

Mladi raziskovalci Slovenije 2024
58. srečanje

POLKROGI NAD POLKROGI

Matematika ali logika
Raziskovalna naloga

OŠ Bojana Iliča, Maribor

Avtorici: Stela Petrinič

Zala Cigale

Mentor: Jožef Senekovič

Maribor 2024

KAZALO

1. UVOD	1
2. KROG IN KROŽNICA	2
3. POLKROŽNICE Z ENAKIM POLMEROM	3
3.1 VSOTA DOLŽIN VSEH POLKROŽNIC.....	3
3.2 VSOTA PLOŠČIN VSEH POLKROGOV	6
4. NESKLADNI POLKROGI NAD PREMEROM	9
4.1 VSOTA DOLŽIN NESKLADNIH POLKROŽNIC.....	9
4.2 VSOTA PLOŠČIN NESKLADNIH POLKROGOV	16
5. KROGI V KROGU	20
6. KVADRATI V KVADRATU	23
6.1. OBSEG KVADRATOV V KVADRATU	23
6.2 PLOŠČINA KVADRATOV V KVADRATU	30
7. ZAKLJUČEK	32
8. DRUŽBENA ODGOVORNOST	33
9. VIRI	34

Povzetek

Nad premer polkroga narišemo manjše polkroge tako, da se vsi polkrogi med seboj dotikajo in je vsota dolžin premerov včrtanih polkrogov enaka dolžini premera večjega polkroga. V raziskovalni nalogi raziščemo, v kakšnem odnosu je vsota dolžin načrtanih polkrožnic z dolžino večje polkrožnice. Prav tako raziščemo v kakšnem odnosu so ploščine manjših polkrogov glede na ploščino večjega polkroga. Glede na ugotovitve le-te prenesemo na včrtane celotne krožnice (kroge) v večji krog. Ugotovljene lastnosti preverimo v kvadratu, ki mu včrtamo manjše kvadrate.

Ključne besede: krog, krožnica, ploščina kroga, obseg kroga

1. UVOD

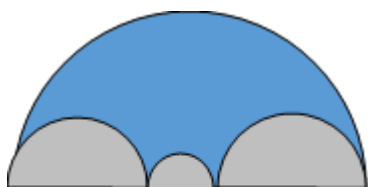
Poglejmo sliko (Slika 1). Nad premerom kroga so načrtane tri polkrožnice z različnimi premeri. Zato so različnih dolžin tudi polkrožnice manjših polkrožnic.



Slika 1: polkrožnice nad premerom

Želimo izračunati dolžino manjših polkrožnic in to dolžino primerjati z dolžino polkrožnice prvotnega polkroga. Raziskati želimo, kako je vsota dolžin manjših polkrožnic povezana z dolžino prvotne polkrožnice, če povečujemo število manjših polkrožnic.

Na naslednji sliki (Slika 2) so obarvani polkrogi. Želimo izračunati vsoto plosčin polkrogov in jo primerjati s ploščino prvotnega (večjega) polkroga.



Slika 2: polkrogi nad premerom

Raziskati želimo kako je vsota plosčin manjših polkrogov povezana s ploščino prvotnega polkroga, če povečujemo število manjših polkrogov.

Na obe vprašanji bomo poiskali odgovor tudi glede na to ali so polkrožnice (polkrogi) z enakimi ali različnimi polmeri (premeri). Zato najprej pogledajmo nekaj osnovnih lastnosti krožnice in kroga.

2. KROG IN KROŽNICA

Krožnica in krog sta osnovna geometrijska pojma, ki ju obravnavamo v matematiki. Krožnica je množica vseh točk v ravnini, ki so določene z enako razdaljo od središča. Krog je lik, kjer so vse točke na krožnici oddaljene od središča za polmer ali manj. Oglejmo si nekaj ključnih lastnosti in postopkov, povezanih s krožnico (Slika 3) in krogom (Slika 4).

Središče krožnice je točka (S), od katere so vse točke na krožnici enako oddaljene.

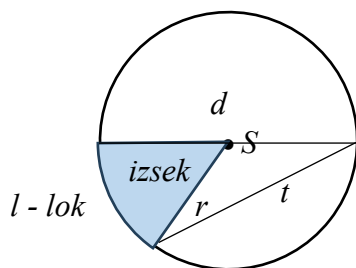
Polmer krožnice (r) je razdalja med središčem in katerokoli točko na krožnici.

Premer krožnice (d) je najdaljša daljica v krogu, ki ima krajišči na krožnici. Velja, da je $d=2r$.

Krožni lok je del krožnice med dvema točkama.

Krožni izsek je del kroga (lik), omejen s polmeroma in krožnim lokom.

Tetiva je daljica (t), ki ima krajišči na krožnici.



Slika 3: krožnica

Krog je lik, omejen s krožnico. H krogu pripadajo vse točke, ki so od središča oddaljene za polmer ali manj.

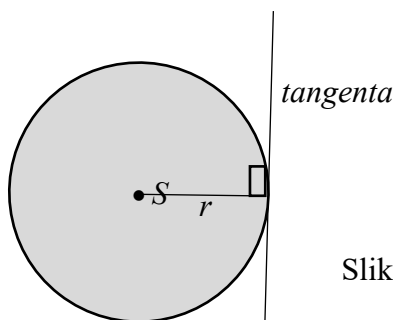
Obseg kroga je dolžina krožnice. Izračunamo s formulo $2\pi r$, kjer je π matematična konstanta približno enaka 3.14.

Ploščina kroga je velikost ploskve. Ploščino kroga izračunamo s formulo πr^2 .

Polkrog (polovica kroga) je lik, omejen s premerom kroga in polovico krožnice.

Tangenta je premica, ki se dotika krožnice v eni točki. Je pravokotna na polmer.

Sekanta je premica, ki seka krožnico v dveh točkah.



Slika 4: krog

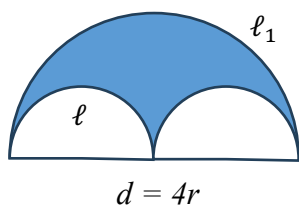
3. POLKROŽNICE Z ENAKIM POLMEROM

V nadaljevanju raziščimo dolžine polkrožnic nad premerom polkrožnice.

3.1 VSOTA DOLŽIN VSEH POLKROŽNIC

Primerjali bomo vsoto dolžin manjših lokov z dolžino loka večje polkrožnice.

Naj bo premer večje polkrožnice dolg d , torej je polmer krožnic r (Slika 5) in $d = 4r$.



Slika 5: dve polkrožnici z enakim polmerom

Dolžino loka polkrožnice izračunamo kot, $\ell = \frac{2\pi \cdot r}{2}$ ali πr .

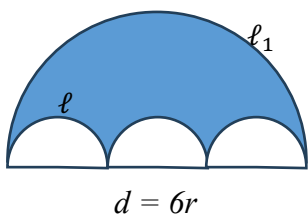
Lok večje polkrožnice označimo z ℓ_1 .

Zapišimo vsoto dolžin obeh polkrožnic, $\ell + \ell = 2\pi r$.

Zapišimo še dolžino loka $\ell_1 = \frac{2\pi \cdot 2r}{2} = 2\pi r$. Pri tem upoštevamo, da je polmer večje polkrožnice enak $d = 2r$.

Ugotovimo, da je vsota dolžin obeh polkrožnic enaka dolžini večje polkrožnice.

Kaj pa če je število manjših polkrožnic večje? Recimo, da nad premerom večje polkrožnice ležijo 3 manjše, skladne polkrožnice. Potem je premer večje polkrožnice enak $d = 6r$, kjer z r označimo polmer manjše polkrožnice.



Slika 5: tri polkrožnice z enakim polmerom

Dolžino loka polkrožnice izračunamo kot $\ell = \frac{2\pi \cdot r}{2}$ ali πr .

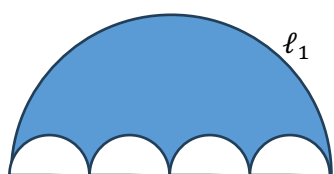
Lok večje polkrožnice spet označimo z ℓ_1 .

Zapišimo vsoto dolžin polkrožnic, $\ell + \ell + \ell = 3\pi r$.

Zapišimo še dolžino loka $\ell_1 = \frac{2\pi \cdot 3r}{2} = 3\pi r$. Pri tem upoštevamo, da je polmer večje polkrožnice enak $d = 3r$.

