

Zveza za tehnično kulturo Slovenije

58. Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije

IGRANJE Z MOŽGANI

Raziskovalno področje psihologija ali pedagogika

Raziskovalna naloga

Avtorici: Šeila Pajić, Hana Štular

Mentorica: Polona Brečko

Šola: OŠ Tabor I Maribor

Maribor, april 2024

Zveza za tehnično kulturo Slovenije

58. Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije

IGRANJE Z MOŽGANI

Raziskovalno področje psihologija ali pedagogika

Raziskovalna naloga

Avtorici: Šeila Pajić, Hana Štular

Mentorica: Polona Brečko

Šola: OŠ Tabor I Maribor

Maribor, april 2024

KAZALO VSEBINE

POVZETEK	6
1 UVOD	7
2 MOŽGANI IN SPOMIN	9
2.1 Delovanje možganov.....	9
2.2 Tehnike pomnjenja.....	9
2.3 Vpliv na spomin	10
2.4 Spomin.....	10
3 TRACHTENBERGOVA METODA	12
3.1 Jakow Trachtenberg.....	12
3.2 Trachtenbergova metoda	13
3.3 Postopek Trachtenbergove metode.....	13
3.4 Prednosti in slabosti Trachtenbergove metode	15
4 METODE ZA MNOŽENJE NARAVNIH ŠTEVIL	16
4.1 Metoda pisnega množenja	16
4.2 Mrežni algoritem	17
4.3 Linijska metoda	18
5 METODOLOGIJA DELA	19
5.1 Eksperiment.....	19
5.2 Raziskovalni vzorec	19
5.3 Pripomočki in postopek	20
6 REZULTATI	21
7 INTERPRETACIJA	27
8 DRUŽBENA ODGOVORNOST	29
9 ZAKLJUČEK	30
10 VIRI IN LITERATURA	31

KAZALO SLIK

Slika 1: Jakow Trachtenberg.....	12
Slika 2: Linijska metoda	18

KAZALO TABEL

Tabela 1: Raziskovalni vzorec.....	19
Tabela 2: Izračunana vrednost zmnožka $34 \cdot 11$ z metodo pisnega množenja	21
Tabela 3: Izračunana vrednost zmnožka $210 \cdot 14$ z metodo pisnega množenja	22
Tabela 4: Izračunana vrednost zmnožka $34 \cdot 11$ s Trachtenbergovo metodo	23
Tabela 5: Izračunana vrednost zmnožka $210 \cdot 14$ s Trachtenbergovo metodo	24
Tabela 6: Čas množenja (min) izbranih primerov glede na testiranca/učenca	25
Tabela 7: Povprečni čas (min) množenja glede na spol	26
Tabela 8: Povprečni čas (min) pravnega množenja po Trachtenbergovi metodi glede na spol	26

KAZALO GRAFOV

Graf 1: Izračunana vrednost zmnožka $34 \cdot 11$ z metodo pisnega množenja glede na spol	21
Graf 2: Izračunana vrednost zmnožka $210 \cdot 14$ z metodo pisnega množenja glede na spol	22
Graf 3: Izračunana vrednost zmnožka $34 \cdot 11$ s Trachtenbergovo metodo glede na spol	23
Graf 4: Izračunana vrednost zmnožka $210 \cdot 14$ s Trachtenbergovo metodo glede na spol	24

ZAHVALA

Raziskovalna naloga je za naju predstavljala novo doživetje.

Tako se želiva zahvaliti vsem, ki so sodelovali pri izvedbi raziskovalne naloge ter naju podpirali – najini mentorici, ki nama je ves čas stala ob strani in vsem sošolcem, ki so sodelovali pri izvedbi eksperimentalnega dela.

Hvala vam. Brez vas najina naloga ne bi mogla nastati.

POVZETEK

V raziskovalni nalogi bova predstavili metodo hitrega računanja, ki jo je iznašel Jakow Trachtenberg. Namen njegove metode je bil zaposlitev misli in uma med bivanjem v nacističnem koncentracijskem taborišču. Metoda temelji na sistemu izvajanja aritmetičnih operacij, predvsem množenja. Za uporabo je potrebno poznati določena pravila, ki pa se razlikujejo glede na množitelj. Kljub temu, da pri obravnavani metodi ne gre za ponavljajoč se vzorec, se jo je moč naučiti brez uporabe svinčnika in papirja. Zanimalo naju je, v kolikem času lahko vzorec učencev 9. razreda usvoji obravnavano metodo in jo uporablja pri množenju, kjer je množenec poljubno dvomestno ali tromestno naravno število, množitelj pa število med 10 in 19. S pomočjo teoretičnega znanja o urjenju možganov in metode študije primera na vzorcu devetošolcev želiva dokazati predpostavko, da imajo dekleta boljšo spominsko zmogljivost od fantov.

1 UVOD

Urjenje spomina je vsakodnevna stvar. Počnemo jo podzavestno. Včasih pa tudi načrtno, na primer ko se učimo. Učimo se lahko na več načinov. Eden izmed načinov učenja množenja naravnih števil pri matematiki je Trachtenbergova metoda.

Teoretični del naloge se osredotoča na delovanje možganov in na vpliv le-teh na spomin, na obravnavano metodo ter na druge že poznane metode množenja, kot so pisno množenje, mrežni algoritem in linijska metoda množenja. Navedene metode sva predstavili na naključno izbranem primeru zmnožka $210 \cdot 14$. Cilj je bil ugotoviti in dokazati, da je uporaba Trachtenbergove metode najhitrejša in najbolj spretna pot, ki se je zlahka priučimo in nas vodi do pravilnega rezultata.

V empiričnem delu je predstavljeno eksperimentalno delo, ki zavzema vzorec učencev devetega razreda. Zanimalo naju je, kako in v kakšnem časovnem obdobju urjenje določene tehnike množenja naravnih števil vpliva na hitrejše računanje in pravilen rezultat pri tem. Sprva sva na vzorcu devetošolcev preverili znanje pisnega množenja. Nato sva jih naučili uporabo Trachtenbergove metode ter jih ponovno preverili pri množenju z uporabo metode. Vsakemu posamezniku sva merili čas. Želeli sva dokazati ali ovreči hipotezo, da je uporaba Trachtenbergove metode najhitrejši način množenja naravnih števil.

