cf \geq 0$$

Pri taki neenačbi lahko dobimo 4 različne rešitve. Tako kot pri elipsi in hiperboli si bomo ogledali vse posebej. Premica ima lahko 1 ali 0 ničel. Najprej si oglejmo prvo možnost. Pogoji za to, da ima premica $y = (2be - 2cd)x + e^2 - cf$ ničlo, je $(2be - 2cd) \neq 0$. Če to velja, je ničla premice $x = \frac{cf - e^2}{2be - 2cd}$. Leva stran neenačbe (3) je vrednost diskriminante, ki nam pove za katere x je definirana krivulja drugega reda, torej je v tem primeru krivulja zagotovo ni niti elipsa niti hiperbola, saj nobena od njiju ni omejena samo na levi ali samo na desni strani. Torej lahko pri pogoju $\Delta = 0$ lahko enačba (1) predstavlja od vseh stožnic samo parabolo.

Pri ostalih treh možnostih premica v (3) nima ničle, torej je vodoravna. Da dobimo vodoravno premico moramo iz oblike $y = kx + n$ dobiti $y = n$. Koeficient mora biti enak 0, torej mora veljati $2be - 2cd = 0$. Dobimo $y = e^2 - cf$. Če je $e^2 - cf < 0$, je vrednost y negativna in (1) nima nobene realne rešitve. Če je $e^2 - cf = 0$, ima (1) za vsak x eno realno rešitev (npr. $y = x^2$). Če pa je $e^2 - cf > 0$, ima (1) za vsak x dve realni rešitvi.

Podobno izračunamo tudi za y in dobimo $(2bd - 2ae)y + d^2 - af \geq 0$. Če tudi ta premica nima ničle, je parabola zagotovo izrojena. Torej je parabola izrojena natanko takrat, kadar velja $be = cd$ in $bd = ae$. Parabola se lahko izrodi v prazno množico, v dve vzporedni premici, ali pa v dvojno premico. Da se parabola izrodi v prazno množico, mora imeti enačba (1) natanko 0 realnih rešitev. To se zgodi, kadar poleg zgornjega pogoja velja tudi $e^2 - cf < 0$ (posledično tudi $d^2 - af < 0$, saj ta dva pogoja nastopata istočasno). Za dvojno premico mora veljati $e^2 - cf = d^2 - af = 0$, saj tako dobimo eno realno rešitev za vsak x in y , ki ju vstavimo v (1). Če pa sta izraza $e^2 - cf$ in $d^2 - af$ oba večja od 0, pa dobimo za vsak x in y dve realni rešitvi. Dokazati moramo, da sta ti dve rešitvi res vedno na dveh vzporednih premicah (ne pa na primer na hiperboli, kot sta bili v prejšnjem podpoglavju).

Če enačba (1) pod pogoji $b^2 - ac = 0$, $be = cd$, $bd = ae$, $e^2 - cf < 0$ in $d^2 - af < 0$ v koordinatnem sistemu vedno predstavlja dve vzporedni premici, morata biti rešitvi enačbe (1) za vsak y in vsak x enako oddaljeni med sabo (torej $x_1 - x_2 = konst.$ in $y_1 - y_2 = konst.$). Najprej izračunamo $y_1 - y_2$. Če uporabimo formulo za reševanje kvadratne enačbe, dobimo

$$y_{1,2} = \frac{-2bx - 2e \pm \sqrt{(4b^2 - 4ac)x^2 + (8be - 8cd)x + 4e^2 - 4cf}}{2c}.$$

Koeficient pred x^2 je enak 0, saj za vse enačbe paraboličnega tipa velja $b^2 = ac$. Zaradi pogoja $be = cd$ pa je tudi linearni člen enak 0. Ostane nam torej:

$$y_{1,2} = \frac{-2bx - 2e \pm \sqrt{4e^2 - 4cf}}{2c}.$$

Ko od y_1 odštejemo y_2 dobimo

$$y_1 - y_2 = \frac{\sqrt{4(e^2 - cf)}}{c} = \frac{2\sqrt{e^2 - cf}}{c}.$$

Vsi členi z x so se pokrajšali, kar pomeni, da sta rešitvi enako oddaljeni med sabo ne glede na to, kateri x izberemo. Enako lahko izračunamo še za x_1 in x_2 in dobimo

$$x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{d^2 - af}}{a}.$$

Opazimo, da sta razdalji med rešitvama enaki 0, kadar sta tudi $e^2 - cf$ in $d^2 - af$ enaka 0 (razdalja med premicama je 0, kadar se prekrivata-dvojna premica). Če je $c = 0$, sta premici navpični, če je $a = 0$, pa sta vodoravni.