Spet ugotovimo, da je dolžina večje polkrožnice enaka vsoti dolžin manjših treh polkrožnic.

Poskusimo še s štrimi (Slika 6) in s petimi (Slika 7) skladnimi polkrožnicami nad premerom.



$$d = 8r$$

Slika 6: štiri polkrožnice z enakim polmerom

Dolžino loka polkrožnice izračunamo kot $\ell = \frac{2\pi \cdot r}{2}$ ali πr .

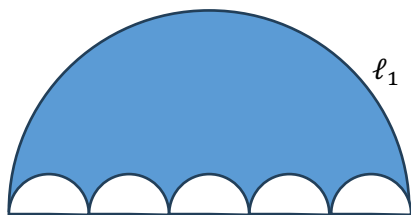
Lok večje polkrožnice spet označimo z ℓ_1 .

Zapišimo vsoto dolžin polkrožnic, $\ell + \ell + \ell + \ell = 4\pi r$.

Zapišimo še dolžino loka $\ell_1 = \frac{2\pi \cdot 4r}{2} = 4\pi r$. Pri tem upoštevamo, da je polmer večje polkrožnice enak $d = 4r$.

Spet ugotovimo, da je dolžina večje polkrožnice enaka vsoti dolžin manjših treh polkrožnic.

Če imamo 5 manjših krožnic ugotovimo enako.



$$d = 10r$$

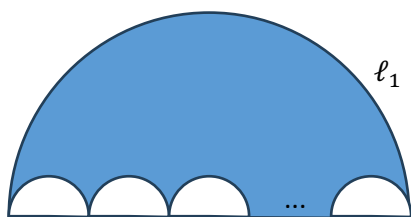
Slika 7: pet polkrožnic z enakim polmerom

Zapišimo vsoto dolžin polkrožnic, $\ell + \ell + \ell + \ell + \ell = 5\pi r$.

Zapišimo še dolžino loka $\ell_1 = \frac{2\pi \cdot 5r}{2} = 5\pi r$. Pri tem upoštevamo, da je polmer večje polkrožnice enak $d = 5r$.

Kaj pa, če je število manjših polkrožnic poljubno?

Naj bo premer večje polkrožnice poljuben (d) in število manjših polkrožnic z enakim polmerom n (Slika 8).



Slika 8: n polkrožnic z enakim polmerom

$$d = 2nr$$

Premer je torej d , polmer pa $\frac{d}{2}$. Ker označimo polmer ene manjše polkrožnice z r , je

$$\ell = \frac{2\pi \cdot r}{2} = \pi r \text{ dolžina manjše polkrožnice.}$$

Vsota dolžin vseh polkrožnic je potem $\ell + \ell + \ell + \ell + \dots + \ell = n\pi r$, saj smo včrtali n polkrožnic.

Zapišimo še dolžino loka $\ell_1 = \frac{2\pi \cdot nr}{2} = n\pi r$. Pri tem upoštevamo, da je polmer večje polkrožnice enak $d = nr$, saj je premer enak $2nr$.

UGOTOVITEV

Ko polkrožnici nad premer narišemo manjše, skladne polkrožnice, je seštevek dolžin manjših polkrožnic enak dolžini večje polkrožnice.

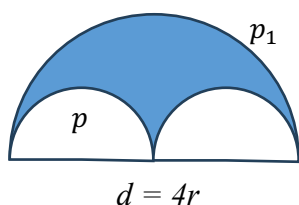
3.2 VSOTA PLOŠČIN VSEH POLKROGOV

V prejšnjih primerih smo primerjali dolžine manjših lokov z dolžino loka večje polkrožnice.

V tem delu raziskovalne naloge pa bomo raziskovali in primerjali ploščine polkrogov.

Primerjali bomo vsoto ploščin včrtanih polkrogov s ploščino večjega polkroga.

Naj bo premer večje polkrožnice dolg d , torej je polmer krožnic r (Slika 9) in $d = 4r$.



Slika 9: dva polkroga z enakim polmerom

Ploščino manjšega polkroga izračunamo kot, $p = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$.

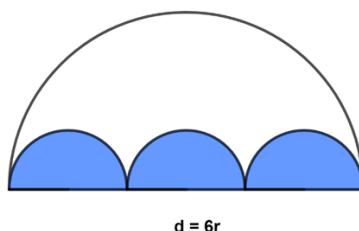
Ploščina večjega polkroga je p_1 .

Zapišimo vsoto ploščin obeh polkrogov, $p + p = \pi r^2$.

Zapišimo še ploščino večjega polkroga $p_1 = \frac{\pi \cdot (2r)^2}{2} = 2\pi r^2$. Pri tem upoštevamo, da je polmer večje polkrožnice enak $d = 2r$.

Ker je ploščina večjega polkroga enaka $2\pi r^2$ in vsota ploščin manjših polkrogov πr^2 , ugotovimo, da je vsota ploščin obeh polkrogov polovica ploščine večjega polkroga.

V nadaljevanju nad polmer polkroga načrtamo tri skladne polkroge (Slika 10), pri tem je $d = 6r$.



$d = 6r$

Slika 10: trije polkrogi z enakim polmerom

Ploščina večjega je $p_1 = \frac{\pi \cdot (3r)^2}{2} = \frac{\pi \cdot 9r^2}{2}$

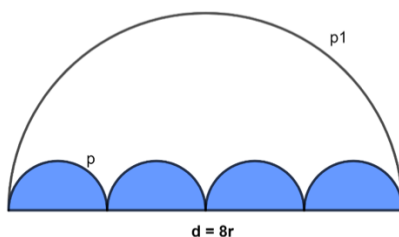
Ploščina enega manjšega je $p = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$, ker so trije pa to pomnožimo s tri, $p + p + p = \frac{\pi \cdot 3r^2}{2}$.

Da ugotovimo, za koliko se vsota ploščin manjših polkrogov razlikuje od ploščine večjega

polkroga, delimo: $\frac{\frac{\pi \cdot 9r^2}{2}}{\frac{\pi \cdot 3r^2}{2}} = \frac{\pi \cdot 9r^2}{2} \cdot \frac{2}{\pi \cdot 3r^2} = \frac{9}{3} = 3$.

Ugotovimo, da je vsota ploščin manjših polkrogov 3-krat manjša od ploščine večjega polkroga.

Poskusimo še s štirimi včrtanimi polkrogi z enakim polmerom (slika 11).



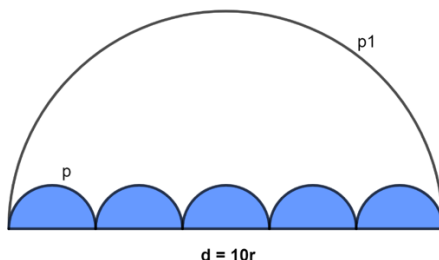
Slika 11: štirje polkrogi z enakim polmerom

Ker je premer v zgornji sliki enak $8r$, je ploščina večjega polkroga $p_1 = \frac{\pi \cdot (4r)^2}{2} = \frac{\pi \cdot 16r^2}{2} = 8\pi r^2$.

Ploščina vseh manjših včrtanih polkrogov je $p + p + p + p = \frac{\pi \cdot 4r^2}{2} = 2\pi r^2$.

Ko izračunamo količnik ugotovimo, da je ploščina večjega polkroga štirikrat večja od vsote ploščin vseh manjših, $\frac{8\pi r^2}{2\pi r^2} = 4$.

Včrtajmo še pet polkrogov z enakim polmerom (slika 12).



Slika 12: pet polkrogov z enakim polmerom

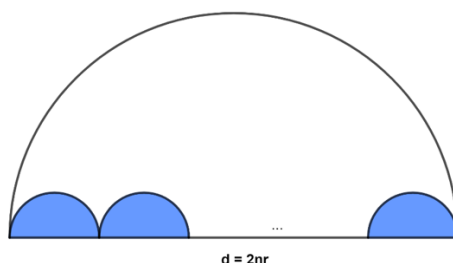
Ploščina večje krožnice je $p_1 = \frac{\pi \cdot (5r)^2}{2} = \frac{\pi \cdot 25r^2}{2}$.

Vsota ploščin manjših polkrogov je $p + p + p + p + p = \frac{\pi \cdot 5r^2}{2}$.

Izračunamo količnik, to je število 5, $\frac{\frac{\pi \cdot 25r^2}{2}}{\frac{\pi \cdot 5r^2}{2}} = \frac{\pi \cdot 25r^2}{2} \cdot \frac{2}{\pi \cdot 5r^2} = 5$.