1.1 Raziskovalno vprašanje

Odločili sva se raziskati, koliko časa je potrebno, da se mladoletnik priuči metode množenja naravnih števil, ki jo kasneje tudi pridoma pravilno uporablja v vsakdanjem življenju in pri pouku matematike.

Zadali sva si naslednje cilje:

- preučiti že obstoječo literaturo, ki se nanaša na obravnavano tematiko;
- preveriti znanje poštevance svojih sošolcev, kjer sva se sprva osredotočili na že znano metodo pisnega množenja dvomestnih in tromestnih naravnih števil;
- raziskati, v kolikšnem času se lahko sošolci priučijo obravnavane metode spretnega množenja in jo uspešno uporabljajo, pri čemer imajo različne matematične sposobnosti;
- ovreči ali potrditi zastavljene hipoteze.

1.2 Hipoteze

Glede na preučeno literaturo in vire sva si pred pričetkom empiričnega raziskovanja zastavili naslednje hipoteze:

H1: Deklice so pri pisnem množenju dvomestnega naravnega števila z dvomestnim naravnim številom uspešnejše od dečkov.

H2: Deklice so pri pisnem množenju tromestnega naravnega števila z dvomestnim naravnim številom uspešnejše od dečkov.

H3: Deklice z uporabo Trachtenbergove metode uspešneje množijo dvomestno naravno število z dvomestnim naravnim številom.

H4: Deklice z uporabo Trachtenbergove metode uspešneje množijo tromestno naravno število z dvomestnim naravnim številom.

H5: Z znanjem Trachtenbergove metode učenci v krajšem času izračunajo vrednost zmnožka, kot bi to napravili z uporabo pisnega množenja.

2 MOŽGANI IN SPOMIN

2.1 Delovanje možganov

Možgani so zelo zanimiva stvar. Z njimi lahko počnemo marsikaj. Nadzorujejo naše življenje, kot da bi bili naš vodnik. Poleg tega imajo veliko različnih nalog. Od tega, da nadzorujejo naše telo, morajo tudi misliti in nam pošiljati signale, kaj narediti ali kaj reči. Veliko ljudi svojih možganov ne zna uporabljati ali jih pa samo nočejo uporabljati. Obstajajo pa ljudje, ki se zavedajo sposobnosti in zmožnosti možganov in to seveda tudi izkoristijo. (Maslanka idr., 2011).

Eno izmed možnih področij uporabe možganov je matematika. S tem ciljamo na metodo, ki jo je iznašel Jakow Trachtenberg, da bi zaposlil svoje misli med bivanjem v nacističnem koncentracijskem taborišču. Ta metoda se imenuje po avtorju, torej Trachtenbergova metoda.

Možgane sestavlja na milijarde živčnih celic, ki so zadolžene za različna opravila. Nekatere celice sodelujejo pri mišljenju, učenju in pomnjenju, spet druge pri orientaciji in čutnih zaznavah. Delujejo kot miniaturne tovarne: sprejemajo pošiljke, ustvarjajo energijo, sestavljajo opremo in odvažajo odvečne snovi. Procesirajo in skladiščijo informacije ter komunicirajo z drugimi celicami. Vse to pa zahteva popolno koordinacijo ter ogromne količine energije in kisika. Senčna režnja sta zadolžena, da skrbita za spomin in sporazumevanje, kar je pomembno tudi za obvladovanje govora in razumevanja jezika. (Maslanka, idr., 2011).

2.2 Tehnike pomnjenja

»Prvi korak pri izboljšanju spomina je zaupanje v njegove neomejene zmožnosti. Ko boste začeli uporabljati preproste spominske tehnike, boste odkrili, da se vaša sposobnost pomnjenja dejstev, dogodkov, krajev in ljudi postopno izostruje in vaši možgani dejansko rastejo. Po desetih letih treninga spomina sem sposoben neverjetnih mentalnih spretnosti, vključno s tem, da si zapomnim zaporedje 54 setov premešanih kart,« pravi osemkratni svetovni prvak v spominu, Dominic O'Brien. (Nanut Planinšek in Škorjanc Braico, 2013)

Obstajajo številne tehnike za boljše pomnjenje, t. i. mnemotehnike, ki nam pomagajo, da si posamezne informacije bolje in lažje zapomnimo. Temeljijo na naravnih sposobnostih človeka,

da si zapomni informacije, če jih pretvori v slike, zgodbe, rime ... Uporabljali so jih že veliki govorniki antike, ki so bili brez branja predhodno pripravljenega govora sposobni ure dolgo govoriti. (Nanut Planinšek in Škorjanc Braico, 2013)

Ljudje se po navadi delimo na tiste, ki si z lahkoto zapomnijo obraze, in druge, ki si lažje zapomnijo imena. Spet drugi nimajo problemov pri pomnjenju števil in datumov, težko si pa zapomnijo imena ljudi. (Nanut Planinšek in Škorjanc Braico, 2013)

2.3 Vpliv na spomin

Med 20. in 30. letom začnemo postopoma izgubljati živčne celice, naše telo pa začne proizvajati manj kemičnih snovi, ki jih možgani potrebujejo za svoje delovanje. Starejši kot smo, bolj te spremembe vplivajo na naše možgane. Proces staranja lahko vpliva na to, kako možgani shranjujejo podatke in kako jih prikličejo iz spomina. Propadanje in razkroj živčnih celic privede do izgube spomina, sprememb v osebnosti in težav pri opravljanju vsakdanjih opravil. (Nanut Planinšek in Škorjanc Braico, 2013)

2.4 Spomin

Ljudje se lahko naučimo izjemno veliko stvari, npr. voziti avto, plesati, delati z računalnikom, matematične zakone, tuje jezike. Seznam vseh teh stvari bi lahko pisali v neskončnost. Učenje pa bi bilo brez pomena, če si naučenega ne bi mogli zapomniti. Spomin nam poleg tega pomaga upravljati s časom, primerjati preteklost s prihodnostjo, predvidevati in načrtovati. Spomin je zapleten sistem, ki temelji na številnih možganskih procesih. Je sposobnost shranjevanja in ohranjanja informacije ter jih obnoviti, ko jih potrebujemo. Upravičeno lahko trdimo, da je ključni del našega življenja. Če bi ga izgubili, bi se morali vsako stvar učiti znova, od začetka. Da pa bo dolgo ostal učinkovit, moramo zanj skrbeti in ga varovati. (Mohorič, 2010)

Mohorič (2010) navaja, da kar si zapomnimo mi, je vedno različno od spomina drugih ljudi, tudi če smo isti dogodek doživeli skupaj. Za spomin je pomembna organizacija pomnjenja in pozabljanja, veliko pa pripomore možganska vadba, ustrezna prehrana in gibanje na svežem zraku.

