PASCALOV IN LEIBNIZEV TRIKOTNIK

Raziskovalna naloga

Področje: OŠ, matematika ali logika

Avtorica: Anja SLAVINEC

Mentorica: Darja SEVER

Murska Sobota, marec 2024

Zahvala

Lepo se zahvaljujem mentorici Darji Sever za pomoč pri pripravi raziskovalne naloge, vse nasvete in usmerjanje pri iskanju literature ter za to, da mi je približala matematiko tako, da sem jo vzljubila.

Zahvaljujem se tudi mami in očetu, da sta me spodbujala in mi pomagala pri preiskavah.

POVZETEK

V raziskovalni nalogi sem preiskala nekaj lastnosti Pascalovega in Leibnizevega trikotnika. Po uvodu, v katerem sem opisala nekaj najpomembnejših lastnosti obeh trikotnikov in predstavila tudi potrebne matematične osnove, sem preiskala eno značilnosti Pascalovega trikotnika.

Pokazala sem, da je število poti od poljubnega števila v Pascalovem trikotniku do njegovega vrha kar enako temu število. Ker sem v literaturi našla le posamezne primere, da to res velja, se mi zdi zelo zanimivo splošno pravilo, ki sem ga ugotovila. Svojo trditev sem utemeljila še s pomočjo kombinatorike.

Ob koncu sem se dotaknila še primerjave obeh trikotnikov na primeru, kjer so odvodi funkcije iz Pascalovega trikotnika povezani s koeficienti v Leibnizevem trikotniku. Preiskala sem še določene lastnosti. Preverila sem poševne vrstice v obeh trikotnikih in ugotovila, da v obeh trikotnikih zasledimo figurativna števila. Vsota v poševnih vrsticah je enaka določenemu številu, bodisi v Pascalovem, bodisi v Leibnizevem trikotniku. Ta lastnost se imenuje nogavica oziroma hokejska palica. Preverila sem še produkte okrog posameznega števila in jih poimenovala cvetovi. V obeh trikotnikih sem zasledila fraktale oziroma trikotnik Sierpinskega.

Ključne besede: Pascalov trikotnik, Leibnizev trikotnik, binomski simbol

ABSTRACT

In my research paper, I investigated some properties of Pascal's and Leibniz's triangles. After the introduction, in which I described some of the most important properties of both triangles and also presented the necessary mathematical basics, I delved into examining one of the characteristics of Pascal's triangle.

I demonstrated that the number of paths from any number in Pascal's triangle to its vertex is exactly the same. While I found only isolated examples in the literature supporting this assertion, I found the general rule I discovered to be particularly intriguing. I substantiated my claim using combinatorics.

Additionally, I conducted research comparing the two triangles, focusing on an example where the derivatives of the function from Pascal's triangle are connected to the coefficients in Leibniz's triangle. I also explored certain properties, examining the slanted lines in both triangles and discovering figurative numbers present in both. The sum along the diagonal lines equates to a certain number, either in Pascal's or Leibniz's triangle—a characteristic referred to as a "sock" or "hockey stick." Furthermore, I investigated the multiplication around individual numbers, referring to it as a "flower." In both triangles, I observed fractals resembling the Sierpinski triangle.

Key words: Pascal's triangle, Leibniz's triangle, binomial symbol.

KAZALO

1. Uvod

Pascalov trikotnik je imenovan po francoskem matematiku **Blaisu Pascalu**, ki je prvi raziskoval njegove lastnosti v 17. stoletju, medtem ko Leibnizev trikotnik nosi ime po **Gottfriedu Leibnizu**, nemškem matematiku in filozofu, ki je bil eden od pionirjev raziskovanja tega trikotnika. Pascalov trikotnik in Leibnizev trikotnik sta matematični konstrukciji, ki temeljita na podobnih idejah, vendar imata nekatere pomembne razlike [1-5].

Podobnosti:

1. Oba trikotnika sta simetrična.
2. Oba trikotnika temeljita na binomskem razvoju in vsebujeta koeficiente binomskega razvoja.
3. Oba trikotnika imata enak vzorec, kjer se vsak element v vrstici oblikuje s seštevanjem dveh elementov v sosednji vrstici.

Razlike:

1. Pascalov trikotnik je zgrajen od zgoraj navzdol, spodnji člen je vsota zgornjih, v Leibnizevem trikotniku pa je ravno obratno, zgornji člen je vsota spodnjih dveh.
2. V Pascalovem trikotniku so vrednosti binomskega razvoja, kjer so koeficienti števila kombinacij. V Leibnizev trikotnik pa so ulomki s števcem 1 in se preko izbire imenovalcev doseže, da veljajo vsote.
3. Pascalov trikotnik se pogosto uporablja pri potencah binoma, v kombinatoriki in pri verjetnosti, medtem ko je Leibnizev trikotnik manj znan in se redkeje uporablja v matematiki.

Oba trikotnika imata pomembno vlogo pri različnih matematičnih aplikacijah in sta osnova za razumevanje binomskega razvoja.

2.1. Pascalov trikotnik

Pascalov trikotnik je geometrijska figura, ki jo sestavlja vrsta števil, znana kot Pascalove številke. Vsaka vrstica v trikotniku predstavlja koeficiente binomskega razvoja. Prva vrstica v trikotniku vsebuje število 1. Druga vrstica v trikotniku sta dve števili 1, začenši zamaknjeno pol mesta levo. Tudi vsaka naslednja vrstica se začne zamaknjena pol mesta levo in se zaključi pol mesta desno, zato ima eno številko več od zgornje vrstice. Vrednosti na skrajni levi in skrajni desni sta zmeraj enaki 1, vmesna števila pa so **vsota gornjih dveh**, kot vidimo iz spodnje sheme:

<table>
<tr><td>a</td><td>b</td></tr>
<tr><td colspan="2">a+b</td></tr>
</table>

V tretji vrstici imamo na levi in desni število 1, na sredini pa je število dva, ki je vsota 1 + 1 iz zgornje vrstice. V četrti vrstici dobimo pod enico in dvojko število 3, ki je vsota števil 1 + 2. Enako na sosednem mestu 2 +1 = 3.

V peti vrstici pod številoma 1 in 3 dobimo 4 (1+3=4) na sredini pa število 6 kot vsoto 3 plus 3. Že na prvi pogled vidimo, da je Pascalov trikotnik **simetričen**.

Kot primer v Tabeli 1 navajamo prvih šest vrstic Pascalovega trikotnika:

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Tabela 1: prvih šest vrstic Pascalovega trikotnika.

Pascalov trikotnik ima številne aplikacije v matematiki in drugih področjih. Uporablja se za **izračun binomskih koeficientov** v binomskem razvoju. To je zelo koristno pri razširjanju različnih potenc binoma, kot je:

$$(a + b)^n, \tag{1}$$

kjer je n potenca binoma, a in b pa sta člena binoma.

Pascalov trikotnik ima tudi **estetsko vrednost** in je pogosto uporabljen kot vzorec v umetnosti, oblikovanju in drugih kreativnih področjih. Pascalov trikotnik ima še številne druge lastnosti in področja uporabe.

