Mladi raziskovalci Slovenije 2024
58. srečanje

KAKO SE KONČA?

Matematika ali logika
Raziskovalna naloga

OŠ Bojana Ilicha, Maribor

Avtorja: Urban Globevnik

Rok Kavnik

Mentor: Jožef Senekovič

Maribor 2024

KAZALO

Povzetek

Poznamo potence in znamo izračunati vrednost potenc. Pri potencah z veliko stopnjo je izračun potence lahko zahteven. V raziskovalni nalogi bomo raziskali ali lahko napovemo števko, s katero se zaključi vrednost poljubne potence. Pri tem bomo izhajali iz konkretnih primerov in sklepali na potence s poljubno osnovo ali stopnjo.

Ključne besede: potence, vrednost potence, osnova potence

1. UVOD

Poznamo potence. Gre za zapis množenja enakih faktorjev. Osnova potence je število, ki ga med seboj množimo tolikokrat, kot je stopnja potence. Kar izračunamo je vrednost potence. Poglejmo primera potenc:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

Obe potenci se končata s števko 8 na mestu enic. Če poznamo samo ta dva primera, bi lahko sklepali, da se vsaka vrednost potence z osnovo 2 konča s števko 8 na mestu enic, kar seveda ne drži. Vemo, da je recimo $2^5 = 32$, kar pomeni da je na mestu enic števka 2.

Prav tako lahko vprašamo ali se potenca 3^3 ali 6^3 konča s števko 8 (na mestu enic). Ali za navedeni potenci velja drugačna zakonitost kot za potence z osnovo 2.

V nadaljevanju zapišimo nekatera dejstva o potencah, ki jih pri raziskovanju potrebujemo in raziščimo, kako izračunati števko na mestu enic za potence z osnovami od 1 do 10.

2. POTENCE

Potenca predstavlja matematično operacijo množenja, kjer število (osnova), potenciramo s stopnjo (eksponent). Splošni zapis potence je a^n, kjer je a osnova, n pa eksponent (stopnja). Razmislimo o lastnostih potenciranja:

- Potenciranje je torej matematična operacija, pri kateri osnovo množimo samo s seboj n krat. Na primer, $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$. Izračunana vrednost produkta je vrednost potence.
- Potenciranje negativnih in pozitivnih števil.
  Če je osnova pozitivno število, je vrednost potence vedno pozitivna, recimo $5^3 = 125$. Če je osnova negativno število, je vrednost potence negativna, če je stopnja liho število ($(-5)^3 = -125$); vrednost potence je pozitivna, če je stopnja sodo število ($(-5)^4 = 625$).
- **Potenciranje produkta**
  $(ab)^n = a^n \cdot b^n$. Potenca produkta je enaka produktu potenc.

- **Potenciranje ulomka**

  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\mathrm{n}} = \frac{a^{\mathrm{n}}}{b^{\mathrm{n}}} = (a:b)^{\mathrm{n}}$. To pomeni, da eksponent potencira tako števec kot tudi imenovalec ulomka.

- **Vrednost potence je enaka nič**

  Vrednost potence je enaka 0 takrat ko je v potenci osnova 0, 0^n= 0.

- **Vrednost potence je enaka 1**

  Vrednost potence je enaka 1, če je osnova 1. Na primer: $1^n = 1$.

  Če je eksponent enak 0 je vrednost potence tudi 1, $a^0 = 1$, če je a poljubno število, različno od 0.

Kvadriranje: Kvadriranje je potenciranje s eksponentom 2. Potenca z eksponentom 2 je kvadrat. Na primer: a^2.

Kubiranje: Kubiranje je potenciranje s eksponentom 3. Potenca z eksponentom tri je kub. Na primer: a^3.