Spominski sistem je osnova delovanja mnogih kognitivnih funkcij in je odvisen od delovanja drugih kognitivnih procesov. Z njihovo pomočjo pridobivamo informacije (čutenje), ki jih nato organiziramo in ohranjamo (zaznavanje, učenje, spomin), predelujemo in modeliramo (mišljenje), komuniciramo (govor) ali integriramo (zavest). Za spomin je odgovornih več možganskih področij, najbolj pomembna pa so tri: hipokampus (struktura globoko v možganih, ki procesira informacije), amigdala (področje v obliki mandlja, ki pomaga vtisniti spomine, povezane s čustvi) ter možganska skorja, ki v različnih predelih shranjuje večino dolgoročnega spomina. Proces hranjenja spomina je odvisen od tega, kakšna je nova informacija – ali gre za nekaj, kar smo slišali, kar smo videli, ali gre za reševanje nekega problema. (Mohorič, 2010)

Mohorič (2010) navaja, da je spomin lahko kratkoročen ali dolgoročen. V kratkoročnem spominu so shranjene informacije le nekaj sekund ali minut. To je na primer čas, ko pogledamo v telefonski imenik in odtipkamo številko, ki smo jo prebrali, in podobno. Pri dolgoročnem spominu poteka skladiščenje informacij širše. Vsebuje informacije, za katere se posameznik zavedno ali nezavedno trudi, da jih ohrani zaradi različnih razlogov: ker so zanj osebne pomena (datumi rojstnih dni), ker jih potrebuje (znanje, kako se kaj naredi), ali ker so močno čustveno obarvane (smrt pomembne osebe, rojstvo otroka, prvi šolski dan in podobno).

Dolgoročni spomin zato delimo glede na podatke v tri skupine:

- epizodični (spomin za pretekle dogodke, ki so se človeku zgodili),
- semantični (spomin za podatke, ki niso vezani na prostor in čas – sem sodi večina šolskega znanja),
- proceduralni (spomin za veščine, ki smo se jih naučili in so avtomatizirane – vožnja avtomobila, smučanje ...).

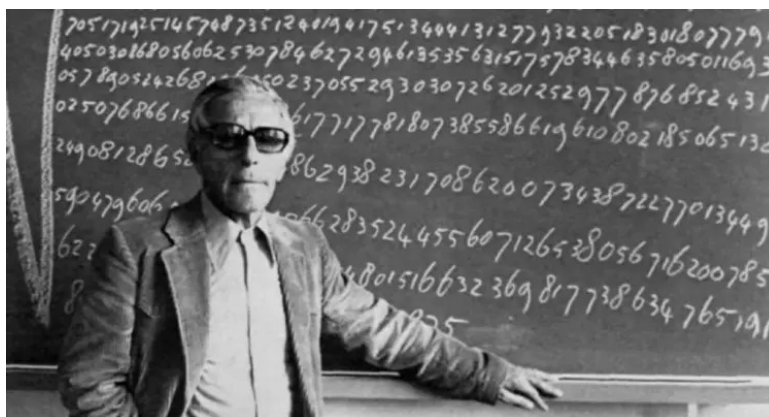
(Mohorič, 2010)

3 TRACHTENBERGOVA METODA

3.1 Jakow Trachtenberg

Jakow Trachtenberg (17. junij 1888–26. oktober 1951) je bil matematik, ki je razvil tehniko miselnega računanja, imenovano Trachtenbergov sistem.

Rodil se je v Odesi v Ruskem cesarstvu (danes Ukrajina). Z najvišjimi ocenami je diplomiral na Inštitutu za rudarsko inženirstvo v Sankt Peterburgu in pozneje delal kot inženir v tovarni orožja Obukhov. Še v svojih dvajsetih letih je postal glavni inženir, pod njegovim nadzorom pa je bilo 11.000 mož. Carska vlada ga je zadolžila za nadzor nad oblikovanjem dobro razvite mornarice. (Art of memory, b. l.)



Slika 1: Jakow Trachtenberg (Magnetic memory method, 2023)

J. Trachtenberg je bil predan pacifist. Ko je leta 1914 izbruhnila vojna, je pomagal organizirati društvo, znano kot Društvo dobrih samarijanov. Namen je bil usposobiti ruske študente za oskrbo ranjencev. Posebno priznanje mu je podelil tudi car Nikolaj II. Čeprav je imel vodilno vlogo v carski proizvodnji orožja, je bil proti vsakršnemu nasilju. (Magnetic memory method, 2023)

Po ruski revoluciji, leta 1917, je Trachtenberg pobegnil v Weimarsko republiko, kjer je postal kritičen do nacistične politike. Med drugo svetovno vojno je bil zaprt v nacističnem koncentracijskem taborišču. V zaporu je razvil svoj sistem mentalne aritmetike. Kasneje je pobegnil v Švico. Umrl je leta 1951. (Art of memory, b. l.)

3.2 Trachtenbergova metoda

Slovar Inštituta za slovenski jezik Frana Ramovša ZRC SAZU (2023) navaja metodo kot obliko načrtnega, preišljenega dejanja, ravnanja ali mišljenja za dosego kakega cilja.

Trachtenbergova metoda je sistem hitrega miselnega računanja. Sistem je sestavljen iz številnih računskih operacij, ki omogočajo zelo hitro izvajanje aritmetičnih izračunov.

Obravnavana metoda temelji na sistemu izvajanja aritmetičnih operacij, predvsem množenja. Za uporabo je potrebno poznati določena pravila, ki pa se razlikujejo glede na člena zmnožka, množenca in množitelja. Kljub temu, da pri obravnavani metodi ne gre za ponavljajoč se vzorec, se jo je moč naučiti brez uporabe svinčnika in papirja.

3.3 Postopek Trachtenbergove metode

V nadaljevanju je prikazan način uporabe oziroma algoritem obravnavane metode na naključnem primeru zmnožka.

