

Inštitut montessori
Zasebna osnovna šola montessori, Ljubljana

Računanje s škatlami škatlic in antiškatlic

MATEMATIKA

raziskovalna naloga

Avtorji: Lucija Demšar (9. r), Kristina Mahnič in Marko Marinič (8. r)

Mentor: Igor Blažič, dipl. ing.

Somentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Ljubljana, april 2024

Zahvala

Zahvaljujemo se:

- mentorju g. Igorju Blažiču za spodbude in usmerjanje pri izdelavi raziskovalne naloge ter za pomoč pri iskanju virov,
- somentorju g. Alojzu Grahorju za idejo raziskovalne naloge in pomoč pri oblikovanju zapisa matematičnega dela naloge in
- lektorici ge. Mihaeli Kastelec za podroben pregled.

Kazalo vsebine

Kazalo slik.....	V
Povzetek.....	VI
1. Uvod	1
1.1. Uvodni izziv.....	1
1.2. Cilji raziskovalne naloge.....	2
1.3. Metode dela	2
2. Računanje z naravnimi in celimi števili v matematiki montessori.....	3
2.1. Računanje z naravnimi števili	3
2.1.1. Definicija naravnih števil	3
2.1.2. Seštevanje naravnih števil	4
2.1.3. Množenje naravnih števil	4
2.2. Računanje s celimi števili	5
2.2.1. Definicija celih števil	5
2.2.2. Seštevanje in odštevanje celih števil	5
2.2.3. Množenje celih števil.....	7
3. Računanje z multimnožicami	8
3.1. Običajne množice.....	8
3.2. Opis multimnožice	9
3.4. Množenje multimnožic	11
3.5. Primeri računanja z multimnožicami.....	11
3.6. Primeri številskih multimnožic.....	12
3.6.1. Število Nič	12
3.6.2. Naravna števila kot multimnožice	13
3.6.3. Polištevila	14
3.7. Cela števila kot multimnožice	14
3.7.1. Nič in antiNič	14
3.7.2. Multimnožica in antiMultimnožica	16
3.7.3. Definicija celih števil (kot multimnožice).....	18
3.7.4. Negativna multimnožica	19
3.7.5. Cela in antiCela števila.....	20
4. Računanje s škatlami in antiškatlami	22
4.1. Definicija »sveta škatel in antiškatel«.....	22

4.2.	Seštevanje škatel	23
4.3.	Množenje škatel	25
4.4.	Lastnosti osnovnih računskih operacij	25
4.5.	Odštevanje škatel in antiškatel	28
4.6.	Vrste škatel – povzetek	28
4.7.	Primeri množic škatel škatlic in antiškatlic.....	28
4.7.1.	Nič kot prazna škatlica	28
4.7.2.	Naravna števila kot škatle	29
4.7.3.	Naravna in antinaravna števila s škatlami	29
4.7.4.	Cela in anticela števila kot škatle.....	30
4.7.5.	Računanje s polinomi z naravnimi stopnjami	31
4.7.6.	Računanje s polinomi s pozitivnimi in negativnimi stopnjami	33
5.	Nove ideje	34
5.1.	Računanje s polinomi z večjimi koeficienti.....	34
5.2.	Ničle funkcij	35
5.3.	Praštevila in razcep na praštevila	36
5.4.	Drugi poskus definicije celih števil z multimnožicami	37
5.5.	Nazorna predstavitev seštevanja in množenja celih števil s škatlicami	39
6.	Zaključek.....	40
7.	Viri in literatura	41

Kazalo slik

Slika 1: Predstavitev naravnih števil s palčkami v predalčkih/škatlicah.....	3
Slika 2: Primer množenja dveh naravnih števil $3 \times 5 = 5 \times 3$	4
Slika 3: Predstavitev števila -8 in števila 0 z žetončki.....	5
Slika 4: Prvi prikaz odštevanja: $-6 + 8$ z rumenimi in rdečimi žetončki	6
Slika 5: Drugi prikaz odštevanja celih števil.....	6
Slika 6: Primer množenja negativnega števila $(-5) \times 3$	7
Slika 7: Primer multimnožice – pripravljen material za računanje s celimi števili v škatlah	10
Slika 8: Primer »škatlastih« multimnožic	12
Slika 9: Primeri izpuhtitev škatel in antiškatel	23
Slika 10: Določanje naboja končne škatle	24
Slika 11: Množenje škatel (primer)	25