Ugotovimo, da je v tem primeru ploščina večjega polkroga 5-krat večja od vsote ploščin manjših polkrogov.

V naslednjem primeru pokažimo za poljubno število polkrogov. Naj bo n poljubno število manjših polkrogov z enakim polmerom r (slika 13).



Slika 13: n polkrogov z enakim polmerom

Ploščina večjega polkroga je

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{d^2}{4}}{2} = \frac{d^2}{4} \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{d^2}{8} \pi.$$

Premer malih polkrogov je $r(n) = \frac{d}{2 \cdot n}$

Ploščina enega včrtanega polkroga je:

$$p(n) = \frac{\pi \cdot (r(n))^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{d}{2 \cdot n}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{d^2}{4 \cdot n^2}}{2} = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot n^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi \cdot d^2}{8 \cdot n^2}$$

Ker je ploščina enega včrtanega polkroga $\frac{\pi \cdot d^2}{8 \cdot n^2}$ in je n -število polkrogov, množimo z n :

$$n \cdot p(n) = n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{8 \cdot n^2} = \frac{\pi \cdot d^2}{8 \cdot n}.$$

Da vidimo, za koliko je vsota ploščin manjših polkrogov manjša od ploščine večjega polkroga, izračunamo količnik

$$\frac{\frac{\pi \cdot d^2}{8}}{\frac{\pi \cdot d^2}{8 \cdot n}} = \frac{\pi \cdot d^2}{8} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{8 \cdot n} = n.$$

Ugotovili smo, da je vsota ploščin manjših polkrogov n -krat manjša od ploščine večjega polkroga.

UGOTOVITEV

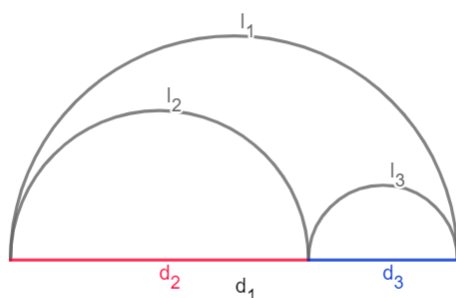
Vsota ploščin manjših polkrogov je od ploščine večjega polkroga n -krat manjša, če je n število včrtanih polkrogov.

4. NESKLADNI POLKROGI NAD PREMEROM

V prejšnjih primerih smo pokazali, kaj se dogaja z vsoto dolžin polkrožnic in z vsoto ploščin polkrogov z enakim polmerom nad premerov večjega polkroga. V nadaljevanju raziščimo vsoto dolžin polkrožnic in vsoto ploščin polkrogov z neskladnim polmerom.

4.1 VSOTA DOLŽIN NESKLADNIH POLKROŽNIC

Za začetek bomo poskusili v polkrog s premerom d_1 vstaviti dve neskladni polkrožnici (slika 14).



Slika 14: dve polkrožnici z različnim polmerom

V tem primeru sta premera teh dveh neskladnih polkrožnic v razmerju 2:1, torej je premer $d_2 = \frac{2}{3} d_1$ in premer loka $d_3 = \frac{1}{3} d_1$.

Nato lahko izračunamo dolžine lokov, kot smo pri skladnih polkrožnicah:

$$\ell_1 = \frac{2\pi r_1}{2} = \pi r_1 = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 = \pi r_2 = \frac{2d_1}{6} \pi$$

$$\ell_3 = \pi r_3 = \frac{d_1}{6} \pi$$

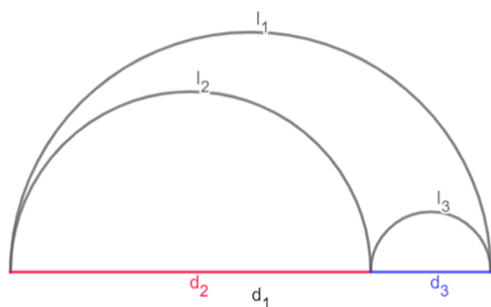
$$\ell_2 + \ell_3 = \frac{2d_1}{6} \pi + \frac{d_1}{6} \pi = \frac{3d_1}{6} \pi = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 + \ell_3 = \ell_1$$

Ugotovili smo enako, kot pri včrtanju skladnih polkrožnic, da je vsota dolžin dveh manjših neskladnih polkrožnic enaka dolžini večje polkrožnice.

Poglejmo še dva primera.

Naj bosta premera v razmerju 3 : 1 (slika 15).



Slika 15: dve polkrožnici s premeroma v razmerju 3 : 1

Tukaj sta premera neskladnih polkrožnic v razmerju 3:1, torej je $d_2 = \frac{3}{4} d_1$ in $d_3 = \frac{1}{4} d_1$.

Spet lahko izračunamo dolžine lokov (polkrožnic):

$$\ell_1 = \pi r_1 = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 = \pi r_2 = \frac{3d_1}{8} \pi$$

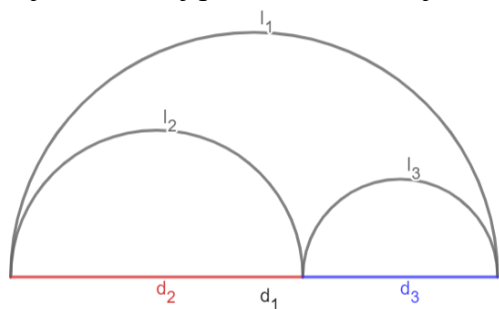
$$\ell_3 = \pi r_3 = \frac{d_1}{8} \pi$$

$$\ell_2 + \ell_3 = \frac{3d_1}{8}\pi + \frac{d_1}{8}\pi = \frac{4d_1}{8}\pi = \frac{d_1}{2}\pi$$

$$\ell_2 + \ell_3 = \ell_1$$

Spet je vsota dolžin dveh manjših neskladnih polkrožnic enaka dolžini večje polkrožnice.

Naj bosta sedaj premera v razmerju 3 : 2 (slika 16).



Slika 16: dve polkrožnici s premeroma v razmerju 3 : 2

Tukaj sta d_2 in d_3 v razmerju 3:2, zato je $d_2 = \frac{3}{5}d_1$ in $d_3 = \frac{2}{5}d_1$. Izračunamo

$$\ell_1 = \frac{d_1}{2}\pi$$

$$\ell_2 = \pi r_2 = \frac{3d_1}{10}\pi$$

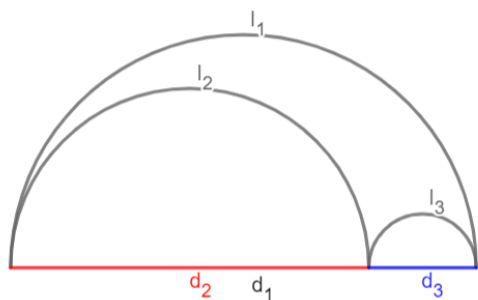
$$\ell_3 = \pi r_3 = \frac{2d_1}{10}\pi$$

$$\frac{3d_1}{10}\pi + \frac{2d_1}{10}\pi = \frac{5d_1}{10}\pi = \frac{d_1}{2}\pi$$

$$\ell_2 + \ell_3 = \ell_1$$

Tudi v tem primeru je vsota dolžin včrtanih manjših polkrožnic enaka dolžini večje polkrožnice.

Kaj pa če ne poznamo razmerja med d_2 in d_3 ? Torej da sta premera krožnic popolnoma poljubna (slika 17)?