3.1 POTENCA Z OSNOVO 2

Poglejmo postopoma s primeri računanja kako določimo zadnjo števko v potencah z osnovo 2 (tabela 1).

osnova	Eksponent	Vrednost potenc	Mesto enic
2	1	2	2
2	2	4	4
2	3	8	8
2	4	16	6
2	5	32	2
2	6	64	4
2	7	128	8
2	8	256	6
2	9	512	2
2	10	1024	4
2	11	2048	8
2	12	4096	6
2	13	8192	2
2	14	16384	4
2	15	32768	8

Tabela 1: potenca 2^n

S primerjavo vrednosti potenc ugotovimo naslednje:

- ciklično ponavljanje števk na mestu enic, v zaporedju 2, 4, 8, 6.

- števka 2 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 1, 5, 9, 13… (začne se pri eksponentu 1, števka 2 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 4 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 2, 6, 10, 14… (začne se pri eksponentu 2, števka 4 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 8 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 3, 7, 11, 15… (začne se pri eksponentu 3, števka 8 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 6 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 4, 8, 12, 16… (začne se pri eksponentu 4, števka 6 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števki 2 ter 8 se pojavljata samo pri potencah z lihimi eksponenti, medtem ko se števki 4 in 6 pojavljata pri potencah s sodimi eksponenti.

Za potence 2^n z osnovo 2 in stopnjo $n > 0$ in n je naravno število, ugotovimo:

- če je n sodo število, je števka na mestu enic 4 ali 6. Števka 4 je pri stopnjah 2, 6, 10, 14 ... (soda števila, ki niso večkratniki števila 4. Števka 6 je pri stopnjah 4, 8, 12, 16 ... (večkratniki števila 4),

- če je n liho število, je števka na mestu enic 2 ali 8. Števka 2 je pri stopnjah 1, 5, 9, 13 ... . Števka 8 je pri stopnjah 3, 7, 11, 15 ... .

3.2 POTENCA Z OSNOVO 3

Poglejmo na primerih potenc, kako določimo zadnjo števko v potencah z osnovo 3 (tabela 2).

osnova	Eksponent	Vrednost potenc	Mesto enic
3	1	3	3
3	2	9	9
3	3	27	7
3	4	81	1
3	5	243	3
3	6	729	9
3	7	2187	7
3	8	6561	1
3	9	19683	3
3	10	59049	9
3	11	177147	7
3	12	531441	1
3	13	1594323	3
3	14	4782969	9
3	15	14348907	7

Tabela 2: potenca 3^n

S primerjavo vrednosti potenc ugotovimo naslednje:

- ciklično ponavljanje števk na mestu enic, v zaporedju 3, 9, 7, 1.

- števka 3 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 1, 5, 9, 13… (začne se pri eksponentu 1, števka 3 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 9 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 2, 6, 10, 14… (začne se pri eksponentu 2, števka 9 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 7 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 3, 7, 11, 15… (začne se pri eksponentu 3, števka 7 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 1 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 4, 8, 12, 16… (začne se pri eksponentu 4, števka 1 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števki 3 ter 7 se pojavljata samo pri potencah z lihimi eksponenti, medtem ko se števki 9 in 1 pojavljata pri potencah s sodimi eksponenti.

Za potence 3^n z osnovo 3 in stopnjo $n > 0$ in n je naravno število, ugotovimo:

- če je n sodo število, je števka na mestu enic 9 ali 1. Števka 9 je pri stopnjah 2, 6, 10, 14 ... . Števka 1 je pri stopnjah 4, 8, 12, 16 ...

- če je n liho število, je števka na mestu enic 3 ali 7. Števka 3 je pri stopnjah 1, 5, 9, 13 ... . Števka 7 je pri stopnjah 3, 7, 11, 15 ... .