Povzetek

V raziskovalni nalogi raziskujemo temeljne principe računanja s celimi števili: seštevanje, množenje in odštevanje. Seštevanje in odštevanje naravnih števil si običajno predstavljamo z gibanjem po številski premici ali s preštevanjem elementov. V nalogi izhajamo iz tega drugega opisa. Ker pa si cela števila predstavljamo kot množice, v katerih so elementi med seboj enaki, opišemo drugačne množice, to je multimnožice. Število nič definiramo kot prazno množico, naravno število pa kot multimnožico ničel. Uvedemo še drugi tip števila nič, to je antinič. Negativno število definiramo kot multimnožico antiničel. Seštevanje definiramo kot unijo, množenje pa kot množico, v kateri so vse možne vsote elementov iz prve in iz druge množice. Da veljajo osnovne lastnosti računanja, uvedemo še pojem antimnožice, pri celih številih pa definiramo še anticela števila. Množice in antimnožice poimenujemo škatle in antiškatle. S to metodo lahko seštevamo, odštevamo in množimo ne samo cela in anticela števila, temveč tudi polinome s pozitivnimi in negativnimi eksponenti. Nalogo zaključimo z opisom nazorne predstavitve seštevanja in množenja celih števil.

Ključne besede: računanje s škatlami, aritmetika, seštevanje celih števil, množenje celih števil

1. Uvod

1.1. Uvodni izziv

Pri pouku matematike se učimo o naravnih in celih številih. Osnovni operaciji sta seštevanje in množenje. Odštevanje naravnih števil ni vedno možno. Zato naravnim številom dodamo še 0 in negativna števila. To je množica celih števil. Odštevanje potem izvedemo kot prištevanje negativnega števila ali kot gibanje po številski premici. Množenje pa si predstavljamo kot večkratno seštevanje.

Za seštevanje naravnih števil je dobrodošlo, da si posamezno število predstavljamo kot število enakih reči v množici in potem jih združimo. Matematično s tem naredimo unijo dveh množic. Glavni izziv v nalogi pa je vprašanje, kako bi tudi množenje števil izvedli z računanjem z množicami.

V drugem poglavju opišemo temeljne principe računanja s celimi števili v matematiki montessori. V tej matematiki je naravno število n predstavljeno s količino n enot v škatlici, na primer: Številka 5 predstavlja količino petih enot. Število 0 predstavlja prazna škatlica, medtem ko so pri drugih številih škatlice napolnjene. S teoretičnega vidika je naravno število n predstavljeno s številom n (ponavadi enakih) reči v množici. Kot vemo, v običajnih množicah ni dovoljeno ponavljanje istega elementa. Tako v tretjem poglavju opišemo drugo obliko množice, v kateri dopuščamo ponavljanje enakih elementov. Takšne množice imenujemo multimnožice. Te množice in računanje z njimi predstavljamo v tretjem poglavju.

1.2. Cilji raziskovalne naloge

Zastavili smo si naslednje cilje, in sicer:

- definirati naravna števila z množicami,
- definirati negativna naravna števila z množicami,
- izpeljati postopek seštevanja celih števil z računanjem z množicami,
- izpeljati postopek množenja celih števil z računanjem z množicami,
- izdelati nazorno predstavitev seštevanja in množenja celih števil.

1.3. Metode dela

Pri raziskovalni nalogi smo uporabili naslednje metode:

- študij literature (internetni viri),
- matematično sklepanje, računanje in dokazovanje.

2. Računanje z naravnimi in celimi števili v matematiki montessori

2.1. Računanje z naravnimi števili

2.1.1. Definicija naravnih števil

V matematiki montessori je naravno število n predstavljeno s količino n enot, na primer: številka 5 predstavlja količino petih enot – pet palčk (glej Sliko 1). V montessori matematiki predstavlja palčka enoto. Število 0 predstavlja prazen prostor – prazna škatlica, medtem ko so pri drugih številih škatlice ustrezno napolnjene. Običajno definiramo naravna števila kot števila, s katerimi štejemo. Število 0 nekateri uvrščajo med naravna števila, nekateri ne. Množico naravnih števil $\{1, 2, 3, \dots\}$ označimo z $\mathbb{N}$, množico $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ pa z $\mathbb{N}_0$. Kasneje bomo tudi sami šteli število 0 k naravnim številom.



