



OSNOVNA ŠOLA FRAM

RAZISKOVALNA NALOGA

ODKRIVANJE PRAŠTEVIL S POMOČJO ORODJA ChatGPT

RAZISKOVALNA NALOGA
PODROČJE: MATEMATIKA

Avtorja: Bine Gojkovič, 9. razred
Jure Božič, 9. razred

Mentorica: Polona Čuk Kozoderc

Kazalo vsebine

POVZETEK	4
UVOD.....	1
HIPOTEZE	1
RAZISKOVALNE METODE	1
TEORETIČNI DEL.....	2
O praštevilih	2
Kaj je praštevilo?	2
Zakaj in kdaj so začeli odkrivati praštevila?	3
Zakaj so pomembna praštevila?	4
Vzorec pojavljanja praštevil	5
EMPIRIČNI DEL	6
Ali je vsako število oblike $10n + 1$ praštevilo?	6
Praštevila in kvadrati števil	7
Pitagorejske trojice in praštevila.....	8
Fibonaccijevo zaporedje in praštevila	11
RAZPRAVA.....	13
ZAKLJUČEK.....	14
VIRI IN LITERATURA	15

Kazalo slik

<i>Slika 1: Praštevilna manjša od 100.</i>	2
Slika 2: Eratostenovo sito.....	3
Slika 3: Prikaz Ulamovega prta.....	5
Slika 4: Prikaz pitagorejskih trojic s praštevili. Prikaz ne ustreza navodilu.....	9
Slika 5: Prikaz pitagorejskih trojic s praštevili, ki še vedno ni ustrezen.	9
Slika 6: Pravilen prikaz pitagorejskih trojic, kjer sta dve števili praštevili.....	10
Slika 7: Odgovor umetne inteligence na vprašanje, koliko je pitagorejskih trojic, kjer sta dve števili praštevili.	10
Slika 8: Izpis praštevil iz Fibonaccijevega zaporedja.	11
Slika 9: Izpis razlik med dvema prašteviloma iz Fibonaccijevega zaporedja.	11

Kazalo tabel

Tabela 1: Prikaz deliteljev števil oblike $10n + 1$	6
Tabela 2: Iskanje praštevil, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov.	7

POVZETEK

V raziskovalni nalogi sva želela raziskati praštevila, najprej zakaj so pomembna, kdaj so jih začeli odkrivati in kako je odkrivanje praštevil potekalo. Nato sva želela raziskati še povezanost praštevil z različnimi podmnožicami naravnih števil. Izbrala sva kvadrate naravnih števil, pitagorejske trojice in Fibonaccijevo zaporedje.

ChatGPT je orodje umetne inteligence. Gre za klepetalnega robota, ki na podlagi vnesenih podatkov in učenja posreduje informacije, ki jih od njega zahtevamo. Pri raziskovanju sva uporabljala orodje ChatGPT, saj sva želela preveriti, če je orodje uporabno pri raziskovalnem delu.

KLJUČNE BESEDE: praštevila, ChatGPT

UVOD

Praštevilna so nama bila skozi celo predmetno stopnjo zelo zanimiva, zato sva se odločila, da jih bova širše raziskala. Zanimalo naju je, zakaj so praštevilna pomembna, v kakšnih vzorcih se pojavljajo, kako velika so in kakšen vpliv imajo na računanje z naravnimi števili.

Postavila sva si nekaj hipotez.

HIPOTEZE

Praštevilna lahko zapišemo v različnih oblikah. Zanimalo naju je, če tudi števila, ki jih lahko zapišemo v obliki $10^n + 1$ predstavljajo praštevilna.

H1: Števila oblike $10^n + 1$ so večinoma praštevilna.

V preteklosti so različni avtorji povezovali kvadrate naravnih števil in praštevilna. Tudi midva sva želela raziskati te povezave, zato sva si postavila sledeče hipoteze.

H2: Nekatera praštevilna lahko zapišemo kot razliko kvadratov.

H3: Obstajajo pitagorejske trojice, kjer sta dve števili praštevilni.

Želela sva preveriti, če med praštevilni v Fibonaccijevem zaporedju obstaja vzorec pojavljanja.

H4: Obstaja povezava med praštevilni in členi Fibonaccijevega zaporedja.

O velikih spremembah, ki jih je orodje ChatGPT povzročilo na področju razvoja, sva lahko prebrala v različnih člankih. V Wikipediji je zapisano: "ChatGPT je zaslužen za začetek razmaha umetne inteligence, ki je privedel do stalnega hitrega razvoja brez primere na področju umetne inteligence." (Wikipedija, 2024)

Tudi midva sva želela ugotoviti ali je lahko ChatGPT učinkovito orodje pri raziskovalni nalogi, zato sva si postavila hipotezo.

H5: ChatGPT posreduje uporabne in pravilne odgovore, ki jih je potrebno preveriti.