3.3 POTENCA Z OSNOVO 4

Poglejmo na primerih potenc z osnovo 4, kako določimo zadnjo števko (tabela 3).

stopnja	eksponent	Vrednost potence	končnica
4	1	4	4
4	2	16	6
4	3	64	4
4	4	256	6
4	5	1.024	4
4	6	4.096	6
4	7	16.384	4
4	8	65.536	6
4	9	262.144	4
4	10	1.048.576	6
4	11	4.194.304	4
4	12	16.777.216	6
4	13	67.108.864	4
4	14	268.435.456	6
4	15	1.073.741.824	4

Tabela 3: potenca 4^n

S primerjavo vrednosti potenc ugotovimo naslednje:

- ciklično ponavljanje števk na mestu enic, v zaporedju 4, 6.

- števka 4 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 1, 3, 5, 7… (začne se pri eksponentu 1, števka 4 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 2).

- števka 6 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 2, 4, 6, 8… (začne se pri eksponentu 2, števka 6 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 2).

- števka 4 se pojavlja samo pri potencah z lihimi eksponenti, medtem ko se števka 6 pojavlja pri potencah s sodimi eksponenti.

Za potence 4^n z osnovo 4 in stopnjo $n > 0$ in n je naravno število, ugotovimo:

- če je n sodo število, je števka na mestu enic 6. Števka 6 je pri stopnjah 2, 6, 10, 14 ... .

- če je n liho število, je števka na mestu enic 4. Števka 4 je pri stopnjah 1, 5, 9, 13 ... .

Ugotovitev lahko pojasnimo tudi z uporabo znanja o potencah z osnovo 2, saj je $2 \cdot 2 = 4$. Tako je $4^n = 2^n \cdot 2^n$. Po vrsti se od n = 1, 2, 3.... potence osnove 2 končajo s števkami 2, 4, 8, 6. Ker gre za produkte števil (recimo, za $n = 2$ se potenca z osnovo 2 konča s 4), lahko zapišemo posamezne produkte števil na mestu enic:

$2 \cdot 2 = 4$, $4 \cdot 4 = 16$, $8 \cdot 8 = 64$, $6 \cdot 6 = 36$. Kar pomeni da se vsaka potenca z osnovo 4 konča izmenično s števkama 4 in 6.

3.4 POTENCA Z OSNOVO 5

Poglejmo vrednosti potenc z osnovo 5 in števke, s katerimi se izračunane vrednosti končajo (Tabela 4).

osnova	eksponent	Vrednost potenc	Mesto enic
5	1	5	5
5	2	25	5
5	3	125	5
5	4	625	5
5	5	3.125	5
5	6	15.625	5
5	7	78.125	5
5	8	390.625	5
5	9	1.953.125	5
5	10	9.765.625	5
5	11	48.828.125	5
5	12	244.140.625	5
5	13	1.220.703.125	5
5	14	6.103.515.625	5
5	15	30.517.578.125	5

Tabela 4: potenca 5^n

S primerjavo vrednosti potenc ugotovimo naslednje:

- ciklično ponavljanje števk na mestu enic, v zaporedju 5, 5, 5… .

- števka 5 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 1, 2, 3, 4… (začne se pri eksponentu 1, števka 5 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 1).

- števka 5 se pojavlja tako pri potencah z lihimi eksponenti, kot pri potencah s sodimi eksponentni.

Za potence 5^n z osnovo 5 in stopnjo n > 0 in n je naravno število, ugotovimo:

- če je n sodo ali liho število je na mestu enic števka 5. Števka 5 se pojavlja pri eksponentih 1, 2, 3, 4… .

3.5 POTENCA Z OSNOVO 6

Poglejmo s katero števko se končajo vrednosti poenc z osnovo 6 (Tabela 5).

osnova	eksponent	Vrednost potenc	Mesto enic
6	1	6	6
6	2	36	6
6	3	216	6
6	4	1.296	6
6	5	7.776	6
6	6	46.656	6
6	7	279.936	6
6	8	1.679.616	6
6	9	10.077.696	6
6	10	60.466.176	6
6	11	362.797.056	6
6	12	2.176.782.336	6
6	13	13.060.694.016	6
6	14	78.364.164.096	6
6	15	470.184.984.576	6

Tabela 5: potenca 6^n

S primerjavo vrednosti potenc ugotovimo naslednje:

- ciklično ponavljanje števk na mestu enic, v zaporedju 6, 6, 6… .

