RAZISKOVALNA NALOGA

Razreševanje trikotnika brez uporabe kotnih funkcij

Avtorji: Lara Lozar, Nika Mravlja, Tiana Požar

Mentor: Miha Šušteršič, prof. mat.

Somentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Področje: SŠ matematika

April, 2024

Škofijska gimnazija Vipava

KAZALO VSEBINE

Kazalo slik

Kazalo tabel

Seznam prilog

Zahvala

Zahvaljujemo se profesorjem Škofijske gimnazije Vipava:

- Profesorju Mihi Šušteršiču za mentorstvo,
- profesorju Alojzu Grahorju za usmerjanje in spodbude pri raziskovanju,
- profesorici Sonji Matelič za pregled povzetka v angleškem jeziku.

Povzetek

Osnovni cilj naloge je raziskati, ali lahko trikotnik razrešimo brez običajnih kotnih funkcij. V nalogi smo pokazali, da lahko.

Kot mero kota med premicama smo vpeljali količino "stežaj", ki se izraža s koeficienti enačb premic, podanih v implicitni obliki. Trikotnikove kote podamo z ustreznimi stežaji med nosilkami stranic. Namesto dolžin stranic uporabljamo kvadrate njihovih dolžin, ki jih poimenujemo "kvadratnice". S kvadratnicami in stežaji izpeljemo ekvivalentne izreke in formule, kot jih poznamo v običajni trigonometriji: zvezo med koti v trikotniku, Pitagorov, sinusni in kosinusni izrek, Heronovo formulo ter pogoje pravokotnosti in vzporednosti premic. Ta pristop imenujemo "racionalna trigonometrija". Rešimo tipične primere nalog z običajno in racionalno trigonometrijo. S tem naredimo primerjavo med obema pristopoma in na osnovi rešenih primerov ocenimo prednosti in slabosti enega in drugega. Osredotočimo se na primere iz gimnazijske geometrije.

Ključne besede: *racionalna trigonometrija, razreševanje trikotnika, trigonometrija, trikotnik*

Abstract

The main goal of the thesis is to research whether a triangle can be solved without the usual angle functions. In the thesis we proved that it can be done.

The amount ‘spread’ is introduced as a measure of the angle between the lines. It is expressed by the coefficients of the equations of the lines given in the implicit form. The angles of the triangles are given with the suitable spreads between the side holders. Instead of the lengths of the sides, the squares of their lengths are used, which we call ‘quadrances’. Using quadrances and spreads we derive the equivalent theorems and formulas known in the conventional trigonometry: the relationship between the angles in a triangle, the Pythagorean theorem, the sine and cosine theorem, Heron's formula and the conditions of perpendicularity and parallelism of lines. This approach is called ‘rational trigonometry’. We solve typical examples of tasks with the conventional and the rational trigonometry. Thus, a comparison is made between the two approaches and based on the solved cases, we identify the advantages and the disadvantages of each. Examples from secondary school geometry are mainly taken into consideration.

Key words: rational trigonometry, solving a triangle, triangles, trigonometry

1. Uvod

1.1. Merjenje kotov

Običajni načini merjenja kotov so s stopinjami, radiani in gradi.

Enota za merjenje kotov 1 ločna stopinja ali 1^0 je enaka velikosti kota, ki je enak $\frac{1}{360}$ polnega kota. Tako meri iztegnjeni kot 180^0, pravi kot (to je kot, ki je enak svojemu sokotu) pa 90^0. Zakaj se polni kot (to je krožni lok) razdeli na 360 enakih delov? Razlogov je več. Babilonci so uporabljali šestdesetiški številski sistem skoraj gotovo zato, ker ima število 60 veliko deliteljev (največ med števili do 100). Ker je $6 \cdot 60 = 360$, ima tudi število 360 veliko deliteljev, pa 1/360 polnega kota je primerno velik kot za enoto. Poleg tega je število 360 približno enako 365, kar je število dni v letu. Skratka, merjenje kotov s stopinjami se je od Babiloncev razširilo po vsem svetu in je v veljavi še danes.

V matematiki pa za merjenje kotov najpogosteje uporabljamo *radiane*. En radian je kot, ki mu pripada krožni lok z dolžino enega polmera krožnice. Polni kot meri 2π radianov, iztegnjeni π radianov, pravi kot pa $\frac{\pi}{2}$ radianov.

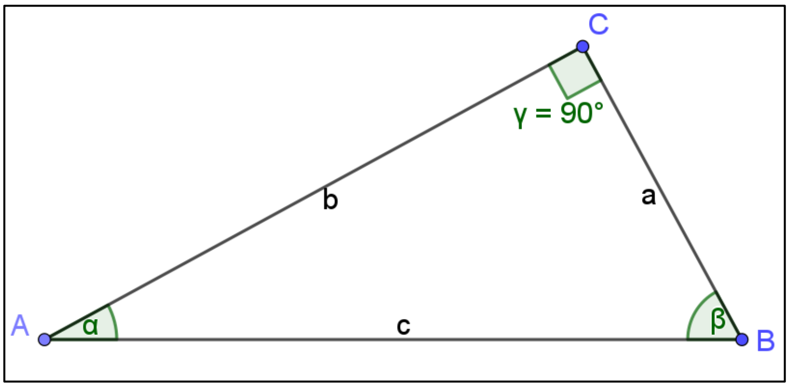
Za merjenje kotov se uporablja tudi enota, ki jo imenujemo *grad*. En grad je enak 1/400 polnega kota, kar pomeni, da je pravi kot velik 100 gradov. Uporablja se v nekaterih tehničnih in inženirskih panogah.

1.2. Običajna trigonometrija

Trigonometrija je področje matematike, ki se ukvarja s študijem razmerij med stranicami in koti v trikotniku. Osnova trigonometrije so razmerja v pravokotnem trikotniku, kar se z izreki razširi na poljubne trikotnike in druge like. S poznavanjem zvez med stranicami in koti lahko ob določenem številu primerno izbranih podatkov, ki določajo trikotnik, razrešimo trikotnik. To pomeni, da izračunamo ostale stranice in kote. Trigonometrija zajema tudi proučevanje kotnih funkcij sinus, kosinus, tanges in kotanges (to je funkcij, kjer je neodvisna spremenljivka velikost kota). Te funkcije opisujejo pojave, ki se periodično ponavljajo.

1.2.1. Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku

Vsi pravokotni trikotniki z danim enim ostrim kotom so med seboj podobni. V podobnih trikotnikih so razmerja med dolžinami stranic konstantna in odvisna le od velikosti kota. Običajno opišemo štiri razmerja med stranicami, ki jih poimenujemo sinus, kosinus, tangens in kotangens (Slika 1).



Slika 1: *Pravokotni trikotnik*

$$\sin\alpha = \frac{nasprotna\ kateta}{hipotenuza} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{priležna\ kateta}{hipotenuza} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{nasprotna\ kateta}{priležna\ kateta} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{priležna\ kateta}{nasprotna\ kateta} = \frac{b}{a}$$

Med kotnimi funkcijami v pravokotnem trikotniku velja nekaj zvez, na primer:

$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha) = \cos\beta$$

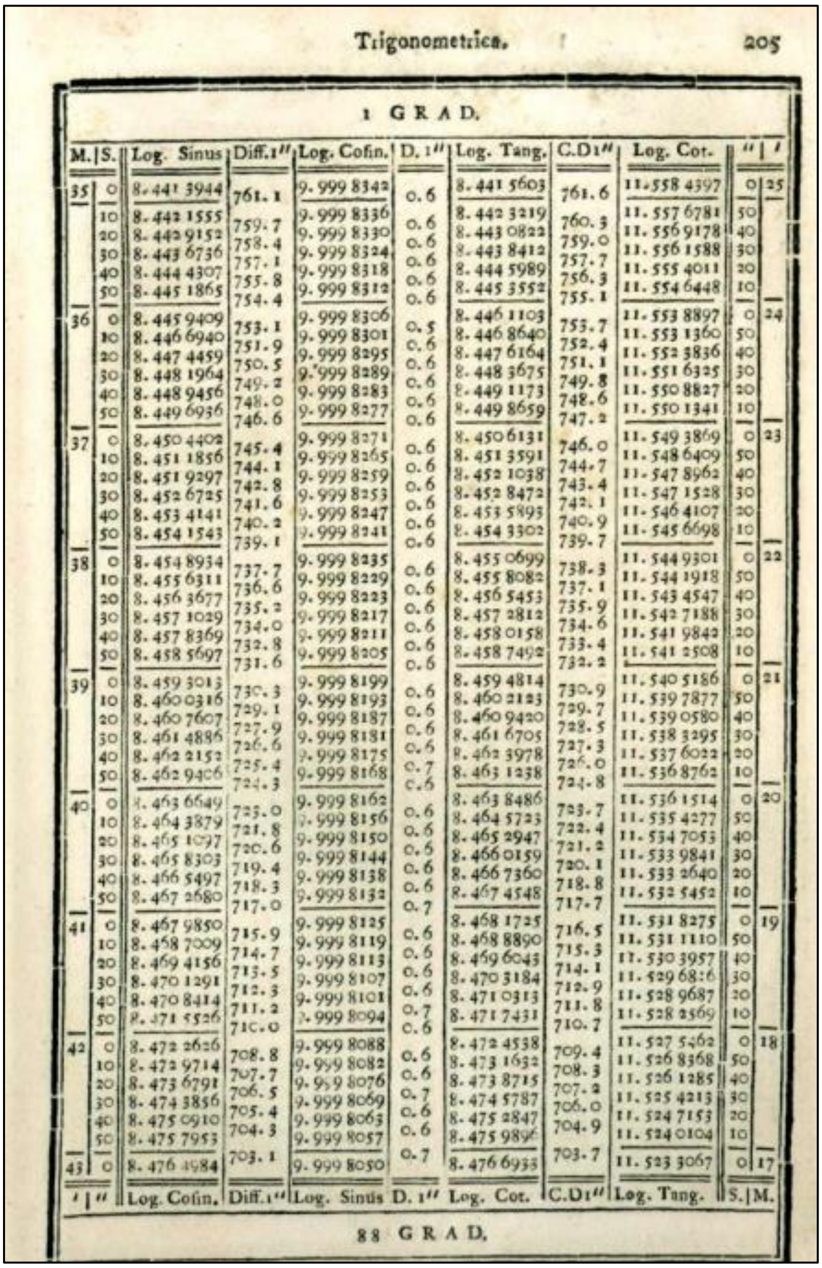
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Vrednosti kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku se izračuna vnaprej, da jih lahko uporabljamo pri razreševanju trikotnika. Nekdaj so bile zapisane v tabelah[1], danes so dostopne

[1] Leta 1793 je Jurij Vega izdal Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch

Glej https://www.dlib.si/stream/URN:NBN:SI:DOC-JQJ8RAAE/7d7cb361-fc2a-4151-93c4-7e5a712aa651/PDF na žepnih računalih in računalnikih. Znane so Vegove tablice, ki jih je sestavil slovenski matematik Jurij Vega (glej Sliko 2).