Tako kot pri elipsi in hiperboli želimo dokazati, da se stožnica vedno izrodi, kadar je $G = 0$. Najprej napišemo formulo za G :

$$G = 2bde + acf - e^2a - b^2f - d^2c.$$

Ko vstavimo $b^2 = ac$, dobimo

$$G = 2bde - e^2a - d^2c.$$

Dokazati moramo, da je za vsako izrojeno parabolo $G = 0$, torej mora veljati naslednje:

$$\begin{aligned} 2bde - e^2a - d^2c &= 0 \\ 2bde &= e^2a + d^2c. \end{aligned}$$

Zdaj moramo še vstaviti pogoja za izrojenost parabole, ki smo ju dobili prej: $be = cd$ in $bd = ae$. Produkt e^2a lahko izrazimo kot $\frac{bd}{e} \cdot e^2$ oziroma bde . Torej dobimo

$$bde = d^2c.$$

Vstavimo $be = cd$ in dobimo $d = d$. S tem je dokaz končan. □

12. ROTACIJE STOŽNIC

Pri rotaciji stožnic v koordinatnem sistemu s podanim kotom nimamo težav. V enačbo krivulje vstavimo $[x' \cos \varphi - y' \sin \varphi]$ namesto x in $[x' \sin \varphi + y' \cos \varphi]$ namesto y . Dobimo enačbo zarotirane krivulje, narišemo pa jo tako, da odmerimo kot φ in stožnico prerišemo v zarotiranem koordinatnem sistemu. Težavo imamo, kadar poskušamo narisati stožnico, ki vsebuje mešani člen xy , saj ne vemo, za kakšen kot moramo zarotirati koordinatni sistem, da se znebimo mešanega člena. Stožnico znamo narisati namreč le v tem primeru.

Najprej zarotiramo stožnico s splošno enačbo (1) za kot φ . Dobimo

$$a(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2 + 2b(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + \\ + c(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2 + 2d(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) + 2e(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + f = 0$$

Enačbo pretvorimo tako, da odpravimo oklepaje in jo preoblikujemo v obliko $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + f = 0$. Dobimo precej dolgo enačbo, vendar nas zanima samo člen, ki vsebuje $x'y'$:

$$(-2a \sin \varphi \cos \varphi + 2b \cos^2 \varphi - 2b \sin^2 \varphi + 2c \sin \varphi \cos \varphi)x'y'.$$

Želimo se ga znebiti, zato ga enačimo z 0. Ker dobimo homogeno trigonometrično enačbo druge stopnje, jo delimo z $2 \cos^2 \varphi$ in dobimo

$$b \tan^2 \varphi + (a - c) \tan \varphi - b = 0.$$

Dobili smo kvadratno enčbo. Rešitev je

$$(4) \quad \tan \varphi_{1,2} = \frac{(c - a) \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2b}.$$

Dobili smo dva kota (enačba ima seveda dve neskončni množici rešitev, ki se v vsaki izmed njih ponavljajo s periodo π , vendar nas seveda zanima samo prvi kot pri vsaki izmed dveh rešitev zgornje kvadratne enačbe), ali natančneje, tangensa dveh kotov oz. rotacij koordinatnega sistema. Števili $\tan \varphi_1$ in $\tan \varphi_2$ sta torej smerna koeficienta novih koordinatnih osi v zarotiranem koordinatnem sistemu, zato ju imenujemo k_1 in k_2 . Koordinatni osi sta med sabo pravokotni, torej mora veljati $k_1 \cdot k_2 = -1$. Po Vietovi formuli je $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b}{b} = -1$, kar pomeni, da je naša izpeljava pravilna. Po dogovoru za koeficient nove osi x oz. x' vzamemo k_1 , za koeficient osi y' pa k_2 , sicer pa je vseeno. Kadar je $b < 0$, je tudi k_1 negativen, kar pomeni, da bomo koordinatni sistem zarotirali v negativno smer, kadar je $b > 0$, pa je k_1 pozitiven, torej bomo koordinatni sistem zarotirali v pozitivno smer. Iz $\tan \varphi$ moramo izpeljati še $\sin \varphi$ in $\cos \varphi$.