- števka 6 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 1, 2, 3, 4… (začne se pri eksponentu 1, števka 6 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 1).

- števka 6 se pojavlja tako pri potencah z lihimi eksponenti, kot pri potencah z sodimi eksponentni.

Za potence 6^n z osnovo 6 in stopnjo $n > 0$ in n je naravno število, ugotovimo:

- če je n sodo ali liho število je na mestu enic števka 6. števka 6 se pojavlja pri eksponentih 1, 2, 3, 4… .

Ugotovitev lahko pojasnimo tudi z uporabo znanja o potencah z osnovo 2 in 3, saj je $2 \cdot 3 = 6$. Tako je $6^n = 2^n \cdot 3^n$. Po vrsti se od n = 1, 2, 3.... potence osnove 2 končajo s števkami 2, 4, 8, 6. Potence z osnovo 3 pa s števkami 3, 9, 7, 1. Ker gre za produkte števil (recimo, za $n = 2$ se potenca z osnovo 2 konča s 4, potenca z osnovo 3 pa z 9), lahko zapišemo posamezne produkte števil na mestu enic:

$2 \cdot 3 = 6$, $4 \cdot 9 = 36$, $8 \cdot 7 = 56$, $6 \cdot 1 = 6$. Kar pomeni da se vsaka potenca z osnovo 6 konča s števko 6.

3.6 POTENCA Z OSNOVO 7

Poglejmo potence z osnovo 7, katere števke se pojavijo na mestu enic. Število 7 je praštevilo (Tabela 6).

osnova	eksponent	Vrednost potenc	Mesto enic
7	1	7	7
7	2	49	9
7	3	343	3
7	4	2.401	1
7	5	16.807	7
7	6	117.649	9
7	7	823.543	3
7	8	5.764.801	1
7	9	40.353.607	7
7	10	282.475.249	9
7	11	1.977.326.743	3
7	12	13.841.287.201	1
7	13	96.889.010.407	7
7	14	678.223.072.849	9
7	15	4.747.561.509.943	3

Tabela 6: potenca 7^n

S primerjavo vrednosti potenc ugotovimo naslednje:

- ciklično ponavljanje števk na mestu enic, v zaporedju 7, 9, 3, 1.

- števka 7 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 1, 5, 9, 13… (začne se pri eksponentu 1, števka 7 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 9 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 2, 6, 10, 14… (začne se pri eksponentu 2, števka 9 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 3 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 3, 7, 11, 15… (začne se pri eksponentu 3, števka 3 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 1 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 4, 8, 12, 16… (začne se pri eksponentu 4, števka 1 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števki 7 ter 3 se pojavljata samo pri potencah z lihimi eksponenti, medtem ko se števki 9 in 1 pojavljata pri potencah s sodimi eksponenti.

Za potence 7^n z osnovo 7 in stopnjo $n > 0$ in n je naravno število, ugotovimo:

- če je n sodo število, je števka na mestu enic 9 ali 1. Števka 9 je pri stopnjah 2, 6, 10, 14 ... . Števka 1 je pri stopnjah 4, 8, 12, 16 ...

- če je n liho število, je števka na mestu enic 7 ali 3. Števka 7 je pri stopnjah 1, 5, 9, 13 ... . Števka 3 je pri stopnjah 3, 7, 11, 15 ... .

3.7 POTENCA Z OSNOVO 8

Vrednosti potenc z osnovo 8 si poglejmo v naslednji tabeli (Tabela 7).

osnova	eksponent	Vrednost potenc	Mesto enic
8	1	8	8
8	2	64	4
8	3	512	2
8	4	4.096	6
8	5	32.768	8
8	6	262.144	4
8	7	2.097.152	2
8	8	16.777.216	6
8	9	134.217.728	8
8	10	1.073.741.824	4
8	11	8.589.934.592	2
8	12	68.719.476.736	6
8	13	549.755.813.888	8
8	14	4.398.046.511.104	4
8	15	35.184.372.088.832	2

Tabela 7: potenca 8^n

S primerjavo vrednosti potenc ugotovimo naslednje:

- ciklično ponavljanje števk na mestu enic, v zaporedju 8, 4, 2, 6.