Trigonometrica. 205

1 GRAD.

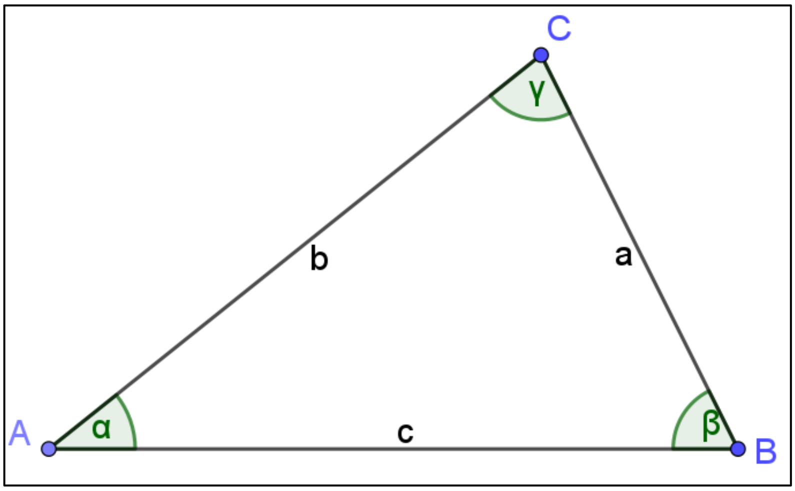
M.	S.	Log. Sinus	Diff.1"	Log. Cosin.	D. 1"	Log. Tang.	C.D1"	Log. Cot.	"	'
35	0	8.441 3944	761.1	9.999 8342	0.6	8.441 5603	761.6	11.558 4397	0	25
	10	8.442 1555	759.7	9.999 8336	0.6	8.442 3219	760.3	11.557 6781	50	
	20	8.442 9152	758.4	9.999 8330	0.6	8.443 0822	759.0	11.556 9178	40	
	30	8.443 6736	757.1	9.999 8324	0.6	8.443 8412	757.7	11.556 1588	30	
	40	8.444 4307	755.8	9.999 8318	0.6	8.444 5989	756.3	11.555 4011	20	
	50	8.445 1865	754.4	9.999 8312	0.6	8.445 3552	755.1	11.554 6448	10	
36	0	8.445 9409	753.1	9.999 8306	0.5	8.446 1103	753.7	11.553 8897	0	24
	10	8.446 6940	751.9	9.999 8301	0.6	8.446 8640	752.4	11.553 1360	50	
	20	8.447 4459	750.5	9.999 8295	0.6	8.447 6164	751.1	11.552 3836	40	
	30	8.448 1964	749.2	9.999 8289	0.6	8.448 3675	749.8	11.551 6325	30	
	40	8.448 9456	748.0	9.999 8283	0.6	8.449 1173	748.6	11.550 8827	20	
	50	8.449 6936	746.6	9.999 8277	0.6	8.449 8659	747.2	11.550 1341	10	
37	0	8.450 4402	745.4	9.999 8271	0.6	8.450 6131	746.0	11.549 3869	0	23
	10	8.451 1856	744.1	9.999 8265	0.6	8.451 3591	744.7	11.548 6409	50	
	20	8.451 9297	742.8	9.999 8259	0.6	8.452 1038	743.4	11.547 8962	40	
	30	8.452 6725	741.6	9.999 8253	0.6	8.452 8472	742.1	11.547 1528	30	
	40	8.453 4141	740.2	9.999 8247	0.6	8.453 5893	740.9	11.546 4107	20	
	50	8.454 1543	739.1	9.999 8241	0.6	8.454 3302	739.7	11.545 6698	10	
38	0	8.454 8934	737.7	9.999 8235	0.6	8.455 0699	738.3	11.544 9301	0	22
	10	8.455 6311	736.6	9.999 8229	0.6	8.455 8082	737.1	11.544 1918	50	
	20	8.456 3677	735.2	9.999 8223	0.6	8.456 5453	735.9	11.543 4547	40	
	30	8.457 1029	734.0	9.999 8217	0.6	8.457 2812	734.6	11.542 7188	30	
	40	8.457 8369	732.8	9.999 8211	0.6	8.458 0158	733.4	11.541 9842	20	
	50	8.458 5697	731.6	9.999 8205	0.6	8.458 7492	732.2	11.541 2508	10	
39	0	8.459 3013	730.3	9.999 8199	0.6	8.459 4814	730.9	11.540 5186	0	21
	10	8.460 0316	729.1	9.999 8193	0.6	8.460 2123	729.7	11.539 7877	50	
	20	8.460 7607	727.9	9.999 8187	0.6	8.460 9420	728.5	11.539 0580	40	
	30	8.461 4886	726.6	9.999 8181	0.6	8.461 6705	727.3	11.538 3295	30	
	40	8.462 2152	725.4	9.999 8175	0.7	8.462 3978	726.0	11.537 6022	20	
	50	8.462 9406	724.3	9.999 8168	0.6	8.463 1238	724.8	11.536 8762	10	
40	0	8.463 6649	723.0	9.999 8162	0.6	8.463 8486	723.7	11.536 1514	0	20
	10	8.464 3879	721.8	9.999 8156	0.6	8.464 5723	722.4	11.535 4277	50	
	20	8.465 1097	720.6	9.999 8150	0.6	8.465 2947	721.2	11.534 7053	40	
	30	8.465 8303	719.4	9.999 8144	0.6	8.466 0159	720.1	11.533 9841	30	
	40	8.466 5497	718.3	9.999 8138	0.6	8.466 7360	718.8	11.533 2640	20	
	50	8.467 2680	717.0	9.999 8132	0.7	8.467 4548	717.7	11.532 5452	10	
41	0	8.467 9850	715.9	9.999 8125	0.6	8.468 1725	716.5	11.531 8275	0	19
	10	8.468 7009	714.7	9.999 8119	0.6	8.468 8890	715.3	11.531 1110	50	
	20	8.469 4156	713.5	9.999 8113	0.6	8.469 6043	714.1	11.530 3957	40	
	30	8.470 1291	712.3	9.999 8107	0.6	8.470 3184	712.9	11.529 6816	30	
	40	8.470 8414	711.2	9.999 8101	0.7	8.471 0313	711.8	11.528 9687	20	
	50	8.471 5526	710.0	9.999 8094	0.6	8.471 7431	710.7	11.528 2569	10	
42	0	8.472 2626	708.8	9.999 8088	0.6	8.472 4538	709.4	11.527 5462	0	18
	10	8.472 9714	707.7	9.999 8082	0.6	8.473 1632	708.3	11.526 8368	50	
	20	8.473 6791	706.5	9.959 8076	0.7	8.473 8715	707.2	11.526 1285	40	
	30	8.474 3856	705.4	9.999 8069	0.6	8.474 5787	706.0	11.525 4213	30	
	40	8.475 0910	704.3	9.999 8063	0.6	8.475 2847	704.9	11.524 7153	20	
	50	8.475 7953	703.1	9.999 8057	0.7	8.475 9896	703.7	11.524 0104	10	
43	0	8.476 4984		9.999 8050		8.476 6933		11.523 3067	0	17
'	"	Log. Cosin.	Diff.1"	Log. Sinus	D. 1"	Log. Cot.	C.D1"	Log. Tang.	S.	M.

88 GRAD.

Slika 2: *Stran iz knjige Jurija Vege Logaritmisch-trigonometriches Handbuch*

1.2.2. Razreševanje poljubnih trikotnikov

Za razreševanje poljubnega trokotnika (Slika 3) so naslednje tri zveze oziroma izreki najpogosteje uporabljeni:



Slika 3: *Splošni trikotnik*

Zveza med koti v trikotniku:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

Kosinusni izrek:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Sinusni izrek:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

1.2.3. Kot med premicama

Dani sta premici: $y = k_1 x + n_1,\ y = k_2 x + n_2$. Ostri kot med njima izračunamo po formuli

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

1.2.4. Ploščina trikotnika

Ploščino trikotnika izračunamo po naslednjih osnovnih formulah:

a) dana je stranica in višina nanjo: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$

b) dani sta stranici in kot med njima: $S = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$

c) dane so vse tri stranice: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kjer je $s = \frac{a+b+c}{2}$. Ta formula se imenuje Heronova formula.

1.3. Cilji naloge

V nalogi smo si zastavili tri cilje:

1. cilj: Preučiti koncept razreševanja trikotnikov brez uporabe običajnih kotnih funkcij. Koncept se imenuje *pristop racionalne trigonometrije.*
2. cilj: Dokazati, da s konceptom racionalne trigonometrije lahko razrešimo trikotnik.
3. cilj: Narediti primerjavo razreševanja trikotnika po obeh konceptih.

1.4. Metode dela

Pri izdelavi raziskovalne naloge smo uporabljali:

- metodo dela po strokovni literaturi in internetnih virih,
- matematično sklepanje in dokazovanje.

Za reševanje enačb smo uporabljali program WolframAlpha, ki je prosto dostopen na povezavi https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=xx%3D6, za poenostavljanje dolgih izrazov pa program Derive 6.

1.5. Nekaj osnovnih zvez in formul

V postopku izpeljevanja formul in dokazovanju izrekov bomo večkrat uporabili nekatere zveze, ki jih navajamo ali dokažemo vnaprej.

Enakost 1: Za vsa realna števila x, y, z velja zveza

$$4xy - (x + y - z)^2 = (x + y + z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) \tag{1}$$

Dokaz:

$$4xy - (x + y - z)^2 =$$

$$= 4xy - (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz) =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 =$$

$$= (x + y + z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) \qquad \text{qed}$$

Opomba: Wildberger (Wildberger, 2005, 27) imenuje to zvezo *Fibonaccijeva identiteta*.

Enakost 2: Za vsa realna števila x, y, z velja zveza

$$(y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1) = (y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1) \tag{2}$$

Dokaz: Razvijemo izraza na obeh straneh in ugotovimo, da sta obe enaka izrazu:

$x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2$ qed

Enakost 3: Za vsa realna števila x, y, u, v velja zveza

$$(xv - yu)^2 + (xy + uv)^2 = (x^2 + u^2)(y^2 + v^2) \tag{3}$$

Dokaz: Izračunamo levo in desno stran in dobimo enaka izraza.

Ploščina trikotnika $\overline{ABC}$[2].

Naj bodo točke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$ v ravnini oglišča trikotnika $\overline{\boldsymbol{ABC}}$. Ploščina trikotnika $\overline{ABC}$ je enaka

$S \cdot o = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$, kjer je o orientacija trikotnika ∓ 1. Orientacija $+1$ je v primeru, ko je orientacija pozitivna, -1 pa v primeru negativne orientacije.

[2] V nalogi bomo trikotnik označevali z oznako $\overline{ABC}$.

Ploščina trikotnika $\overline{\boldsymbol{ABC}}$ je torej enaka absolutni vrednosti izraza:

$$S = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right|. \tag{4}$$

Pogoj kolinearnosti treh točk v ravnini

Ploščina trikotnika je enaka 0 natanko takrat, ko so točke A, B, C kolinearne:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

$$x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 = 0 \tag{5}$$

Enačba premice skozi točki $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ je

$$\det\begin{vmatrix} x_2 - x_1; & y_2 - y_1 \\ x - x_1; & y - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \tag{6}$$

Pogoj pravokotnosti in pogoj vzporednosti premic

Naj bosta dani premici l_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ in l_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Premici l_1 in l_2 sta **vzporedni** natanko tedaj, ko velja: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Premici l_1 in l_2 sta **pravokotni** natanko tedaj, ko velja: $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Pogoj vzporednosti sledi iz dejstva, da sta premici vzporedni, ko imata enaka smerna koeficienta, pogoj pravokotnosti pa iz dejstva, da velja za njuna smerna koeficienta zveza $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Izpeljava pogoja pravokotnosti:

Naj bodo nekolinearne točke A, B in C v ravnini podane s koordinatami: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$.

Premico skozi točki A in C označimo z l_1: $(y_1 - y_3)x + (x_3 - x_1)y + x_1y_3 - x_3y_1 = 0$

premico skozi točki B in C pa z l_2: $(y_3 - y_2)x + (x_2 - x_3)y + x_3y_2 - x_2y_3 = 0$

Potem sta smerna koeficienta enaka:

$k_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$ in $k_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ Iz zveze $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ dobimo:

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = -\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}$$

pogoj pravokotnosti $$\boldsymbol{(y_3 - y_2)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) = 0} \quad (7)$$

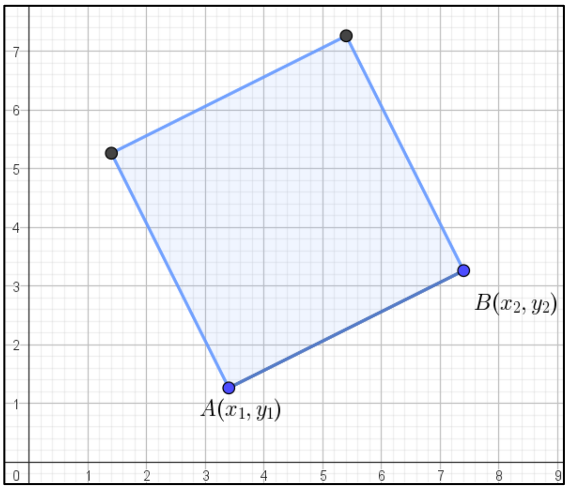
Pogoj vzporednosti $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ pa je, zapisan s koordinatami:

$$\boldsymbol{(y_1 - y_3)(x_2 - x_3) - (y_3 - y_2)(x_3 - x_1) = 0} \quad (8)$$

2. Trigonometrija brez transcedentnih funkcij

2.1. Kvadratnica

Definicija: V ravnini sta dani točki $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. **Kvadratnica** Q_{AB} je število $Q_{AB} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Kvadratnica je enaka ploščini kvadrata s stranico AB (glej Sliko 4).



Slika 4: *K definiciji kvadratnice*

Če daljico AB razdelimo na k enakih delov, potem velja $a = kx$ in $a^2 = k^2 x^2$

Za del kvadratnice velja: $Q_{\frac{a}{k}} = \frac{Q_a}{k^2}$.

2.2. Pogoj kolinearnosti treh točk v ravnini

Trditev 1: Točke A, B in C v ravnini so kolinearne natanko takrat, ko velja zveza:

$$\boldsymbol{(Q_a + Q_b + Q_c)^2 = 2({Q_a}^2 + {Q_b}^2 + {Q_c}^2),} \tag{9}$$

kjer so Q_a, Q_b, Q_c kvadratnice nad stranicami $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ in $c = \overline{AB}$:

$Q_a = Q(B, C)$, $Q_b = Q(A, C)$, $Q_c = Q(A, B)$ (glej Sliko 5).

Dokaz:

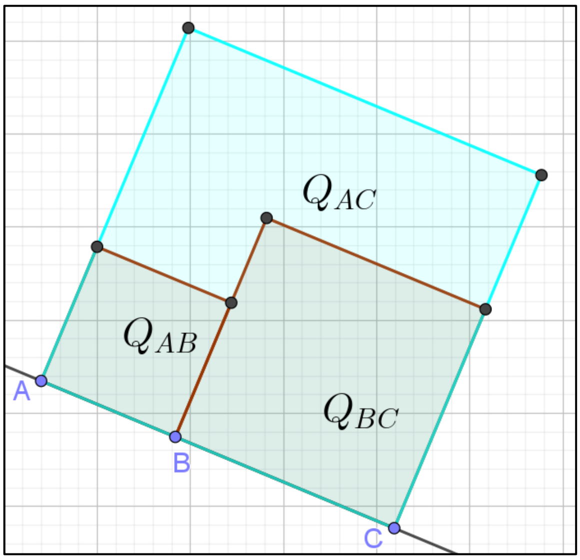
Naj bodo točke A, B in C v ravnini podane s koordinatami: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$.

Kvadratnice stranic v trikotniku $\overline{ABC}$ so:

$Q_a = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$

$Q_b = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$

$Q_c = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$



Slika 5: *K izpeljavi pogoja kolinearnosti točk A, B in C*

Izračunajmo in poenostavimo:

$$(Q_a + Q_b + Q_c)^2 - 2({Q_a}^2 + {Q_b}^2 + {Q_c}^2) =$$

$$= 4(x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2)^2 =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right)^2 = 4S^2$$

Izraz $x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2$ je enak determinanti $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

Kot vemo, je vrednost te determinante enaka dvakratniku ploščine trikotnika $\overline{ABC}$.

Ploščina trikotnika pa je enaka 0, ko so točke A, B in C kolinearne. Trditev je s tem dokazana v obe smeri.

Ker velja identiteta (1): $(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2+z^2) = 4xy - (x+y-z)^2$,

so točke A, B in C v ravnini kolinearne natanko takrat, ko velja zveza:

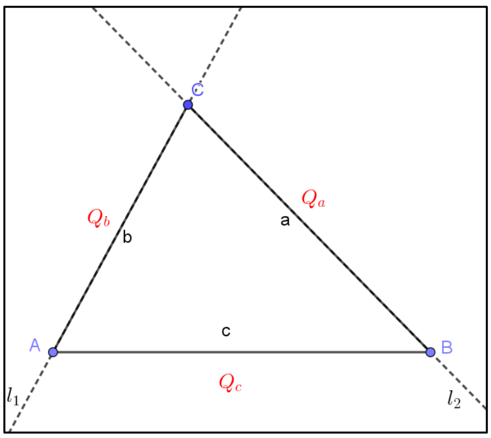
$$(\boldsymbol{Q_a} + \boldsymbol{Q_b} - \boldsymbol{Q_c})^2 = \boldsymbol{4Q_aQ_b}. \tag{10}$$

2.3. Pitagorov izrek

Trditev 2: Trikotnik $\overline{ABC}$ je pravokoten (s pravim kotom pri oglišču C) natanko takrat, ko je

$$\boldsymbol{Q_a} + \boldsymbol{Q_b} = \boldsymbol{Q_c} \tag{11}$$

Dokaz: Naj nekolinearne točke A, B in C v ravnini, ki so podane s koordinatami: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$, določajo trikotnik $\overline{ABC}$ (glej Sliko 6).