Slika 1: Predstavitev naravnih števil s palčkami v predalčkih/škatlicah

2.1.2. Seštevanje naravnih števil

Seštevanje naravnih števil $a + b$ v matematiki montessori izvedemo tako, da pripravimo dva niza zrn (kroglic ali kartončkov): prvi niz je sestavljen iz a zrn, drugi niz iz b zrn ter jih združimo skupaj. Če pogledamo s teoretičnega vidika, smo si števili a in b predstavljali kot množici a in b zrn ter naredili njuno unijo: $a = \{ \circledast \circledast \dots \circledast \}$, $b = \{ \circledast \circledast \dots \circledast \}$, $a + b = a \cup b = \{ \circledast \circledast \circledast \circledast \dots \circledast \}$. Rezultat dobimo tako, da pogledamo, koliko zrn je v dobljeni uniji.

Primer: $2 + 3 = \{ \circledast \circledast \} \cup \{ \circledast \circledast \circledast \} = \{ \circledast \circledast \circledast \circledast \circledast \} = 5$

Za seštevanje naravnih števil veljata zakona o zamenjavi seštevancev (komutativni zakon) in zakon o združevanju členov (asociativni zakon):

$$a + b = b + a \qquad (a + b) + c = a + (b + c)$$

Kaj pa število nič = 0? Na Sliki 1 je prva škatlica prazna. S prazno množico bomo predstavili število nič: $0 = \{ \}$.

2.1.3. Množenje naravnih števil

Množenje naravnih števil $a \cdot b$ izvedemo tako, število a b – krat med seboj seštejemo: $a \cdot b = a + a + \dots + a$, kjer je natanko b seštevancev.

V montessori matematiki prikažemo število kot dolžino vrstice, večkratnost pa je prikazana kot širina oziroma s stolpci (glej Sliko 2). Tu smo namesto palčk uporabili barvna zrna. Na Sliki 2 je tudi prikazan zakon o zamenjavi faktorjev (komutativni zakon).



Slika 2: Primer množenja dveh naravnih števil $3 \times 5 = 5 \times 3$

Za množenje naravnih števil veljata zakona o zamenjavi faktorjev (komutativni zakon) in zakon o združevanju faktorjev (asociativni zakon):

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Operaciji seštevanja in množenja povezuje zakon o razčlenjevanju (distributivni zakon):

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

2.2. Računanje s celimi števili

2.2.1. Definicija celih števil

V matematiki montessori, predvsem v tretji triadi, uporabljamo material, imenovan rumeno-rdeči žetončki, kjer predstavimo število 1 z rumenim žetončkom, število -1 z rdečim žetončkom. Iz tega sledi, da lahko nasprotno vrednost naravnega števila n , to je $-n$ predstavimo z n rdečimi žetončki. Na Sliki 3 je predstavitev števila -8 . Kaj pa število 0? Ker je $1 + (-1) = 0$, predstavimo število 0 hkrati z rumenim in rdečim žetončkom (glej Sliko 3). Nasprotno vrednost naravnega števila dobimo tako, da vse rumene žetončke zamenjamo z rdečimi, saj je $-n = (-1) \cdot n$. Vsem naravnim številom pravimo pozitivna cela števila, vsem nasprotnim vrednostim naravnih števil negativna cela števila. Tako sestavimo množico celih števil, ki vsebuje pozitivna cela števila, negativna cela števila in število 0. Množico celih števil označimo z znakom $\mathbb{Z}$.



Slika 3: Predstavitev števila -8 in števila 0 z žetončki

2.2.2. Seštevanje in odštevanje celih števil

Za seštevanje celih števil veljajo enaki zakoni kot za seštevanje naravnih števil. V matematiki montessori izvedemo seštevanje pozitivnega in negativnega celega števila tako, da žetončke, ki predstavljata števili, položimo drugo poleg drugega. Pari,

sestavljani iz rumenega in rdečega žetončka, se medsebojno izničijo, ker je $-1 + 1 = 0$. Rezultat je število, ki ostane po »krajšanju«. Primera sta prikazana na Slikah 4 in 5.