Z uporabo Trachtenbergove metode želimo izračunati vrednost naslednjega zmnožka:

$$210 \cdot 14$$

1. Pred množencem zapišemo toliko ničel, kot ima množitelj števk.

$$00210 \cdot 14$$

2. Da lahko izvedemo prvi korak množenja, množencu pripišemo 'navidezno ničlo', oziroma si jo le predstavljamo.

$$00210_0 \cdot 14$$

3. Prvo števko množitelja množimo z 'navidezno ničlo', drugo števko množitelja množimo z zadnjo števko (na mestu enic) množenca. Vsoto dobljenih produktov seštejemo.

$$\begin{array}{r} 00210_0 \cdot 14 \\ \hline 0 \end{array} \quad 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

4. Prvo števko množitelja množimo s prvo števko množenca na mestu enic. Drugo števko množitelja množimo z drugo števko množenca na mestu desetih. Vsoto dobljenih produktov seštejemo.

$$\begin{array}{r}
 \text{00210}_0 \cdot 14 \\
 \hline
 40
 \end{array}
 \quad
 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$$

5. Prvo števko množitelja množimo z drugo števko množenca na mestu desetih, drugo števko množitelja pa množimo s tretjo števko množenca na mestu stotih. Vsoto dobljenih produktov seštejemo.

$$\begin{array}{r}
 \text{00210}_0 \cdot 14 \\
 \hline
 940
 \end{array}
 \quad
 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 9$$

6. Prvo števko množitelja množimo s tretjo števko množenca na mestu stotih, drugo števko množitelja pa množimo s prvo dodano ničlo. Vsoto dobljenih produktov seštejemo.

$$\begin{array}{r}
 \text{00210}_0 \cdot 14 \\
 \hline
 2940
 \end{array}
 \quad
 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

7. Prvo števko množitelja množimo s prvo dodano ničlo, drugo števko množitelja pa pomnožimo z drugo dodano števko. Vsoto dobljenih produktov seštejemo.

$$\begin{array}{r}
 \text{00210}_0 \cdot 14 \\
 \hline
 02940
 \end{array}
 \quad
 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

8. Vrednost produkta je **2940**.

3.4 Prednosti in slabosti Trachtenbergove metode

Glede na eksperimentalno delo, ki je predstavljeno v nadaljevanju raziskovalne naloge, sva povzeli prednosti in slabosti obravnavane metode.

Glavna prednost te metode je hitrost računanja. Trachtenbergova metoda omogoča hitrejše izvajanje osnovnih matematičnih operacij v primerjavi s tradicionalnimi metodami. Metoda temelji na enostavnih pravilih in vzorcih, kar olajša njeno učenje in zapomnitev. To je lahko koristno za tiste, ki imajo težave s tradicionalnimi načini učenja matematike. Ker omogoča hitro izvajanje osnovnih računskih operacij, je lahko uporabna v vsakdanjem življenju za hitrejše reševanje matematičnih problemov.

Slaba stran je, da ni splošnega pravila za množenje s katerim koli številom, ampak se pravilo razlikuje glede na množitelj. Da bi dosegli hitrost in spretnost v uporabi Trachtenbergove metode, je potrebna redna vadba. Nekateri posamezniki morda ne želijo ali ne morejo posvetiti dovolj časa učenju in vadbi te metode. V nekaterih izobraževalnih sistemih se Trachtenbergova metoda ne uporablja ali se jo celo odvrča v korist tradicionalnih metod. To lahko omeji njeno sprejetost in uporabo v določenih okoljih.

4 METODE ZA MNOŽENJE NARAVNIH ŠTEVIL

4.1 Metoda pisnega množenja

V nadaljevanju je opisana metoda pisnega množenja naravnih števil, ki se jih učenci slovenske osnovne šole učijo na osnovi učnega načrta.

Želimo izračunati vrednost zmnožka

$$210 \cdot 14$$

Algoritem pisnega množenja:

- pod zapisom zmnožka narišemo ravno vodoravno črto:

$$\underline{210 \cdot 14}$$

- pričnemo z najbolj levo števkno množitelja in množimo z najmanjšo desetiško enoto množenca (enico), nadaljujemo množenje z naslednjimi števki iz desne proti levi:



$$\underline{210 \cdot 14}$$

$$2100$$

- pripišemo 0, ker smo množili z 10,
- izberemo naslednjo desetiško enoto množitelja, ki jo množimo z najmanjšo desetiško enoto množenca:



$$\underline{210 \cdot 14}$$

$$2100$$

$$840$$

- seštejemo delna zmnožka in dobimo rezultat:

$$\begin{array}{r} \underline{210 \cdot 14} \\ + \quad 2100 \\ \quad 840 \\ \hline 2940 \end{array}$$

Pisno množenje ima svoje prednosti in slabosti. Prednost je v sami preglednosti reševanja, postopka in zapisa. Slabost je, kadar pri vmesnem množenju dobimo dvomestni zmnožek in je

potrebno zapisati le enico, desetico pa šteti naprej. Takrat pogosto pride do napake pri računanju, kajti učenci pogosto pozabijo »šteti naprej«.

4.2 Mrežni algoritem

Mrežni algoritem je bil sprva razvit v Indiji. V 14. stoletju ga je v Evropo prinesel Fibonacci. Postopek je podoben klasičnemu pisnemu množenju, vendar je razdeljen na manjše korake. Pri tej metodi je izredno pomembna doslednost pri risanju grafičnega prikaza, kot pri zapisu števil. Sam postopek temelji na množenju, preoblikovanju in seštevanju. (Javornik idr., 2019)

V nadaljevanju je predstavljen algoritem množenja na primeru že znanega zmnožka:

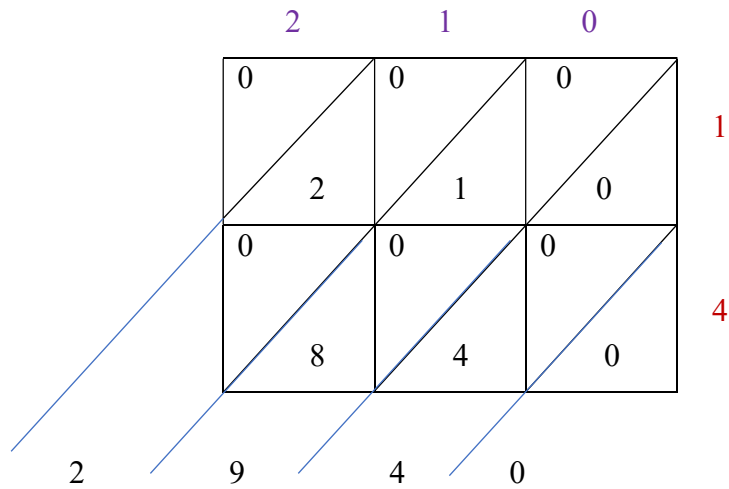
$$210 \cdot 14$$

1. Narišemo pravokotnik, ki ima toliko vrst in stolpcev, kot imata množenelec in množitelj mest.
2. Od spodnjega levega k zgornjemu desnemu robu narišemo diagonalno črto v vsak predalček.