RAZISKOVALNE METODE

Pri delu sva si večinoma pomagala s spletnimi viri in aplikacijami. Orodje ChatGPT sva oba že poznala. Zanj sva slišala pri pouku in ga v nekaj primerih tudi sama uporabila. Zanimalo naju je, če je ChatGPT primerno orodje za uporabo pri raziskovalni nalogi, zato sva v nekaterih primerih opisala njegovo delovanje. Najine ugotovitve sva zapisala v zaključku.

TEORETIČNI DEL

O praštevilih

Kaj je praštevilo?

Praštevila so naravna števila, ki imajo natanko dva delitelja, število 1 in število samo. 1 ni praštevilo, najmanjše in edino sodo praštevilo je število 2. Na spodnji sliki so pobarvana praštevila manjša od 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Slika 1: Praštevila manjša od 100. (Vir: <http://www.nauk.si/materials/836/out/#state=1>)

Vsako praštevilo lahko zapišemo v obliki $6n + 1$ ali $6n - 1$, kjer je n naravno število. Nekaj primerov:

$$41 = 6 \cdot 7 - 1$$

$$439 = 6 \cdot 37 + 1$$

$$2753 = 6 \cdot 459 - 1$$

Vsako naravno število lahko zapišemo v eni izmed oblik, če je $n \in \mathbb{N}_0$.

$$6 \cdot n + 1$$

$$6 \cdot n + 2$$

$$6 \cdot n + 3$$

$$6 \cdot n + 4$$

$$6 \cdot n + 5$$

Vsako število oblike $6 \cdot n + 2$ je deljivo z 2, saj velja $2 \cdot (3n + 1)$.

Vsako število oblike $6 \cdot n + 3$ je deljivo s 3, saj velja $3 \cdot (2n + 1)$.

Vsako število oblike $6 \cdot n + 4$ je deljivo z 2, saj velja $2 \cdot (3n + 2)$.

Te oblike niso ustrezne za praštevila, saj so taka števila deljiva z 2 in 3, torej sta edini možni obliki za praštevila $6 \cdot n + 1$ in $6 \cdot n + 5$. Zapis $6 \cdot n + 5$ pa lahko zapišemo tudi v obliki $6 \cdot n - 1$.

Zakaj in kdaj so začeli odkrivati praštevila?

Praštevila so začeli odkrivati že 300 let pred našim štetjem, v antični Grčiji, saj so že takrat prepoznali nekaj posebnega v teh navadnih, vendar zanimivih številih. Evklid se je v svojih knjigah ukvarjal tudi s teorijo števil in tako kot pravi vir definiral praštevila. »Knjige VII–IX vsebujejo elemente teorije števil, kjer število (*arithmos*) pomeni pozitivna cela števila, večja od 1. Začenši z 22 novimi definicijami - kot so enota, sodo, liho in praštevilo - te knjige razvijajo različne lastnosti pozitivnih celih števil.« (Taisbak, Van der Waerden, 2024)

Že takrat je grški matematik Evklid ugotovil, da je množica praštevil neskončna.

Eden od zanimivih postopkov iskanja praštevil je tudi Eratostenovo sito, poimenovano po grškemu matematiku Eratostenu, ki se je rodil leta 276 pred našim štetjem.

Eratostenovo sito je preprosti algoritem za iskanje vseh praštevil manjših od izbranega števila. Če želimo na primer poiskati vsa praštevila manjša od 100, najprej v tabeli vseh naravnih števil do 100 prečrtamo večkratnike števila 2 (s tem prečrtamo tudi večkratnike števila 4 in 8), nato večkratnike števila 3 (s tem prečrtamo tudi večkratnike števil 6 in 9), nato prečrtamo večkratnike števila 5 (s tem prečrtamo tudi večkratnike števila 10) in nazadnje še večkratnike števila 7. Števila, ki so s takim postopkom ostala ne prečrtana so praštevila. Če bi želeli na ta način najti praštevila manjša od števila n , bi morali prečrtati vse večkratnike števil, ki so manjši od \sqrt{n} . (Wikipedija, 2023)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Slika 2: Eratostenovo sito.

(https://cocalc.com/share/public_paths/embed/4d6c67156eb5298bc798343164d4406fb212d50e)

Matematiki so v preteklosti tekmovali, kdo bo našel največje praštevilo. Uporabljali so metodo, ki velja za Mersennova števila. Iskali so praštevila v obliki $2^n - 1$, kjer je n praštevilo. Pa vendar ni vsako število oblike $2^n - 1$ tudi praštevilo. Primer je število $2^{11} - 1$, kar je 2047, ki pa je produkt števil 23 in 89.