Dve negativni celi števili seštejemo tako, da združimo obe množici rdečih žetončkov. S tem smo opisali tudi odštevanje celih števil. Števili a in b odštejemo tako, da k prvemu številu prištejemo nasprotno vrednost drugega števila. Nasprotno število pa dobimo tako, da rumene žetončke nadomestimo z rdečimi.



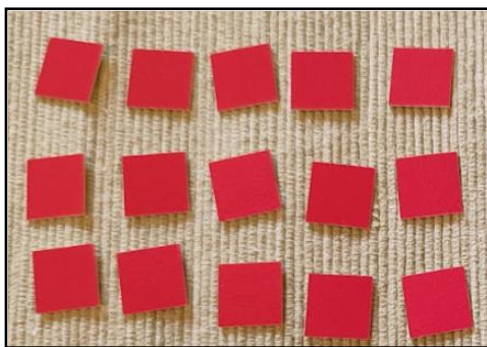
Slika 4: Prvi prikaz odštevanja: $-6 + 8$ z rumenimi in rdečimi žetončki



Slika 5: Drugi prikaz odštevanja celih števil

2.2.3. Množenje celih števil

Za množenje celih števil veljajo enaki zakoni kot za množenje naravnih števil. Množenje celih števil izvedemo podobno kot množenje naravnih števil. Če je eno število negativno, ga predstavimo z rdečimi žetončki in ponovimo tolikokrat, kolikor je drugi faktor. Primer je na Sliki 6. Če sta obe števili negativni, upoštevamo, da je $(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b = a \cdot b$.



Slika 6: Primer množenja negativnega števila $(-5) \times 3$

3. Računanje z multimnožicami

3.1. Običajne množice

Množica je skupina elementov s skupno lastnostjo. Vrstni red elementov ni pomemben, elementi se ne podvajajo. Množico običajno zapišemo tako, da naštejemo njene elemente, ločene z vejicami, med zavirtima oklepajema ali pa tako, da opišemo lastnosti elementov v množici, na primer: $A = \{3, 4, 5, 6\} = \{n; (n \in \mathbb{N}) \wedge (3 \leq n < 7)\}$.

Množici A in B sta enaki, ko vsebujeta enake elemente:

$$A = B \Leftrightarrow ((\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)).$$

Primeri: Množici $A = \{a, b, c\}$ in $B = \{a, c, b\}$ sta enaki.

Množici $C = \{a, b, c\}$ in $D = \{a, c, d\}$ nista enaki.

Množici $E = \{a, b, c\}$ in $F = \{a, b, c, b\}$ sta enaki.

V poglavju 2.1.2 smo zapisali primer seštevanja naravnih števil $a + b$ z množicami tako, da smo na primer število a predstavili z množico enakih zrn (ali enakih žetončkov) $a = \{*, * \dots *\}$, število b z množico enakih zrn (ali enakih žetončkov) $b = \{*, *, * \dots *\}$, njuno vsoto pa z unijo $a + b = a \cup b = \{*, *, *, * \dots *\}$. Rezultat smo dobili tako, da smo pogledali (prešteli), koliko zrn/žetončkov je v dobljeni uniji, na primer

$$2 + 3 = \{*, *\} \cup \{*, *, *\} = \{*, *, *, *, *\} = 5.$$

Toda s teoretičnega vidika ta predstava ni v redu. V običajni množici ni dovoljeno ponavljanje enakega elementa. V skladu z običajno teorijo množic bi bilo takole:

$$a = \{*, * \dots *\} = \{*\}, b = \{*, *, * \dots *\} = \{*\} \text{ in}$$

$a + b = a \cup b = \{*\} \cup \{*\} = \{*, *\} = \{*\} = 1$. Ta problem rešimo tako, da namesto običajnih množic gradimo predstavo o številih z drugačnimi množicami.