	2	1	0	
0	0	0	0	1
2	1	0		
0	0	0	0	4
8	4	0		

3. Nad vsak stolpec napišemo številke množenca, kot si sledijo. Na desno stran pravokotnika k vsaki vrstici pripišemo številke množitelja, od zgoraj navzdol, kot si sledijo v številu.
4. Nato vse številke med seboj zmnožimo in jih zapišemo na točno določena mesta. V zgornji del kvadratika vnesemo desetico, v spodnjega pa enico množenja.
5. Ko vse številke zmnožimo, prečne črte podaljšamo med posameznimi desetiški enotami in seštejemo števila iz tabele, ki se nahajajo med posameznimi ločenimi črtami.

6. Seštevanje poteka od leve proti desni, pri čemer vrednost desetice prenašamo naprej.



7. Končni rezultat preberemo od leve proti desni: **dva tisoč devetsto štirideset.**

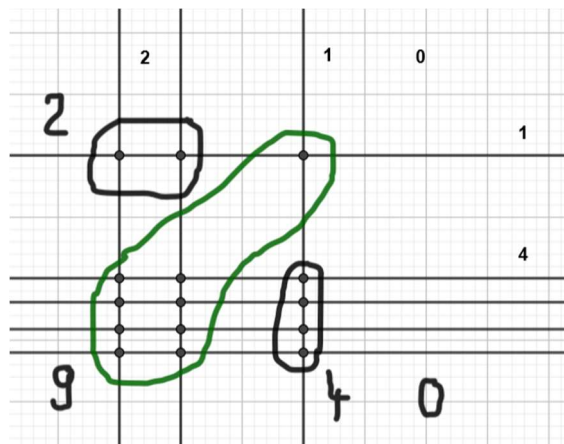
4.3 Linijska metoda

Gre za algoritem, kjer so črte narisane vodoravno in navpično: Ta vrsta algoritma je zelo pregledna in uporabna. (Javornik idr., 2019)

Postopek je opisan na znanem primeru:

$$210 \cdot 14$$

1. Navpično narišemo dve, eno in nič črt. Črte na levi predstavljata stotice, črta na sredini desetico in nevidna črta na desni enico množenca. Nato narišemo še štiri črte (desetico množitelja) in eno črto (enica množitelja) vodoravno.
2. Označimo presečišča narisanih črt ter jih po diagonali preštejemo.



Slika 2: Linijska metoda (lastni vir)

5 METODOLOGIJA DELA

V teoretičnem delu sva analizirali različne metode množenja naravnih števil. Za izhodiščni primer sva si izbrali naključni zmnožek $210 \cdot 14$. Za dosego zastavljenih ciljev in potrditev ali zavrnitev hipotez je sledil empirični del raziskave. Eksperiment, ki sva ga izvedli, je bil časovno kratek. Izvajali sva ga med učnimi urami sošolcev.

5.1 Eksperiment

Za raziskovanje predpostavljenih hipotez raziskave sva izvedli eksperiment. Vanj je bilo vključenih deset devetošolcev. Gre za majhen vzorec učencev, zato rezultati, ki sva jih dobili, niso reprezentativni za splošno populacijo devetošolcev naše šole.

Vsi sošolci, ki so sodelovali v najini raziskavi, so računali zmnožek števil 34 in 11. Sprva so morali dani primer pisno množiti, pri tem sva jim merili čas. Nato sva vsakemu posamezniku predstavili Trachtenbergovo metodo in mu nazorno prikazali primer zmnožka $25 \cdot 12$. Učenec je naprej sam poskusil ponoviti korake množenja in ko je bil pripravljen, je prejel nov primer zmnožka, ki ga je nato brez pisala in lista izračunal po obravnavani metodi. Tudi pri tem postopku sva merili čas.

5.2 Raziskovalni vzorec

Raziskovalni vzorec je zajemal deset devetošolcev, od tega pet deklet in pet dečkov. Učenci so bili glede na znanje matematike naključno izbrani. V vzorec so bili vključeni tudi učenci, ki jim matematika in znanje poštevanka pri rednem pouku povzroča precej težav.

Tabela 1: Raziskovalni vzorec

Razred	Spol	Frekvenca (f) glede na spol	f %
9.	ženske	5	50
	moški	5	50

Za to starostno skupino sva se odločili, ker so učenci zadnjega razreda osnovne šole precej izpostavljeni stresu, pritisku okolice in so pogosto slabše notranje motivirani, kljub temu da si želijo lastnega uspeha.

5.3 Pripomočki in postopek

Za izvedbo eksperimenta je bil potreben poseben prostor, kjer je vladala tišina in ni bilo dodatnih stresorjev iz okolja. Za namen eksperimentalnih pogojev smo potrebovali list papirja in svinčnik.

Eksperiment je potekal z vsakim sošolcem posebej. Sprva sva imeli pripravljena dva naključna primera zmnožka: primer zmnožka dvomestnega števila z dvomestnim številom ($34 \cdot 11$) in primer zmnožka tromestnega števila z dvomestnim številom ($210 \cdot 14$).

Enaka primera sva dali tudi sošolcem, ki so reševali račune po postopku Trachtenbergove metode.

Zbrani rezultati so predstavljeni v naslednjem poglavju.