Slika 17: dve polkrožnici s poljubnima polmeroma

Vemo, da sta d_2 in d_3 deleža d_1 . To lahko zapišemo tako, če upoštevamo, da sta n in m neki naravni števili in da ima m manjšo vrednost kot n , potem je

$$d_2 = \frac{(n-m)d_1}{n} \quad \text{in} \quad d_3 = \frac{m \cdot d_1}{n}.$$

Vemo, da je premer d_1 vsota d_2 in d_3 , zato ga lahko zapišemo tako:

$$d_1 = \frac{(n-m)d_1}{n} + \frac{m \cdot d_1}{n} = \frac{nd_1 - md_1}{n} + \frac{m d_1}{n} = \frac{nd_1}{n}.$$

Nato zapišemo enak postopek, kot pri prejšnjih primerih.

$$\ell_1 = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 = \pi r_2 = \frac{(n-m) \cdot d_1 \cdot \pi}{2n} = \frac{nd_1 \pi - md_1 \pi}{2n}$$

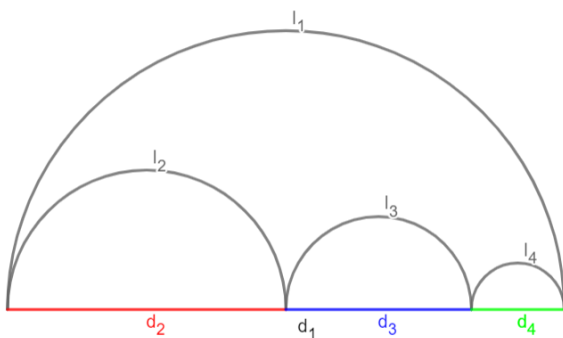
$$\ell_3 = \pi r_3 = \frac{md_1 \pi}{2n}$$

$$\frac{nd_1 \pi - md_1 \pi}{2n} + \frac{md_1 \pi}{2n} = \frac{nd_1 \pi}{2n} = \frac{d_1 \pi}{2}$$

$$\ell_2 + \ell_3 = \ell_1$$

Pridemo do enake ugotovitve kot pri drugih primerih, torej je vsota dolžin katerikoli dveh polkrožnic enaka dolžini večje polkrožnice.

Ali bi prišli do enake ugotovitve tudi če bi v večjo polkrožnico včrtali tri manjše polkrožnice, namesto dveh? Poskusimo na primeru (slika 18:



Slika 18: tri polkrožnice s polmeroma v razmerju 3 : 2 : 1

Tukaj so d_2 , d_3 in d_4 v razmerju 3 : 2 : 1, torej so $d_2 = \frac{d_1}{2}$, $d_3 = \frac{d_1}{3}$, $d_4 = \frac{d_1}{6}$. Zapišimo dolžine polkrožnic,

$$\ell_1 = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 = \pi r_2 = \frac{3d_1}{12} \pi$$

$$\ell_3 = \pi r_3 = \frac{2d_1}{12} \pi$$

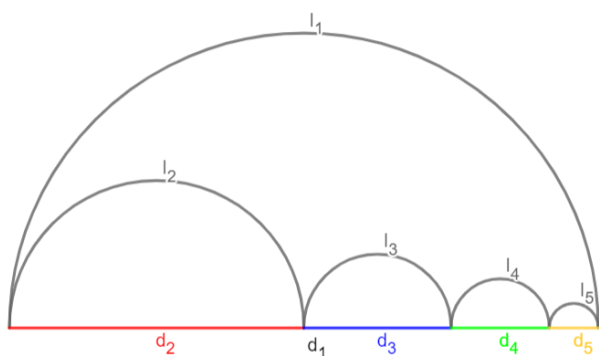
$$\ell_4 = \pi r_2 = \frac{d_1}{12} \pi$$

$$\frac{3d_1}{12} \pi + \frac{2d_1}{12} \pi + \frac{d_1}{12} \pi = \frac{6d_1}{12} \pi = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = \ell_1$$

Spet je vsota dolžin včrtanih polkrožnic enaka dolžini večje polkrožnice.

Tudi za štiri včrtane polkrožnice ugotovimo enako (slika 19).



Slika 19: štiri polkrožnice s polmeri v razmerju 6:3:2:1

Če so manjši krogi v razmerju 6:3:2:1, so dolžine premerov

$$d_2 = \frac{d_1}{2}, d_3 = \frac{d_1}{4}, d_4 = \frac{d_1}{6}, d_5 = \frac{d_1}{12}.$$

Dolžine lokov (polkrožnic) pa so

$$\ell_1 = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 = \pi r_2 = \frac{6d_1}{24} \pi$$

$$\ell_3 = \pi r_3 = \frac{3d_1}{24} \pi$$

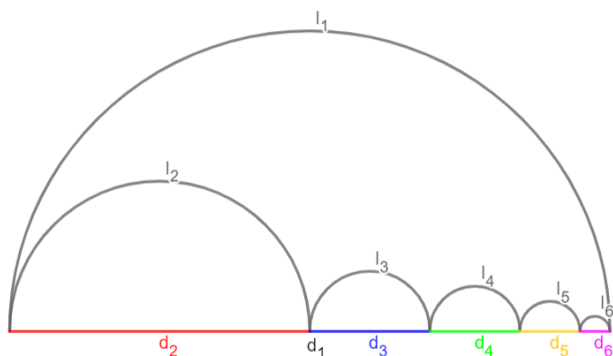
$$\ell_4 = \pi r_2 = \frac{2d_1}{24} \pi$$

$$\ell_5 = \pi r_2 = \frac{1d_1}{24} \pi$$

$$\frac{6d_1}{24} \pi + \frac{3d_1}{24} \pi + \frac{2d_1}{24} \pi + \frac{1d_1}{24} \pi = \frac{12d_1}{24} \pi = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 = \ell_1$$

Potem ponovimo postopek za pet polkrogov, kjer so polmeri v razmerju 10:4:3:2:1 (slika 20).



Slika 20: pet polkrožnic s polmeri v razmerju 10:4:3:2:1

Odnosi med premeri krožnic so

$$d_2 = \frac{10d_1}{20}, d_3 = \frac{4d_1}{20}, d_4 = \frac{3d_1}{20}, d_5 = \frac{2d_1}{20}, d_6 = \frac{d_1}{20}.$$

Dolžine krožnih lokov so

$$\ell_1 = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 = \pi r_2 = \frac{10d_1}{40} \pi$$

$$\ell_3 = \pi r_3 = \frac{4d_1}{40} \pi$$

$$\ell_4 = \pi r_2 = \frac{3d_1}{40} \pi$$

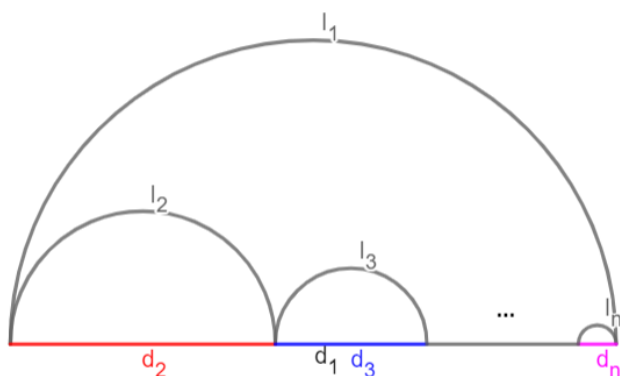
$$\ell_5 = \pi r_2 = \frac{2d_1}{40} \pi$$

$$\ell_6 = \pi r_2 = \frac{d_1}{40} \pi$$

$$\frac{10d_1}{40} \pi + \frac{4d_1}{40} \pi + \frac{3d_1}{40} \pi + \frac{2d_1}{40} \pi + \frac{d_1}{40} \pi = \frac{20d_1}{40} \pi = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + \ell_6 = \ell_1$$

Lahko predpostavimo, da to pravilo velja za vsako število neskladnih včrtanih polkrožnic (slika 21). Pri tem je $d_2 + d_3 \dots + d_n = d_1$.



Slika 21: n polkrožnic

Pri tem so dolžine posameznih lokov

$$\ell_1 = \frac{d_1}{2} \pi$$

$$\ell_2 = \frac{d_2}{2} \pi$$

$$\ell_3 = \frac{d_3}{2} \pi$$

...

$$\ell_n = \frac{d_n}{2} \pi$$

$$\frac{d_2}{2} \pi + \frac{d_3}{2} \pi \dots + \frac{d_n}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi (d_2 + d_3 + \dots + d_n) = \frac{d_1}{2} \pi = \ell_1$$

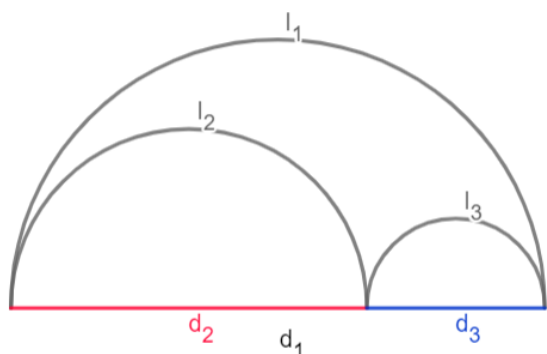
$$\ell_2 + \ell_3 \dots + \ell_n = \ell_1$$

UGOTOVITEV

Vsota dolžin vseh polkrožnic nad premerom večje polkrožnice je vedno enaka dolžini večje polkrožnice, ne glede na izbrane dolžine premerov (polmerov).