Čeprav je bil Pascalov trikotnik prvotno razvit za matematične potrebe, je uporaben tudi v **fiziki** (npr. v statistiki) in **kemiji** (kemijska analiza in sinteza), njegove vzorce pa najdemo tudi v **naravi**. Tak primer je rast rastlin. Vzorce, ki spominjajo na Pascalov trikotnik, lahko opazimo pri rastlinah. Tako **razporeditev listov na steblu** ali **število cvetnih listov** v nekaterih cvetovih (marjetice, sončnice, vrtnice…), je pogosto 1, 3, 6, 10, kar so števila v trikotniku. Ta vzorec omogoča **optimalno izrabo svetlobe** in hranil za rastlino. Tudi številne **školjke in lupine živali** imajo spiralne vzorce, ki so povezani s Pascalovim trikotnikom.

Čeprav Pascalov trikotnik ni neposredno povezan z naravo, pa so njegovi matematični vzorci in lastnosti opazni v številnih naravnih strukturah. Te aplikacije nam pomagajo razumeti matematične principe, ki delujejo v naravi in prispevajo k njeni lepoti in funkcionalnosti.

2.2. Leibnizev trikotnik

Leibnizev trikotnik je podobna matematična oblika, kot je Pascalov trikotnik, vendar se nekoliko razlikuje v svoji strukturi. Leibnizev trikotnik je sestavljen iz vrstic, kjer se vsak element v vrstici oblikuje s seštevanjem dveh elementov v naslednji (spodnji) vrstici. Tudi Leibnizev trikotnik ima na vrhu število ena. V vsaki naslednji vrstici je na levi in desni ulomek s števcem ena in imenovalcem, ki je enak številu vrstice (tj. v tretji vrstici $\frac{1}{3}$, eno vrstico nižje $\frac{1}{4}$ in tako naprej).

Preostali členi Leibnizevega trikotnika so ulomki s števcem 1 imenovalec pa izračunamo tako, da je vsota dveh spodnjih števil enaka številu nad njima. Leibnizev trikotnik se torej izračuna ravno nasprotno kot Pascalov. Pri Leibnizevem trikotniku je **zgornja številka vsota spodnjih dveh**, kot kaže spodnja shema:

a+b

a | b

Kot primer navedimo nekaj prvih vrstic in pojasnimo, kako ga računamo. Na vrhu je število 1, ki ga za potrebo spodnjih vrstic zapišemo kot ulomek $\frac{1}{1}$. V spodnji vrstici imamo dva ulomka, oba s števcem 1 in imenovalcem 2. Ta vrstica je že vnaprej definirana in tudi ustreza predpisu, saj je: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}$. V tretji vrstici imamo na levi in desni skrajni legi ulomek $\frac{1}{3}$, saj gre za tretjo vrstico. Drugi element tretje vrstice izračunamo tako, da bo vsota spodnjih dveh enaka vrednosti števila nad njima. Hitro vidimo, da je pravi rezultat $\frac{1}{6}$ saj, velja:

$$\frac{1}{3}+\mathbf{\frac{1}{6}}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Po enakem vzorcu izračunamo naslednje vrstice. V četrti vrstici sta na robovih $\frac{1}{4}$. Drugi člen je ulomek $\frac{1}{12}$, saj velja: $\frac{1}{4}+\mathbf{\frac{1}{12}}=\frac{1}{3}$.

V peti vrstici po enakem postopku dobimo drugi člen na levi $\frac{1}{20}$, saj velja: $\frac{1}{5}+\mathbf{\frac{1}{20}}=\frac{1}{4}$.

Tretji člen v peti vrstici je $\frac{1}{30}$, saj velja: $\frac{1}{20}+\mathbf{\frac{1}{30}}=\frac{1}{12}$.

Četrti člen od leve je zaradi enakega računa kot pri drugem iz leve spet $\frac{1}{20}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Tabela 2: prvih šest vrstic Leibnizevega trikotnika.

Ker so števci vseh členov v trikotniku zmeraj enaki 1, so bolj zanimivi **imenovalci** teh ulomkov. Leibnizev trikotnik zaradi tega pogosto zapišemo z **obratnimi vrednostmi**, tako da v trikotnik zapišemo le imenovalce. Zapišimo Leibnizev trikotnik iz Tabele 2 z obratnimi vrednostmi, kot kaže Tabela 3:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 2 & & & & \\
 & & & 3 & & 6 & & 3 & & & \\
 & & 4 & & 12 & & 12 & & 4 & & \\
 & 5 & & 20 & & 30 & & 20 & & 5 & \\
6 & & 30 & & 60 & & 60 & & 30 & & 6
\end{array}
$$

Tabela 3: prvih šest vrstic obratnega Leibnizevega trikotnika (imenovalci).

V obratnem Leibnizevem trikotniku so vrednosti imenovalcev ulomkov. Leibnizev trikotnik je veliko manj znan kot Pascalov trikotnik, kljub temu pa ima nekaj aplikacij v matematiki in drugih področjih. V računalniških vedah se uporablja pri razvrščanju in iskanju.

Pascalov trikotnik je veliko bolj poznan in veliko bolj raziskan od Leibnizevega trikotnika, tudi na nivoju raziskovalnih nalog mladih raziskovalcev [6 - 8]. V nadaljevanju se bom zato najprej posvetila Pascalovemu trikotniku, na koncu pa se dotaknila nekaj zanimivih povezav med Pascalovim in Leibnizevim trikotnikom [9].

2. Binomski simbol

Pascalov trikotnik je geometrijski pripomoček za izračun koeficientov binomskega simbola [10], ki ga pogosto uporabimo pri nižjih potencah binoma. Kot primer navedimo četrto potenco binoma:

$$(a + b)^4 = \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4. \qquad (2)$$

V enačbi (2) smo odebelili koeficiente pred členi, ki so številke iz četrte vrstice v Pascalovem trikotniku (zaradi analogije s potenco binoma enico na vrhu štejemo kot vrstico z zaporedno številko nič), predstavljenem v Tabeli 1. Zaradi preglednosti smo pripisali tudi koeficienta 1 pri prvem in zadnjem členu.

Pri velikih potencah binoma Pascalov trikotnik več ni praktično uporaben, zato takrat uporabljamo binomski simbol:

$$(a + b)^n = \binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{0}}a^nb^0 + \binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{1}}a^{n-1}b^1 + \binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n-1}}a^1b^{n-1} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}a^0b^n. \qquad (3)$$

Binomski simbol zapišemo z dvema številkama n in r v oklepaju eno nad drugo: $\binom{n}{r}$ in imenujemo **n nad r**.

Binomski simbol izračunamo tako, da v imenovalec ulomka zapišemo produkt prvih zaporednih števil **od 1 do *r***, v števec pa produkt zaporednih naravnih števil od ***n* do *n* - *r***. Za lažjo predstavo zapišimo primer:

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10, \qquad (4)$$

koliko je tudi tretji (prvi člen, tisti na levi poševni vrstici tudi tukaj označimo z zaporedno številko nič) člen v četrti vrstici Pascalovega trikotnika v tabeli 1. Binomski simbol splošno zapišemo z matematično operacijo **»n fakulteta«**, ki jo označimo z $n!$ in pomeni produkt prvin n zaporednih naravnih števil:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n\,. \qquad (5)$$

Binomski simbol, zapisan s to novo matematično operacijo, ima obliko:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\,. \tag{6}$$

Iz enačbe (6) lahko vidimo, da je vrednost binomskega simbola »*n nad nič*« zmeraj enaka 1, prav tako je binomski simbol »*n nad n*« zmeraj enak 1, zato sta v Pascalovem trikotniku v vsaki vrstici na levi in desni strani vrednosti 1.