6 REZULTATI

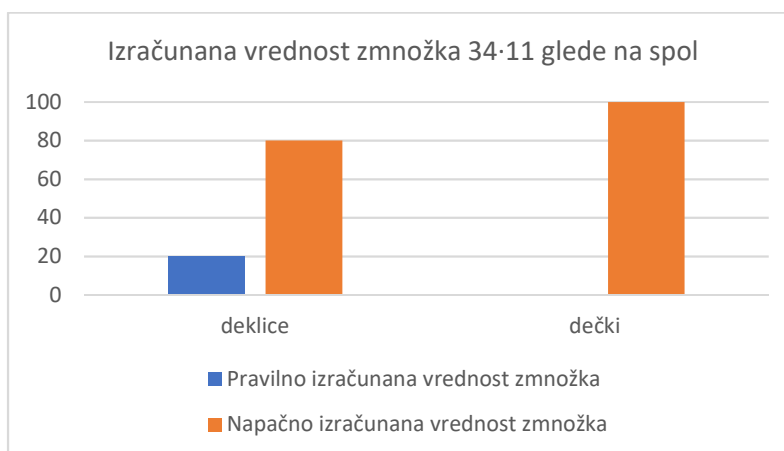
Rezultate testiranih sva ločili glede na pisno množenje in množenje z uporabo Trachtenbergove metode ter glede na spol. Za lažjo predstavo v nadaljevanju sledi še grafični prikaz dobljenih rezultatov.

Tabela 2 prikazuje odstotek deklic in dečkov, ki so z uporabo pisnega množenja prišli do pravilnega oziroma nepravilnega rezultata zmnožka $34 \cdot 11$.

Tabela 2: Izračunana vrednost zmnožka $34 \cdot 11$ z metodo pisnega množenja

	Pravilno izračunana vrednost zmnožka ($f\%$)	Napačno izračunana vrednost zmnožka ($f\%$)
deklice	20	80
dečki	0	100

Graf 1: Izračunana vrednost zmnožka $34 \cdot 11$ z metodo pisnega množenja glede na spol



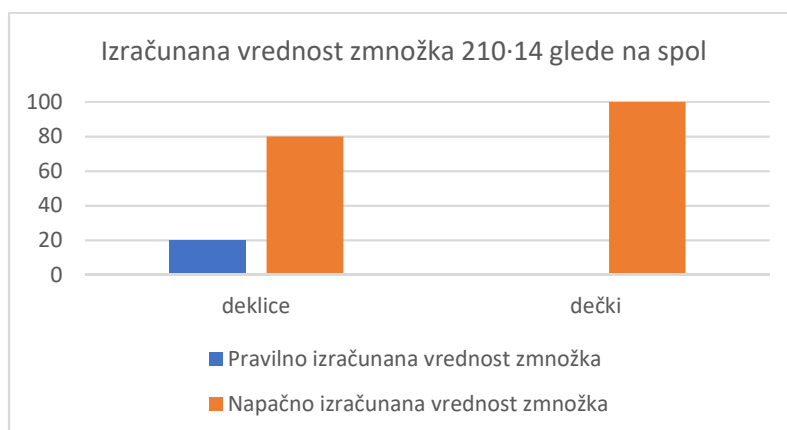
20 % deklic je pravilno izračunalo vrednost zmnožka $34 \cdot 11$, nihče od dečkov ni s pisnim množenjem prišel do pravilnega rezultata. Tudi dekleta so v večinskem deležu prišla do nepravilnega rezultata.

Tabela 3 prikazuje odstotek deklic in dečkov, ki so z uporabo metode pisnega množenja prišli do pravilne ali nepravilne vrednosti zmnožka $210 \cdot 14$.

Tabela 3: Izračunana vrednost zmnožka $210 \cdot 14$ z metodo pisnega množenja

	Pravilno izračunana vrednost zmnožka ($f\%$)	Napačno izračunana vrednost zmnožka ($f\%$)
deklice	20	80
dečki	0	100

Graf 2: Izračunana vrednost zmnožka $210 \cdot 14$ z metodo pisnega množenja glede na spol



Kar 80 % deklic in 100 % dečkov z uporabo metode pisnega množenja ni prišlo do pravilne vrednosti zmnožka $210 \cdot 14$. Le 2 deklici, kar predstavlja 20 %, sta z uporabo pisnega množenja dobili pravilni rezultat danega zmnožka.

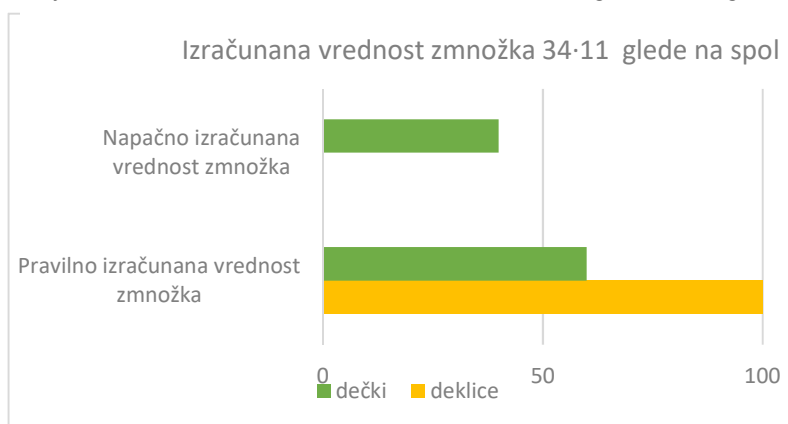
V nadaljevanju so predstavljeni rezultati, ki se navezujejo na množenje z uporabo Trachtenbergove metode.

Tabela 4 prikazuje odstotek deklic in dečkov, ki so z uporabo obravnavane metode pravilno ali nepravilno izračunali vrednost zmnožka $34 \cdot 11$.

Tabela 4: Izračunana vrednost zmnožka $34 \cdot 11$ s Trachtenbergovo metodo

	Pravilno izračunana vrednost zmnožka ($f\%$)	Napačno izračunana vrednost zmnožka ($f\%$)
dekllice	100	0
dečki	60	40

Graf 3: Izračunana vrednost zmnožka $34 \cdot 11$ s Trachtenbergovo metodo glede na spol



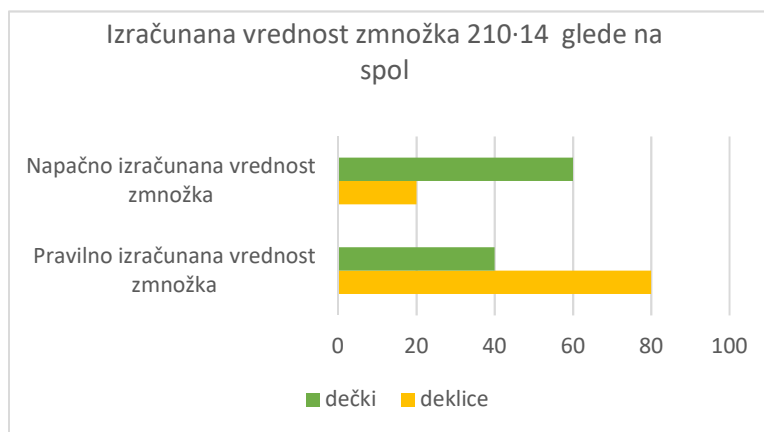
Rezultati so pokazali, da so vse testirane deklice (100 %) in večinski delež dečkov (60 %) pravilno izračunali vrednost danega zmnožka ter pri tem uporabili Trachtenbergovo metodo. Sklepamo lahko, da gre za metodo, ki se jo učenci zlahka priučijo in je enostavna za uporabo. Dva dečka sta bila pri uporabi obravnavane metode na danem primeru zmnožka neuspešna.