Koordinatni sistem se torej zarotira za kot φ_1 . Za rotiranje potrebujemo $\sin \varphi$ in $\cos \varphi$, ki ju izpeljemo iz $\tan \varphi$. Namesto $\tan \varphi$ pišemo k_1 :

$$\cos \varphi = \frac{\sin \varphi}{k_1}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{k_1}.$$

Enačbo kvadriramo, da se znebimo korena in dobimo

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{1 - \cos^2 \varphi}{k_1^2} \\ &= \frac{1}{k_1^2} - \frac{\cos^2 \varphi}{k_1^2}. \end{aligned}$$

Člena, ki vsebujeta $\cos^2 \varphi$, prestavimo na isto stran ter izpostavimo $\cos^2 \varphi$. Dobimo

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{k_1^2 + 1}.$$

Sledi

$$\cos \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + 1}}.$$

Iz zveze $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ izpeljemo

$$\sin \varphi = \pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + 1}}.$$

Ker je $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, je $\cos \varphi$ vedno pozitiven, $\sin \varphi$ pa je negativen, kadar rotiramo v negativno smer (ko je $\varphi \in (0, -\frac{\pi}{2}]$). Zdaj imamo vse potrebne podatke za zapis enačbe stožnice v zarotiranem koordinatnem sistemu. Ta enačba ne vsebuje mešane člena $x'y'$, zato lahko stožnico brez težave narišemo.

Primer 12.1. Narišimo stožnico H : $3x^2 - 4xy = 2$. Opazimo, da je $\Delta = 3 \cdot 0 - (-2)^2 = -4$, torej je stožnica H hiperbola. Število k_1 lahko izračunamo s pomočjo enačbe (4), tako da vanjo vstavimo $a = 3$, $b = -2$ in $c = 0$. Dobimo

$$\tan \varphi = k_1 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

Torej bomo koordinatni sistem zarotirali v negativno smer za $\arctan(-\frac{1}{2})$, kar je približno $-26^\circ 34'$. Koeficient nove osi y dobimo iz zveze $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, torej je $k_2 = 2$. Da zapišemo enačbo v zarotiranem koordinatnem sistemu, potrebujemo še $\cos \varphi$ in $\sin \varphi$:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \sin \varphi &= -\frac{k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

$\sin \varphi$ je negativen, saj je kot φ v četrtem kvadrantu. Zdaj v enačbo H vstavimo $\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'$ namesto x in $-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'$ namesto y' . Dobimo

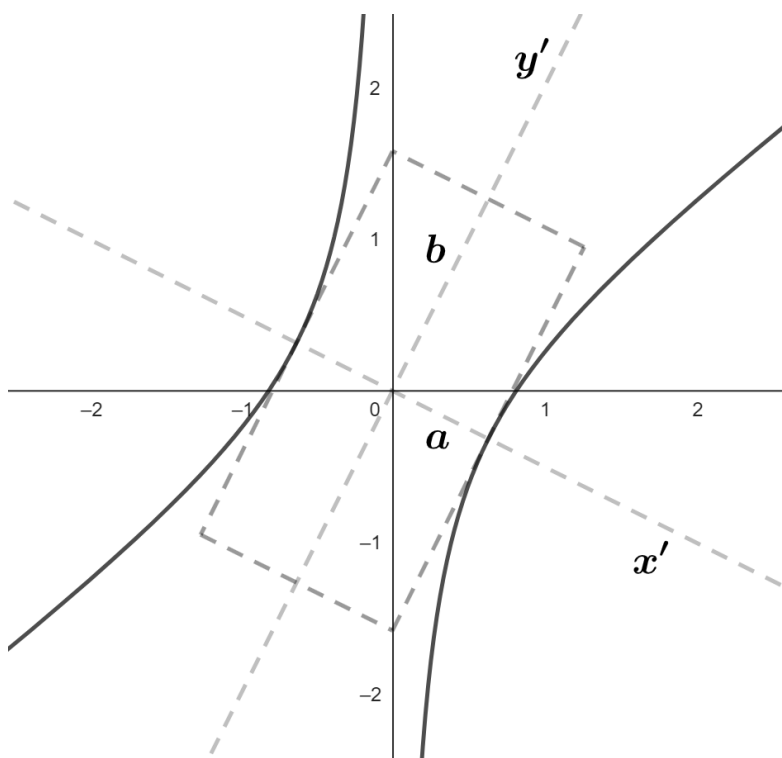
$$3\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) = 2$$