3.2. Opis multimnožice

V prejšnjem poglavju smo ugotovili, da z običajnimi množicami ni mogoče opisati na primer seštevanja števil z unijo množic. Radi bi, da bi bilo takole:

$$3 + 2 = \{\odot, \odot, \odot\} \cup \{\odot, \odot\} = \{\odot, \odot, \odot, \odot, \odot\} = 5.$$

Množicam, ki tudi teoretično omogočajo tak račun, pravimo multimnožice.

Definicija: Multimnožica je množica, ki vsebuje skupino elementov s skupno lastnostjo. Vrstni red elementov v multimnožici ni pomemben, dopuščamo pa podvajanje elementov.

Multimnožico zapišemo z oglatima oklepajema, elemente ločimo s presledki (Wildberger, 2022).

Multimnožici sta enaki, če vsebujeta enake elemente in je število enakih elementov enako. Na primer:

Množici [1 2 2 3] in [2 1 3 2] sta enaki.

Množici [1 2 3] in [3 2 2 1] nista enaki.

Unija in presek multimnožic sta definirana enako kot pri običajnih množicah. Pri tem moramo upoštevati večkratnost posameznih elementov. Primer:

$$A = [1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 4] \quad B = [1\ 2\ 2\ 2\ 3] \quad A \cup B = [1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 4] \quad A \cap B = [1\ 2\ 2\ 3]$$

Uvodni primer pa bi zapisali takole:

$$3 + 2 = [\odot\ \odot\ \odot] \cup [\odot\ \odot] = [\odot\ \odot\ \odot\ \odot\ \odot] = 5.$$

Kot zanimivost navajamo, da so pripravljeni materiali (glej Sliko 7) za računanje pravzaprav multimnožice. Tretja škatlica je prazna. Predstavlja število 0. Z matematičnimi znaki bi multimnožico s Slike 7 zapisali takole:

$$[[\text{nekaj naravnih števil}] [\text{desetice}] [] [\text{nekaj negativnih celih števil}]]$$



Slika 7: Primer multimnožice – pripravljen material za računanje s celimi števili v škatlah

3.3. Seštevanje multimnožic

Naj bodo množice A, B in C multimnožice.

Definicija: Vsota multimnožic A in B je enaka njuni uniji: $A \oplus B = A \cup B$.

Opomba: Ker gre za vsoto množic, bomo kot znak za seštevanje uporabljali simbol $\oplus$.

Ta operacija je notranja operacija, saj je rezultat seštevanja (to je unija) spet multimnožica z enako vrsto elementov.

Trditev: Za seštevanje množic veljata komutativni in asociativni zakon.

Dokaz komutativnosti: $A \oplus B = A \cup B = B \cup A = B \oplus A$. Unijo množic dobimo tako, da sestavimo množico iz elementov obeh množic. V obeh primerih dobimo enako, saj vrstni red elementov ni pomemben, morebitne podvojitve elementov pa nastopijo pri istih elementih. Seštevanje množic je komutativno.

Dokaz asociativnosti:

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \oplus C &= (A \cup B) \oplus C = A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup (B \oplus C) \\ &= A \oplus (B \oplus C).\end{aligned}$$

3.4. Množenje multimnožic

Naj bodo množice A, B in C multimnožice.

Definicija: Produkt multimnožic A in B je enak multimnožici

$$A \otimes B = [a \oplus b; (a \in A) \wedge (b \in B)]$$

Opomba: Ker gre za produkt množic, bomo kot znak za množenje uporabljali simbol $\otimes$.

Idejo za definicijo množenja množic smo dobili pri g. Wildbergerju. (Wildberger, 2022).

Množici A in B zmnožimo tako, da sestavimo vse mogoče vsote $a \oplus b$, kjer je a iz prve množice, b iz druge množice. Ko so elementi danih multimnožic množice, sestavljamo vse mogoče unije vseh možnih parov $A \cup B$, kjer je prvi element iz prve množice, drugi element iz druge množice. Po dogovoru velja oznaka $a \oplus b$ tako za vsoto elementov kot za vsoto, to je unijo množic.

Trditev: Množenje multimnožic je komutativno in asociativno.

Dokaz: Množenje multimnožic je definirano s seštevanjem multimnožic oziroma z unijo. Tako seštevanje števil kot unija množic sta komutativni in asociativni operaciji.