V preteklosti so se morali matematiki zanašati le na svoje razmišljanje in natančnost. Včasih je bilo pomembno odkritje tudi to, da neko število ni praštevilo. Eduardo Lukas, ki je odkril, da je $2^{127} - 1$ praštevilo je odkril tudi, da $2^{67} - 1$ ni praštevilo, vendar tega dolgo časa niso znali dokazati. Leta 1903 je matematik Frank Nelson Cole pokazal, da obstajata faktorja tega praštevila. Za ta dokaz je po njegovih besedah potreboval tri leta nedelj. (Spencer, 2013)

$$2^{67} - 1 = 761838257287 \cdot 193707721$$

Prišla je doba računalnikov in približno vsako desetletje so našli novo največje praštevilo:

$$\text{Leta 1952: } 2^{521} - 1$$

$$\text{Leta 1961: } 2^{4423} - 1$$

$$\text{Leta 1971: } 2^{19937} - 1$$

$$\text{Leta 1985: } 2^{216091} - 1$$

$$\text{Leta 1996: } 2^{1398269} - 1$$

Leta 2013 so odkrili novo največje praštevilo s pomočjo več računalnikov, ki so bili povezani med seboj. Novo število je imelo kar 17,5 milijona števk. Za boljšo predstavbo, kako veliko je to število zapišimo število na prosojnice tako, da je na vsaki prosojnici 1000 števk. Če vsako sekundo prikažemo eno prosojnico, bi za pregled celotnega števila potrebovali 5 ur. (Spencer, 2013) To število s potenco števila 2 zapišemo tako:

$$2^{57885161} - 1$$

Največje praštevilo odkrito do zdaj, je prav tako Mersennovo praštevilo, odkrito 7. 12. 2018. Njegova vrednost je:

$$2^{82589933} - 1$$

Odkril ga je Patrick Laroche z pomočjo GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search). GIMPS, Veliko internetno iskanje Mersennovih praštevil, je bilo ustanovljeno januarja 1996 za odkrivanje novih največjih Mersennovih praštevil. GIMPS izkorišča moč na tisoče majhnih osebnih računalnikov, ki jih poveže skupaj z namenom iskanja največjega praštevila. (GIMPS, 2024) Največje do danes odkrito praštevilo ima skoraj 25 milijonov števk (24 862 048).

Zakaj so pomembna praštevila?

Praštevila so pomembna v matematiki in zaradi svojih posebnih lastnosti v matematičnih konceptih ter aplikacijah. Tu so nekateri primeri, v katerih so praštevila pomembna:

KRIPTOGRAFIJA

Kriptografija je znanost o skrivanju in zaščiti podatkov. Praštevila predstavljajo zaščito za dostop do podatkov. Praštevila so faktorji iz katerih z zmnožkom pridobimo število, ki predstavlja javni ključ. Praštevili, ki sta faktorja s katerima dobimo javni ključ, pa predstavljata zasebni ključ. Večji kot sta praštevili, boljša je zaščita podatkov.

Zaradi tega, ker je možno z velikimi praštevili dostopati do zaščiteneh podatkov, je v ZDA nekatera praštevila prepovedano posedovati. (Dolenc, 2016)

FAKTORIZACIJA

Praštevilo je osnovna gradbena enota za vsa naravna števila. Vsako naravno število, ki je večje od 1 lahko razstavimo na prafaktorje, kjer so prafaktorji praštevila. To je znano kot osnovni izrek aritmetike.

Osnovni izrek aritmetike: vsako naravno število n , večje od 1, se lahko na en sam način zapiše kot zmnožek praštevil.

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$$

Števila p_i so praštevila, m_i pa njihove stopnje. Torej so praštevila osnovni gradniki naravnih števil. (Mohorčič, idr., 2014)

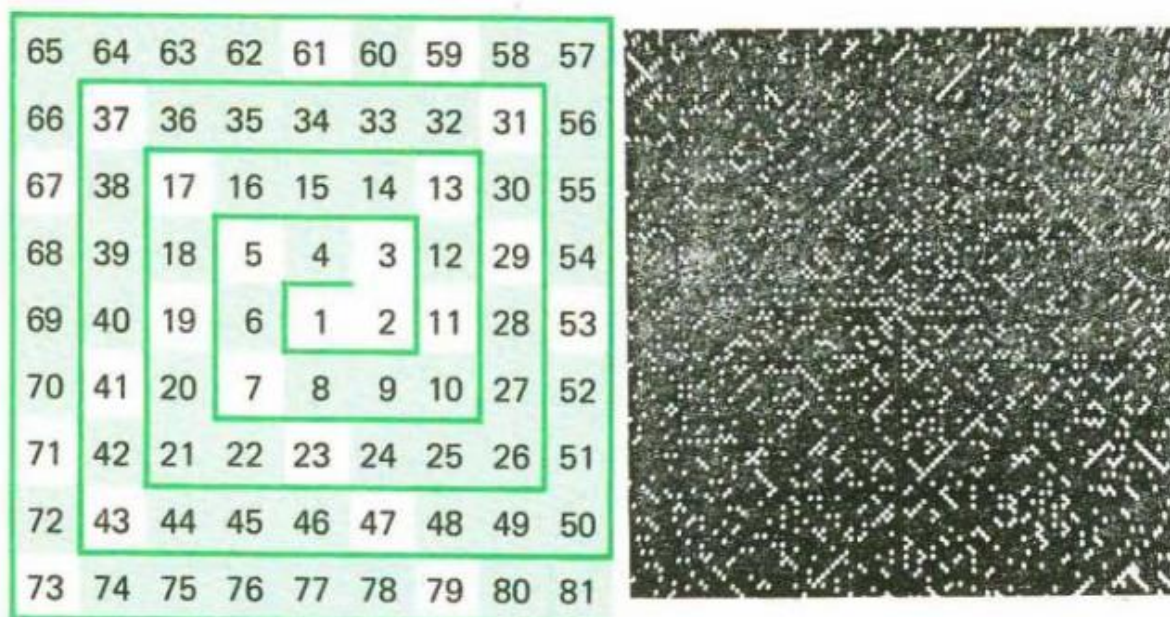
Primer faktorizacije števila 540.