$$4x'^2 - y'^2 = 2.$$

Enačbo delimo z 2, da bomo lahko izračunali polosi:

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Polosi hiperbole sta $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in $b = \sqrt{2}$. Zdaj lahko hiperbolo narišemo:



SLIKA 20. Hiperbola H .

Primer 12.2. Narišimo stožnico P : $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 6 = 0$. P je očitno parabola, saj je $ac = b^2 = 4$.

$$k_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{4} = 2 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{2}$$

Tokrat bomo zarotirali koordinatni sistem v pozitivno smer za približno $63^\circ 26'$. Nato izračunamo $\cos \varphi$ in $\sin \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin \varphi = -\frac{k_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Tokrat je $\sin \varphi$ pozitiven, saj rotiramo v pozitivno smer, torej je kot φ v prvem kvadrantu. Zdaj v enačbo P vstavimo $\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'$ namesto x in $\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'$ namesto y . Dobimo

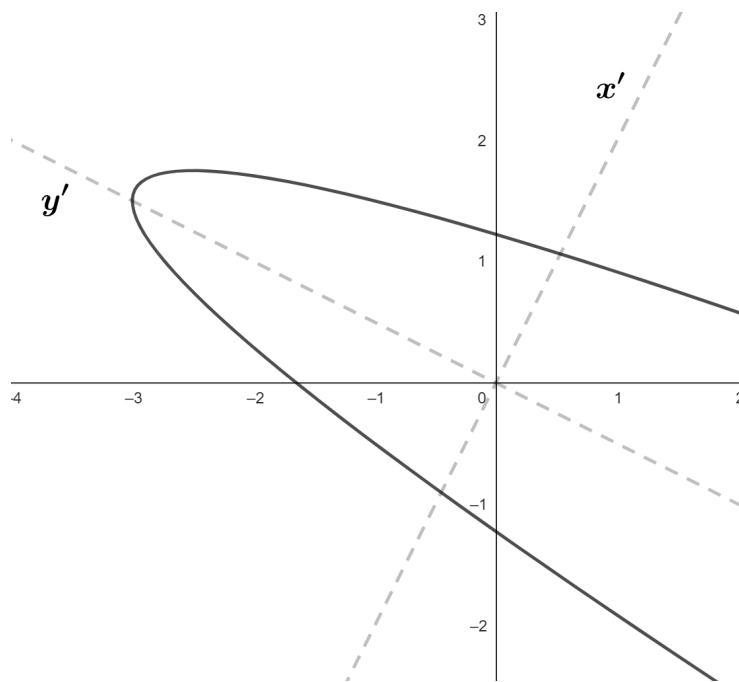
$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + \\ & + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$5\sqrt{5}x'^2 - 2x' + 4y' - 6\sqrt{5} = 0.$$