Za seštevanje in množenje multimnožic velja distributivni zakon:

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C).$$

Dokaz: Enako kot dokaz prejšnje trditve.

3.5. Primeri računanja z multimnožicami

Primer 1: Naj bo univerzalna množica naravnih števil in množici $A, B \subset \mathbb{N}$,

$$A = [1\ 2],\ B = [2\ 3\ 4]$$

$$A \oplus B = [1\ 2\ 2\ 3\ 4]$$

$$A \otimes B = [3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 6] = [3\ 4\ 4\ 5\ 5\ 6]$$

Opomba: Običajno uredimo zapis tako, da so enaki elementi skupaj.

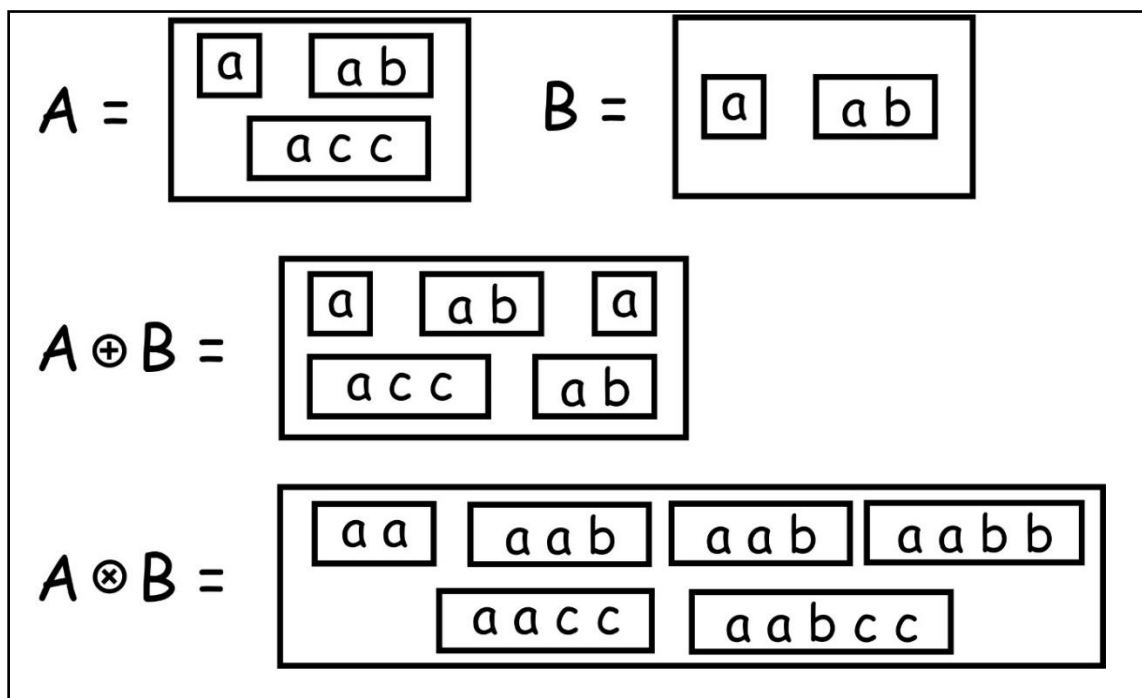
Primer 2: Naj bosta množici A in B takšni, da kot elemente vsebujeta multimnožice.

Naj bosta $A = [[0] [1]]$ in $B = [[1] [1\ 2\ 2]]$

$$A \oplus B = [[0] [1] [1] [1\ 2\ 2]]$$

$$A \otimes B = [[0] \cup [1] \ [0] \cup [1\ 2\ 2] \ [1] \cup [1] \ [1] \cup [1\ 2\ 2]] = \\ [[0\ 1] [0\ 1\ 2\ 2] [1\ 1] [1\ 1\ 2\ 2]]$$

Primer 3: Množici A in B sta škatli, ki vsebujeta po nekaj manjših škatlic (glej Sliko 8).



Slika 8: Primer »škatlastih« multimnožic

3.6. Primeri številskih multimnožic

3.6.1. Število Nič

Število Nič definiramo kot prazno multimnožico: $\text{Nič} = [] = 0$.