4.2 VSOTA PLOŠČIN NESKLADNIH POLKROGOV

Poglejmo še kako je z vsoto ploščin včrtanih polkrogov nad premer večjega polkroga, kjer naj bodo premeri (polmeri) včrtanih polkrogov različnih dolžin. Včrtajmo dva polkroga v razmerju premerov (polmerov) 2 : 1 (slika 22).



Slika 22: dva polkroga s polmeroma v razmerju 2:1

Kot že vemo, je

$$d_2 = \frac{2d_1}{3} \text{ in } d_3 = \frac{d_1}{3}.$$

Ploščine pa so

$$p_1 = \frac{d_1^2}{8} \pi$$

$$p_2 = \frac{(\frac{2}{3}d_1)^2}{8} \pi = \frac{d_1^2}{18} \pi$$

$$p_3 = \frac{(\frac{1}{3}d_1)^2}{8} \pi = \frac{d_1^2}{72} \pi$$

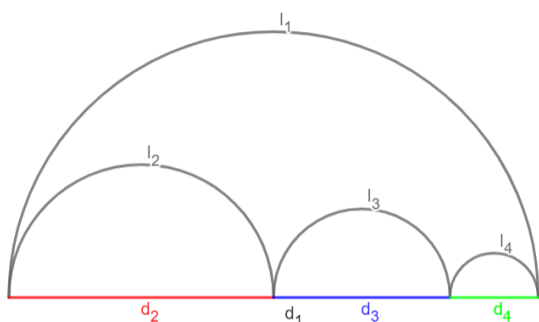
$$p_2 + p_3 = \frac{d_1^2}{18} \pi + \frac{d_1^2}{72} \pi = \frac{4d_1^2}{72} \pi + \frac{d_1^2}{72} \pi = \frac{5d_1^2}{72} \pi$$

Razmerje ploščin med ploščino polkroga in vsoto ploščin včrtanih polkrogov je

$$\frac{p_1}{p_2 + p_3} = \frac{\frac{d_1^2}{8} \pi}{\frac{5d_1^2}{72} \pi} = \frac{9}{5}.$$

Torej je ploščina večjega polkroga 1,8 krat večja od vsote ploščin včrtanih polkrogov.

Nad premer polkroga včrtajmo tri polkroge, ki imajo premere (polmere) v razmerju 3 : 2 : 1 (slika 23).



Slika 23: trije polkrogi s polmeri v razmerju 3:2:1

Tako so premeri

$$d_2 = \frac{3d_1}{6}, d_3 = \frac{2d_1}{6}, d_4 = \frac{d_1}{6}.$$

Zapišimo še ploščine polkrogov,

$$p_1 = \frac{d_1^2}{8} \pi$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3d_1}{12}\right)^2 \pi = \frac{d_1^2}{32} \pi$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2d_1}{12}\right)^2 \pi = \frac{d_1^2}{72} \pi$$

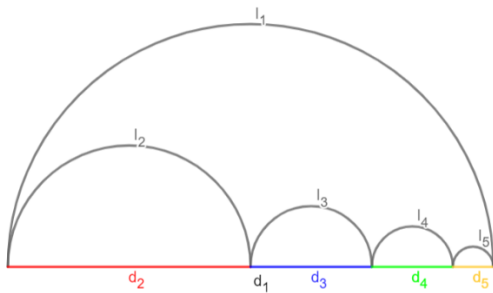
$$p_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d_1}{12}\right)^2 \pi = \frac{d_1^2}{288} \pi$$

$$p_2 + p_3 + p_4 = \left(\frac{9d_1^2}{288} + \frac{4d_1^2}{288} + \frac{d_1^2}{288}\right) \pi = \frac{14d_1^2}{288} \pi.$$

Ko izračunamo količnik ploščin, dobimo

$$\frac{p_1}{p_2 + p_3 + p_4} = \frac{\frac{d_1^2}{8} \pi}{\frac{14d_1^2}{288} \pi} = \frac{288}{122} = \frac{18}{7}. \text{ Kar pomeni, da je ploščina večjega polkroga približno 2,6 krat večja od vsote ploščin manjših polkrogov.}$$

Izračunajmo še količnik ploščin za štiri včrtane polkroge, z razmerjem premerov 6:3:2:1 (slika 24).



Slika 24: štiri polkrogi s polmeri v razmerju 6:3:2:1

Premeri polkrogov so

$$d_2 = \frac{6d_1}{12}, d_3 = \frac{3d_1}{12}, d_4 = \frac{2d_1}{12}, d_5 = \frac{d_1}{12}.$$

Ploščine polkrogov pa so

$$p_1 = \frac{d_1^2}{8} \pi$$

$$p_2 = \frac{\left(\frac{6}{24}d_1\right)^2}{2} \pi = \frac{36d_1^2}{1152} \pi$$

$$p_3 = \frac{\left(\frac{3}{24}d_1\right)^2}{2} \pi = \frac{9d_1^2}{1152} \pi$$

$$p_4 = \frac{\left(\frac{2}{24}d_1\right)^2}{2} \pi = \frac{4d_1^2}{1152} \pi$$

$$p_5 = \frac{\left(\frac{1}{24}d_1\right)^2}{2} \pi = \frac{d_1^2}{1152} \pi$$

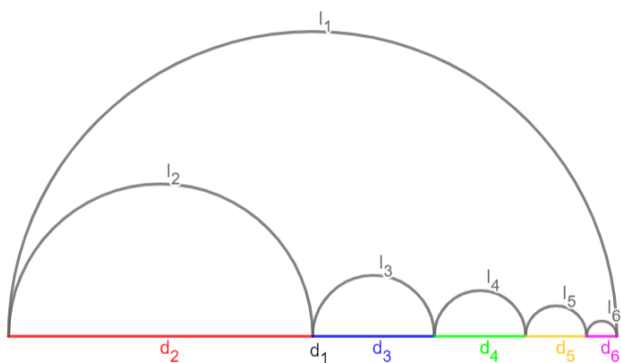
$$p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{36d_1^2 + 9d_1^2 + 4d_1^2 + d_1^2}{1152} \pi = \frac{50d_1^2}{1152} \pi$$

Količnik ploščin je

$$\frac{p_1}{p_2 + p_3 + p_4 + p_5} = \frac{\frac{d_1^2}{8} \pi}{\frac{50d_1^2}{1152} \pi} = \frac{1152}{400} = \frac{72}{25}.$$

Kar pomeni, da je ploščina večjega polkroga 2,88 krat večja od vsote ploščin včrtanih polkrogov.

V nadaljevanju včrtajmo še pet polkrogov v večji polkrog. Razmerje med premeri naj bo 10:4:3:2:1 (slika 25).



Slika 25: pet polkrogov s polmeri v razmerju 10:4:3:2:1

Premeri so

$$d_2 = \frac{10d_1}{20}, d_3 = \frac{4d_1}{20}, d_4 = \frac{3d_1}{20}, d_5 = \frac{2d_1}{20}, d_6 = \frac{d_1}{20}$$

Ploščine polkrogov pa so

$$p_1 = \frac{d_1^2}{8} \pi$$

$$p_2 = \frac{\left(\frac{10}{40}d_1\right)^2}{2} \pi = \frac{100d_1^2}{3200} \pi$$

$$p_3 = \frac{\left(\frac{4}{40}d_1\right)^2}{2} \pi = \frac{16d_1^2}{3200} \pi$$

$$p_4 = \frac{\left(\frac{3}{40}d_1\right)^2}{2} \pi = \frac{9d_1^2}{3200} \pi$$

$$p_5 = \frac{\left(\frac{2}{40}d_1\right)^2}{2} \pi = \frac{4d_1^2}{3200} \pi$$

$$p_6 = \frac{\left(\frac{1}{40}d_1\right)^2}{2} \pi = \frac{d_1^2}{3200} \pi$$

$$p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{100d_1^2}{3200} \pi + \frac{16d_1^2}{3200} \pi + \frac{9d_1^2}{3200} \pi + \frac{4d_1^2}{3200} \pi + \frac{d_1^2}{3200} \pi =$$

$$\frac{130d_1^2}{3200} \pi$$

Količnik ploščin je

$$\frac{p_1}{p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6} = \frac{\frac{d_1^2}{8} \pi}{\frac{130d_1^2}{3200} \pi} = \frac{3200}{1040} = \frac{40}{13}$$

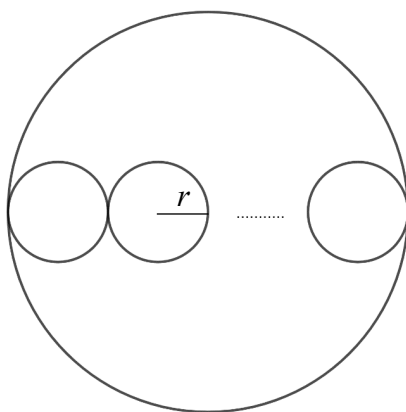
Kar pomeni, da je ploščina večjega polkroga približno 3,1 krat večja od vsote ploščin vrtanih polkrogov.