- števka 8 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 1, 5, 9, 13… (začne se pri eksponentu 1, števka 8 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 4 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 2, 6, 10, 14… (začne se pri eksponentu 2, števka 4 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 2 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 3, 7, 11, 15… (začne se pri eksponentu 3, števka 2 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števka 6 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 4, 8, 12, 16… (začne se pri eksponentu 4, števka 6 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 4).

- števki 8 ter 2 se pojavljata samo pri potencah z lihimi eksponenti, medtem ko se števki 4 in 6 pojavljata pri potencah s sodimi eksponenti.

Za potence 8^n z osnovo 8 in stopnjo $n > 0$ in n je naravno število, ugotovimo:

- če je n sodo število, je števka na mestu enic 4 ali 6. Števka 4 je pri stopnjah 2, 6, 10, 14 ... . Števka 6 je pri stopnjah 4, 8, 12, 16 ...

- če je n liho število, je števka na mestu enic 8 ali 2. Števka 8 je pri stopnjah 1, 5, 9, 13 ... . Števka 2 je pri stopnjah 3, 7, 11, 15 ...

Ker število 8 ni praštevilo, ga lahko zapišemo s produktom potenc z enako stopnjo, tako je $2 \cdot 4 = 8$. Tako je $8^n = 2^n \cdot 4^n$. Po vrsti se od n = 1, 2, 3.... potence osnove 2 končajo s števkami 2, 4, 8, 6. Potence z osnovo 4 pa s števkama 4 in 6. Ker gre za produkte števil (recimo, za $n = 2$ se potenca z osnovo 2 konča s 4, potenca z osnovo 4 pa s 6), lahko zapišemo posamezne produkte števil na mestu enic:

$2 \cdot 4 = 8$, $4 \cdot 6 = 24$, $8 \cdot 4 = 32$, $6 \cdot 6 = 36$. Kar pomeni da se potence z osnovo 8 končajo s števkami 8, 4, 2, 6.

3.8 POTENCA Z OSNOVO 9

Poglejmo še potence z osnovo 9 (Tabela 8).

osnova	eksponent	Vrednost potenc	Mesto enic
9	1	9	9
9	2	81	1
9	3	729	9
9	4	6.561	1
9	5	59.049	9
9	6	531.441	1
9	7	4.782.969	9
9	8	43.046.721	1
9	9	387.420.489	9
9	10	3.486.784.401	1
9	11	31.381.059.609	9
9	12	282.429.536.481	1
9	13	2.541.865.828.329	9
9	14	22.876.792.454.961	1
9	15	205.891.132.094.649	9

Tabela 8: potenca 9^n

S primerjavo vrednosti potenc ugotovimo naslednje:

- ciklično ponavljanje števk na mestu enic, v zaporedju 9, 1.

- števka 9 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 1, 3, 5, 7… (začne se pri eksponentu 1, števka 9 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo 2).

- števka 1 se pojavi v zaporedju potenc z eksponenti 2, 4, 6, 8… (začne se pri eksponentu 2, števka 1 je nato pri vsaki naslednji potenci, ko stopnji prištejemo2).

- števka 9 se pojavlja samo pri potencah z lihimi eksponenti, medtem ko se števka 1 pojavlja pri potencah s sodimi eksponenti.

Za potence 9^n z osnovo 9 in stopnjo $n > 0$ in n je naravno število, ugotovimo:

- če je n sodo število, je števka na mestu enic 1. Števka 1 je pri stopnjah 2, 6, 10, 14 ... .

- če je n liho število, je števka na mestu enic 9. Števka 9 je pri stopnjah 1, 5, 9, 13 ...