Slika 6: *K izpeljavi Pitagorovega izreka*

Kvadratnice stranic v trikotniku $\overline{ABC}$ so:

$Q_a = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$

$Q_b = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$

$Q_c = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Izračunajmo $Q_a + Q_b - Q_c =$

$$= ((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2) + ((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2) + ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) =$$

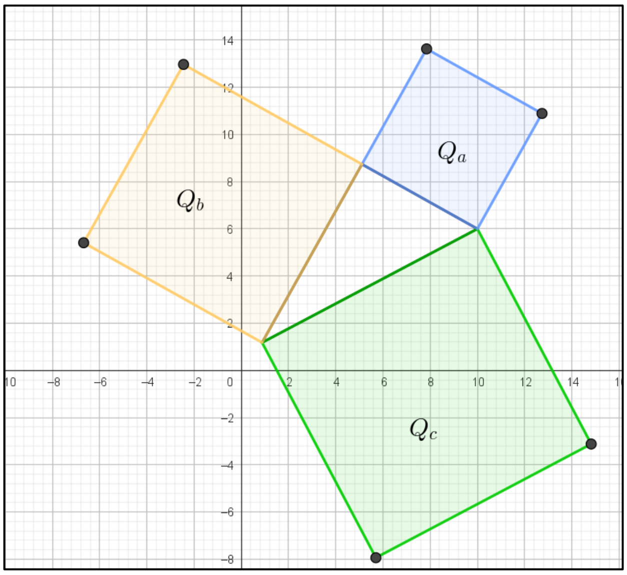
$$= 2((y_3 - y_2)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_3 - x_1))$$

V oklepaju zadnjega izraza smo dobili pogoj pravokotnosti (7). Torej je

$Q_a + Q_b - Q_c = 0$ natanko takrat, ko sta daljici $\overline{AC}$ in $\overline{BC}$ pravokotni oziroma

$$\boldsymbol{Q_a + Q_b = Q_c}$$

natanko takrat, ko je trikotnik $\overline{ABC}$ pravokoten (s pravim kotom pri oglišču C) (glej Sliko 7).



Slika 7: *Pitagorov izrek*

2.4. Stežaj

Za merjenje kotov uporabljamo stopinje, radiane ali grade. V nadaljevanju bomo *kot* opisali na drugačen način, kot smo ga vajeni iz običajne trigonometrije. (Prav tam, 73)

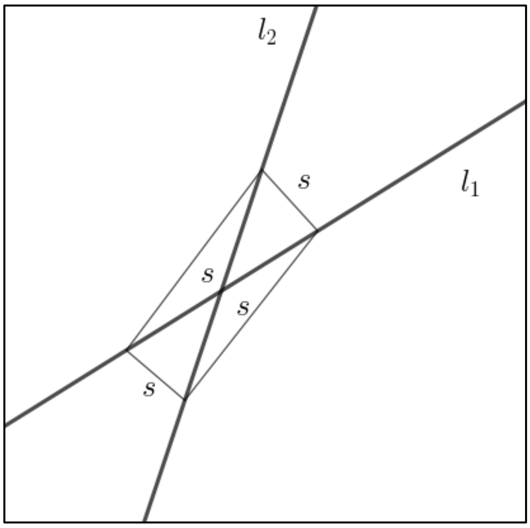
2.4.1. Definicija stežaja

Definicija: Dani sta premici $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ in $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$; $a_1, a_2, b_1, b_2 \neq 0$ (Slika 8). **Stežaj** med premicama $l_1$in l_2 je število

$$\boldsymbol{s(l_1, l_2)} = \frac{(\boldsymbol{a_1b_2 - a_2b_1})^2}{(\boldsymbol{a_1^2 + b_1^2})(\boldsymbol{a_2^2 + b_2^2})}. \tag{12}$$

Iz definicije sledi, da je $s(l_1, l_2) \geq 0$. Zaradi simetričnosti formule (12) je $s(l_1, l_2) = s(l_2, l_1)$. Vrednost stežaja med premicama se ne spremeni, ko za enačbo premice izberemo ekvivalentno enačbo, saj so potem vsi koeficienti sorazmerni. Faktor sorazmernosti pa se v enačbi (12) okrajša.

Sekajoči se premici določata dva para skladnih kotov. Vsi koti imajo enak stežaj ne glede na to ali so ostri ali topi. Kadar je kot merjen stežajem, označimo s tanko ravno črtico (v običajni trigonometriji narišemo majhen lok) (glej Sliko 8).



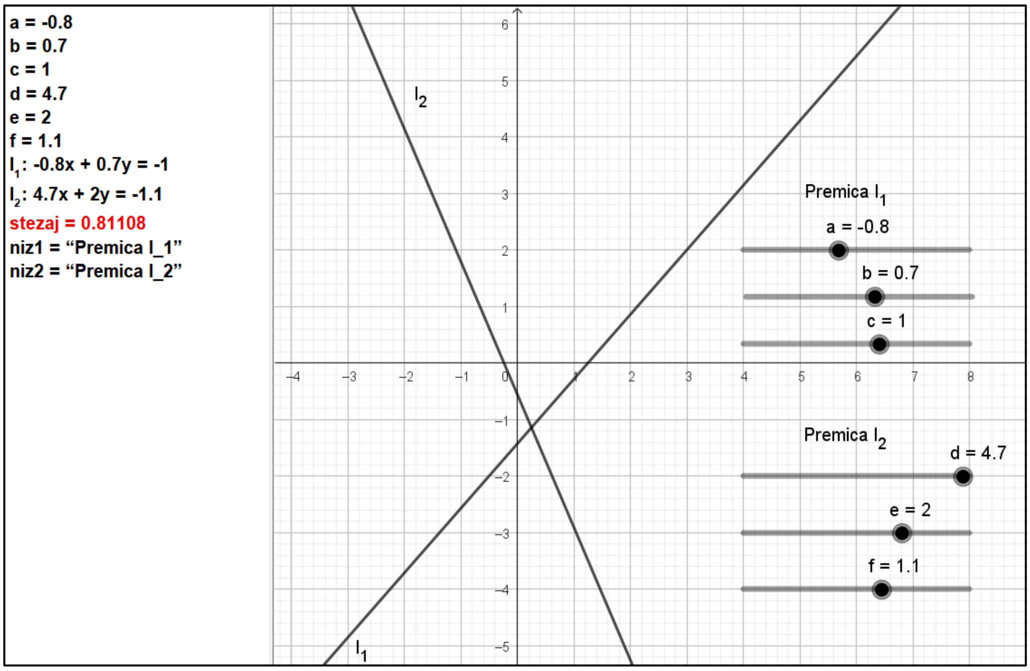
Slika 8: *K izpeljavi stežaja med premicama*

Primer 1:

Premici l_1 in l_2 imata enačbi:$l_1: -0{,}8x + 0{,}7y + 1 = 0$ in $l_2: 4{,}7x + 2y + 1 = 0$.

Tedaj je $s(l_1, l_2) = s = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \sim 0{,}81108$.

Slika 9 prikazuje primer izračuna stežaja med premicama. Animacijo smo naredili v programu Geogebra z drsniki.



Slika 9: *Animacija računanja stežaja med premicama v programu Geogebra*

Primer 2: Premici l_1 in l_2 sta vzporedni. Stežaj $=$ 0

Primer 3: Če sta premici l_1 in l_2 pravokotni, velja $\frac{a_2}{b_2} = -\frac{b_1}{a_1}$. Od tu dobimo zvezi: $a_2 = -kb_1$ in $b_2 = ka_1$, kjer je k neničelno realno število. Izračunajmo:

$$s(l_1, l_2) = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \frac{(ka_1^2 + kb_1^2)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(k^2 a_1^2 + k^2 b_1^2)} = 1.$$

Če sta premici pravokotni, je stežaj med njima enak 1.

Primer 4: $y = 0$ in $y = x$ Stežaj $= \frac{1}{2}$

2.4.2. Pravokotni trikotnik

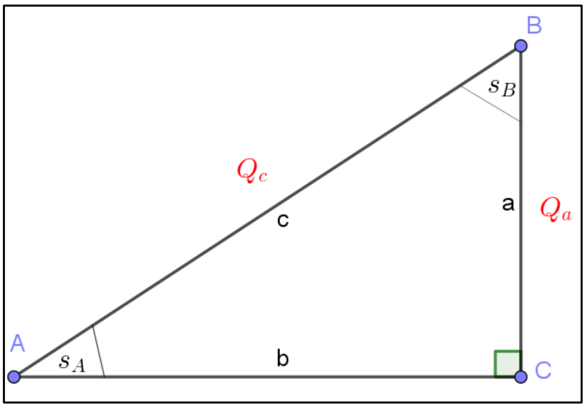
V tem razdelku bomo definicijo stežaja, ki ga določata sekajoči se premici (glej formulo (12)) povezali z merjenjem kota v pravokotnem trikotniku.

Definicija: Stežaj kota pri oglišču A v pravokotnem trikotniku (glej Sliko 10) je enak stežaju med nosilkama stranic $\overline{AC}$ in $\overline{AB}$.

Dokazali bomo, da se stežaja ostrih kotov v pravokotnem trikotniku izražata kar s kvadratnicami: $\boldsymbol{s_A} = \frac{Q_a}{Q_c}$ in $\boldsymbol{s_B} = \frac{Q_b}{Q_c}$.

Trditev 3: Dan je pravokotni trikotnik $\overline{ABC}$ s pravim kotom pri oglišču C in kvadratnicami Q_a, Q_b in Q_c (glej Sliko 10). Stežaj pri oglišču A je enak

$$\boldsymbol{s_A} = \frac{Q_a}{Q_c}. \qquad (13)$$



Slika 10: *K izpeljavi stežaja v pravokotnem trikotniku*

Dokaz: Naj bodo točke $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$ oglišča trikotnika $\overline{ABC}$.

Kvadratnice so enake:

$Q_a = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$

$Q_b = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$

$Q_c = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Enačba premice skozi točki A in B je:

$$\det\begin{vmatrix} x_2 - x_1; & y_2 - y \\ x - x_1; & y - y \end{vmatrix} = 0$$

$$l_1: (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Podobno dobimo še enačbi drugih dveh premic:

Enačba premice skozi točki A in C je: $l_2: (y_1 - y_3)x + (x_3 - x_1)y + x_1 y_3 - x_3 y_1 = 0,$

enačba premice skozi točki B in C pa: $l_3 (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + x_2 y_3 - x_3 y_2 = 0.$

Koeficiente enačb premic l_1 in l_2 vstavimo v formulo: $\boldsymbol{s(l_1, l_2) = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}$

in dobimo:

$$s_A = s(l_1, l_2) = \frac{((y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1))^2}{((y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2)((y_1 - y_3)^2 + (x_3 - x_1)^2)}$$

V imenovalcu smo dobili izraz, ki je enak produktu $Q_c \cdot Q_b$. Cilj dokaza je $s_A = \frac{Q_a}{Q_c}$. Ta količnik razširimo s Q_b na $s_A = \frac{Q_a \cdot Q_b}{Q_c \cdot Q_b}$. Pokazati moramo torej, da je dobljeni števec enak produktu $Q_a \cdot Q_b$. Izračunajmo razliko:

$$\left((y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1)\right)^2 - Q_a \cdot Q_b =$$

$$= \left((y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1)\right)^2 -$$

$-((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2)((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2) \neq 0$. Pri izračunu smo si pomagali s programom Derive 6.

Torej produkt $Q_a \cdot Q_b$ ni enak števcu. Na osnovi Wilderbergove ideje (Prav tam, 77) in s pomočjo identitete 2 preoblikujemo izraz

$$(y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1) = (y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1)$$

Toda tudi $\left((y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1)\right)^2$ ni enak produktu $Q_a \cdot Q_b$.

Uporabimo še eno Wildbergovo idejo (Prav tam, 77) in sicer upoštevamo, da sta premici l_2 in l_3 pravokotni.

Pogoj pravokotnosti teh dveh premic je $(y_3 - y_2)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) = 0$.

Tako dobimo, da je $\left((y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1)\right)^2 + 0 =$

$= \left((y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1)\right)^2 + \left((y_3 - y_2)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)\right)^2$.

Ko uporabimo še enakost 3, dobimo, da je ta rezultat enak $Q_a \cdot Q_b$.

Potegnemo še končni sklep: $\boldsymbol{s_A = \frac{Q_a \cdot Q_b}{Q_c \cdot Q_b} = \frac{Q_a}{Q_c}}$.

To razmerje imenujemo **stežajno razmerje.** Toda ker sta vrednosti stežaja (mere za kot) in stežajnega razmerja enaki, imenujemo obe količini kar *stežaj.*

Poiščimo še zvezo med stežajema obeh ostrih kotov v pravokotnem trikotniku:

$$\boldsymbol{s_A} + \boldsymbol{s_B} = \frac{Q_a}{Q_c} + \frac{Q_b}{Q_c} = \frac{Q_a + Q_b}{Q_c} = \frac{Q_c}{Q_c} = 1$$

POVEZAVA Z OBIČAJNO TRIGONOMETRIJO

Iz uporabe definicije stežaja med premicama v pravokotnem trikotniku izhaja:

$$s_A = \frac{Q_a}{Q_c} = \frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = (\sin\alpha)^2$$

$$s_B = \frac{Q_b}{Q_c} = \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = (\sin\beta)^2$$

Zvezo $s_A + s_B = 1$ lahko potrdimo tudi z običajno trigonometrijo, saj je v pravokotnem trikotniku $\sin\beta = \cos\alpha$: $s_A + s_B = (\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

2.4.3. Tabela nekaterih kotov

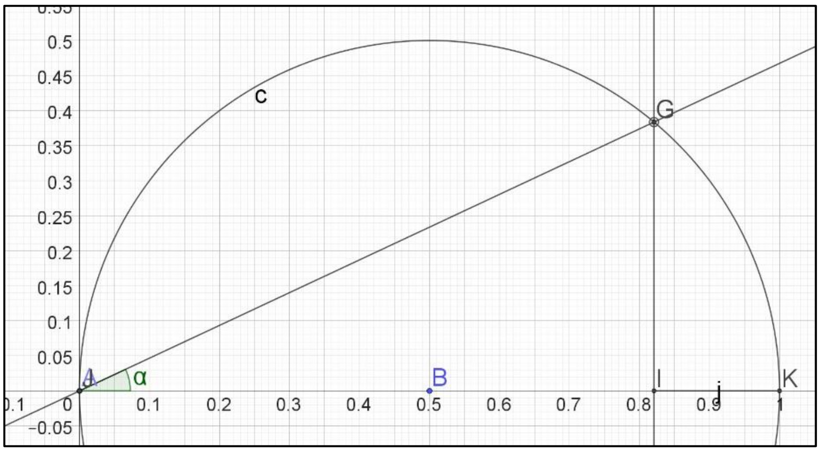
V Tabeli 1 smo prikazali nekaj vrednosti v stopinjah, radianih in stežajih za kote $0^0, 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0$ in 90^0. Vrednosti za stopinje med 1^0 in 90^0 so prikazane v prilogi.