Prav tako vidimo, da ima druga levi poševni stolpec in predzadnji desni poševni stolpec (to so številke, ki so na levi ali desni strani ob vrednosti 1) zmeraj vrednost enako zaporedni številki vrstice to je *n*.

Oglejmo si nekaj primerov:

$$\binom{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{1} = 2, \tag{7a}$$

$$\binom{3}{1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 3, \tag{7b}$$

$$\binom{4}{1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4, \tag{7c}$$

Pascalov trikotnik, zapisan z binomskimi simboli, ima obliko, kot je razvidno v spodnji Tabeli 4.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \ \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \ \binom{2}{1} \ \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \ \binom{3}{1} \ \binom{3}{2} \ \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \ \binom{4}{1} \ \binom{4}{2} \ \binom{4}{3} \ \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \ \binom{5}{1} \ \binom{5}{2} \ \binom{5}{3} \ \binom{5}{4} \ \binom{5}{5}$$

Tabela 4: Prvih šest vrstic Pascalovega trikotnika zapisanega z binomskimi simboli

Tudi obratni Leibnizev trikotnik (imenovalci) lahko zapišemo z binomskim simbolom (Tabela 5), in sicer:

$$(n+1) \cdot \binom{n}{r} = (n+1) \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{8}$$

Pri čemer sta $n \geq 0$ in $r \geq 0$ in n predstavlja vrstice, r pa elemente v vrsticah.

$$1 \cdot \binom{0}{0}$$

$$2 \cdot \binom{1}{0} \quad 2 \cdot \binom{1}{1}$$

$$3 \cdot \binom{2}{0} \quad 3 \cdot \binom{2}{1} \quad 3 \cdot \binom{2}{2}$$

$$4 \cdot \binom{3}{0} \quad 4 \cdot \binom{3}{1} \quad 4 \cdot \binom{3}{2} \quad 4 \cdot \binom{3}{3}$$

$$5 \cdot \binom{4}{0} \quad 5 \cdot \binom{4}{1} \quad 5 \cdot \binom{4}{2} \quad 5 \cdot \binom{4}{3} \quad 5 \cdot \binom{4}{4}$$

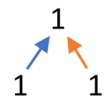
$$6 \cdot \binom{5}{0} \quad 6 \cdot \binom{5}{1} \quad 6 \cdot \binom{5}{2} \quad 6 \cdot \binom{5}{3} \quad 6 \cdot \binom{5}{4} \quad 6 \cdot \binom{5}{5}$$

Tabela 5: Prvih šest vrstic Leibnizev trikotnik (imenovalci) zapisanega z binomskimi simboli

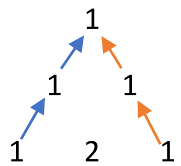
3. Število navpičnih poti do vrha Pascalovega trikotnika

Zanimivo vprašanje je, koliko je različnih možnih poti od nekega števila **navzgor do vrha** Pascalovega trikotnika, tj. do številke 1 na vrhu. Za pot navzgor do vrha štejemo poti, ki so iz neke vrstice usmerjene navzgor, bodisi levo ali desno, ne štejejo pa poti, ki bi imele kakršen koli korak vodoravno, torej levo ali desno, znotraj posamezne vrstice. Dokler vrstica vsebuje malo členov, tj. dokler gre za vrstice, ki ustrezajo majhni potenci binoma, je teh poti malo in jih lahko ugotovimo s poskušanjem. Poti je tem več, čim bolj na sredini trikotnika je izbrani člen, saj je v tem primeru več različnih možnih izbir levo ali desno pri prestopu v višjo vrstico. Če se v višjo vrstico premaknemo do leve številke, bomo to imenovali **levi poševni stolpec** in označimo z **L**, v kolikor pa se pri prehodu navzgor premaknemo desno, pa bomo to imenovali **desni poševni stolpec** in označimo z **D**. Oglejmo si nekaj primerov in poskusimo ugotoviti splošno pravilo.

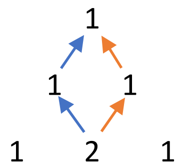
Začnimo s prvo vrstico in vidimo, da je možna **le ena pot navzgor**, bodisi desni poševni stolpec iz leve enice ali levi poševni stolpec iz desne enice.



V drugi vrstici je skrajno levo število 1 in edina možna pot navzgor je desni poševni stolpec do števila 1 v drugi vrstici in še enkrat desni poševni stolpec do enke na vrhu (modra puščica). To je edina možna pot navzgor. Enako je edina možna pot navzgor od desne enice, dva koraka po levem poševnem stolpcu (rdeča puščica). To velja splošno. Iz katere koli vrstice je od enic na robu trikotnika, zmeraj možna **le ena pot navzgor** tista, ki vodi po robu trikotnika.

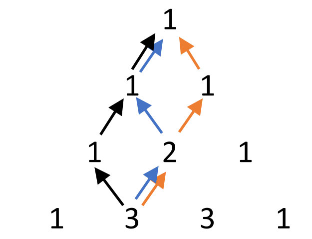


Ta vrstica je bolj zanimiva od številke 2 na sredini:



Ena možnost je levi poševni stolpec in nato desni poševni stolpec, označena z dvema modrima puščicama. Druga možnost pa je desni poševni stolpec in nato levi poševni stolpec, označeno z rdečima puščicama. Od **dvojke** imamo **dve** različni možni poti do vrha (LD ali DL). Vidimo, da je iz tretje vrstice do vrha toliko različnih poti, koliko je vrednost števila, od katerega gledamo te poti.

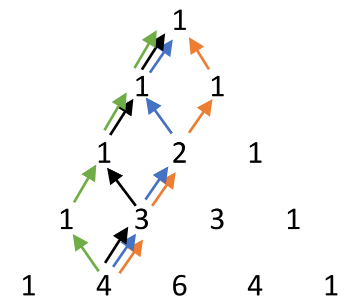
Poiščimo možne poti iz tretje vrstice. Zgoraj smo že ugotovili, da je od vsake skrajne enice možna le po ena pot. Poglejmo še možne poti od ene izmed trojk, začnimo npr. z levo trojke.



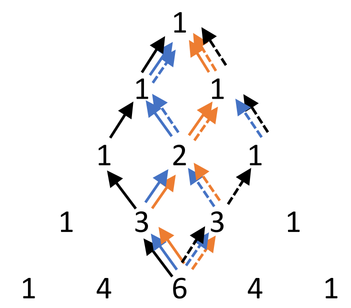
Ena možna pot je levi poševni stolpec do enice vrstico višje in nato dve desni diagonali do vrha, kot prikazujejo črne puščice. Druga možnost pa je desni poševni stolpec do števila dva, od koder smo pri analizi druge vrstice ugotovili, da do vrha vodita dve poti, kot prikazujejo rdeče in modre puščice. Skupaj smo torej od števila **tri** našli **tri različne poti** do vrha (LDD, DLD in DDL). Zaradi simetrije so tri različne možne poti tudi od desnega števila tri.