Ugotovitev lahko pojasnimo tudi z uporabo znanja o potencah z osnovo 3, saj je $3 \cdot 3 = 9$. Tako je $9^n = 3^n \cdot 3^n$. Po vrsti se od $n = 1, 2, 3....$ potence osnove 3 končajo s števkami 3, 9, 7, 1. Ker gre za produkte števil (recimo, za $n = 2$ se potenca z osnovo 3 konča s števko 9), lahko zapišemo posamezne produkte števil na mestu enic:

$3 \cdot 3 = 9$, $9 \cdot 9 = 81$, $7 \cdot 7 = 49$, $1 \cdot 1 = 1$. Kar pomeni da se potence z osnovo 9 končajo izmenično s števkama 9 in 1.

4. POTENCA S POLJUBNO OSNOVO

Kako se konča vrednost potence a^n ?

Glede na spoznano imamo dve možnosti.

I. Osnova a je praštevilo, $a = p$. Pri tej možnosti postopoma izračunamo vrednost potenc p, p^2, p^3 ... , opazujemo števke na mestu enic in zapišemo zaporedje števk, ki se pri določeni stopnji potence začnejo ponavljati. Glede na stopnje ugotovimo pravilo.

II.1. Osnova a je sestavljeno število (s). Pri tej možnosti postopoma izračunamo vrednost potenc, s^1, s^2, s^3 ... , opazujemo števke na mestu enic in zapišemo zaporedje števk, ki se pri določeni stopnji potence začnejo ponavljati. Glede na stopnje ugotovimo pravilo.

II.2. Osnova a je sestavljeno število (s). Pri tej možnosti lahko sestavljeno število (osnovo) zapišemo s produktom dveh (ali več) potenc z enako stopnjo (npr. $2^n \cdot 4^n = 8^n$), za katere že vemo zaporedje ponavljajočih se števk na mestu enic (za potence z osnovo 2 so te števke 2, 4, 8, 6 in za potence z osnovo 4 sta to števki 4 in 6). Izračunamo produkte ustreznih števil, v tem primeru so to produkti (po vrstnem redu) $2 \cdot 4 = 8$, $4 \cdot 6 = 24$, $8 \cdot 4 = 32$ in $6 \cdot 6 = 36$. Kar pomeni, da se vrednosti potenc z osnovo 8 zaporedoma končujejo s števkami 8, 4, 2, 6.

Poglejmo primer potence 10^n, za katero vemo, da se konča vsaka vrednost potence s števko 0. Pokažimo zakaj. Zapišemo $2^n \cdot 5^n = 10^n$. Za potence z osnovo 2 vemo, da se končajo s števkami 2, 4, 8, 6. Potence z osnovo 5 se končajo s števko 5.

Zapišimo ustrezne produkte $2 \cdot 5 = 10$, $4 \cdot 5 = 20$, $8 \cdot 5 = 40$ in $6 \cdot 5 = 30$. Kar pomeni, da se vsaka potenca z osnovo 10 res zaključi s števko 5.

5. SE PONOVI ŠE KAJ?

Za potence z osnovo 5 lahko ugotovimo ponavljanje števk tudi na mestih desetic, stotic...(tabela 9) ali za potence z osnovo 4 (tabela 10).

osnova	eksponent	Vrednost potenc	Mesto enic
5	1	5	5
5	2	25	5
5	3	125	5
5	4	625	5
5	5	3.125	5
5	6	15.625	5
5	7	78.125	5
5	8	390.625	5
5	9	1.953.125	5
5	10	9.765.625	5
5	11	48.828.125	5
5	12	244.140.625	5
5	13	1.220.703.125	5
5	14	6.103.515.625	5
5	15	30.517.578.125	5