Stopinje	Radiani	Stežaji
0	0	0
15	$\frac{\pi}{12}\sim 0,26178$	$\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})\sim 0,06699$
30	$\frac{\pi}{6}\sim 0,52356$	$\frac{1}{4}$
45	$\frac{\pi}{4}\sim 0,78540$	$\frac{1}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}\sim 1,04712$	$\frac{3}{4}$
75	$\frac{5\pi}{12}\sim 1,30810$	$\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})\sim 0,93301$
90	$\frac{\pi}{2}\sim 1,60570$	1

Tabela 1: *Velikosti nekaterih kotov v stopinjah, radianih in stežajih*

2.4.4. Stežajomer

Idejo za izdelavo pripomočka za merjenje stežajev smo povzeli iz članka *A Rational Approach to Trigonometry* (Wildberger, 2007, 6). Najprej dokažimo osnovno zvezo, ki omogoča izdelavo *»kotomera«* za merjenje stežajev.



Slika 11: *K izpeljavi meritve stežajev*

Trditev 4: Dolžina daljice KI je enaka stežaju kota α (glej Sliko 11).

Dokaz: Enačba premice $\overline{AG}$ je enaka $y = (\tan\alpha)\,x$, enačba krožnice s središčem B in polmerom $r = \frac{1}{2}$ je enaka $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Izračunajmo njuni presečišči:

$$(x - \frac{1}{2})^2 + ((\tan\alpha)\,x)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - x + (\tan\alpha)^2\,x^2 = 0$$

$$x(-1 + x + (\tan\alpha)^2\,x) = 0$$

1. $x = 0$
2. $-1 + x + (\tan\alpha)^2\,x = 0$

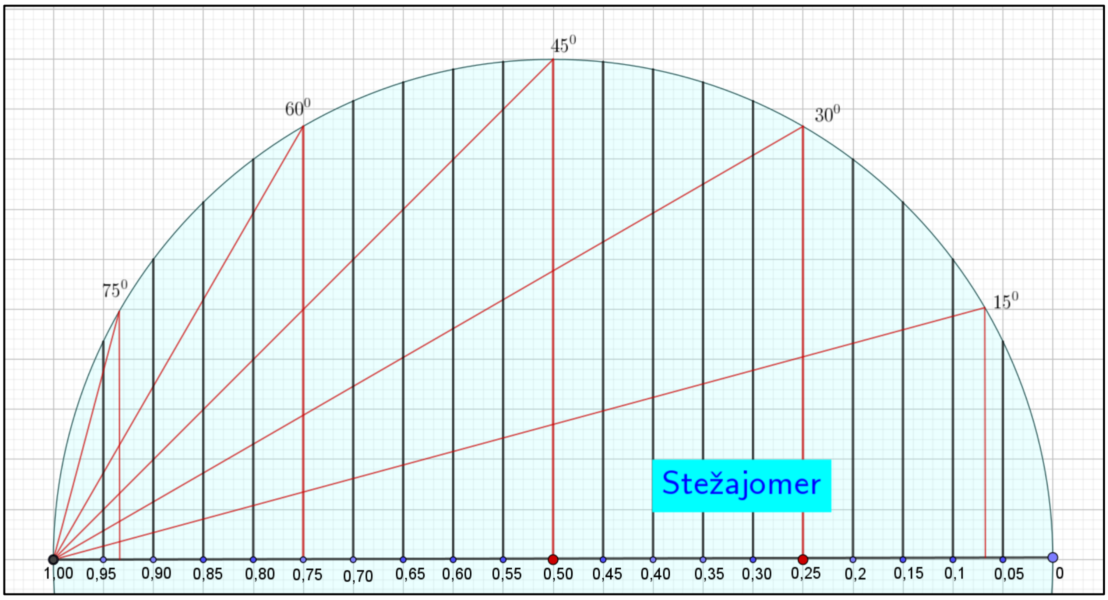
$$x = \frac{1}{1+(\tan\alpha)^2}$$

$$x = (\cos\alpha)^2 = c$$

$$s = 1 - c = |KI|$$

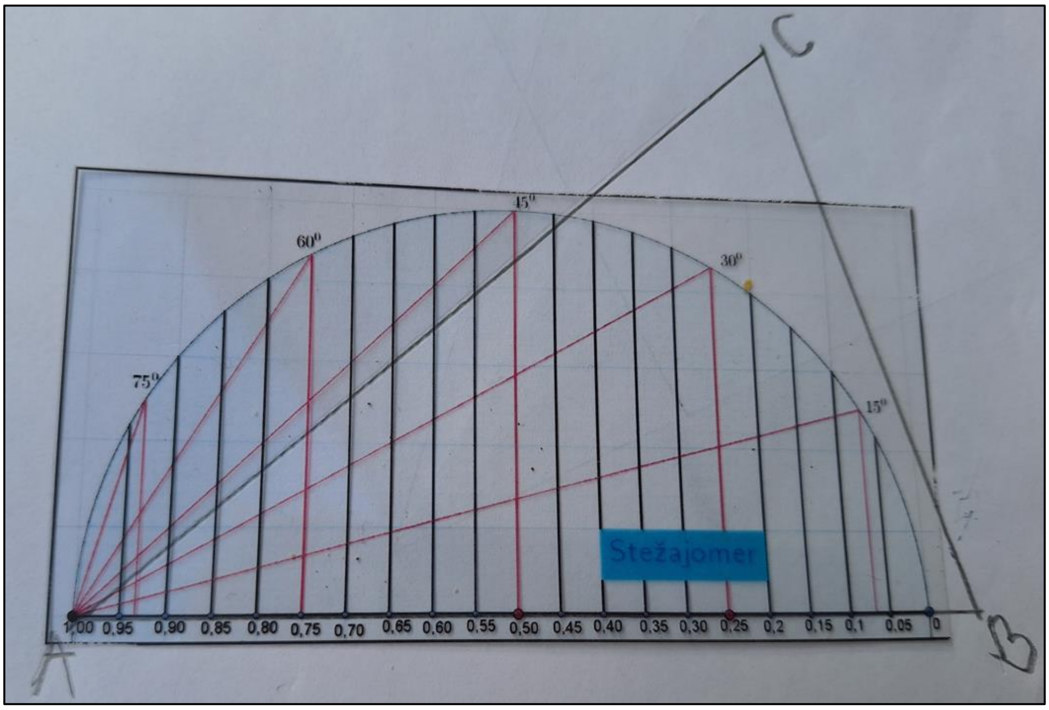
Na osnovi gornje trditve smo izdelali »kotomer« za merjenje kotov v stežajih. Imenovali smo ga **stežajomer** (Slika 12). Skalo za razbiranje vrednosti stežajev smo označili od desne proti levi.

Stežajomer postavimo tako, da spodnji rob (daljica od **0** do **1**) sovpada z enim izmed krakov kota in da točka 1 sovpada z vrhom kota. V točki na presečišči polkrožnice in drugega kraka kota poiščemo pravokotnico na daljico $\overline{01}$. Razdalja od točke 0 do nožišča te daljice je *stežaj* danega kota. Stežaj torej odčitamo od desne proti levi.



Slika 12: *Stežajomer*

Izdelali smo nekaj stežajomerov tako, da smo stežajomer s Slike 12 natisnili na prozorno folijo. Na Sliki 13 je prikaz merjenja stežaja s stežajomerom v trikotniku. Merjenje poteka tako, da levo spodnjo točko 1 na stežajomeru postavimo v vrh kota in spodnji rob stežajomera poravnamo s prvim krakom kota. Nato pogledamo, v kateri točki seka polkrožnica drugi krak kota. To točko pravokotno projiciramo na spodnji krak in odčitamo vrednost od desne proti levi.



Slika 13: *Merjenje stežaja v trikotniku* $\overline{ABC}$: $s_A \sim \mathbf{0,43}$

2.4.5. Ostri in topi koti

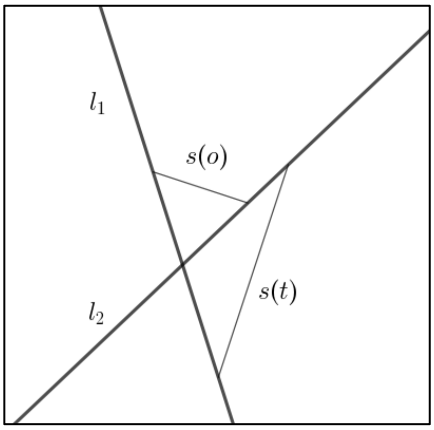
Kot je pravi kot, če je enak svojemu sokotu.

Kot je *oster,* če njegova velikost ne presega pravega kota. V trikotniku je kot *top,* če je večji ali enak od pravega kota in manjši od iztegnjenega kota.

Definicija: Trikotnik je *ostrokotni,* če so vsi njegovi notranji koti ostri.

V trikotniku $\overline{ABC}$ velja:

Trikotnik $\overline{ABC}$ je ostrokotni, če velja: $Q_a + Q_b \geq Q_c$, $Q_a + Q_c \geq Q_b$, $Q_b + Q_c \geq Q_a$.



Slika 14: *Oster in top kot označimo dodatno*

Sekajoči se premici (nepravokotni) določata dva različna kota. Če merimo kota s stopinjami, potem ju razlikujemo glede na vrednost stopinj. Če pa določamo kot s stežaji, imata oba različna kota pri sekajočih se premicah enak stežaj. Ko je v problemu pomembno, ali gre za oster ali top kot, to označimo posebej z dodatnima oznakama takole: $s(o)$ za oster kot in $s(t)$, ko gre za topi kot (glej Sliko 14). Podobno je tudi v trikotniku. Tam zapišemo na primer: $s_A(o)$ če gre za oster kot in $s_B(t)$ za topi kot. Sicer pa moramo v primeru več rešitev preveriti, ali pri vseh rešitvah trikotnik dejansko obstaja in določene rešitve zavrniti. Podobno je tudi v konceptu običajne trigonometrije.

2.4.6. Kostežaj

Dani sta premici $l_1 \colon a_1x + b_1y + c_1 = 0$ in $l_2 \colon a_2x + b_2y + c_2 = 0$; $\quad a_1, a_2, b_1, b_2 \neq 0$.

Definicija: **Kostežaj** med premicama $l_1$in l_2 je število

$$\boldsymbol{c(l_1, l_2) = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)^2}{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}} \tag{14}$$

Izrek: Med stežajem in kostežajem premic $l_1$in l_2 velja zveza

$$\boldsymbol{s(l_1, l_2) + c(l_1, l_2) = 1} \tag{15}$$

Dokaz:

$$\frac{(a_1b_2-a_2b_1)^2}{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} + \frac{(a_1a_2+b_1b_2)^2}{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} = \cdots = 1 \qquad \text{qed}$$

Posledica: V pravokotnem trikotniku je $c_A = \frac{Q_b}{Q_c}$.

Dokaz: $c_A = 1 - s_A = 1 - \frac{Q_a}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_a}{Q_c} = \frac{Q_b}{Q_c}$

POVEZAVA Z OBIČAJNO TRIGONOMETRIJO

Iz definicije kostežaja v pravokotnem trikotniku izhaja:

$$c_A = \frac{Q_b}{Q_c} = \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = (\cos\alpha)^2$$

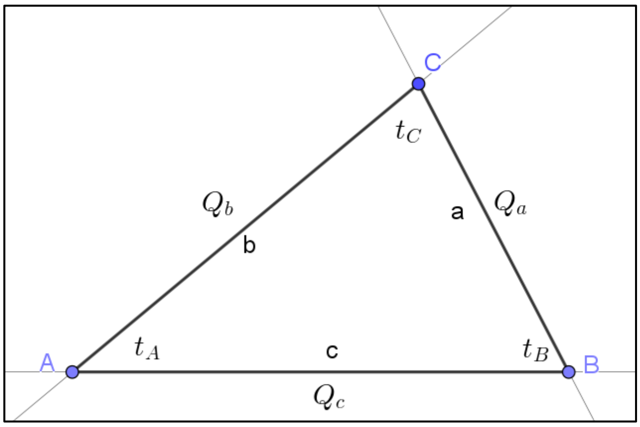
$$c_B = \frac{Q_a}{Q_c} = \frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = (\cos\beta)^2$$

Zveza $s(l_1, l_2) + c(l_1, l_2) = 1$ v racionalni trigonometriji je enakovredna zvezi $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ v običajni trigonometriji.