$$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

Faktorizacija je v matematiki pomembna, saj lahko s tem postopkom iščemo delitelje ali rešujemo enačbe, če jih uspemo faktorizirati. (Škrlec, idr., 2015)

Vzorec pojavljanja praštevil

Praštevila se lahko pojavijo v različnih vzorcih. Eden od zanimivih grafičnih vzorcev je Ulamov prt. Ulamov prt je nastal s preprosto metodo risanja razporeditve praštevil v kvadrat s spiralo. Nalogo si je med zdolgočasnim čečkanjem po papirju zamislil poljsko-ameriški matematik Stanislaw Marcin Ulam. Ulam je obkroževal vsa vpisana praštevila in opazil, da se večinoma nahajajo vzdolž nekaterih diagonalnih premic. Uporabil je računalnik in izdelal sliko za prvih 65 000 naravnih števil. (Lavrič, 1998)



Slika 3: Prikaz Ulamovega prta. (Vir: <http://www.presek.si/16/928-Lavric.pdf>)

EMPIRIČNI DEL

Ali je vsako število oblike $10^n + 1$ praštevilo?

Pri odkrivanju ali so števila oblike $10^n + 1$ smo si pomagali z orodjem ChatGPT, ki se je pri tem raziskovanju pokazal kot delno zanesljiv vir. Za vsako število sva mu lahko postavila konkretno vprašanje, na primer, katere delitelje ima število 100001. Podatke, ki smo jih prejeli od ChatGPT -ja smo preverili še s kalkulatorjem, kar je bilo nujno potrebno, saj nam ChatGPT ni vedno posredoval pravilnega odgovora. Zbrali smo podatke za števila oblike $10^n + 1$, kjer je n naravno število, manjše od 11.

število	praštevilo	delitelji
11	da	1, 11
101	da	1, 101
1001	ne	1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001
10001	ne	1, 73, 137, 10001
100001	ne	1, 37, 1369, 100001
1000001	ne	1, 101, 9901, 1000001
10000001	ne	1, 11, 909091, 10000001
100000001	ne	1, 17, 5882353, 100000001
1000000001	ne	1, 7, 11, 13, 19, 77, 91, 133, 143, 209, 247, 1001, 1463, 1729, 2717, 19019, 52579, 368053, 578369, 683527, 999001, 4048583, 4784689, 6993007, 7518797, 10989011, 12987013, 52631579, 76923077, 90909091, 142857143, 1000000001
10000000001	ne	1, 101, 3541, 27961, 357641, 2824061, 99009901, 10000000001
100000000001	ne	1, 11, 23, 121, 253, 2783, 4093, 8779, 45023, 94139, 96569, 201917, 495253, 1035529, 1062259, 2221087, 11390819, 24431957, 35932447, 395256917, 826446281, 4347826087, 9090909091, 100000000001

Tabela 1: Prikaz deliteljev števil oblike $10^n + 1$.

Ali so števila v resnici praštevila smo preverjali tudi s spletnim kalkulatorjem, ki je namenjen prav odkrivanju praštevil:

<https://www.calculatorsoup.com/calculators/math/prime-number-calculator.php>

Praštevilca in kvadrati števil

V Preseku sva se poučila o zapisu praštevil kot vsoti dveh kvadratov. (Vidav, 2010)

“Liho praštevilo p delimo s 4. Če dobimo pri tej delitvi ostanek 1, je p vsota dveh kvadratov, če dobimo ostanek 3, p ni vsota dveh kvadratov

Edino sodo število 2 je vsota dveh kvadratov: $2 = 1^2 + 1^2$

Za zgled vzemimo praštevilca 13, 23, 29 in 73. Ker je

$$13 = 4 \cdot 3 + 1 \quad 23 = 4 \cdot 5 + 3 \quad 29 = 4 \cdot 7 + 1 \quad 73 = 4 \cdot 18 + 1$$

dajo števila 13, 29 in 73 pri delitvi s 4 ostanek 1, število 23 pa ostanek 3. Zato 23 ni vsota dveh kvadratov, 13, 29 in 73 pa so:

$$13 = 2^2 + 3^2, \quad 29 = 2^2 + 5^2, \quad 73 = 3^2 + 8^2$$

V članku avtor tudi zapiše, da se da vsako praštevilo oblike $4n + 1$ zapisati kot vsota dveh kvadratov.