Tabela 5 prikazuje odstotek deklic in dečkov, ki so z uporabo Trachtenbergove metode pravilno ali nepravilno izračunali vrednost zmnožka $210 \cdot 14$.

Tabela 5: Izračunana vrednost zmnožka $210 \cdot 14$ s Trachtenbergovo metodo

	Pravilno izračunana vrednost zmnožka ($f\%$)	Napačno izračunana vrednost zmnožka ($f\%$)
deklice	80	20
dečki	40	60

Graf 4: Izračunana vrednost zmnožka $210 \cdot 14$ s Trachtenbergovo metodo glede na spol



Iz tabele 5 in grafa 4 je razvidno, da večina deklic (80 %) spretno uporablja Trachtenbergovo metodo in je tako prišla do pravilnega rezultata danega zmnožka. Dečki so pri uporabi obravnavane metode manj uspešni, saj jih kar 60 % ponovno ni prišlo do pravilne vrednosti danega zmnožka.

V nadaljevanju so predstavljeni rezultati testirancev glede na čas računanja danih primerov zmnožkov. Čas je podan v minutah.

Tabela 6: Čas množenja (min) izbranih primerov glede na testiranca/učenca

	Pisno množenje primera $34 \cdot 11$	Množenje s Trachtenbergovo metodo na primeru $34 \cdot 11$	Pisno množenje primera $210 \cdot 14$	Množenje s Trachtenbergovo metodo na primeru $210 \cdot 14$
Učenec št. 1	2.57	0.42	2.49	0.55
Učenec št. 2	2.29	0.39	2.53	0.35
Učenec št. 3	3.19	0.40	3.52	1.07
Učenec št. 4	1.10	0.34	2.12	1.01
Učenec št. 5	3.45	0.37	1.31	0.44
Učenec št. 6	1.50	0.28	1.55	0.25
Učenec št. 7	1.59	0.31	2.43	0.40
Učenec št. 8	1.26	1.06	3.12	1.10
Učenec št. 9	1.18	0.33	2.18	0.34
Učenec št. 10	1.14	0.42	3.50	1.23
Povprečni čas	2.29	0.37	2.58	1.13

Glede na tabelo 6 pridemo do ugotovitve, da so učenci bili pri množenju hitrejši takrat, ko so uporabili Trachtenbergovo metodo. Dvomestno število so zmnožili z dvomestnim številom v manj kot eni minuti (0.37), nekoliko več kot eno minuto (1.13) pa so potrebovali za množenje tromestnega števila z dvomestnim. Glede na izmerjeni čas je opaziti, da je metoda pisnega množenja precej zamudna metoda, ki učencem vzame predvsem veliko časa, vprašanje pa je, ali jih pripelje tudi do pravilnega rezultata.

Sledi tabelarični prikaz povprečno izmerjenega časa deklic in dečkov pri obeh testiranih metodah množenja.

Tabela 7: Povprečni čas (min) množenja glede na spol

	Dečki	Deklice
Povprečni čas pisnega množenja primera $34 \cdot 11$	2.10	2.16
Povprečni čas množenja s Trachtenbergovo metodo na primeru $34 \cdot 11$	0.52	0.34
Povprečni čas pisnega množenja primera $210 \cdot 14$	3.17	2.18
Povprečen čas množenja s Trachtenbergovo metodo na primeru $210 \cdot 14$	1.08	1.06
Skupni povprečni čas	2.12	1.44

Iz tabele 7 je razvidno, da so dečki v povprečju potrebovali več časa (2.12 min) za obe uporabljeni metodi kot deklice (1.44 min). Povprečni čas dečkov je od povprečnega časa deklic krajši le pri uporabi metode pisnega množenja na primeru zmnožka $34 \cdot 11$. Oba spola sta z majhno razliko potrebovala približno enako časa, da sta izračunala vrednost zmnožka $210 \cdot 14$ ter pri tem uporabila Trachtenbergovo metodo množenja.

Tabela 8 nam prikazuje v kolikšnem povprečnem času so bile deklice uspešnejše od dečkov, pri čemer so vrednost zmnožkov računali z uporabo Trachtenbergove metode in prišli do pravilnega rezultata.

Tabela 8: Povprečni čas (min) pravilnega množenja po Trachtenbergovi metodi glede na spol

	Dečki	Deklice
Povprečni čas množenja s Trachtenbergovo metodo na primeru $34 \cdot 11$	0.38	0.49
Povprečen čas množenja s Trachtenbergovo metodo na primeru $210 \cdot 14$	1.09	0.58
Skupni povprečni čas	1.13	0.53

7 INTERPRETACIJA

V raziskovalni nalogi sva želeli priti do ugotovitve, kako in v kolikšnem času urjenje določene tehnike množenja naravnih števil vpliva na hitrejše računanje in pravilen rezultat pri tem. Na podlagi dobljenih rezultatov so z interpretacijo predstavljene ugotovitve raziskave.

H1: Deklice so pri pisnem množenju dvomestnega naravnega števila z dvomestnim naravnim številom uspešnejše od dečkov.

Dobljeni rezultati so pokazali, da so deklice pri množenju dvomestnega naravnega števila z dvomestnim naravnim številom uspešnejše od dečkov, kljub temu, da je večinski delež deklic sicer prišel do nepravilne vrednosti zmnožka. Dobljeni rezultati so pokazatelj, da so tako deklice kot dečki pri uporabi metode pisnega množenja neuspešni in posledično imajo pri pouku matematike učne težave.

H2: Deklice so pri pisnem množenju tromestnega naravnega števila z dvomestnim naravnim številom uspešnejše od dečkov.