Tabela 9: števke potence 5^n

stopnja	eksponent	Vrednost potence	končnica
4	1	4	4
4	2	16	6
4	3	64	4
4	4	256	6
4	5	1.024	4
4	6	4.096	6
4	7	16.384	4
4	8	65.536	6
4	9	262.144	4
4	10	1.048.576	6
4	11	4.194.304	4
4	12	16.777.216	6
4	13	67.108.864	4
4	14	268.435.456	6

Tabela 10: števke potence 4^n

4	15	1.073.741.824	4

Pri potenci 5^n opazimo zaporedno ponavljanje števk na mestih desetic, stotic, tisočic.... Na mestu desetic je vedno števka 2, na mestu stotic se izmenjujeta števki 1 in 6, na mestu tisočic pa se izmenjujejo števke 3, 5, 8, 0.

Pri potencah 4^n smo ponovitev števk na mestu desetic opazili šele po veliko izračunanih vrednostih, tako je zaporedje ponavljajočih se števk 1, 6, 5, 2, 9, 8, 3, 4, 7, 0. Gre za vse števke od 0 do 9.

Zaporedja na mestih desetic so vidna tudi pri potencah z drugačno osnovo, vendar je števil ki se ponavljajo več, zato moramo izračunati velio vrednosti potenc, da lahko zaporedja opazimo.

Ugotovili smo, da se število števk v ponavljanju ponovi čez 5 potenc. Tako ima potenca 2^n na mestu enic 4 števke ki se ponavljajo, ima pa jih tudi potenca 7^n, enako velja za potenci 3^n in 8^n in tudi za potenci 4^n in 9^n. V nadaljevanju bi lahko raziskali ali se to ponavljanje pojavi še naprej v drugih parih potenca, kot so npr. 10^n ali 15^n.

6. ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi smo spoznali, da lahko brez zahtevnega računanja ugotovimo s katero števko se konča vrednost potence za izbrano osnovo. Pri tem je pomembno ali je

- osnova praštevilo, kjer se števke na mestu enic ciklično ponavljajo. To ponavljanje smo odkrili tako, da smo postopoma izpisali vrednosti potenc ter iz vzorca odkrili ponavljanja na mestih enic v določenem zaporedju,

- osnova sestavljeno število, kjer se števke na mestu enic ciklično ponavljajo. Ponavljanje lahko odkrijemo na dva načina. Lahko postopoma izračunamo vrednosti potenc ali pa osnovo zapišemo s produktom potenc s takimi osnovami, za katere že poznamo števke, ki se ponovijo na mestu enic. Za vsako osnovo zapišemo po vrstnem redu ponavljajoče števke in izračunamo produkte. Enice teh produktov so števke, ki se pojavijo na mestu enic potence, ki ima za osnovo sestavljeno število.

V raziskovalni nalogi smo spoznali da je pomembno ali je pri nekaterih potencah eksponent liho ali sodo število, saj se števke pri sodih eksponentih razlikujejo od tistih z lihimi stopnjami. Samo potenci 5^n in 6^n imata pri obeh primerih isto števko saj je ta samo ena (5 pri 5^n in 6 pri 6^n).

7. DRUŽBENA ODGOVORNOST

Z raziskovalno nalogo smo pokazali, da lahko najdemo pravila, zakonitosti tudi tam, kjer bi jih še najmanj pričakovali. Z ugotovitvami raziskovalne nalogo si lahko pomagamo pri raziskovanju podobnih matematičnih tem, ter reševanju kakšnih matematičnih problemov oziroma nalog. Z nalogo pokažemo, da lahko tudi osnovnošolci odkrijemo (vsaja za nas) nekaj novega ali uporabnega.

Avtorskih pravic nismo kršili, saj smo uporabljali prosto dostopna gradiva (učbenik) in naše znanje.

8. VIRI

(1) Jože Senekovič, Cvetka Govejšek, Jožica Smogavec, Matematika za radovedneže 8, ICO d.o.o, 2011

(2) eTorba, 8. razred, Potence

https://etorba.sio.si/etorba/sl/books/29/read/page-14.xhtml#m133505, 28.11. 2023