Zanimalo naju je, če lahko praštevilo zapišemo tudi kot razliko kvadratov. V ta namen sva v Excelu izdelala tabelo, ki je imela zapisane kvadrate naravnih števil manjših ali enakih 100 (v stolpcu in vrstici). Tabela sva dopolnila z razlikami med kvadrati. Takoj sva opazila, da po diagonali dobiva samo ničle. Nato sva opazila, da v primerih, ko imava v stolpcu in vrstici sodo število, dobiva razliko, ki je sodo število (rdeče zapisane številke), zato sva te rešitve takoj pobarvala kot neustrezne. Nato sva podobno kot pri Eratostenovem situ tudi midva odstranjevala (barvala) polja, ki so predstavljala večkratnike naravnih števil (večkratnike števila 3 z vijolično, večkratnike števila 5 z modro in večkratnike števila 7 z zeleno). Kar nama je ostalo, so bila praštevilca. Ugotovila sva, da se lahko vsako praštevilo v najini tabeli zapiše kot razlika kvadratov dveh naravnih števil. V raziskovalno nalogo sva dodala samo del tabele, ki sva jo imela v Excelu.

x^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	0	3	8	15	24	35	48	63	80	99
4	3	0	5	12	21	32	45	60	77	96
9	8	5	0	7	16	27	40	55	72	91
16	15	12	7	0	9	20	33	48	65	84
25	24	21	16	9	0	11	24	39	56	75
36	35	32	27	20	11	0	13	28	45	64
49	48	45	40	33	24	13	0	15	32	51
64	63	60	55	48	39	28	15	0	17	36
81	80	77	72	65	56	45	32	17	0	19
100	99	96	91	84	75	64	51	36	19	0

Tabela 2: Iskanje praštevil, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov.

Praštevilna zapisana kot razlika kvadratov:

$$3 = 2^2 - 1^2$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

$$11 = 6^2 - 5^2$$

$$13 = 7^2 - 6^2$$

$$17 = 9^2 - 8^2$$

$$19 = 10^2 - 9^2$$

Želela sva tudi dokazati, da velja

$$p = a^2 - b^2, \text{ kjer je } p \text{ praštevilo, števili } a \text{ in } b \text{ pa naravni števili,}$$

zato sva razliko kvadratov razstavila v produkt.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Če je zgornji izraz enak praštevilu, potem mora biti eden od faktorjev 1, drugi pa praštevilo samo.

Število 1 lahko dobimo samo v primeru $a - b$, torej je

$$a - b = 1$$

$$a + b = p$$

Če je razlika dveh naravnih števil 1, potem pomeni, da sta to zaporedni števili. Njuna vsota je vedno liho število, saj je eno število vedno sodo, drugo pa liho. Na ta način lahko zapišemo vsako liho število, kar pa zajema tudi množico praštevil.

$$a = n + 1, \quad b = n$$

$$a^2 - b^2 = (n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = n^2 - n^2 + 2n + 1 = 2n + 1$$

$2n + 1$ je oblika zapisa za vsako liho število.

Torej drži, da lahko vsako praštevilo zapišemo kot razliko kvadratov dveh zaporednih naravnih števil.

Pitagorejske trojice in praštevilna

Želela sva raziskati prisotnost praštevil v pitagorejskih trojicah. Pomagala sva si z orodjem ChatGPT. Potrebovala sva kar nekaj časa, da sva mu povedala kaj želiva. Večkrat sva ga morala opozoriti tudi na napako, ki jo je naredil v izračunu. V raziskovalni nalogi želiva prikazati tudi učinkovitost uporabe orodja ChatGPT, zato dodajava slike, ki prikazujejo njegovo delovanje.

Seveda, tu so deset primerov Pitagorejskih trojic, pri katerih sta dve števili praštevili:

1. (3, 4, 5) - 3 in 5 sta praštevila.
2. (5, 12, 13) - 5 in 13 sta praštevila.
3. (7, 24, 25) - 7 je praštevilo.
4. (11, 60, 61) - 11 je praštevilo.
5. (13, 84, 85) - 13 je praštevilo.
6. (17, 144, 145) - 17 je praštevilo.
7. (19, 180, 181) - 19 je praštevilo.
8. (23, 264, 265) - 23 je praštevilo.
9. (29, 420, 421) - 29 je praštevilo.
10. (31, 480, 481) - 31 je praštevilo.