Število tri smo dobili kot vsoto števil 1 od katere je le ena pot navzgor in števila dva, od koder pa sta dve poti navzgor. Do zdaj lepo velja, da je število poti navzgor res enako številki, od katere jih štejemo. Ker števila v spodnjih vrsticah dobimo kot vsoto dveh števil v višji vrstici, to pa pomeni tudi števili različnih poti, že daje slutiti, da kot se seštevajo števila, se sešteva tudi število različnih poti in bo res obveljalo pravilo, da je število različnih poti enako številu, od katerega jih štejemo.

Naslednja je številka 4 v četrti vrstici. Enako kot vrstico višje tudi tukaj vidimo, da je od štirice možna pot levi poševni stolpec do enice in potem trikrat po desnem poševnem stolpcu do enice na vrhu, označeno z zelenimi puščicami. Druga možnost pa je desni poševni stolpec do trojke in nato tri različne možne poti do vrha, kot smo to prej ugotovili pri analizi četrte vrstice. Skupaj od **štirice** vodijo do vrha **štiri različne poti** (LDDD, DLDD, DDLD in DDDL), označene z rdečimi, modrimi, črnimi in zelenimi puščicami.



Naslednja v tej vrstici je številka 6.



Od šestice se v višjo vrstico lahko premaknemo po levem poševnem stolpcu do levega števila tri v višji vrstici. Od tod pa navzgor peljejo tri različne poti, kot kažejo črna, modra in rdeča puščica in smo raziskali že v prejšnji vrstici.

Od šestice pa se lahko premaknemo tudi po desnem poševnem stolpcu do gornje trojke, od koder prav tako navzgor vodijo tri različne poti, označene s črtkanimi puščicami črne, modre in rdeče barve. Skupaj od števila **šest** do vrha vodi **šest različnih poti**.

Do zdaj smo zmeraj našli do vrha toliko različnih poti, kot je vrednost številke, od katere smo iskali poti do vrha. To nas navaja do sklepa, da je **število različnih poti do vrha enako številu, od katerega iščemo poti do vrha**. Pravilo sem preverila še za naslednje tri vrstice, česar pa ne bom prikazovala, saj postanejo števila že zelo velika in zaradi tega prikaz različnih poti nepregleden, zato za naslednjo vrstico le zapišem, kako sem seštela poti do vrha in kako ugotovila, da je število poti do vrha zmeraj enako številki, od katere jih iščemo.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

V šesti vrstici imamo ob levi enki število pet. Enako kot v višjih vrsticah imamo dve možnosti. Levi poševni stolpec do enke, od koder ena pot do vrha. Desni poševni stolpec pa do štirice, od koder pa smo ugotovili, da so štiri poti do vrha. Skupaj je torej $1 + 4 = 5$ poti do vrha.

Desno v tej vrstici je število 10. Spet imamo dve možnosti. Levi poševni stolpec nas vodi do števila 4, od koder smo prej raziskali, da so štiri poti do vrha. Desni poševni stolpec pa nas vodi do števila 6, od koder je šest poti do vrha. Skupaj torej $4 + 6 = 10$ različnih poti do vrha.

Splošno pravilo izhaja kar iz pravila za računanje Pascalovega trikotnika. Spodnje število je vsota gornjih dveh. Število različnih poti od gornjih dveh je enako tema dvema številkama. Število različnih poti od spodnje številke je vsota števila različnih poti od gornje leve številke in gornje desne številke. To pa je kar vrednost spodnjega števila, ki je namreč tako tudi izračunano, da seštejemo obe gornji številki. Iz tega vidimo, da je **število različnih poti** res **enako številki**, od katere iščemo poti do vrha.

V literaturi sem našla narisane različne poti do vrha in res se je zmeraj izkazalo, da se jih je toliko, kot je vrednost same številke. Nikjer pa nisem našla zapisanega splošnega pravila, da to zmeraj velja. Splošno pravilo izhaja iz pravila Pascalovega trikotnika, da je spodnja številka vsota gornjih dveh, s tem pa je tudi število poti enako vsoti različnih poti do gornjih dveh.

Opisano preiskovanje iz vrstice v vrstico je postreglo tudi z enostavnim in zanesljivim načinom, kako dejansko poiskati vse različne poti. Dokler nisem tega počela iz vrstice v vrstico, ampak sem začela na neki spodnji vrstici, sem kakšno izmed različnih poti tudi spregledala. Pravilo iskanja poti izhaja iz pravila Pascalovega trikotnika. S pomočjo tabele 4 sem povezala iskanje poti s kombinatoriko.

3.1. Kombinacije brez ponavljanja

Pascalov trikotnik se uporablja tudi pri **kombinacijah**, pri **štetju**, kjer **vrstni red ni pomemben**. Imamo množico z $\boldsymbol{n}$ različnimi elementi in iz nje izbiramo $\boldsymbol{r}$ različnih elementov, s katerimi želimo oblikovati različne kombinacije, kjer pa vrstni red ni pomemben.

Kot primer si oglejmo števila 1, 2, 3, in 4 ($n = 4$), pa poglejmo, koliko različnih parov števil ($r = 2$)lahko izberemo? Naštejmo vse možnosti: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4). Pare števil izbrane v obrnjenem vrstnem redu, npr. (1, 3) in (3, 1) štejemo kot en par, zato tako izbiro imenujemo **kombinacije brez ponavljanja**.
Pare smo izbirali tako, da smo najprej vzeli enega in zraven dali vse preostale možne, taki pari so bili trije, v splošnem torej ($n - 1$), če je n število vseh, izmed katerih izbiramo. V naslednjem koraku smo vzeli drugi element in mu spet dodali vse preostale možne. Taka para sta bila dva oz. v splošnem ($n - 2$) možnosti in na koncu še zadnji par.
Velja pravilo, da število kombinacij brez ponavljanja tako izračunamo na naslednji način:

$$C_n^r = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \binom{n}{r}, \qquad (9)$$

kjer je C_n^r število kombinacij brez ponavljanja.
V mojem primeru n predstavlja **število korakov navzgor**. Število r predstavlja **število korakov levo** poševno navzgor. Število $(n - r)$ pa predstavlja **število korakov desno** poševno navzgor. Svojo trditev sem preverila na enem primeru.

Primer: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 10$

Do vrha imamo pet korakov navzgor. Premikamo se lahko levo poševno navzgor ali pa desno poševno navzgor. V vsakem primeru bomo šli dvakrat levo poševno navzgor in trikrat desno poševno navzgor (LLDDD). Poiščemo lahko natanko 10 kombinacij.

1. LLDDD	4. LDDLD	7. DDLLD	10. DLDLD
2. LDDDL	5. DDDLL	8. DLDDL	
3. LDLDD	6. DDLDL	9. DLLDD	

S tem sem svojo trditev, da je **število različnih poti** res **enako številki**, od katere iščemo poti do vrha, še dodatno utemeljila.

4. Primerjava Pascalovega in Leibnizevega trikotnika

Pascalov in obrnjeni (inverzni) Leibnizev trikotnik imata več podobnosti. To izhaja iz pravila, da so pri obeh trikotnikih elementi izračunani tako, da seštejemo sosednje številke bodisi zgornje ali spodnje vrstice.