UGOTOVITEV

Glede na izračunane količnike ploščin, po vrsti (s približki) 1,8; 2,6; 2,88; 3,1 sklepamo, da s povečevanjem števila včrtanih polkrogov ne glede na razmerje premerov količnik med ploščino večjega polkroga in vsoto ploščin včrtanih polkrogov narašča. Kar pomeni, da se vsota ploščin včrtanih polkrogov manjša, kar smo ugotovili tudi pri včrtovanju polkrogov z enakim polmerom (premerom).

5. KROGI V KROGU

V primerih smo do sedaj vedno uporabljali polkrožnice in polkroge. Če namesto polkrogov uporabimo kroge, bi potek dela bil enak. V krog načrtamo n krožnic z enakim polmerom in izračunamo vsoto obsegov včrtanih krožnic ter jo primerjamo z obsegom večje krožnice (slika 26).



Slika 26: n krožnic v krogu

$$d = 2nr$$

Obseg kroga računamo kot $2\pi r$, tako da velja da je obseg večjega kroga enak: $2\pi \cdot \frac{2nr}{2} = 2\pi nr$.

Obseg enega včrtanega kroga je $2\pi r$, da pa dobimo seštevek vseh manjših krogov, moramo $2\pi r$ pomnožiti z n in tako dobimo $2\pi nr$.

Ugotovimo da je seštevek obsegov manjših krogov enak obsegu večjega kroga. Sklep bi lahko izpeljali tudi iz ugotovitev za polkrožnice, kjer gre za polovice celotnih krožnic.

Kako pa je s ploščino? Že iz slike (slika 26) lahko sklepamo, da se z večanjem števila krogov manjša ploščina včrtanih krogov in tudi vsota ploščin včrtanih krogov se v primerjavi s ploščino celotnega kroga manjša.

Ploščina večjega kroga je $\pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \pi \frac{d_1^2}{4}$.

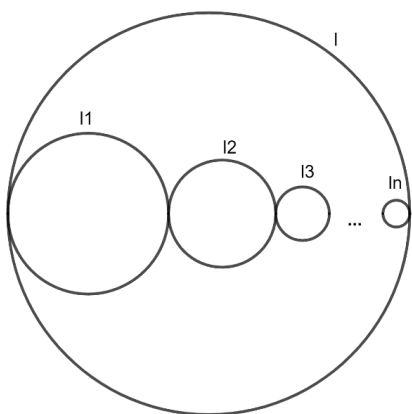
Ploščina manjšega kroga pa je $\pi \left(\frac{d_1}{2 \cdot n}\right)^2 = \pi \frac{d_1^2}{4 \cdot n^2}$.

Ploščino manjšega kroga pomnožimo z n , da dobimo vsoto ploščin vseh malih krogov,

$$n \cdot \pi \frac{d_1^2}{4 \cdot n^2} = \pi \frac{d_1^2}{4 \cdot n}.$$

Ugotovimo, da je vsota ploščin manjših krogov n -krat manjša od ploščine večjega kroga.

Poglejmo, kako je s ploščinami neskladnih krogov v velikem krogu (slika 27).



Slika 27: n neskladnih krogov v krogu

Spet, kot pri polkrogih so $d_2, d_3, d_4 \dots$ - premeri manjših krogov in n - poljubno število manjših krogov.

Ploščina velikega kroga:

$$p = \pi \cdot \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d_1^2}{4}$$

Seštevek ploščin vseh manjših polkrogov (m so vsi manjši krogi):

$$p_m = \pi \cdot \frac{d_2^2}{4} + \pi \cdot \frac{d_3^2}{4} + \pi \cdot \frac{d_4^2}{4} + \dots + \pi \cdot \frac{d_n^2}{4}$$

Izpostavimo $\pi \cdot \frac{1}{4}$:

$$p_m = \pi \cdot \frac{1}{4} (d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + \dots + d_n^2)$$

Ko ploščino večjega kroga delimo z vsoto ploščin manjših krogov dobimo:

$$\frac{p}{p_m} = \frac{\pi \cdot \frac{d_1^2}{4}}{\pi \cdot \frac{1}{4} (d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + \dots + d_n^2)}$$

To pa nato okrajšamo na

$$\frac{p}{p_m} = \frac{d_1^2}{d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + \dots + d_n^2}$$

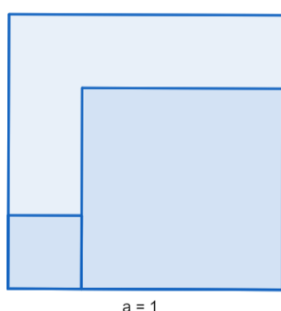
Ugotovimo, da je ploščina pri manjših neskladnih krogih $\frac{d_1^2}{d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + \dots + d_n^2}$ krat manjša od ploščine večjega kroga. Je količnik kvadrata premera večjega kroga z vsoto kvadratov premerov včrtanih krogov.

6. KVADRATI V KVADRATU

Na kratko še predstavimo idejo, kako je s kvadrati, ki jih načrtamo nad stranico kvadrata v notranjost kvadrata. Podobno kot smo nad premerom načrtovali polkrožnice oziroma polkroge.

6.1. OBSEG KVADRATOV V KVADRATU

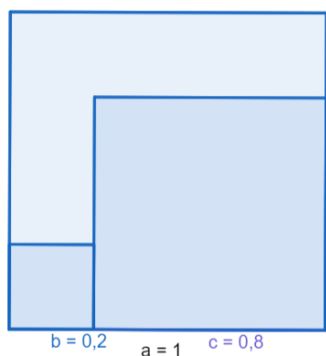
Preverimo ali je vsota obsegov manjših likov v večjem enaka obsegu večjega. Postavimo dva neskladna kvadrata v večji kvadrat (slika 28). Pri tem je stranica večjega kvadrata enaka 1.



Slika 28: dva poljubna kvadrata v kvadratu s stranico a

Stranice manjših kvadratov se stikajo s stranicami večjega kvadrata.

Poglejmo na primeru (slika 29). Dolžini stranic včrtanih kvadratov sta v razmerju 1 : 4.



Slika 29: dva kvadrata v razmerju 1:4

Tukaj je primer, kjer to pravilo velja. Naj bo a stranica velikega kvadrata, b in c pa stranici manjših kvadratov v večjem.

$$o_a = 4 \cdot 1 = 4$$

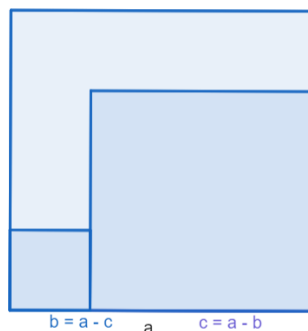
$$o_b = 4 \cdot 0,2 = 0,8$$

$$o_c = 4 \cdot 0,8 = 3,2$$

$$o_b + o_c = 0,8 + 3,2 = 4$$

$$o_b + o_c = o_a$$

Če dolžin stranic ne bi poznali, uporabimo zapis s spremenljivko (slika 30).



Slika 30: dva kvadrata s poljubnimi dolžinami stranic

$$o_a = 4a$$

$$o_b = 4(a - c) = 4a - 4c$$

$$o_c = 4(a - b) = 4a - 4b$$

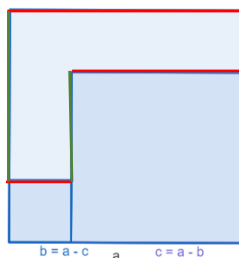
$$o_b + o_c = (4a - 4c) + (4a - 4b) = 4a - 4c + 4a - 4b = 8a - (4c + 4b)$$

Ker vemo, da mora vsota c in b biti a lahko zapišemo

$$o_b + o_c = 8a - (4c + 4b) = 8a - 4a = 4a$$

$$o_b + o_c = o_a$$

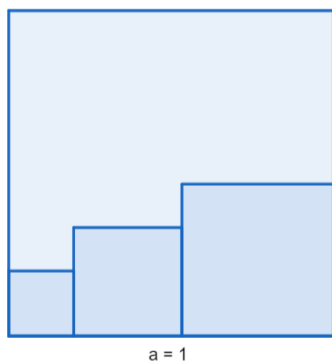
O enakosti lahko sklepamo tudi s slike, ko označimo enake dolžine daljic (slika 30a).