Parabolo lahko sedaj narišemo v zavrnem koordinatnem sistemu. Lahko jo preoblikujemo v obliko $y = a(x - p)^2 + q$ oziroma $f(x) = a(x - p)^2 + q$ in jo narišemo kot kvadratno funkcijo, lahko pa jo tudi preoblikujemo v temensko obliko enačbe parabole $(x - a)^2 = 2p(y - b)$. Dobimo

$$\left(x - \frac{\sqrt{5}}{25}\right)^2 = -\frac{4\sqrt{5}}{25}\left(y - \frac{151\sqrt{5}}{100}\right),$$

pri čemer je $a = \frac{\sqrt{5}}{25}$, $b = \frac{151\sqrt{5}}{100}$ in $p = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$. Zdaj v $T(a, b)$ narišemo teme parabole. Izračunati moramo samo še nekaj točk, skozi katere poteka parabola P . Koordinate točk dobimo tako, da v enačbo $x^2 = py$ vstavimo nekaj (najmanj 3) različnih vrednosti x , in izračunamo enačbe, da za vsak x dobimo še določen y .



SLIKA 21. Parabola P .

Primer 12.3. Narišimo stožnico E : $-10x^2 + 6xy - 2y^2 + 4y = 0$. Ker je $\Delta > 0$, je E elipsa. Izračunamo k_1 in dobimo

$$k_1 = \frac{8 + \sqrt{100}}{6} = 3 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{3}.$$

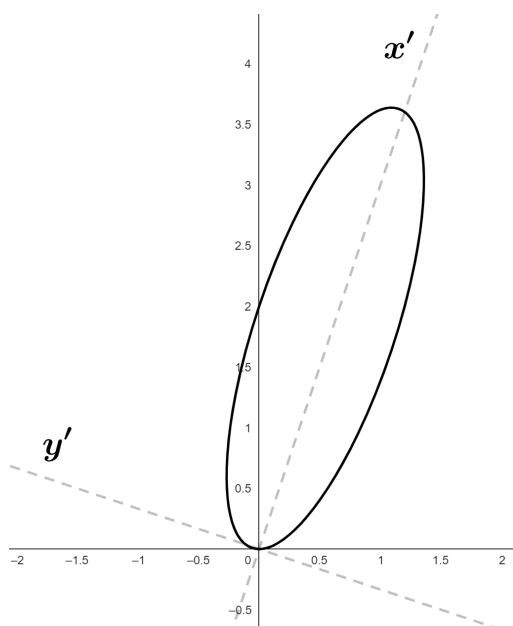
Torej bo koordinatni sistem zarotiran za približno $71^\circ 34'$. Podobno kot v prejšnjih primerih izračunamo $\cos \varphi$ in $\sin \varphi$. Dobimo $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ in $\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Zdaj v enačbo E vstavimo $x = \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'$ in $y = \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'$:

$$\begin{aligned} & -10\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)^2 + 6\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right) - \\ & -2\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)^2 + 4\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right) = 0 \\ & -\sqrt{10}x'^2 - 11\sqrt{10}y'^2 + 12x' + 4y' = 0. \end{aligned}$$

Ko rišemo elipse, si pomagamo z kanonično enačbo oblike $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$, pri čemer je a vodoravna polos, b navpična polos, p in q pa sta koordinati središča elipse. Da dobimo kanonično obliko enačbe, moramo člena, ki vsebujeta x' in člena, ki vsebujeta y' , dopolniti do popolnega kvadrata, ostanek pa moramo nesti na drugo stran. Na desni strani želimo dobiti 1, zato za konec še celo enačbo delimo z desno stranjo. Dobimo

$$\frac{(x' + \frac{6}{\sqrt{10}})^2}{\frac{40}{11}} + \frac{(y' - \frac{2}{11\sqrt{10}})^2}{\frac{40}{11^2}} = 1.$$

Zdaj lahko elipso E narišemo:



SLIKA 22. Elipsa E .

LITERATURA

- [1] A. Cedilnik, *Matematični priročnik*. 3. izd. Radovljica: Didakta, 2006. ISBN-10 961-6214-19-5.
- [2] J. N. Bronštejn in K. A. Semendjajev, *Matematični priročnik*. 11. ponatis. Ljubljana : Tehniška založba Slovenije, 1990. ISBN-86-365-0064-8.
- [3] F. Križanič, *Matematika. Tretje berilo*. 1.nat. Ljubljana : Državna založba Slovenije, 1983.