4.1. Primerjava sosednjih vrstic v Pascalovem in Leibnizevem trikotniku.

Zapišimo eno izmed vrstic obeh trikotnikov in primerjajmo številke. Enačbo (2), v kateri smo zapisali četrto potenco binoma, zdaj zapišimo za poseben primer, ko je $a = x$ in $b = 1$:

$$(x + 1)^4 = \mathbf{1}x^{\mathbf{4}} + \mathbf{4}x^{\mathbf{3}} + \mathbf{6}x^{\mathbf{2}} + \mathbf{4}x^{\mathbf{1}} + \mathbf{1}x^{\mathbf{0}}. \tag{10}$$

Posebej smo odebelili številke iz Pascalovega trikotnika (1, 4, 6, 4, 1) in potence, v katerih je spremenljivka *x*. Za lažje računanje smo x zapisali kot $x^{\mathbf{1}}$ in število 1 kot $x^{\mathbf{0}}$.

Izkaže se, da je s temi členi na poseben način povezana tretja (torej ena vrstica višje) obrnjenega Leibnizevega trikotnika (imenovalci). Če namreč izračunamo produkte številk v Pascalovem trikotniku in pripadajočo potenco, dobimo številke v prejšnji vrstici Leibnizevega trikotnika.

$$1 \cdot 4 = \mathbf{4};\quad 4 \cdot 3 = \mathbf{12};\quad 3 \cdot 4 = \mathbf{12};\quad 4 \cdot 1 = \mathbf{4}$$

4 12 12 4

To velja tudi za druge pare vrstic Pascalovega in Leibnizevega trikotnika.

Produkt koeficienta pred členom potence in potence pa je pravilo, kako se izračuna **odvod potenčne funkcije** $f(x)$, kar označimo s funkcijo $f'(x)$ (imenujemo jo *»f črtica«*) in funkciji izračuna njeno strmino. Pravilo je, da se potenca pomnoži s koeficientom, potenca pa se zmanjša za ena:

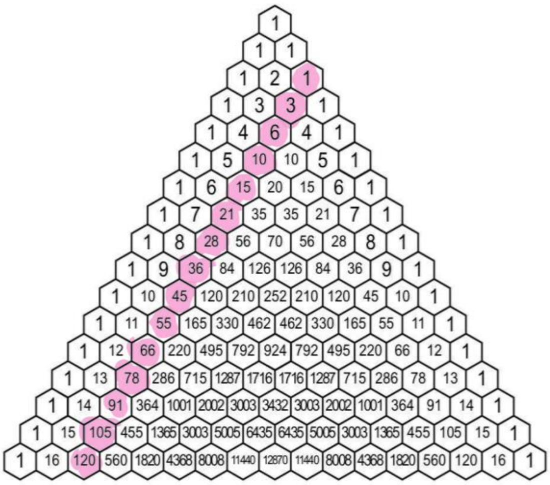
$$f(x) = ax^n \rightarrow = f'(x) = a \cdot n \cdot x^{(n-1)}. \tag{11}$$

Zaradi tega, ker se potenca zmanjša za ena, izbrano vrstico Pascalovega trikotnika, primerjamo z eno vrstico višje v obrnjenem Leibnizevem trikotniku (imenovalci).

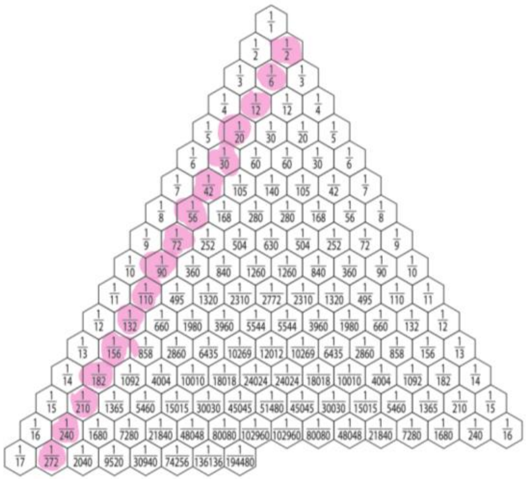
4.2. Figurativna števila v Pascalovem in Leibnizevem trikotniku

Mnogokotniško ali figurativno števila je v matematiki število, ki ga lahko predstavimo s številom točk, razporejeno v dogovorjeno matematično strukturo [11].

4.1.1. Trikotniška števila v Pascalovem in Leibnizevem trikotniku

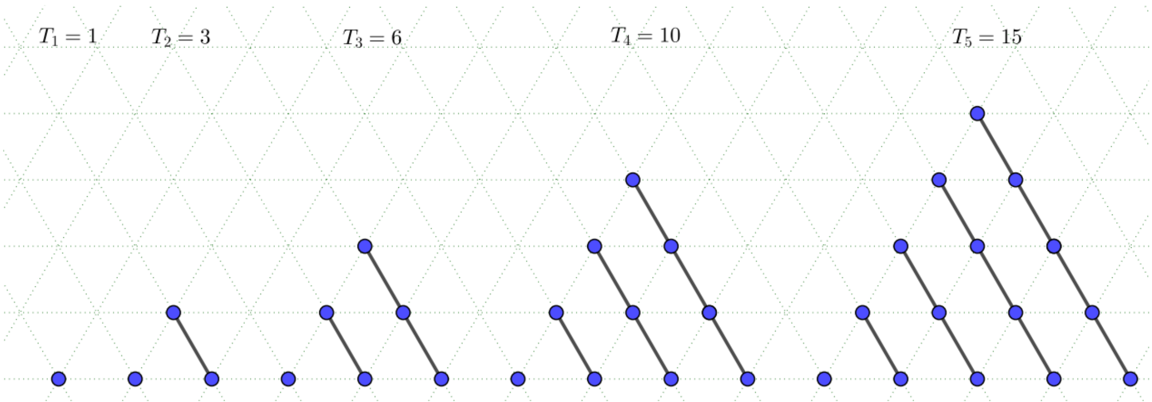


Slika 1: Trikotniška števila v Pascalovem trikotniku



Slika 2: Trikotniška števila v Leibnizevem trikotniku

Trikotniško število je v matematiki število, ki predstavlja število objektov, ki jih lahko razmestimo v obliko (enakostraničnega) trikotnika. Trikotniška števila so poseben primer splošnejših figurativnih (oziroma mnogokotniških) števil.



Slika 3: Trikotniška števila [11]

Po dogovoru je 1 prvo trikotniško število. Sledijo pa: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, ...

Splošni člen trikotniških števil je:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{12a}$$

Ugotovitev ni slučajna, ampak izhaja in tega, da so v **tretji poševni vrstici** Pascalovega trikotnika števila zapisana z binomskim simbolom $\binom{n+1}{2}$.

Iz enačbe (6) pa lahko vidimo, da je vrednost:

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!\cdot 2!} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!\cdot 2!} = \frac{(n+1)\cdot n}{2} \;; \quad n \in \mathbb{N} \tag{12b}$$

Pa poglejmo še drugo poševno vrstico Leibnizevega trikotnika:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$$

In sicer:

$$\frac{1}{2\cdot 1}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{2\cdot 6}, \frac{1}{2\cdot 10}, \frac{1}{2\cdot 15}, \frac{1}{2\cdot 21}, \dots$$

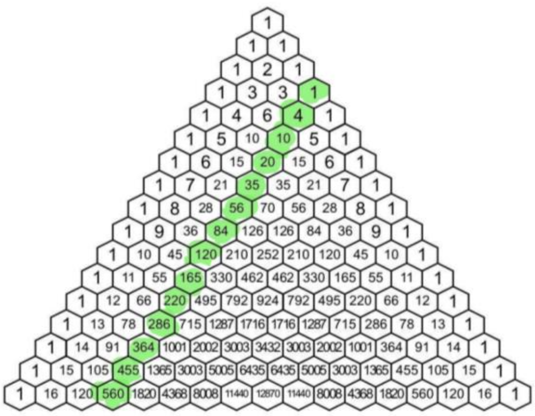
Opazimo, da so v imenovalcih dvakratniki trikotniških števil.