Slika 30a: dva kvadrata s poljubnimi dolžinami stranic-geometrijski prikaz

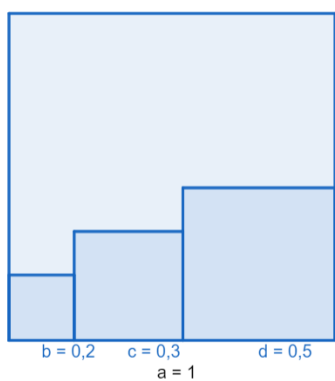
Enako označene daljice so zaradi vzporednosti enake (stranica a je vsota enako označenih daljic b in c – rdeče označeno)). Enako velja za zeleno označene daljice.

Nato v kvadrat včrtamo še en manjši kvadrat (slika 31).



Slika 31: trije kvadrati v večjem kvadratu s stranico a

Spet pogledjmo primer, kjer smo dolžine stranic manjših kvadratov izbrali v razmerju 2:3:5 (slika 32).



Slika 32: trije kvadrati v razmerju 2:3:5

Zapišemo obsege kvadratov

$$o_a = 4 \cdot 1 = 4$$

$$o_b = 4 \cdot 0,2 = 0,8$$

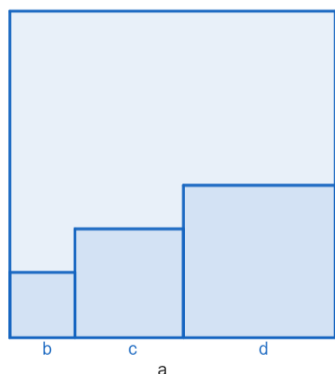
$$o_c = 4 \cdot 0,3 = 1,2$$

$$o_d = 4 \cdot 0,5 = 2$$

$$o_b + o_c + o_d = 0,8 + 1,2 + 2 = 4$$

$$o_b + o_c + o_d = o_a$$

Kaj pa če ne poznamo dolžine stranic manjših kvadratov? (slika 33)



Slika 33: trije kvadrati s poljubnimi dolžinami stranic

Dolžine stranic kvadratov bi lahko zapisali tako:

$$b = a - (c + d)$$

$$c = a - (b + d)$$

$$d = a - (b + c)$$

Obsege pa tako:

$$o_a = 4a$$

$$o_b = 4(a - c - d) = 4a - 4c - 4d$$

$$o_c = 4(a - b - d) = 4a - 4b - 4d$$

$$o_d = 4(a - b - c) = 4a - 4b - 4c$$

Njihov seštevek je

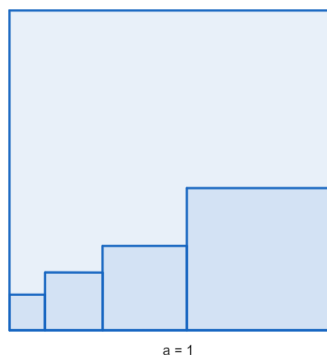
$$o_b + o_c + o_d = 4a - 4c - 4d + 4a - 4b - 4d + 4a - 4b - 4c = 12a - 8b - 8c - 8d = 12a - (8b + 8c + 8d)$$

Ker vemo, da je vsota b , c in d enaka a , lahko to zapišemo tako:

$$o_b + o_c + o_d = 12a - (8b + 8c + 8d) = 12a - 8a = 4a$$

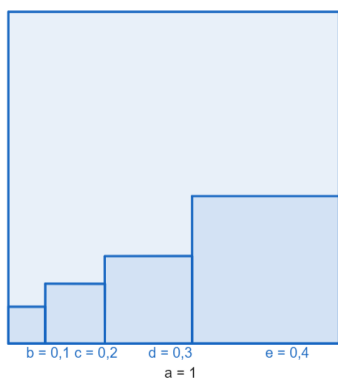
$$o_b + o_c + o_d = o_a$$

Včrtajmo še štiri kvadrate v večji kvadrat (slika 34).



Slika 34: štirje kvadrati v večjem kvadratu s stranico a

Dolžine stranic smo spet poljubno izbrali, naj bodo v razmerju 1 : 2 : 3 : 4 (slika 35)



Slika 35: štirje kvadrati v razmerju 1:2:3:4

Zato so obsegi

$$o_a = 4 \cdot 1 = 4$$

$$o_b = 4 \cdot 0,1 = 0,4$$

$$o_c = 4 \cdot 0,2 = 0,8$$

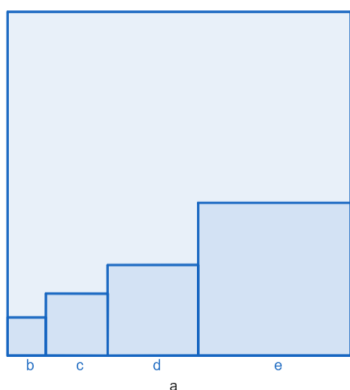
$$o_d = 4 \cdot 0,3 = 1,2$$

$$o_e = 4 \cdot 0,4 = 1,6$$

$$o_b + o_c + o_d + o_e = 0,4 + 0,8 + 1,2 + 1,6 = 4$$

$$o_b + o_c + o_d + o_e = o_a$$

Za poljubno dolžino stranic včrtanih kvadratov (slika 36).



Slika 36: štiri kvadrati s poljubnimi dolžinami stranic

Dolžine stranic so potem

$$b = a - (c + d + e)$$

$$c = a - (b + d + e)$$

$$d = a - (b + c + e)$$

$$e = a - (b + c + d)$$

Velikosti obsegov so

$$o_a = 4a$$

$$o_b = 4(a - c - d - e) = 4a - 4c - 4d - 4e$$

$$o_c = 4(a - b - d - e) = 4a - 4b - 4d - 4e$$

$$o_d = 4(a - b - c - e) = 4a - 4b - 4c - 4e$$

$$o_e = 4(a - b - c - d) = 4a - 4b - 4c - 4d$$

Njihova vsota je

$$o_b + o_c + o_d + o_e = 4a - 4c - 4d - 4e + 4a - 4b - 4d - 4e + 4a - 4b - 4c - 4e + 4a - 4b - 4c - 4d = 16a - 12b - 12c - 12d - 12e =$$

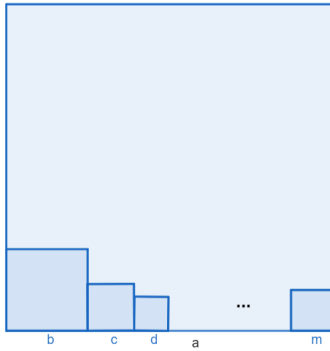
$$16a - (12b + 12c + 12d + 12e)$$

Ker vemo, da je $b + c + d + e = a$, lahko to zapišemo tako:

$$o_b + o_c + o_d + o_e = 16a - (12b + 12c + 12d + 12e) = 16a - 12a = 4a$$

$$o_b + o_c + o_d + o_e = o_a$$

Pokažimo še pravilo za poljubno število (m) kvadratov v večjem kvadratu (slika 37).