2.4.7. Tanžaj

Definicija: Naj bosta dani nepravokotni premici $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ in $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (glej Sliko 15). **Tanžaj** med premicama l_1 in l_2 je število

$$t(l_1, l_2) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1a_2 + b_1b_2)^2} \tag{16}$$



Slika 15: *K izpeljavi tanžaja*

Če sta premici pravokotni ($a_1a_2 + b_1b_2 = 0$), tanžaj med njima ni definiran.
Zaradi simetričnosti formule (16) velja $t(l_1, l_2) = t(l_2, l_1)$.
Velja tudi: $t(l_1, l_2) = 0$ natanko takrat, ko sta premici vzporedni.
Iz definicij stežaja in kostežaja sledi zveza:

$$\boldsymbol{t(l_1, l_2) = \frac{s(l_1,l_2)}{c(l_1,l_2)} = \frac{s(l_1,l_2)}{1 - s(l_1,l_2)}} \tag{17}$$

ali krajše $\quad t = \frac{s}{c} = \frac{s}{1-s}$ (17a)

POVEZAVA Z OBIČAJNO TRIGONOMETRIJO

Prvič: Iz formule (16) sledi v pravokotnem trikotniku:

$$t_A = \frac{s_A}{c_A} = \cdots = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\tan\alpha)^2$$

Drugič:
Premici $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ in $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ imata smerna koeficienta
$l_1: k_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ ter $l_2: k_2 = -\frac{a_2}{b_2}$.

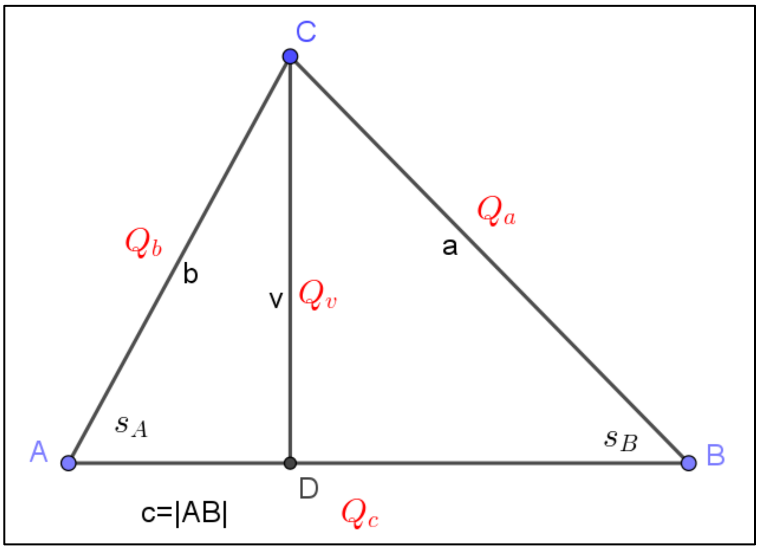
Definicijo tanžaja preoblikujemo v zvezo: $t(l_1, l_2) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1a_2 + b_1b_2)^2} = \left(\frac{\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2}}{\frac{a_1a_2}{b_1b_2} + 1}\right)^2 = \left(\frac{-k_1 + k_2}{k_1k_2 + 1}\right)^2$.

Če zadnjo zvezo zapišemo v običajni trigonometriji, dobimo znano zvezo: $\tan\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{k_1k_2 + 1}\right|$

2.5. Izreki v trikotniku

2.5.1. Stežajni izrek

Dan je trikotnik $\overline{ABC}$ (glej Sliko 16). Naj bo v višina na stranico $\overline{AB}$ in točka D njeno nožišče. Trikotnika $\overline{ADC}$ in $\overline{DBC}$ sta pravokotna. Stežaje med nosilkami stranic označimo s_A, s_B in s_C.



Slika 16: *K izpeljavi stežajnega izreka*

Zapišimo zveze in preoblikujmo.

$s_A = \frac{Q_v}{Q_b}$ $\qquad\qquad$ $s_B = \frac{Q_v}{Q_a}$

$Q_v = s_A Q_b$ $\qquad\qquad$ $Q_v = s_B Q_a$

Izenačimo $\qquad$ $s_A Q_b = s_B Q_a$ $\quad$ in delimo z s_A in s_B:

$$\frac{s_A}{Q_a} = \frac{s_B}{Q_b}$$

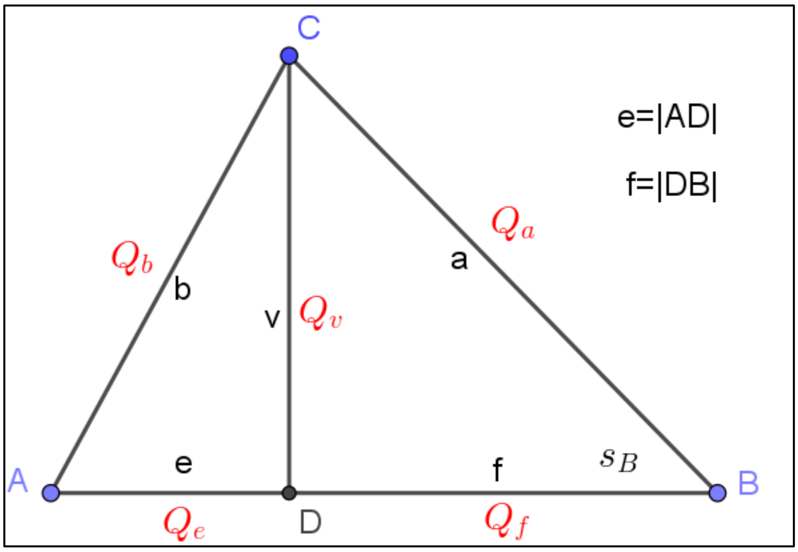
Na enak način dobimo zvezo med s_B in Q_b ter med s_C in Q_c: $s_B Q_c = s_C Q_b$. Tako dobimo

stežajni izrek $\quad \frac{s_A}{Q_a} = \frac{s_B}{Q_b} = \frac{s_C}{Q_c}$ $\qquad$ (18)

2.5.2. Kostežajni izrek

Izrek: Naj točke A, B in C določajo kvadratnice nad stranicami $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ in $\overline{AB}$:

$Q_a = Q(B,C)$, $Q_b = Q(A,C)$, $Q_c = Q(A,B)$ in naj bo stežaj $s_B = s(BA,BC)$ (glej Sliko 17).



Slika 17: *K izpeljavi kostežajnega izreka*

Točka D na daljici $\overline{AB}$ naj bo nožišče daljice $\overline{CD}$. Naj bodo kvadratnice:

$$Q_v = Q(D,C), \qquad Q_e = Q(A,D),\ Q_f = Q(D,B).$$

Trikotnika $\overline{ADC}$ in $\overline{DBC}$ sta pravokotna in v njima uporabimo Pitagorov izrek:

$$Q_b = Q_e + Q_v$$

$$Q_a = Q_f + Q_v$$

Zapišimo še stežaj $s_B = \frac{Q_v}{Q_a}$.

Izračunajmo:

$$Q_v = s_B Q_a$$

$$Q_a = Q_f + s_B Q_a \Rightarrow Q_f = Q_a(1 - s_B)$$

$$Q_b = Q_e + s_B Q_a \Rightarrow Q_e = Q_b - s_B Q_a$$

Ker so točke A, D in B kolinearne, uporabimo pogoj kolinearnosti (5):

$$\left(Q_f + Q_c - Q_e\right)^2 = 4Q_c Q_f.$$

$$(Q_a(1 - s_B) + Q_c - (Q_b - s_B Q_a))^2 = 4Q_c Q_a(1 - s_B)$$

$$(Q_c + Q_a - Q_b)^2 = 4Q_c Q_a(1 - s_B)$$

Po analogiji lahko zapišemo vse tri variante kostežajnega izreka:

$$(Q_b + Q_c - Q_a)^2 = 4Q_b Q_c(1 - s_A) \tag{19a}$$

$$(Q_a + Q_c - Q_b)^2 = 4Q_a Q_c(1 - s_B) \tag{19b}$$

$$(Q_a + Q_b - Q_c)^2 = 4Q_a Q_b(1 - s_C) \tag{19c}$$

ali s kostežaji:

$$(Q_b + Q_c - Q_a)^2 = 4Q_b Q_c c_A$$

$$(Q_a + Q_c - Q_b)^2 = 4Q_a Q_c c_B$$

$$(Q_a + Q_b - Q_c)^2 = 4Q_a Q_b c_C$$

Vemo, da se v običajni trigonometriji »prelevi« kosinusni izrek v Pitagorov izrek v primeru, da je trikotnik pravokoten. Poglejmo, ali velja ta sklep tudi za kostežajni izrek.

Naj bo trikotnik $\overline{ABC}$ pravokoten s pravim kotom ob oglišču C. Tedaj je $s_C = 1$.

V kostežajni izrek $(Q_a + Q_b - Q_c)^2 = 4Q_a Q_b(1 - s_C)$ vstavimo $s_C = 1$ in dobimo $Q_a + Q_b - Q_c = 0$, kar je Pitagorov izrek.

Ker velja zveza (1), lahko zapišemo formule (19a), (19b) in (19c) v bolj simetrični obliki:

$$(Q_a + Q_b + Q_c)^2 = 2(Q_a^2 + Q_b^2 + Q_c^2) + 4Q_b Q_c s_A \tag{20a}$$

$$(Q_a + Q_b + Q_c)^2 = 2(Q_a^2 + Q_b^2 + Q_c^2) + 4Q_a Q_c s_B \tag{20b}$$

$$(Q_a + Q_b + Q_c)^2 = 2(Q_a^2 + Q_b^2 + Q_c^2) + 4Q_a Q_b s_C \tag{20c}$$

2.5.3. Stežajna formula

V običajni trigonometriji velja, da je vsota notranjih kotov v trikotniku enaka 180^0. Poiščimo zvezo med stežaji v istem trikotniku.

Razmerja v stežajnem izreku označimo z D: $\frac{s_A}{Q_a} = \frac{s_B}{Q_b} = \frac{s_B}{Q_b} = D$ in izrazimo

$Q_a = \frac{s_A}{D}$, $\quad Q_b = \frac{s_B}{D}$, $\quad Q_c = \frac{s_C}{D}$ $\quad$ ter vstavimo v kostežajni izrek

$$(Q_a + Q_b - Q_c)^2 = 4Q_aQ_b(1 - s_C)$$

Tako dobimo zvezo:

$$(s_A + s_B - s_C)^2 = 4s_As_B(1 - s_C)$$

$$(s_A + s_B - s_C)^2 = 4s_As_B - 4s_As_Bs_C$$

Ker velja zveza (1): $(x + y + z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 4xy - (x + y - z)^2$

$(x + y - z)^2 = 4xy - (x + y + z)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)$

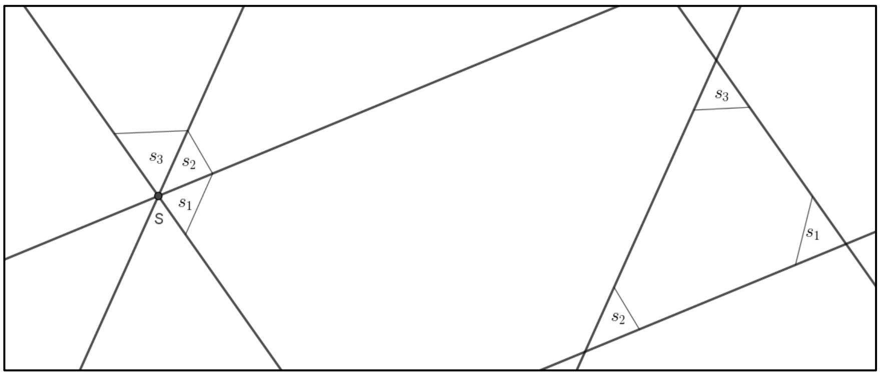
Sledi: $4s_As_B - (s_A + s_B + s_C)^2 + 2({s_A}^2 + {s_B}^2 + {s_C}^2) = 4s_As_B - 4s_As_Bs_C$ in po preureditvi:

$$\boldsymbol{(s_A + s_B + s_C)^2 = 2({s_A}^2 + {s_B}^2 + {s_C}^2) + 4s_As_Bs_C} \tag{21a}$$

Dobljena stežajna formula je po obliki podobna kostežajnemu izreku (20a), (20b) in (20c). Seveda jo lahko uporabimo tudi v obliki, ki smo jo imeli v izpeljavi:

$$\boldsymbol{(s_A + s_B - s_C)^2 = 4s_As_B(1 - s_C)} \tag{21b}$$

in analogno še za druga dva stežaja. Prednost formule (21a) je v njeni simetričnosti.



Slika 18: *Uporaba stežajne formule*

Stežajno formulo lahko uporabimo tudi v drugih situacijah, ne le v trikotniku. Stežaji morajo ustrezati trem kotom, ki sestavljajo iztegnjeni kot. Primer je prikazan na sliki 18. Na levi strani so prikazane tri sekajoče se premice, ki določajo tri različno velike kote. Trikotnik na desni strani iste slike ima notranje kote enake tistim, ki jih oblikujejo premice, saj so vse tri premice le vzporedno premaknjene.

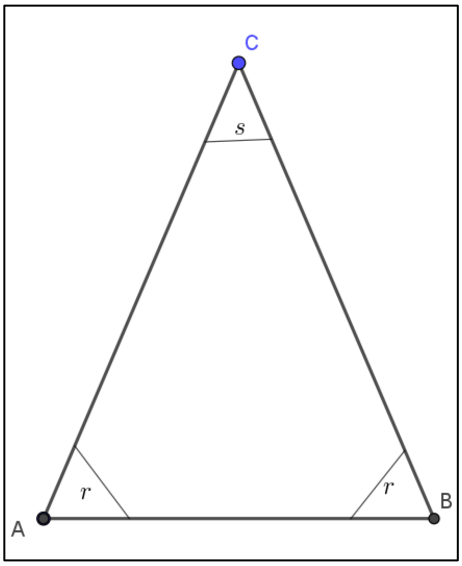
Kot primer uporabe izračunajmo stežaja ob osnovnici enakokrakega trikotnika, če je dan (neničelni) stežaj kota ob vrhu enakokrakega trikotnika (glej Sliko 19). Stežaj ob vrhu C označimo z s, stežaja ob osnovnici pa z r. Vstavimo v stežajno formulo $(\boldsymbol{s_A} + \boldsymbol{s_B} - \boldsymbol{s_C})^2 = \mathbf{4}\boldsymbol{s_A}\boldsymbol{s_B}(\mathbf{1} - \boldsymbol{s_C})$ in dobimo:

$$(2r - s)^2 = 4r^2(1 - s)$$

$$4r^2 - 4r + s = 0 \tag{22a}$$

$$r = \frac{1 \mp \sqrt{1 - s}}{2} \tag{22b}$$

Poglejmo še konkretnejše: Naj bo stežaj ob vrhu enakokrakega trikotnika enak $s = \frac{3}{4}$. (Vemo, da to v običajni trigonometriji ustreza kotu 60^0 ali 120^0. Pri $s = \frac{3}{4}$ dobimo dve rešitvi za stežaja ob osnovnici in sicer $r_1 = \frac{3}{4}$ (to je enakostranični trikotnik) in $r_2 = \frac{1}{4}$. V običajni trigonometriji ustreza ta stežaj kotu 30^0, kot ob vrhu pa je enak 120^0.