To so primeri Pitagorejskih trojic, kjer sta dve od treh komponent praštevili.

Slika 4: Prikaz pitagorejskih trojic s praštevili. Prikaz ne ustreza navodilu. (Vir: ChatGPT)



ChatGPT

Oprostite na nesporazumu. Res je, opravičujem se za napako. Tu so primeri Pitagorejskih trojic, kjer sta dve števili praštevili:


1. (3, 4, 5) - 3 in 5 sta praštevila.
2. (5, 12, 13) - 5 in 13 sta praštevila.
3. (11, 60, 61) - 11 je praštevilo.
4. (17, 144, 145) - 17 je praštevilo.
5. (29, 420, 421) - 29 je praštevilo.
6. (41, 840, 841) - 41 je praštevilo.
7. (59, 1740, 1741) - 59 je praštevilo.
8. (71, 5040, 5041) - 71 je praštevilo.
9. (101, 10200, 10201) - 101 je praštevilo.
10. (107, 11412, 11413) - 107 je praštevilo.



Slika 5: Prikaz pitagorejskih trojic s praštevili, ki še vedno ni ustrezen. (Vir: ChatGPT)

You

Zanimajo me primeri, kjer sta natanko dve komponenti v Pitagorejski trojici praštevili.

 **ChatGPT**

Oprostite za zmedo. Tu so primeri Pitagorejskih trojic, kjer sta natanko dve od treh komponent praštevili:


1. (3, 4, 5) - 3 in 5 sta praštevila.
2. (5, 12, 13) - 5 in 13 sta praštevila.
3. (7, 24, 25) - /
4. (11, 60, 61) - 11 in 61 sta praštevila.
5. (13, 84, 85) - /
6. (17, 144, 145) - /
7. (19, 180, 181) - 19 in 181 sta praštevila.
8. (23, 264, 265) - /
9. (29, 420, 421) - 29 in 421 sta praštevila.
10. (31, 480, 481) - /

Hvala za razumevanje in ponovno opravičilo za prejšnje napake.




Slika 6: Pravilen prikaz pitagorejskih trojic, kjer sta dve števili praštevili. (Vir: ChatGPT)

You

To deluje pravilno. Koliko je takih trojic?

 **ChatGPT**

Število Pitagorejskih trojic, kjer sta natanko dve komponenti praštevili, je neskončno. To izhaja iz karakteristike Pitagorinega teorema, ki je neomejen v svoji uporabi. Različne kombinacije praštevil in njihovih multiplikatorjev lahko ustvarijo neskončno mnogo Pitagorejskih trojic, kjer sta natanko dve komponenti praštevili.

Slika 7: Odgovor umetne inteligence na vprašanje, koliko je pitagorejskih trojic, kjer sta dve števili praštevili. (Vir: ChatGPT)

Ugotovila sva, da je potrebno rezultate, ki nama jih je vrnil ChatGPT preveriti in da sva šele v tretjem poskusu dobila to, kar sva želela. Če sklepava po rezultatih, ki sva jih prejela od umetne inteligence sta dve praštevili v pitagorejskih trojicah prisotni takrat, ko sta večji dve števili izmed trojice zaporedni naravni števili.


Primeri takih pitagorejskih trojic:

3	4	5
5	12	13
11	60	61
19	180	181
29	420	421

Fibonaccijevo zaporedje in praštevila

Tudi pri tem odkrivanju sva si pomagala z orodjem ChatGPT. Iz Fibonaccijevega zaporedja sva najprej želela izpisati vsa praštevila. Nato sva želela, da nama ChatGPT izračuna razlike med zaporednimi praštevili. Ko sva opazovala razlike sva ugotovila, da so vse deljive s 4. Zanimalo naju je, če lahko pokaževa, da to vedno drži.

Prilagava izpise, ki nama jih je posredoval ChatGPT.


 **ChatGPT**

Pregledal bom seznam in označil praštevila:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,
55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181,
6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229,
832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088169, 63
102334155, 165580141, 267914296, 433494437, 701408733, 1134903170, 1836311903, 2971
12586269025, 20365011074, 32951280099, 53316291173, 86267571272, 139583862445, 225
1548008755920, 2504730781961, 4052739537881, 6557470319842, 10610209857723, 17167
190392490709135, 308061521170129, 498454011879264, 806515533049393, 130496954492
23416728348467685, 37889062373143906, 61305790721611591, 99194853094755497, 1605
2880067194370816120, 4660046610375530309, 7540113804746346429, 1220016041512187

Praštevila na tem seznamu so: 2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657, 514229, 433494437, 2971215073,
1304969544928657, 20365011074, 6557470319842, 99194853094755497. Skupno je 15 praštevil na
seznamu.