Slika 37: m število kvadratov

Kot smo naredili v konkretnih primerih, najprej izrazimo dolžine stranic. Prvi kvadrat je kvadrat s stranico b_1 , drugi kvadrat ima stranico b_2 , tretji stranico b_3 in m -ti kvadrat ima stranico b_m (na sliki je $b = b_1, c = b_2, \dots$).

$$b_1 = a - (b_2 + b_3 \dots + b_m)$$

$$b_2 = a - (b_1 + b_3 \dots + b_m)$$

$$b_3 = a - (b_1 + b_2 \dots + b_m)$$

...

$$b_m = a - (b_1 + b_2 \dots + b_{m-1})$$

$$o_a = 4a$$

$$o_1 = 4a - 4(b_2 + b_3 \dots + b_m) = 4a - 4b_2 - 4b_3 - \dots - 4b_m$$

$$o_2 = 4a - 4(b_1 + b_3 \dots + b_m) = 4a - 4b_1 - 4b_3 - \dots - 4b_m$$

$$o_3 = 4a - 4(b_1 + b_2 \dots + b_m) = 4a - 4b_1 - 4b_2 - \dots - 4b_m$$

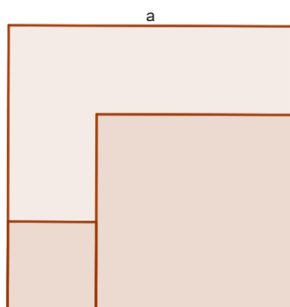
...

$$o_m = 4a - 4(b_1 + b_2 \dots + b_{m-1}) = 4a - 4b_1 - 4b_2 - \dots - 4b_{m-1}$$

$$\begin{aligned} o_1 + o_2 + o_3 \dots + o_m &= 4(m \cdot a - (m-1)(b_1 + b_2 \dots + b_m)) = 4(ma - (m-1)a) = \\ &= 4(ma - ma + 1a) = 4a \end{aligned}$$

Kot pri vseh ostalih primerih je vsota dolžin stranic manjših kvadratov enaka a , ne glede na število kvadratov. Zato bo vsota obsegov teh kvadratov vedno enaki $4a$ oz. obsegu največjega kvadrata.

6.2 PLOŠČINA KVADRATOV V KVADRATU



Slika 38: dva kvadrata v večjem kvadratu s stranico a

Ploščina največjega kvadrata je $p = a \cdot a = a^2$

Ploščina kvadrata s stranico b je $p_1 = b^2$

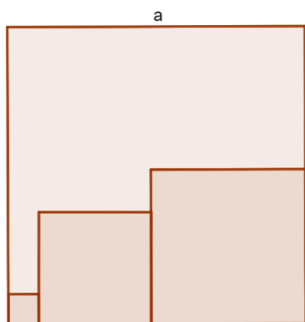
Ploščina drugega kvadrata s stranico c je $p_2 = c^2$

Te dve ploščini seštejemo in dobimo $p_1 + p_2 = b^2 + c^2$

Ploščino večjega in ploščini manjšega delimo in če privzamemo da je dolžina $a = 1$, je

$\frac{p}{p_1 + p_2} = \frac{1}{b^2 + c^2}$. V primeru da je $b = c$, je količnik 2, kar pomeni da je ploščina večjega kvadrata dvakrat večja od vsote ploščin manjših dveh kvadratov.

Včrtajmo še tri kvadrate v večji kvadrat (slika 39).



Slika 39: trije kvadrati v večjem kvadratu s stranico a

Ploščine kvadratov so

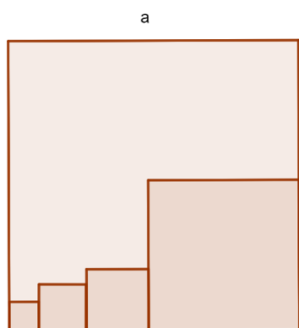
$$p_1 = b^2, p_2 = c^2 \text{ in } p_3 = d^2$$

Vsota vseh treh ploščin je

$$p_1 + p_2 + p_3 = (b^2 + c^2 + d^2). \text{ Ker privzamemo da je } a = 1, \text{ zapišemo količnik}$$

$$\frac{p}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{1}{b^2 + c^2 + d^2}.$$

Za štiri kvadrate (slika 40).



Slika 40: štirje kvadrati v večjem kvadratu s stranico a

$$p_1 = b^2, p_2 = c^2, p_3 = d^2 \text{ in } p_4 = e^2.$$

Te ploščine seštejemo

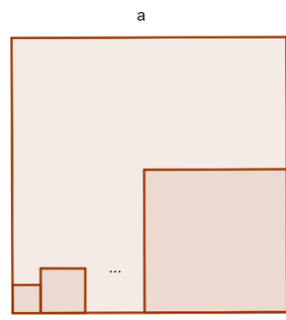
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = (b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \text{ in zapišemo količnik}$$

$$\frac{p}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{1}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}.$$

Imenovalec ulomka je vsota kvadratov, ker pa so posamezne dolžine manjše od 1 in je kvadrat števila manjšega od 1 še manjše število, je količnik zato vedno večje število. Tako je za dolžino stranice b

$$0 < b < 1 \text{ in } b^2 < b, 0 < c < 1 \text{ in } c^2 < c \text{ in za ostale dolžine stranic včrtanih kvadratov enako.}$$

Za poljubno število včrtanih kvadratov (n), katerih vsota dolžin posamezne stranice je enaka dolžini stranice večjega kvadrata (slika 41) zapišemo ploščine in količnik ploščin.



Slika 41: n število kvadratov

n - število kvadratov

Ploščina poljubnega kvadrata (p_i) je $p_i = a_i^2$.

p_n je vsota ploščin vseh manjših kvadratov,

$$p_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

$$\frac{p}{p_m} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

UGOTOVITVE: Enako kot pri neskladnih polkrogih in krogih je vsota ploščin vseh manjših kvadratov za $\frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ krat manjša od ploščine večjega kvadrata.

7. ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi smo primerjali dolžino loka večje polkrožnice z vsoto dolžin lokov manjših polkrožnic. Manjše polkrožnice so imele premer na premeru večje polkrožnice. Med sabo so se dotikale. Premeri so bili tako skladni kot tudi neskladni. Ugotovili smo, da je ne glede na dolžino premerov včrtanih polkrožnic skladne vsota dolžin lokov včrtanih polkrožnic vedno enaka dolžini večje polkrožnice.

Primerjali smo tudi ploščino večjega polkroga z vsoto ploščin manjših skladnih polkrogov in ugotovili, da je vsota ploščin manjših polkrogov za n -krat manjša od ploščine večjega polkroga.

Za ploščine neskladnih včrtanih polkrogov smo ugotovili, da se vsota ploščin manjših polkrogov manjša z večanjem števila včrtanih polkrogov, oziroma, da se količnik med ploščino

večjega polkroga in vsoto plosčin manjših polkrogov z različnimi premeri povečuje z večanjem števila včrtanih polkrogov.

Glede na to, da so polkrogi samo polovice celotnih krogov lahko ugotovitve prenesemo tudi na včrtane celotne kroge v večji krog. Pri tem se včrtane krožnice dotikajo in vsota dolžin njihovih premerov je enaka dolžini premera večje krožnice. V nadaljevanju bi lahko raziskali ali je ne glede na lego včrtanih krožnic vsota obsegov enaka obsegu večje krožnice, če je vsota dolžin premerov včrtanih krožnic enaka premeru večje krožnice.

Vsota plosčin včrtanih krogov, ki imajo vsoto dolžin premerov enako dolžini premera večjega kroga, je vedno manjša od plosčine kroga. Z večanjem števila krogov se količnik med plosčino večjega kroga in vsoto plosčin včrtanih krogov povečuje. Pri včrtanih krogih z enakim premerom je količnik enak številu včrtanih krogov.

Prav tako smo lastnosti preverili in potrdili za načrtovanje kvadratov v večji kvadrat, če je vsota dolžin posameznih stranic včrtanih kvadratov enaka dolžini stranice večjega kvadrata.

V nadaljevanju raziskave bi lahko preverili ali lastnosti za obsege (plosčine) veljajo tudi za druge like, morda čisto poljubne. Prav tako se odpira vprašanje kako je v primeru teles, če recimo v kroglo načrtamo take manjše krogle, ki imajo premer enak dolžini premera krogle – ali je površina včrtanih krogel enaka površini večje krogle? Kaj pa vsota prostornin?

8. DRUŽBENA ODGOVORNOST

Naša raziskovalna naloga v družbi vzpodbuja interes za matematiko, predvsem za geometrijo. Pomaga pri razvijanju kritičnega in matematičnega razmišljanja ter sklepanja.

Pri izdelavi raziskovalne naloge smo izhajali iz znanja pridobljenega v šoli in našim razmišljanjem. Upamo, da bo naloga spodbuda ali vir idej za druge učence.

9. VIRI

(1) Jože Senekovič, Cvetka Govejšek, Jožica Smogavec, Matematika za radovedneže 8, ICO d.o.o, 2011

(2) Miha Mlinarič, Nino Djorđević, Včrtajmo kroge, raziskovalna naloga Mladi za napredek Maribora, 2017