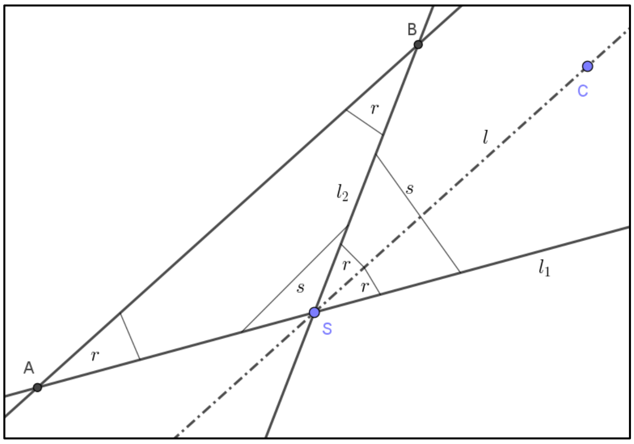


Slika 19: *Stežaji v enakokrakem trikotniku*

Podoben primer imamo tudi, ko želimo poiskati stežaj polovice kota. Situacija je prikazana na Sliki 20. Dani sta nevzporedni premici l_1 in l_2, ki se sekata v točki S. Premica l je simetrala ostrega kota, ki ga določata premici l_1 in l_2. Stežaj ostrega kota med l_1 in l_2 naj bo s, z r pa označimo stežaja med simetralo l in premicama l_1 in l_2.

Če sta dana stežaja r ob osnovnici enakokrakega trikotnika, potem je kot ob vrhu enak (po enakosti (22a)):

$$s = 4r - 4r^2 = 4r(1 - r)$$



Slika 20: *Simetrala kota in stežaji*

Na premici l_1 izberemo točko A in skoznjo narišemo vzporednico k premici l. Trikotnik $\overline{ASB}$ je enakokrak s stežaji r, r in s. Zvezo med njimi opisuje formula (22a), ki smo jo dobili v primeru enakokrakega trikotnika. Tako je stežaj polovice kota enak

$$r = \frac{1 \mp \sqrt{1-s}}{2}$$

kjer je s stežaj danega kota. Dve rešitvi smo dobili, ker je kot med premicama lahko tudi topi kot.

Če sta dana stežaja r ob osnovnici enakokrakega trikotnika, potem je kot ob vrhu enak (po enakosti (22a)):

$$s = 4r - 4r^2 = 4r(1-r)$$

2.6. Ploščina trikotnika

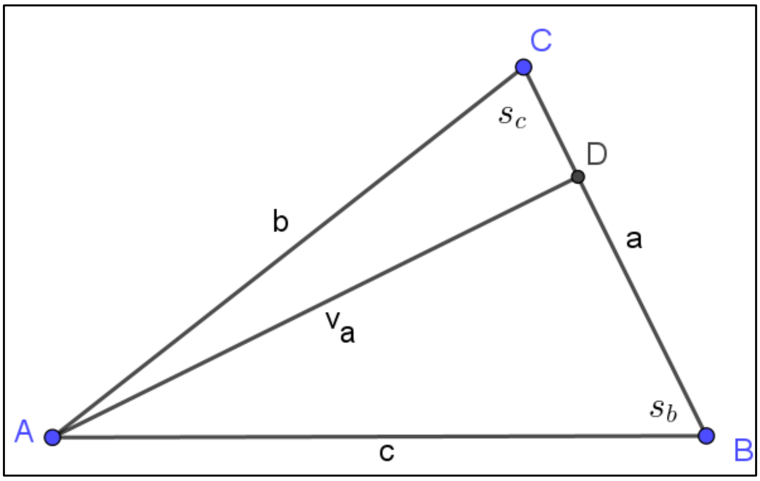
2.6.1. Ploščina trikotnika v običajni trigonometriji

Iz formule $S = \frac{c \cdot v_c}{2}$ sledi formula $S^2 = \frac{Q_c \cdot Q_{v_c}}{4}$ in analogno za ostale kvadratnice stranic in višin,

iz formule $S = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$ pa dobimo formulo $S^2 = \frac{Q_b \cdot Q_c \cdot s_A}{4}$ in analogno za ostale kvadratnice in stežaje.

Izpeljimo še formulo, ki je enakovredna Heronovi formuli. Heronova formula opisuje ploščino trikotnika, kjer so podane vse tri dolžine stranic, v primeru racionalne trigonometrije pa bomo izpeljali formulo, ki vsebuje samo vse tri kvadratnice.

2.6.2. Heronova formula



Slika 21: *K izpeljavi Heronove formule*

Dan je trikotnik $\overline{ABC}$. Naj bo v_a višina na stranico $a = \overline{BC}$ in točka D njeno nožišče. Trikotnika $\overline{ABD}$ in $\overline{CAD}$ sta pravokotna (glej Sliko 21). Stežajno razmerje s_A je enako

$s_C = \frac{Q_{v_a}}{Q_b}$. Od tod je $Q_{v_a} = s_C \cdot Q_b$. Ploščina trikotnika $\overline{ABC}$ je enaka $S^2 = \frac{Q_a \cdot Q_{v_a}}{4} = \frac{Q_a \cdot Q_b \cdot s_C}{4}$

Zapišimo kostežajni izrek za stežajno razmerje s_C v trikotniku $\overline{ABC}$:

$$(Q_a + Q_b - Q_c)^2 = 4Q_aQ_b(1 - s_C)$$

Preuredimo:

$$(Q_a + Q_b - Q_c)^2 = 4Q_aQ_b - 4Q_aQ_bs_C$$

$$4Q_aQ_bs_C = 4Q_aQ_b - (Q_a + Q_b - Q_c)^2$$

Ker je $Q_aQ_bs_C = 4S^2$, dobimo

$$\mathbf{16S^2 = 4Q_aQ_b - (Q_a + Q_b - Q_c)^2} \tag{23a}$$

kar je že formula, v kateri je ploščina izražena s kvadrati stranic.

Ker velja enakost (1), jo preoblikujemo v

$$\mathbf{16S^2 = (Q_a + Q_b + Q_c)^2 - 2({Q_a}^2 + {Q_b}^2 + {Q_c}^2)} \tag{23b}$$

Opomba: Avtor poimenuje formuli (23a) in (23b) po Arhimedu. (Wildberger, 2005, 59)

V racionalni trigonometriji uporabljamo formuli (23a) in (23b) enakovredno kot v klasični geometriji znano Heronovo formulo.

Izpeljava Heronove formule (23c) iz formule (22a):

Vemo, da je $Q_a = a^2, Q_b = b^2$ in $Q_c = c^2$. Vstavimo v $16S^2 = 4Q_aQ_b - (Q_a + Q_b - Q_c)^2$:

$$16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$16S^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$16S^2 = (2ab - (a^2 + b^2 - c^2))(2ab + (a^2 + b^2 - c^2))$$

$$16S^2 = (c^2 - a^2 - b^2 + 2ab)(2ab + a^2 + b^2 - c^2)$$

$$16S^2 = (c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))(a^2 + 2ab + b^2 - c^2)$$

$$16S^2 = (c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)$$

$$16S^2 = (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)$$

Označimo z $2s = a + b + c$ in uredimo:

$$16S^2 = (2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s)$$

$$S^2 = (s - a)(s - 2)(s - c)(s)$$

$$\boldsymbol{S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},} \text{ kjer je } \boldsymbol{s = \frac{a+b+c}{2}} \qquad (23c)$$

3. Primeri razreševanja trikotnika

V tem poglavju bomo pokazali, kako pri poljubnih treh podatkih o dolžinah stranic in kotih (razen seveda pri znanih vseh treh kotih ali vseh treh stežajih) razrešimo trikotnik. Posamezno nalogo bomo rešili na oba načina, z običajno trigonometrijo in s pristopom racionalne trigonometrije. V drugem primeru bom podatke podali v skladu s teorijo. Izbor primerov smo naredili glede na izreke o skladnosti trikotnikov.

3.1. Prvi primer trikotnika – znane vse tri stranice

V trikotniku poznamo dolžine vseh treh stranic: $a = 5\ cm, b = 6\ cm, c = 7cm$. Izračunajte notranje kote in ploščino trikotnika.

Rešitev z običajno trigonometrijo

Uporabimo kosinusni izrek in izračunamo velikost kota α:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \tfrac{5}{7};\quad \alpha \approx 44{,}41531^0$$

Nato uporabimo sinusni izrek: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{24}}{7}$$

$$\beta \approx 32{,}87835^0$$

Kot $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta \approx 102{,}70634^0$.

Ploščino izračunamo po Heronovi formuli:

$$s = \frac{a + b + c}{2} = 9\ cm$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}\ cm^2$$

Pristop racionalne trigonometrije

V trikotniku poznamo velikosti vseh treh kvadratnic: $Q_a = 25\ cm^2, Q_b = 36\ cm^2, Q_c = 49\ cm^2$. Izračunajte vse tri stežaje in ploščino trikotnika.

Uporabimo kostežajni izrek $(Q_b + Q_c - Q_a)^2 = 4Q_bQ_cc_A$

$$c_A = \frac{(Q_b + Q_c - Q_a)^2}{4Q_bQ_c}$$

$$c_A = \frac{(36 + 49 - 25)^2}{4 \cdot 36 \cdot 49}$$

$$c_A = \frac{25}{49}$$

Iz zveze $s_A + c_A = 1$ dobimo $s_A = \frac{24}{49}$, kar je enako $(\sin\alpha)^2$.

Nato izrazimo s_B iz stežajnega izreka $\frac{s_A}{Q_a} = \frac{s_B}{Q_b} = \frac{s_C}{Q_c}$.

$$s_B = \frac{Q_b \cdot s_A}{Q_a} \qquad s_C = \frac{Q_c \cdot s_A}{Q_a}$$

$$s_B = \frac{36 \cdot \frac{24}{49}}{25} = \frac{864}{1225} \qquad s_C = \frac{49 \cdot \frac{24}{49}}{25} = \frac{24}{25}$$

Za ploščino uporabimo formulo (22b) $16S^2 = (Q_a + Q_b + Q_c)^2 - 2({Q_a}^2 + {Q_b}^2 + {Q_c}^2)$.

$$16S^2 = (25 + 36 + 49)^2 - 2(25^2 + 36^2 + 49^2)$$

$$16S^2 = 3456$$

$$S^2 = 216$$

$$S = \sqrt{36 \cdot 6}\ cm^2 = 6\sqrt{6}\ cm^2$$

Komentar:

Stežaj $s_A = \frac{24}{49}$ se ujema z rezultatom iz običajne trigonometrije, saj je enak $(\sin\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{24}}{7}\right)$.

Z običajno trigonometrijo smo dobili $\sin\beta = \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{24}}{7}$, kar se ujema z $s_B = \frac{864}{1225}$.

Izračunajmo še $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{5}$. Od tu sledi $(\sin\gamma)^2 = \frac{24}{25} = s_C$.

Ploščini se seveda ujemata.

3.2. Drugi primer trikotnika – stranica in vmesni kot

V trikotniku sta dani dolžini stranic $a = 7\,cm$, $c = 8\,cm$, kot $\beta = 60^0$. Izračunajte dolžino stranice b in druga dva kota ter ploščino trikotnika.

Običajna trigonometija:

Uporabimo kosinusni izrek $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$$b^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 60^0 = 57$$

$$b = \sqrt{57}\,cm$$

Iz sinusnega izreka $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ izračunamo ostala dva kota:

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b} = \frac{7}{\sqrt{57}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b} = \frac{8}{\sqrt{57}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{57}}$$

Ploščina: $S = \frac{ac \cdot \sin\beta}{2} = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$

Pristop racionalne trigonometrije

V ostrokotnem trikotniku sta dani kvadratnici $Q_a = 49\,cm^2$, $Q_c = 64\,cm^2$ stežaj pri oglišču B: $s_B(o) = s_B = \frac{3}{4}$. Izračunajte kvadratnico stranice b in druga dva stežaja ter ploščino trikotnika.

Uporabimo kostežajni izrek $(Q_a + Q_c - Q_b)^2 = 4Q_aQ_c(1 - s_B)$

$$(49 + 64 - Q_b)^2 = 4 \cdot 49 \cdot 64 \cdot (1 - \frac{3}{4})$$

$$(113 - Q_b)^2 = 49 \cdot 64$$

Prvič: $113 - Q_b = 56$

$$Q_b = 57$$

Drugič: $113 - Q_b = 56$

$$Q_b = 169$$

Preverimo, ali je trikotnik ostrokoten, se pravi, ali velja

$$Q_1 + Q_2 \geq Q_3 \qquad Q_2 + Q_3 \geq Q_1 \qquad Q_3 + Q_1 \geq Q_2.$$

Ker je $Q_a + Q_c = 113 < 169 = Q_b$, te rešitve ne upoštevamo, saj trikotnik ni ostrokoten.

Druga dva stežaja izračunamo iz stežajnega izreka $\frac{s_A}{Q_a} = \frac{s_B}{Q_b} = \frac{s_C}{Q_c}$.

$$s_A = \frac{Q_a \cdot s_B}{Q_b} = \frac{49}{57} \cdot \frac{3}{4} = \frac{147}{228}$$

$$s_C = \frac{Q_c \cdot s_B}{Q_b} = \frac{64}{57} \cdot \frac{3}{4} = \frac{48}{57}$$

Ploščina: $S^2 = \frac{Q_a Q_c s_B}{4} = \frac{49 \cdot 64}{4} \cdot \frac{3}{4} = 588$

$$S = \sqrt{588} = 14\sqrt{3}$$

Komentar:

Pri pristopu racionalne trigonometrije nastopa velikokrat kvadratna enačba. Največkrat ima dve različni realni rešitvi (večinoma gre za trikotnike, ki jih je mogoče konstruirati). Kot vemo, je stežaj mera za oba kota med premicama, tako topega kot ostrega. Preveriti je potrebno, ali obe dobljeni rešitvi ustrezata. Lahko pa tudi v besedilu naloge zapišemo, ali gre na primer za oster kot, kot smo naredili v tem primeru.