Slika 8: Izpis praštevil iz Fibonaccijevega zaporedja. (Vir: ChatGPT)

 **ChatGPT**

Seveda, lahko izračunam razlike med zaporednimi števili, ki so praštevila na seznamu Fibonaccijevega zaporedja. Tukaj so razlike:

1. Razlika med 3 in 2: $3 - 2 = 1$
2. Razlika med 5 in 3: $5 - 3 = 2$
3. Razlika med 13 in 5: $13 - 5 = 8$
4. Razlika med 89 in 13: $89 - 13 = 76$
5. Razlika med 233 in 89: $233 - 89 = 144$
6. Razlika med 1597 in 233: $1597 - 233 = 1364$
7. Razlika med 28657 in 1597: $28657 - 1597 = 27060$
8. Razlika med 514229 in 28657: $514229 - 28657 = 485572$
9. Razlika med 433494437 in 514229: $433494437 - 514229 = 433980208$
10. Razlika med 2971215073 in 433494437: $2971215073 - 433494437 = 2537720636$
11. Razlika med 1304969544928657 in 2971215073: $1304969544928657 - 2971215073 =$

Slika 9: Izpis razlik med dvema praštevila iz Fibonaccijevega zaporedja. (Vir: ChatGPT)

V želji, da bi dokazala, da je razlika vedno deljiva s 4, sva praštevila, ki so zastopana v Fibonaccijevem zaporedju zapisala v obliki $6n + 1$ oziroma $6n - 1$.

$$5 = 6 \cdot 1 - 1$$

$$13 = 6 \cdot 2 + 1$$

$$89 = 6 \cdot 15 - 1$$

$$233 = 6 \cdot 39 - 1$$

$$1597 = 6 \cdot 266 + 1$$

$$28657 = 6 \cdot 4776 + 1$$

$$514229 = 6 \cdot 85705 - 1$$

$$433494437 = 6 \cdot 72249073 - 1$$

$$2971215073 = 6 \cdot 495202512 + 1$$

Ugotovila sva, da je n liho število, ko praštevilo zapišemo v obliki $6n - 1$ in n je sodo število, ko lahko praštevilo zapišemo v obliki $6n + 1$.

Zapisala sva vse možne oblike razlik dveh praštevil.

1. n in m sode

$$6n + 1 - (6m + 1) = 6n + 1 - 6m - 1 = 6n - 6m = 6(n - m) = 2 \cdot 3 \cdot (n - m)$$

Ker sta n in m sodi števili, je tudi njuna razlika soda, kar pomeni, da je razlika dveh praštevil v tem primeru deljiva s 4.

2. n sodo, m liho

$$6n + 1 - (6m - 1) = 6n + 1 - 6m + 1 = 6(n + m) + 2 = 2(3(n + m) + 1)$$

Ker je n sodo, m pa liho število, je tudi njuna vsota liho število. Trikratnik lihega števila je liho število, če mu dodamo 1, dobimo sodo število. S tem smo dokazali, da je razlika zopet deljiva s 4.

3. n liho, m sodo

$$6n - 1 - (6m + 1) = 6n - 1 - 6m - 1 = 6(n - m) - 2 = 2(3(n - m) - 1)$$

Če je n liho število, m pa sodo število, je njuna razlika liho število. Podobno kot v prejšnjem primeru velja, da je trikratnik lihega števila liho število, če mu dodamo ena, pa dobimo sodo število. Torej je razlika deljiva s 4.

4. n liho, m liho

$$6n - 1 - (6m - 1) = 6n - 1 - 6m + 1 = 6(n - m)$$

Če sta obe števili lihi je njuna razlika sodo število, kar pa zopet pomeni, da je razlika deljiva s 4.

RAZPRAVA

H1: Ugotovila sva da števila oblike $10^n + 1$ navadno niso praštevila. Med števili, ki sva jih preverjala, sva ugotovila, da sta praštevili le dve. To sta števili, ko je eksponent 1 ali 2. Vzorca po katerem bi lahko ugotovila gostoto praštevil oblike $10^n + 1$ nisva našla.

H2: Ugotovila sva, da lahko vsa praštevila, zapišemo kot razliko kvadratov dveh naravnih števil, saj lahko kot razliko kvadratov zapišemo vsako liho število, kar pa zajema tudi množico praštevil.

H3: Ugotovila sva da so pitagorejske trojice, v katerih sta dve števili praštevili, pogoste. V primerih, ki sva jih odkrila sva opazila, da sta dve od treh števil zaporedni. Število, ki ni praštevilo je vedno sodo.

H4: Pri raziskovanju razlik med praštevili v Fibonaccijevem zaporedju sva ugotovila, da je razlika med dvema zaporednima prašteviloma vedno deljiva s 4. To sva tudi dokazala, čeprav sva izhajala iz dejstva, ki je bilo potrjeno samo s primeri. S primeri sva ugotovila, da praštevila iz Fibonaccijevega zaporedja zapišemo kot $6n + 1$, ko je n sodo in $6n - 1$, ko je n liho število.