3.6.2. Naravna števila kot multimnožice

Ker je v multimnožici dovoljeno ponavljanje istega elementa, je potem definicija naravnih števil enostavna: kot moč multimnožic, ki vsebujejo števila Nič = 0.

$$0 = [] = \text{Nič}$$

$$1 = [0] = [[]]$$

$$2 = [0\ 0] = [[]\ []]$$

$$3 = [0\ 0\ 0]$$

$$4 = [0\ 0\ 0\ 0]$$

$$5 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

...

$$n = [0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0\ 0] \quad (\text{vsebuje natanko } n \text{ števil } 0).$$

Tako definirano množico naravnih števil označimo z **Nar** = [0 1 2 3 4 ...] = [[] [0] [0 0] [0 0 0] [0 0 0 0] ...]. Množica naravnih števil **Nar** je multimnožica. Njeni elementi n so multimnožice, sestavljene iz n -števil 0. V množici **Nar** ni podvojitvev elementov. Tako definirana naravna števila pa vsebujejo tudi število Nič = 0. Bistvena novost te nove definicije naravnih števil je, da si predstavljamo naravna števila kot množice (točneje kot multimnožice), ki vsebujejo natanko določeno število ničel.

Primer izračuna vsote in produkta dveh naravnih števil:

$$\text{Naj bosta: } A = [0\ 0] = 2 \qquad B = [0\ 0\ 0\ 0] = 4$$

Zapišimo celotni postopek izračuna:

$$2 \oplus 4 = A \oplus B = [0\ 0] \cup [0\ 0\ 0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = 6$$

$$2 \otimes 4 = A \otimes B = [0\ 0] \otimes [0\ 0\ 0\ 0] =$$

$$= [0 \oplus 0\ 0 \oplus 0\ 0 \oplus 0\ 0 \oplus 0\ 0 \oplus 0\ 0 \oplus 0\ 0 \oplus 0\ 0 \oplus 0] =$$

$$= [0 \cup 0\ 0 \cup 0\ 0 \cup 0\ 0 \cup 0\ 0 \cup 0\ 0 \cup 0\ 0 \cup 0] =$$

$$= [[] \cup []\ [] \cup []\ [] \cup []\ [] \cup []\ [] \cup []\ [] \cup []\ [] \cup []] =$$

$$= [[]\ []\ []\ []\ []\ []\ []\ []] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = 8$$

3.6.3. Polištevila

V prejšnjem poglavju smo zgradili množico naravnih števil, ki vsebuje multimnožice, sestavljene iz samih elementov 0. Lahko pa sestavimo multimnožico, ki vsebuje naravna števila. Takim »novim številom« pravimo polištevila.

Definicija: Polištevilo je multimnožica, ki vsebuje naravna števila. Multimnožico vseh polištevil označimo s **Poli**.

Primer: $A = [1\ 2] = [[0] [0\ 0]]$ $B = [0\ 2\ 3] = [[] [0\ 0] [0\ 0\ 0]]$

$$A \oplus B = A \cup B = [1\ 2] \cup [0\ 2\ 3] = [0\ 1\ 2\ 2\ 3]$$

$$\begin{aligned} A \otimes B &= [1 \cup 0\ 1 \cup 2\ 1 \cup 3\ 2 \cup 0\ 2 \cup 2\ 2 \cup 3] = \\ &= [0] \cup []\ [0] \cup [0\ 0]\ [0] \cup [0\ 0\ 0]\ [0\ 0] \cup []\ [0\ 0] \cup [0\ 0]\ [0\ 0] \cup [0\ 0\ 0] = \\ &= [[0][0\ 0\ 0][0\ 0\ 0\ 0][0\ 0][0\ 0\ 0\ 0]\ [0\ 0\ 0\ 0\ 0]] = [1\ 3\ 4\ 2\ 4\ 5] = [1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 5] \end{aligned}$$

ali na kratko $A \otimes B = [1\ 2] \otimes [0\ 2\ 3] = [1\ 3\ 4\ 2\ 4\ 5] = [1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 5]$

3.7. Cela števila kot multimnožice

3.7.1. Nič in antiNič

Kot že vemo, običajno množico števil, ki je sestavljena iz naravnih števil, iz nasprotnih vrednosti naravnih števil in iz števila 0, imenujemo cela števila. V tem primeru imenujemo naravna števila pozitivna cela števila $\mathbb{Z}^+$, nasprotnosti naravnih števil pa negativna cela števila $\mathbb{Z}^-$. Množico celih števil označimo z znakom $\mathbb{Z}$ in velja $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$.