3.3. Tretji primer trikotnika – dve stranici in kot nasproti večji stranici

V trikotniku sta dani dolžini stranic $a = 7\ cm$, $c = 8\ cm$, kot $\gamma = 60^0$. Izračunajte dolžino stranice b in druga dva kota.

Običajna trigonometrija

Najprej uporabimo sinusni izrek: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c} = \frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{16}$ $\qquad \alpha \approx 49{,}26819^0$

$$\beta \approx 70{,}73181^0$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos\beta$$

$$b^2 \approx 76{,}04107$$

$$b \approx 8{,}72015\ cm$$

Pristop racionalne trigonometrije

V trikotniku sta dani kvadratnici stranic $Q_a = 49\ cm^2, Q_c = 64\ cm^2$ in stežaj $s_C(o) = s_C = \frac{3}{4}$. Izračunajte dolžino stranice b in druga dva stežaja.

Uporabimo stežajni izrek $\frac{s_A}{Q_a} = \frac{s_B}{Q_b} = \frac{s_C}{Q_c}$.

$$s_A = \frac{Q_a \cdot s_C}{Q_c} = \frac{49}{64} \cdot \frac{3}{4} = \frac{147}{256}$$

Stežaj s_B izračunamo iz stežajne formule: $\boldsymbol{(s_A + s_B + s_C)^2 = 2(s_A{}^2 + s_B{}^2 + s_C{}^2) + 4s_A s_B s_C}$

$$\left(\frac{147}{256} + s_B + \frac{3}{4}\right)^2 = 2\left(\left(\frac{147}{256}\right)^2 + s_B{}^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) + 4 \cdot \frac{147}{256} \cdot s_B \cdot \frac{3}{4}$$

Enačbo poenostavimo $65536\, s_B{}^2 - 60672 s_B + 2025 = 0$

Rešitvi sta dve: $s_B = \frac{237 \pm 21\sqrt{109}}{512}$

$$\frac{s_B}{Q_b} = \frac{s_C}{Q_c}$$

$$Q_b = \frac{Q_c \cdot s_B}{s_C} = \frac{64}{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{237 + 21\sqrt{109}}{512}\right) = \frac{79 + 7\sqrt{109}}{2} \approx 76{,}04107278$$

$$b \approx 8{,}72\ cm$$

Stežaji pa so: $s_A = \frac{147}{256}$, $s_B = \frac{237+21\sqrt{109}}{512}$ in $s_C = \frac{3}{4}$.

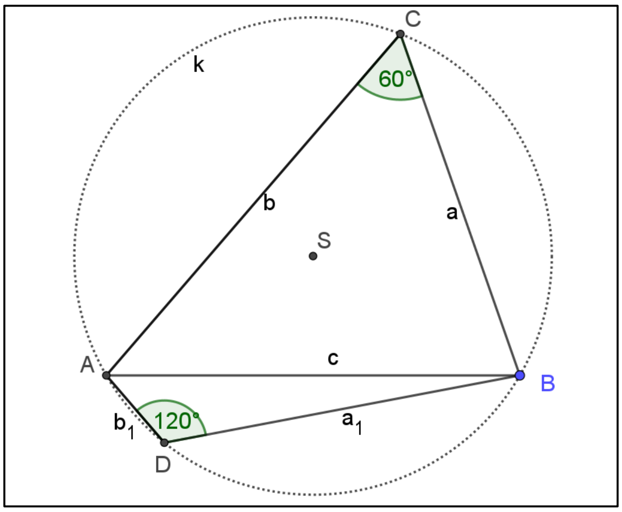
$$Q_b = \frac{Q_c \cdot s_B}{s_C} = \frac{64}{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{237 - 21\sqrt{109}}{512}\right) = \frac{79 - 7\sqrt{109}}{2} \approx 2{,}95893$$

$$b \approx 1{,}72\ cm$$

Stežaji pa so: $s_A = \frac{147}{256}$, $s_B = \frac{237-21\sqrt{109}}{512}$ in $s_C = \frac{3}{4}$.

Komentar:

Z običajno trigonometrijo smo dobili eno rešitev, z racionalno trigonometrijo pa dve. Preveriti moramo, katero izločimo. Gotovo »je rešitev racionalne trigonometrije« upoštevala oba stežaja pri oglišču C, se pravi, da je bil upoštevan tudi kot $\gamma = 120^0$. Narišimo sliko (glej Sliko 22).



Slika 22: *K tretjemu primeru trikotnika*

Jasno je, da drugo rešitev (to je trikotnik $\overline{ABD}$) izločimo, ker je trikotnik topokotni.

3.4. Četrti primer: stranica in priležna kota

V trikotniku je dana dolžina stranice $c = 8\,cm$ ter kota $\alpha = 60^0$ in $\beta = 75^0$. Izračunajte dolžini stranic a in b ter velikost tretjega kota.

Običajna trigonometrija:

$$\gamma = 45^0$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{8 \cdot \sin 60^0}{\sin 45^0} = \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{6}$$

$$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{8 \cdot \sin 75^0}{\sin 45^0} \approx 10{,}92820$$

Računalo da rezultat $b = 4\sqrt{3} + 4$

Pristop racionalne trigonometrije

V trikotniku je kvadratnica stranice c: $Q_c = 64\,cm^2$ ter stežaja $s_A = \frac{3}{4}$ in $s_B = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$. Izračunajte dolžini stranic a in b in stežaj s_C.

$$\text{Sl}(s_A + s_B + s_C)^2 = 2(s_A{}^2 + s_B{}^2 + s_C{}^2) + 4s_A s_B s_C$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}+2}{4} + s_C\right)^2 = 2\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)^2 + s_C{}^2\right) + 4\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)s_C$$

$$16s_C{}^2 + \left(4\sqrt{3} - 16\right)s_C - 2\sqrt{3} + 4 = 0$$

Rešitvi sta: $s_C = \frac{1}{2}$ in $s_C = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Prvi rešitvi $s_C = \frac{1}{2}$ ustreza kot 45^0.

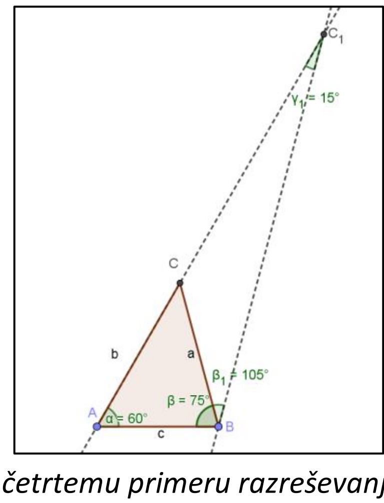
Iz stežajnega izreka dobimo $Q_a = \frac{s_A \cdot Q_c}{s_C} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 64}{\frac{1}{2}} = 96 \quad a = 4\sqrt{6}\,cm$

$Q_b = \frac{s_B \cdot Q_c}{s_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}+2}{4} \cdot 64}{\frac{1}{2}} = 64 + 32\sqrt{3} \qquad b = \left(4 + 4\sqrt{3}\right)\ cm$

Komentar:

Drugi rešitvi $s_C = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ pa ustreza kot 15^0. Kako to rešitev zavrnemo? Narišimo sliko (glej Sliko 23) in upoštevamo, ali dobimo trikotnik tudi z upoštevanjem, da je kot $\alpha = 60^0$ ali $\alpha = 120^0$ ter kot $\beta = 75^0$ ali $\beta = 105^0$. Kot $\alpha = 120^0$ ne ustreza. Edina druga možnost je tako trikotnik s koti

$\alpha = 60^0$, $\beta = 105^0$ in $\gamma = 15^0$, kar seveda ne ustreza podatkom iz naloge.



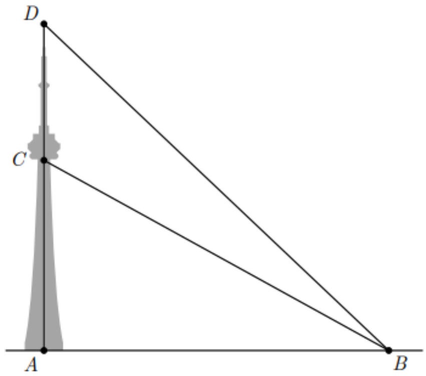
Slika 23: *K četrtemu primeru razreševanja trikotnika*

3.5. Razne naloge iz razreševanja trikotnikov

3.5.1. Prvi primer

Na Sliki 24 je naloga iz matematike s splošne mature junij 2023 (IP2, sklop B, naloga 6). Rešili smo jo z običajno trigonometrijo in s pristopom racionalne trigonometrije.

Slika prikazuje stolp *CN Tower* v Torontu.



Slika: Stolp CN Tower *v Torontu*

Vrhnji del stolpa meri $|CD| = 224{,}5$ m. Stolp opazujemo iz točke B, ki leži v ravnini nožišča stolpa tako, da je kot $\sphericalangle ABC = 29°$, kot $\sphericalangle ABD$ pa $43°$. Izračunajte višino stolpa. Rezultat zapišite na desetinko metra natančno.

Slika 24: *Primer naloge s splošne mature junij 2023*[3]

Rešitev z običajno trigonometrijo

Označimo: $|AC| = x, |AB| = y, |BC| = z$. Izračunamo, da merijo koti: $< CBD \ = \ 14^0$ in $< CDB \ = \ 47^0$, V trikotniku $\overline{BCD}$ uporabimo sinusni izrek:

$\frac{|CD|}{\sin 14^0} = \frac{z}{\sin 47^0}$. Od tu dobimo $z = 678{,}6855965\ m$

Nato v trikotniku ABC izračunamo dolžino x: $x = z \cdot \sin 29^0 \sim 329{,}0333\ m$. Višina stolpa je potem enaka $|AD| = 224{,}5 + x \sim 553{,}5\ m$.

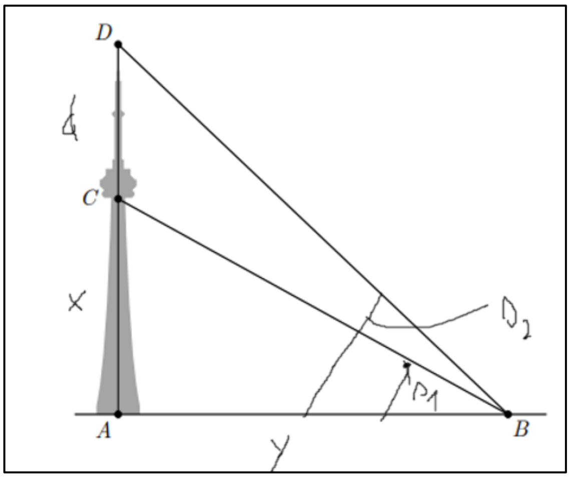
[3] Vir: file:///C:/Users/Uporabnik/Downloads/M231-401-1-2%20(2).pdf

Pristop racionalne trigonometrije

Naloga bi bila podana z dolžino (ali kvadratnico) in stežaji:

Vrhnji del stolpa meri $|CD| = 224{,}5\ m$. Stolp opazujemo iz točke B, ki leži v ravnini nožišča stolpa tako, da je stežaj $s_{ABC} = 0{,}2350403678$, stežaj pa $s_{ABD} = 0{,}4651217631$. Izračunajte višino stolpa. Rezultat zapišite na desetinko metra natančno.

Označimo skico (glej Sliko 25). V trikotnikih $\overline{ABC}$ in $\overline{ABD}$ bomo uporabili tanžaje, zato jih izračunajmo.



Slika 25: *Oznaka stežajev na skici*

$t_1 = \frac{s_1}{1-s_1} \sim 0.3072585$ $\qquad$ $t_2 = \frac{s_2}{1-s_2} \sim 0.8695844$

$t_1 = \frac{Q_x}{Q_y} = \frac{x^2}{y^2}$ $\qquad$ $t_2 = \frac{Q_{(x+d)}}{Q_y} = \frac{(x+d)^2}{y^2}$

Zadnji enačbi delimo in dobimo po ureditvi enačbo: $t_1 \cdot (x+d)^2 = t_2 \cdot x^2$. Ko vstavimo konstante, imamo kvadratno enačbo $0.3072585 \cdot (x + 224{,}5)^2 = 0.8695844 \cdot x^2$ z rešitvama

$x_1 \sim 329{,}037$ in $x_2 \sim -83{,}697$

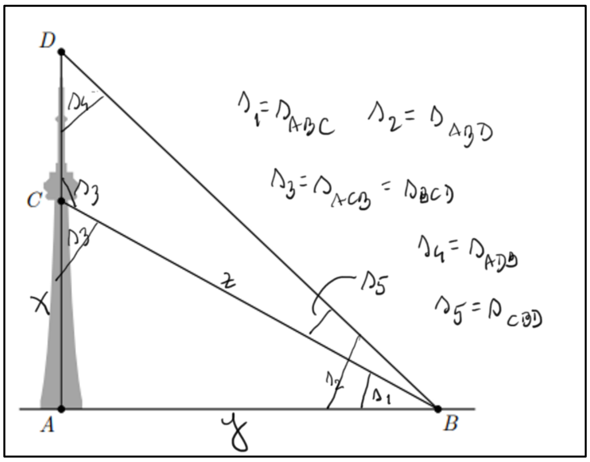
Druga rešitev ne ustreza, prva pa da rezultat za višino stolpa $v = x + d = 553{,}5\ m$.

Komentar:

Način, ki smo ga ubrali pri racionalni trigonometriji, bi seveda lahko uporabili tudi pri običajni trigonometriji s tangensi. Postopek je še bolj enostaven, saj dobimo linearno enačbo za neznanko x.