V drugi poševni vrstici obrnjenega Leibnizevega trikotnika (imenovalci) velja:

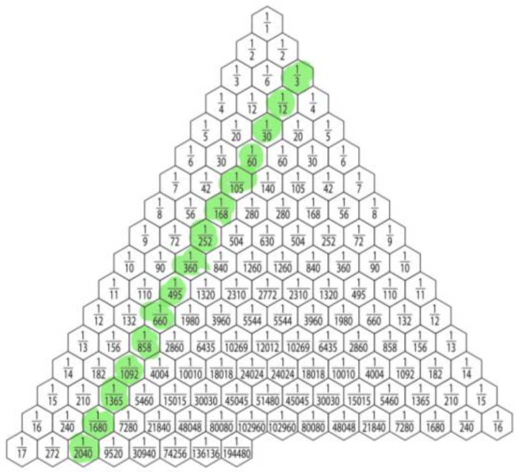
$$(n+1)\binom{n}{1} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)\cdot n \;; \quad n \in \mathbb{N} \tag{12c}$$

V enačbo (12c) ugotovimo, da so to dvakratniki trikotniških števil.

4.2.2. Tetraedrska števila v Pascalovem in Leibnizevem trikotniku



Slika 4: Tetraedrska števila v Pascalovem trikotniku



Slika 5: Tetraedrska števila v Leibnizevem trikotniku

Tetraedrsko število je v matematiki število, ki predstavlja število objektov, ki jih lahko razmestimo v obliko tetraedra.

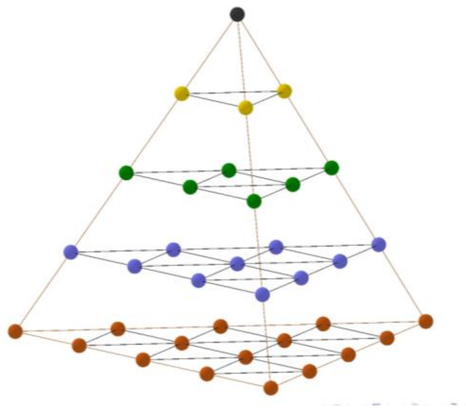
Po dogovoru je 1 prvo tetraedrsko število. Sledijo pa:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120…

Tetraedrsko število dobimo z vsoto zaporednih trikotniških števil.

$\mathcal{T}_2 = T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4$

$\mathcal{T}_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 1 + 3 + 6 = 10$



Slika 6: Peto tetraedrsko število [11]

$$\mathcal{T}_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \tag{13a}$$

V **četrti poševni vrstici** Pascalovega trikotnika so števila zapisana z binomskim simbolom $\binom{n+2}{3}$.

Iz enačbe (6) lahko vidimo, da je vrednost:

$$\binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)!}{(n+2-3)!\cdot 3!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!\cdot 3!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{3\cdot 2\cdot 1}; \quad n \in \mathbb{N} \tag{13b}$$

Pa poglejmo še **tretjo poševno vrstico** Leibnizevega trikotnika:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \frac{1}{105}, \frac{1}{168}, \dots$$

In sicer:

$$\frac{1}{3\cdot 1}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{3\cdot 10}, \frac{1}{3\cdot 20}, \frac{1}{3\cdot 35}, \frac{1}{3\cdot 56}, \dots$$

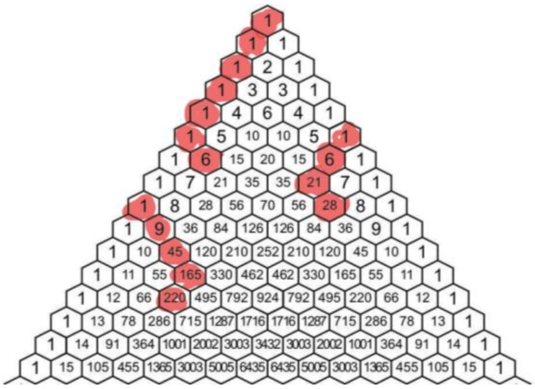
Opazimo, da so v imenovalcih trikratniki tetraedrskih števil.

V tretji poševni vrstici obrnjenega Leibnizevega trikotnika (imenovalci) velja:

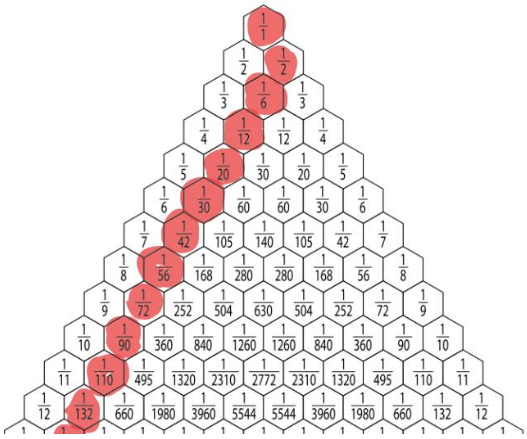
$$(n+2)\binom{n+1}{2} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{2!\cdot(n-1)!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{2!\cdot(n-1)!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{2}; \quad n \in \mathbb{N} \qquad (13c)$$

Z enačbo (13c) ugotovimo, da so to trikratniki tetraedrskih števil.

4.3. Nogavice v Pascalovem in Leibnizevem trikotniku



Slika 7: Nogavice v Pascalovem trikotniku



Slika 8: Nogavice v Leibnizevem trikotniku

V Pascalovem trikotniku velja, da je vsota prvih n števil iz neke poševne vrstice enaka n-temu številu iz naslednje poševne vrstice.

Nogavice (oziroma **hokejske palice**) veljalo iz prejšnje lastnosti števil po poševnih vrsticah.

Primeri:

$1+1+1+1+1+1=6$

$1+9+45+165=220$

$1+6+21=28$

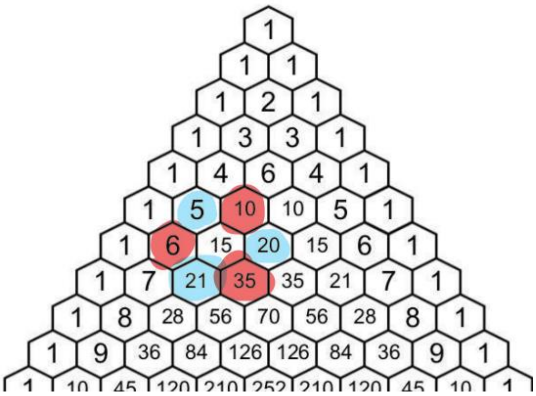
Vse nogavice se začnejo v enki na robu Pascalovega trikotnika, lahko so različno dolge, vse pa imajo enako velika stopala.

Nogavice zaznamo tudi v Leibnizevem trikotniku. Vsota števil v drugi poševni vrstici je enaka 1.