H5: ChatGPT se je izkazal kot uporaben, toda ne popolnoma zanesljiv vir pri najinem raziskovalnem delu. Vsak podatek, ki sva ga prejela, sva morala tudi preveriti z drugim virom. Celo pri preprostih vprašanjih kot je na primer, ali je neko število praštevilo, ni vedno podal pravilnega odgovora. Sva pa si pri preprostih računskih operacijah, narejenih na velikih številih, kot je bila na primer razlika med dvema prašteviloma iz Fibonaccijevega zaporedja, lahko z orodjem ChatGPT privarčevala veliko časa. Tudi pri izpisu pitagorejskih trojic z dvema prašteviloma nama je bilo prihranjenega veliko računanja. Veva pa, da bi lahko podatki, ki sva jih prejela preko orodja ChatGPT, bili tudi zavajajoči. Morda obstajajo pitagorejske trojice, kjer sta dve števili praštevili, nista pa prisotni dve zaporedni števili. Da bi nekaj z gotovostjo lahko trdila, bi ugotovitve morala tudi matematično dokazati.

ZAKLJUČEK

Ob zaključku raziskovalne naloge lahko rečeva, da sva seznanjena s pomembnostjo praštevil, saj prej o tem, da praštevila igrajo pomembno vlogo pri zaščiti podatkov, nisva vedela ničesar. Presenečena sva tudi nad zanimivimi povezavami med praštevili in drugimi podmnožicami naravnih števil (na primer pitagorejskimi trojicami in členi Fibonaccijevega zaporedja).

V sodobnem času so nekatera pomembna matematična spoznanja in velika praštevila odkrili s pomočjo računalnikov, saj postaja digitalna tehnologija nujen pripomoček pri raziskovalnem delu. Najino raziskovanje je potekalo s pomočjo orodja ChatGPT. Zelo zanimivo je bilo najine raziskovalne ideje preverjati s pomočjo umetne inteligence, saj sva lahko takoj dobila nekatere odgovore. Hitro sva se tudi zavedala, da morava vse odgovore, ki jih pridobiva na tak način, tudi preveriti. Dobila sva tudi izkušnjo, kakšno sodelovanje je možno med robotom in človekom. V marsičem nas umetna inteligenca prekaša, ima pa tudi napake. Mi ki smo uporabniki umetne inteligence moramo poskrbeti za raziskovanje in razvoj v pravi smeri.

Na koncu sva vprašala še ChatGPT, kaj meni, kakšno bi moralo biti sodelovanje med človekom in umetno inteligenco. Dodajava odgovor, s katerim se tudi midva strinjava.

»Sodelovanje med umetno inteligenco (UI) in človekom mora biti transparentno, etično in vključujoče. Pomembno je ohranjati nadzor, zagotavljati varnost podatkov, sodelovati pri reševanju problemov ter nuditi možnost izobraževanja o uporabi UI. Glavni cilj je ustvariti tehnološko okolje, ki prispeva k dobrobiti človeštva.«

VIRI IN LITERATURA

- [1] ChatGPT. Wikipedija (2024). Pridobljeno 12. januarja 2024 s strani <https://en.wikipedia.org/wiki/ChatGPT>
- [2] Taisbak, Van der Waerden (2024). Euclid. Pridobljeno 12. januarja 2024 s strani <https://www.britannica.com/biography/Euclid-Greek-mathematician>
- [3] Eratosten. Wikipedija (2023). Pridobljeno 10. decembra 2023 s strani <https://sl.wikipedia.org/wiki/Eratosten>
- [4] Spencer, Adam (2013). Why I fell in love with monster prime numbers. Pridobljeno 10. decembra 2023 s strani <https://www.youtube.com/watch?v=B4xOFsygwr4>
- [5] GIMPS (2024). Odlično internetno iskanje Mersennovega praštevila. Pridobljeno 20. novembra 2023 s strani <https://www.mersenne.org/>
- [6] Dolenc, Sašo (2016). Ilegalna praštevila. Pridobljeno 10. februarja 2024 s spletne strani <https://kvarkadabra.net/2016/05/ilegalna-prastevila/>
- [7] Mohorčič, idr. (2014). Praštevilski razcep. Pridobljeno 8. januarja 2024 s spletne strani <https://eucbeniki.sio.si/vega1/21/index3.html>
- [8] Škrlec, Mateja (2015). Faktorizacija. Pridobljeno 10. februarja 2024 s spletne strani <https://eucbeniki.sio.si/vega3/315/index.html>
- [9] Lavrič, Boris (1988). O praštevilih. Presek, str. 84 <http://www.presek.si/16/928-Lavric.pdf>
- [10] Vidav, Ivan (2010). Katera praštevila so vsota dveh kvadratov naravnih števil?. Presek, str. 1 <http://www.presek.si/27/1393-Vidav.pdf>