Kaj pa obratno? Ali lahko s pristopom racionalne trigonometrije izračunamo dolžino $|BC| = z$? Z običajno trigonometrijo smo preprosto izračunali velikost kota CBD, z racionalno trigonometrijo pa ne gre tako enostavno, saj stežajev ne moremo kar seštevati ali odštevati. Izračunajmo vse stežaje, ki so označeni na sliki 26: $s_{ABC} = s_1 \sim 0{,}2350403678$, stežaj pa $s_{ABD} = s_2 = 0{,}4651217631$. Potem sta $s_3 = 1 - s_1 \sim 0{,}7649596322$ in $s_4 = 1 - s_2 \sim 0{,}5348782368$. V trikotniku BCD imamo znana dva stežaja, tretjega dobimo iz stežajne formule:

$$(s_3 + s_4 + s_5)^2 = 2({s_3}^2 + {s_4}^2 + {s_5}^2) + 4s_3s_4s_5$$



Slika 26: *K drugi rešitvi s stežaji*

V formulo vstavimo stežaja $s_3 \sim 0{,}7649596322$ in $s_4 \sim 0{,}5348782368$ in dobimo $s_5 \sim 0{,}05852620365$. (Tu dobimo še eno rešitev 0,9045084971, ki pa ustreza drugemu trikotniku z enakimi stežaji, ki pa ne ustreza situaciji v nalogi. Ta trikotnik bi imel kote 61^0, $47\ ^0$in 72^0. Stežaj pri kotu 72^0 je enak 0,904508497.).

Sedaj lahko uporabimo stežajni izrek v trikotniku $\overline{BCD}$:

$$\frac{Q_z}{s_4} = \frac{Q_{CD}}{s_5}$$

$$\frac{Q_z}{0{,}5348782368} = \frac{224{,}5^2}{0{,}05852620365}$$

Od tod dobimo $Q_z \sim 4{,}606141381 \cdot 10^5$ ter $z \sim 678{,}6855959\ m$.

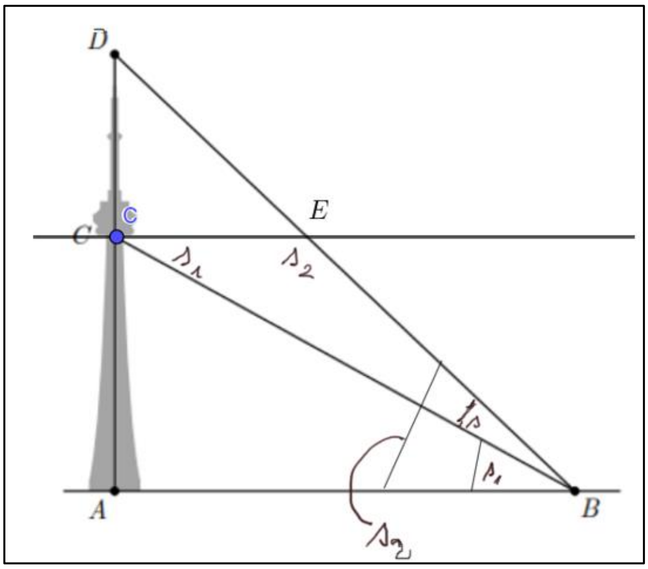
Uporabimo še stežajno razmerje v pravokotnem trikotniku $\overline{ABC}$:

$$s_1 = \frac{Q_x}{Q_z}$$

$$\frac{x^2}{Q_z} = 0{,}2350403678 \text{ ter } x \sim 329{,}0333059\ m$$

Stolp je visok 553,5 m.

Poiščimo stežaj $s_{CBD} = s_5 = s$ še na drug način. Na Sliki 27 smo naredili vzporednico skozi točko C k stranici $\overline{AB}$. V trikotniku $\overline{CBD}$ sta potem znana stežaja v ogliščih C in D in lahko neznani stežaj pri oglišču B (to je stežaj s) izračunamo po stežajni formuli:



Slika 27: *K tretji rešitvi s stežaji*

$$(s_1 + s_2 + s)^2 = 2({s_1}^2 + {s_2}^2 + s^2) + 4s_1 s_2 s$$

$$(0{,}2350403678 + 0{,}4651217631 + s)^2 = 2(0{,}2350403678^2 + 0{,}4651217631^2 + s^2) + 4 \cdot 0{,}2350403678 \cdot 0{,}4651217631 \cdot s$$

Enačbo rešimo s programom WolframAlfa in dobimo $s_1 \sim 0.0585262$ in $s_2 = 0.904508$. Nadaljnji postopek je enak postopku v prejšnjem primeru.

3.5.2. Drugi primer[4]

V trikotniku $\overline{ABC}$ je razmerje med stranicama a in b $a{:}\,b = 28{:}\,25$, stranica c meri 34 dm, kot $\gamma = 37^0$. Koliko merita stranici a in b.

Rešitev z običajno trigonometrijo

Iz $a{:}\,b = 28{:}\,25$ sledi $a = 28\,t$ in $b = 25\,t$. Vstavimo v kosinusni izrek za c in dobimo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$34^2 = (28t)^2 + (25t)^2 - 2 \cdot 28t \cdot 25t \cdot \cos 37^0$$

Rešitvi sta dve: $t_1 = -1{,}993444140$ in $t_2 = 1{,}993444140$

Prva rešitev ne ustreza, druga pa nam da: $a \approx 55{,}8\,dm$ in $b \approx 49{,}8\,dm$

Pristop racionalne trigonometrije

V trikotniku $\overline{ABC}$ je razmerje med stranicama a in b $a{:}\,b = 28{:}\,25$, stranica c meri 34 dm, stežaj pri oglišču C pa je $s = s_C(o) = 0{,}362181322$. Koliko merita stranici a in b?

Iz $a{:}\,b = 28{:}\,25$ sledi $Q_a = (28\,t)^2$ in $Q_b = (25\,t)^2$

Uporabimo kostežejni izrek (29c) za stranico c:

$$(Q_a + Q_b - Q_c)^2 = 4Q_aQ_b(1 - s_C)$$

$$((28t)^2 + (25\,t)^2 - 34^2)^2 = 4 \cdot 28\,t \cdot 25t \cdot (1 - 0{,}362181322)$$

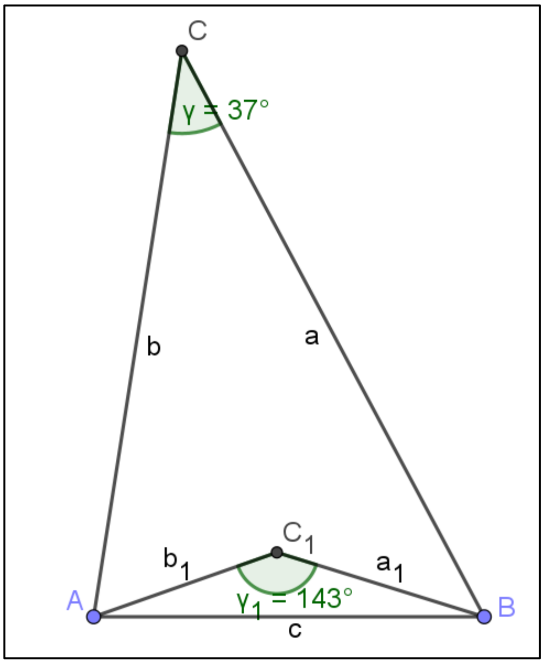
Enačba ima štiri rešitve in sicer dve negativni, ki seveda ne ustrezata in dve pozitivni.

Prva rešitev: $t_1 = 1{,}993444140$, ki nam da: $a \approx 55{,}8\,dm$ in $b \approx 49{,}8\,dm$.

Druga rešitev: $t_2 = 0{,}6763454722$, ki nam da: $a \approx 18{,}9\,dm$ in $b \approx 16{,}9\,dm$.

Druga rešitev je topokotni trikotnik $\overline{ABC_1}$ ki ima enak stežaj ob oglišču C_1 kot ostrokotni trikotnik $\overline{ABC}$ (glej Sliko 28). To smo utemeljili tudi tako, da smo v topokotnemu trikotniku $a_1 \approx 18{,}9\,dm$, $b_1 \approx 16{,}9\,dm$, $c = 34\,dm$ po kostežajnem izreku izračunali stežaj s_C in dobili $s_C = 0{,}362181321$.

[4] Naloga je bila v šolskem letu 1901/02 na maturi na Gimnaziji Kranj. Vir Letno poročilo Kranjske gimnazije iz šolskega leta 1901/02. Ohranjeno na Gimnaziji Kranj. Naloga je zahtevala še izračun ploščine danega trikotnika.



Slika 28: *K drugemu splošnemu primeru*

4. Zaključek

V nalogi smo opisali koncept razreševana trikotnikov brez uporabe običajnih kotnih funkcij. Povzeli smo koncept, ki ga je razvil profesor Wildberger v svojem delu *Divine proportions: rational trigonometry to universal geometry* (2005). Avtor imenuje ta koncept *pristop racionalne trigonometrije*. Ker je večkrat potrebno reševanje kvadratne enačbe, ki ima lahko tudi iracionalne rešitve, bi bilo verjetno boljše imenovati *pristop brez uporabe običajnih kotnih funkcij*, kot smo tudi sami naslovili nalogo.

Koncept *racionalne trigonometrije* je zelo zanimiv. Razumeli smo, da so ta koncept razvijali že Stari Grki. Avtor trdi, da so grški matematiki večinoma uporabljali kvadrate dolžin stranic namesto stranic. Tega nismo preverili.

Razrešili smo tipične primere trikotnikov, ki smo jih definirali na osnovi pogojev, ki so zajeti v izrekih o skladnosti trikotnikov. Te trikotnike smo razrešili s trigonometrijo z uporabo kotnih funkcij in s pristopom racionalne trigonometrije. Osnovna ugotovitev je, da se da vse tipične primere razrešiti brez kotnih funkcij.

Primerjavo med obema konceptoma smo naredili s primeri razreševanja trikotnikov. Naše ugotovitve podajamo na osnovi narejenih primerov. Dejstvo je, da je v konceptu s kotnimi funkcijami ena povezava že vnaprej izračunana s tabelami kotnih funkcij, ki so dostopne v knjižicah ali preko elektronskih računal. V konceptu racionalne trigonometrije sloni vse na reševanju enačb, večinoma na reševanju kvadratne enačbe. Pri kvadratni enačbi (ko je problem rešljiv) nastopita dve rešitvi in je potem potrebno vedno preverjati, ali sta obe ustrezni ali je potrebno kakšno rešitev zavrniti. Do tega problema pride tudi v običajni trigonometriji, a imamo že izkušnje, kako to preverjati. Do več rešitev prihaja predvsem zato, ker je stežaj mera kota, ki je enaka za oba različna kota, ki ju določata dve sekajoči se premici. Pri običajni trigonometriji je lepo urejeno merjenje ostrih in topih kotov, pri racionalni trigonometriji imata enak stežaj kot in njegov sokot (kot in suplementarni kot). Računanje s koti je v običajni trigonometriji zelo enostavno, povezava med stežaji na primer v trikotniku je bolj zahtevna. Ko pridobimo nekaj izkušenj s preverjanjem rešitev in ko si pomagamo s programi za reševanje enačb, je pristop racionalne trigonometrije ne le zanimiv, ampak tudi uporaben in ustvarjalen.

5. Viri in literatura

Wildberger N J (2005). *Divine proportions: rational trigonometry to universal geometry.* Sydney: Wild Egg Pty Ltd.

Wildberger N J (2007). A Rational Approach to Trigonometry. Spletni vir:

RationalTrig.pdf Pridobljeno 12. 9. 2023

6. Priloge

6.1. Tabela kotov

Stopinje	Radiani	Stežaji
0	0	0
1	0,01745	0,00030
2	0,03491	0,00122
3	0,05236	0,00274
4	0,06981	0,00487
5	0,08727	0,00760
6	0,10472	0,01093
7	0,12217	0,01485
8	0,13963	0,01937
9	0,15708	0,02447
10	0,17453	0,03015
11	0,19199	0,03641
12	0,20944	0,04323
13	0,22689	0,05060
14	0,24435	0,05853
15	0,26178	0,06699
16	0,27925	0,07598
17	0,29671	0,08548
18	0,31416	0,09549
19	0,33161	0,10599
20	0,34907	0,11698
21	0,36652	0,12843
22	0,38397	0,14033
23	0,40143	0,15267
24	0,41888	0,16543
25	0,43633	0,17861
26	0,45379	0,19217
27	0,47124	0,20611
28	0,48869	0,22040
29	0,50615	0,23504
30	0,52356	0,25000
31	0,54105	0,26526
32	0,55851	0,28081
33	0,57596	0,29663
34	0,59341	0,31270
35	0,61087	0,32899
36	0,62832	0,34549
37	0,64577	0,36218
38	0,66323	0,37904

39	**0,68068**	**0,39604**
40	**0,69813**	**0,41318**
41	**0,71559**	**0,43041**
42	**0,73304**	**0,44774**
43	**0,75049**	**0,46512**
44	**0,76795**	**0,48255**
45	**0,78540**	**0,50000**
46	**0,80285**	**0,51745**
47	**0,82031**	**0,53488**
48	**0,83776**	**0,55226**
49	**0,85521**	**0,56959**
50	**0,87267**	**0,58682**
51	**0,89012**	**0,60396**
52	**0,90757**	**0,62096**
53	**0,92503**	**0,63782**
54	**0,94248**	**0,65451**
55	**0,95993**	**0,67101**
56	**0,97738**	**0,68730**
57	**0,99484**	**0,70337**
58	**1,01229**	**0,71919**
59	**1,02974**	**0,73474**
60	**1,04712**	**0,75000**
61	**1,06465**	**0,76496**
62	**1,08210**	**0,77960**
63	**1,09956**	**0,79389**
64	**1,11701**	**0,80783**
65	**1,13446**	**0,82139**
66	**1,15192**	**0,83457**
67	**1,16937**	**0,84733**
68	**1,18682**	**0,85967**
69	**1,20428**	**0,87157**
70	**1,22173**	**0,88302**
71	**1,23918**	**0,89401**
72	**1,25664**	**0,90451**
73	**1,27409**	**0,91452**
74	**1,29154**	**0,92402**
75	**1,30810**	**0,93301**
76	**1,32645**	**0,94147**
77	**1,34390**	**0,94940**
78	**1,36136**	**0,95677**
79	**1,37881**	**0,96359**
80	**1,39626**	**0,96985**
81	**1,41372**	**0,97553**
82	**1,43117**	**0,98063**
83	**1,44862**	**0,98515**
84	**1,45508**	**0,98907**

85	**1,48353**	**0,99240**
86	**1,50098**	**0,99513**
87	**1,51844**	**0,99726**
88	**1,53589**	**0,99878**
89	**1,55334**	**0,99970**
90	**1,60570**	**1,00000**