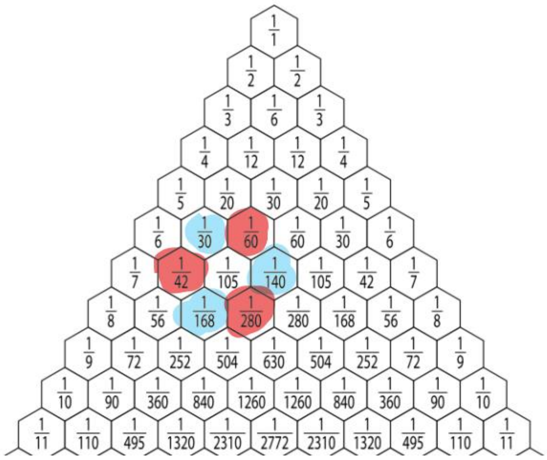
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots=$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots=$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{1}{1}=1$$

Podoben račun pa pokaže, da je vsota števil v tretji poševni vrstici enaka $\frac{1}{2}$. [12]

4.4. Cvetovi v Pascalovem in Leibnizevem trikotniku



Slika 9: Cvetovi v Pascalovem trikotniku



Slika 10: Cvetovi v Leibnizevem trikotniku

Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih je enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.

Primer v Pascalovem trikotniku.

$6 \cdot 35 \cdot 10 = 2100$

$5 \cdot 21 \cdot 20 = 2100$

Primer v Leibnizevem trikotniku.

$$\frac{1}{42} \cdot \frac{1}{280} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{705600}$$

$$\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{140} \cdot \frac{1}{168} = \frac{1}{705600}$$

Ugotavljam, da ta lasnost velja v obeh trikotnikih.

Tudi to ni naključje ampak izhaja iz binomskega simbola v Pascalovem trikotniku, kjer z modro barvo označimmodre »liste«, z redečo pa rdeče »liste«. S črno barvo pa je označen sredinski »list«.

$$\begin{array}{c} \binom{n-1}{r-1} \quad \binom{n-1}{r} \\ \binom{n}{r-1} \quad \binom{n}{r} \quad \binom{n}{r+1} \\ \binom{n+1}{r} \quad \binom{n+1}{r+1} \end{array}$$

Produkt modrih listov:

$$\binom{n-1}{r-1}\cdot\binom{n}{r+1}\cdot\binom{n+1}{r}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot(n-1-(r-1))!}\cdot\frac{n!}{(r+1)!\cdot(n-(r+1))!}\cdot\frac{(n+1)!}{r!\cdot(n+1-r)!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot(n-r)!}\cdot\frac{n!}{(r+1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{r!\cdot(n-r+1)!}$$

$$=\frac{(n-1)!\cdot n!\cdot(n+1)!}{(r-1)!\cdot r!\cdot(r+1)!\cdot(n-r)!\cdot(n-r-1)!\cdot(n-r+1)!}$$

Produkt rdečih listov:

$$\binom{n-1}{r}\cdot\binom{n}{r-1}\cdot\binom{n+1}{r+1}$$

$$=\frac{(n-1)!}{r!\cdot(n-1-r)!}\cdot\frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-(r-1))!}\cdot\frac{(n+1)!}{(r+1)!\cdot(n+1-(r+1))!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{r!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(r+1)!\cdot(n-r)!}$$

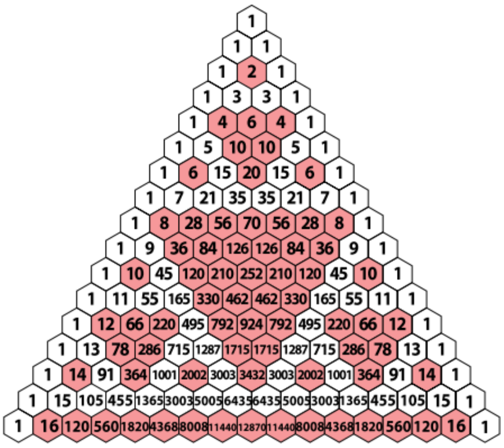
$$=\frac{(n-1)!\cdot n!\cdot(n+1)!}{(r-1)!\cdot r!\cdot(r+1)!\cdot(n-r)!\cdot(n-r-1)!\cdot(n-r+1)!}$$

S tem sem dokazala, da je produkt v modrih in produkt v rdečih cvetnih listih res **vedno enak**.

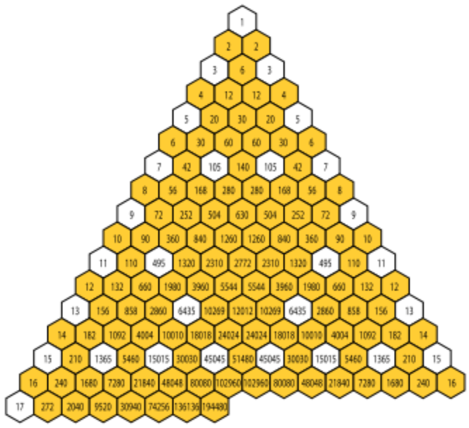
4.5. Večkratniki v Pascalovem in Leibnizevem trikotniku (imenovalci)

Pri prebiranju literature sem zasledila zanimive barvne sheme Pascalovega in obrnjenega Leibnizevega trikotnika (imenovalci). Opazila sem, da se pri barvanju večkratnikov naravnih števil (2, 3, 4, 5…), pojavljajo zanimivi vzorci (trikotniki). Zanimalo me je več o teh trikotnikih.

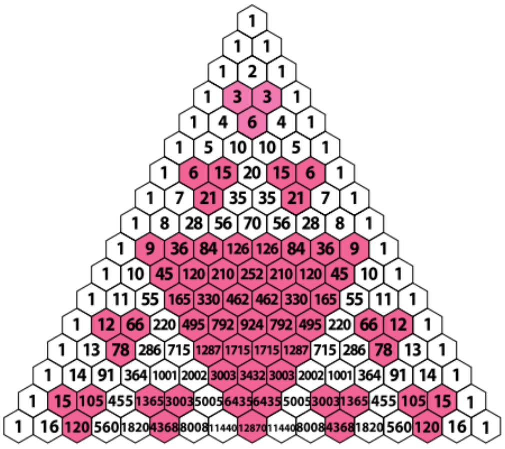
Vsa števila v n-ti vrstici (pa naj gre za vodoravne ali poševne) so večkratniki števila n.