Rezultati raziskave so pokazali, da hipotezo 2 sicer lahko potrdiva, vendar je uporaba metode pisnega množenja tako pri deklicah kot pri dečkih v večinskem deležu neuspešna.

Sklep predpostavljenih hipotez 1 in 2 je, da učenci v večini ne znajo pisno množiti, kar se odraža pri samem pouku matematike, pri reševanju matematičnih problemov in vsesplošni matematični razgledanosti.

H3: Deklice z uporabo Trachtenbergove metode uspešneje množijo dvomestno naravno število z dvomestnim naravnim številom.

Rezultati raziskave so pokazali, da se je večina deklic spretno priučila Trachtenbergove metode v primerjavi z dečki in so tako bile pri danem zmnožku uspešnejše. Vse testirane deklice so z uporabo obravnavane metode prišle do pravilnega rezultata. Ta uspeh je doseglo le 60 % dečkov.

H4: Deklice z uporabo Trachtenbergove metode uspešneje množijo tromestno naravno število z dvomestnim naravnim številom.

Pri uporabi Trachtenbergove metode množenja tromestnega števila z dvomestnim številom so bile ponovno uspešnejše deklice. 80 % deklic je z uporabo metode prišlo do pravilne vrednosti produkta, medtem ko je to uspelo le 40 % dečkov.

H5: Z znanjem Trachtenbergove metode učenci v krajšem času izračunajo vrednost zmnožka, kot bi to napravili z uporabo pisnega množenja.

Raziskava je pokazala, da so učenci z uporabo Trachtenbergove metode v krajšem času izračunali dane zmnožke kot pri uporabi metode pisnega množenja. Kljub temu da metodo pisnega množenja poznajo že iz 4. razreda osnovne šole ter jo skoraj vsakodnevno uporabljajo, se je izkazalo, da so algoritem novo obravnavane metode hitreje usvojili in ga znali uporabiti.

Rezultati najine raziskave so pokazali, da je bil povprečni čas množenja na podlagi metode pisnega množenja 2.44 min, medtem ko je bil povprečni čas računanja s pomočjo Trachtenbergove metode manj kot minuta, in sicer 0.55 min. Izkazalo se je, da je Trachtenbergova metoda resnično metoda hitrega računanja.

8 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Trachtenbergova metoda omogoča izvajanje matematičnih operacij hitreje kot tradicionalne metode. S tem se lahko poveča učinkovitost reševanja matematičnih nalog.

Metoda je enostavna za učenje in uporabo. Ne zahteva zapletenih matematičnih pravil ali formul, kar olajša razumevanje in praktično izvajanje, še posebej to velja za otroke. To pomaga zmanjšati možnost napak in povečati natančnost. Učenje Trachtenbergove metode lahko pripomore k razvoju veščin mentalne aritmetike, saj spodbuja razmišljanje na abstraktnější ravni in hitro ocenjevanje rezultatov. Metoda je prilagodljiva in se lahko uporablja za reševanje različnih vrst matematičnih problemov, vključno s seštevanjem, odštevanjem, množenjem in deljenjem.

Najina raziskava sicer temelji na majhnem vzorcu testiranih sošolcev. Za posplošitev ugotovitev se bi v prihodnje lahko lotili obsežnejše raziskave na večjem vzorcu tako kontrolne kot eksperimentalne skupine več razredov po vertikali osnovne šole. Zanimivo bi bilo ugotoviti, ali bi konstantna uporaba Trachtenbergove metode množenja naravnih števil pri slovenskih osnovnošolcih prinesla boljše rezultate pri matematiki ter koliko časa bi bilo potrebnega za učenje te metode, v primerjavi z učenjem metode pisnega množenja.

9 ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi sva raziskovali učinkovitost Trachtenbergove metode. V raziskavo sva vključili učence 9. razreda in na njih sva preizkusili, kako Trachtenbergova metoda deluje v praksi. Ugotovili sva, da je Trachtenbergova metoda zelo koristna in učinkovita. Naučiš se jo zelo hitro, nekaterim je to uspelo v manj kot petih minutah. To je zelo preprost sistem hitrega množenja, uporaben v vseh oblikah.

Med raziskovanjem sva ugotovili, da učenci, ki jim matematika ne gre najboljše, niso pravilno izračunali rezultata pri navadnem množenju. Ko pa so se naučili Trachtenbergovo metodo, pa so takoj v prvem poskusu prišli do pravilnega rezultata. To naju je zelo presenetilo.

Med pripravo raziskovalne naloge sva se naučili marsikaj novega. Tudi kako hitro računati. Spoznali sva, da je treba v življenju včasih kakšne stvari spremeniti, da ti bo potem lažje uspelo kaj narediti.

10 VIRI IN LITERATURA

Maslanka, C. in Owen D. (2011). *Aerobika za možgane: oblikujte lasten program za treniranje možganov*. 1. izdaja. Ljubljana: Tehniška založba Slovenije.

Nanut Planinšek, Z. in Škorjanc Braico, D. (2013). *Spretnosti učenja*. Dostopno na: http://www2.arnes.si/~lukoper9/spretnosti_ucenja/index.html (pridobljeno 15. 1. 2024)

Mohorič, K. (2010). *Možgani in živčni sistem*. Dostopno na: <https://www.abczdravja.si/mozgani-in-zivni-sistem/kako-ohraniti-ali-izboljsati-spomin/> (pridobljeno 22. 12. 2023)

Art of memory (b. l.). *Trachtenberg System*. Dostopno na: https://artofmemory.com/wiki/Trachtenberg_System/ (pridobljeno 26. 11. 2023)

Magnetic memory method. (2023). *The Trachtenberg Method: What It Is & How to Use It*. Dostopno na: <https://www.magneticmemorymethod.com/trachtenberg-method/> (pridobljeno 25. 1. 2024)

Fran, slovarji Inštituta za slovenski jezik Frana Ramovša ZRC SAZU. (2023). Različica 11.0. Inštitut za slovenski jezik ZRC SAZU Dostopno na: <https://fran.si/iskanje?page=1&View=1&Query=metoda> (pridobljeno 20. 11. 2023)

Javornik, I., Podgoršek Mesarec M., dr. Lipovec, A. (2019). *Alternativni algoritmi pisnega množenja*. Matematika v šoli št. I/2019, letnik 25. Dostopno na: https://www.zrss.si/wp-content/uploads/2023/07/01_IzaJavornik-idr.pdf (pridobljeno 19. 12. 2023)