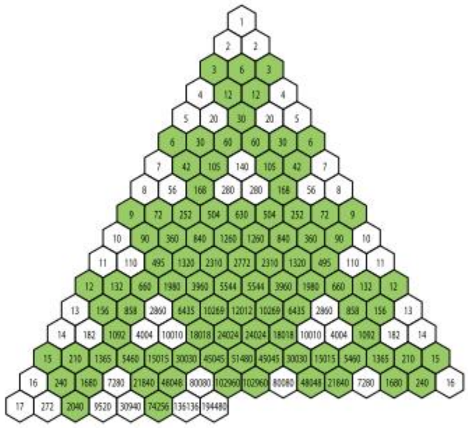
Slika 11: Večkratniki števila 2 v Pascalovem trikotniku [1]



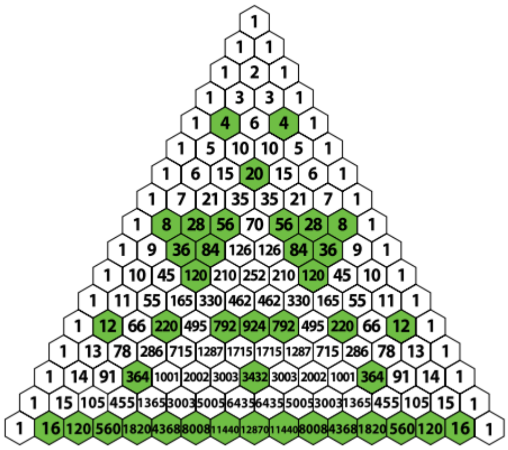
Slika 12: Večkratniki števila 2 [2] v obatnem Leibnizevem trikotniku (imenovalci)



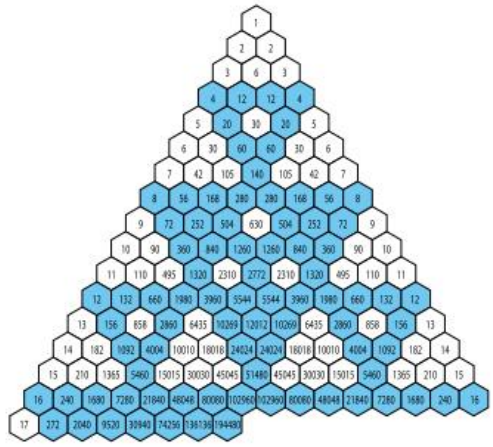
Slika 13: Večkratniki števila 3 v Pascalovem trikotniku [1]



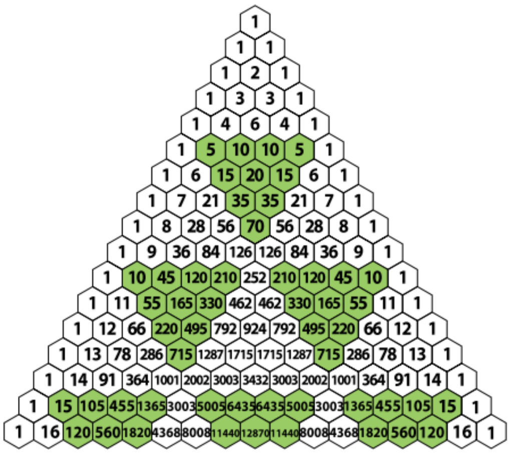
Slika 14: Večkratniki števila 3 v obratnem Leibnizevem trikotniku (imenovalci) [2]



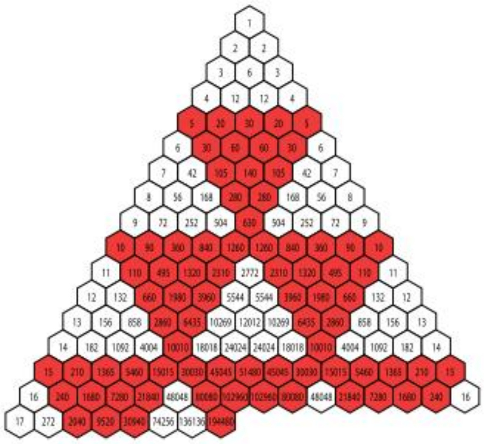
Slika 15: Večkratniki števila 4 v Pascalovem trikotniku [1]



Slika 16: Večkratniki števila 4 v obratnem Leibnizevem trikotniku (imenovalci) [2]



Slika 17: Večkratniki števila 5 v Pascalovem trikotniku [1]



Slika 18: Večkratniki števila 5 v obratnem Leibnizevem trikotniku (imenovalci) [2]

Zasledila sem, da je to fraktal znan kot trikotnik Sierpinskega. Fraktal je oblika, ki se neskončno ponavlja, ne glede na to, kako majhna/velika je.

Slika 19: Trikotnik Sierpinskega [13]

5. Zaključek

Pascalov in Leibnizev trikotnik sta zelo zanimiva matematična objekta, ki sta po svoji naravi zelo različna, kažeta pa nekatere podrobnosti.

Vsak po svoje sta tudi uporabna na različnih področjih v matematiki, pa tudi v fiziki, kemiji, biologiji in naravoslovju.

Bolj znan je Pascalov trikotnik, ki ga tudi učenci bolj poznamo in je narejenih več raziskav. Moja najpomembnejša preiskava se mi zdi ugotovitev, da je **število različnih poti od nekega števila v Pascalovem trikotniku enako temu številu**, od katerega poti iščemo. Da je tako, sem videla v več raziskovalnih nalogah, vendar so vsi to potrjevali le z navedbo poti, nekateri so jih tudi zelo veliko navedli. Nikjer pa nisem zasledila splošnega pravila in razlage, zakaj je to zmeraj tako, zato se mi zdi pomembna ugotovitev, da je število poti kar vsota zgornjih števil in to tako do vrha trikotnika. Iskanje pravila sem povezala tudi s kombinacijami brez ponavljanja, ki jih izračunamo s pomočjo binomskega simbola.

Zanimiva je tudi preiskava podobnosti med sosednjimi vrsticami v Pascalovem in Leibnizevem trikotnikom, ki sem jo v tej raziskovalni nalogi le prikazala, podrobnejša preiskava pa je še naloga za v prihodnje.

Na koncu sem preiskala nekaj lastnosti v Pascalovem in Leibnizevem trikotniku. Bolj sem se osredotočila na obrnjeni (inverzni) Leibnizev trikotnik, trikotnik z imenovalci. Zaznala sem trikotniška in tetraedrska števila. Poiskala sem nogavice oziroma hokejske palice v obeh trikotnikih. Preverila sem tudi produkte okrog posameznega števila, tako imenovane cvetove. Zanimivo mi je bilo tudi iskanje večkratnikov v obeh trikotnikih.

6. Literatura

[1] S. Rajh, Pascalov aritmetični trikotnik, Matematika v šoli št. 2/2017, letnik 23

[2] S. Rajh, Leibnizev harmonični trikotnik, Matematika v šoli, št. 2/2017, letnik 23,

[3] S. Rajh, Preiskujmo v Pascalovem trikotniku, Scientix, ZRSŠ, 2017

[4] S. Rajh, Preiskujmo v Leibnizevem trikotniku, Scientix, ZRSŠ, 2017

[5] S. Rajh, Priloga, Scientix, ZRSŠ, 2017

[6] A. Banjačkovič in dr., Posplošitev Pascalovega trikotnika na višje dimenzije, RN, Gimnazija Poljane, 2009

[7] K. Majdič, Pascalov trikotnik, RN, Gimnazija Ormož, 2008

[8] P. Pliberšek, Potenciranje dvočlenika, RN, OŠ dr. Jožeta Pučnika Črešnjevec, 2016

[9] https://www.mathrecreation.com/2009/10/harmonic-denominator-number-triangle.html

[10] https://si.openprof.com/wb/binomski_izrek?ch=156

[11] https://www2.arnes.si/~supmrazp/Zgodovina/Figurativna_1a.pdf

[12] https://scholarworks.lib.csusb.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1969&context=etd

[13] https://www.zrss.si/kupm2016/wp-content/uploads/od-pascalovega-do-leibnizovega-trikotnika-kupm_2016_predstavitev.pdf