V množici celih števil lahko seštevamo, množimo in odštevamo. Odštevanje definiramo kot prištevanje nasprotnega elementa: $a - b = a + (-b)$.

Opazimo dvojni pomen znaka minus: enkrat označuje operacijo odštevanja, drugič pa znak za nasprotni element, to je za negativna števila. V nadaljevanju bomo negativna

cela števila označevali z znakom $\neg a$. Za nasprotno število $\neg a$ k številu a velja: $a + (\neg a) = 0$. Razliko $a - b$ pa zapišemo kot: $a - b = a + (\neg b)$. Običajna predstava celih števil je predstavitev na številske traku, seštevanje je »pomikanje proti desni«, odštevanje pa pomikanje proti levi. Sedaj pa nadaljujmo z našo idejo, kako cela števila predstaviti z multimnožicami.

Naravna števila **Nar** smo vpeljali kot multimnožice števila Nič. Zastavimo si vprašanje, kako bi vpeljali negativna cela števila s pomočjo multimnožic. Začnimo pri negativnem številu $-1 = \neg 1$. Za število $\neg 1$ mora veljati enakost: $1 + \neg 1 = 0$. Razvijmo to enakost dalje:

$$[0] \oplus [x] = 0$$

$$[0 \ x] = []$$

Tu dobimo idejo, da postavimo za x simbol antiNič, ki ima to lastnost, da v multimnožici izniči element 0. Označimo ga z a0 . Torej velja:

$$[0 \ {}^a0] = []$$

Temu procesu pravimo **izpuhtitev** (*anihilacija*) (Wildberger, januar 2023). Do izničenja pride takrat, ko sta 0 in a0 znotraj iste multimnožice. Dobili smo torej $x = {}^a0$ in $\neg 1 = [{}^a0]$. Da bo označevanje še bolj pregledno, bomo antiNič označevali kot 0 z rdečo barvo, se pravi:

$$\text{Nič} = 0 = [], \quad \text{antiNič} = \textcolor{red}{0} = [\textcolor{red}{}], \quad 1 = [0], \quad \neg 1 = [{}^a0] = [\textcolor{red}{0}] \quad [0 \ \textcolor{red}{0}] = [].$$

Imamo torej dve vrsti števila nič, Nič in antiNič. Temu bomo preprosto rekli, da ima število nič lahko dva naboja, pozitivnega in negativnega.

Število antiNič = $\textcolor{red}{0}$ je popolnoma nov element v našem novem »svetu« števil. Ko definiramo operacije z $\textcolor{red}{0}$, moramo biti pozorni, da vse običajne lastnosti ostanejo v veljavi. Tako mora biti na primer $0 + 0 = 0$. Preverimo: $0 + 0 = [] + [] = [] = 0$.

Ker v običajni množici celih števil velja, da je $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, tudi tu pričakujemo enako:

$$1 \otimes 0 = 0$$

$$[0] \otimes [] = []$$

Kako to izračunati, saj za produkt »potrebujemo« elemente v drugi množici. Spomnimo se, da se multimnožici 0 in 0 v multimnožici izničita (izpuhtita): $[0\ 0] = []$. To lahko uporabimo tudi v obratni smeri. Ta proces imenujemo **pojavitvev (kreacija)** (Wildberger, januar 2023).

$$[] = [0\ 0]$$

$$[0] \otimes [0\ 0] = []$$

$$[0 + 0\ 0 + 0] = []$$

$$[0\ 0 + 0] = []$$

Da dobimo smiselno rešitev, mora biti $0 + 0 = 0$.

Zaradi komutativnosti je potem tudi $0 + 0 = 0$.

Izračunajmo še:

$$0 \otimes 0 = 0$$

$$[] \otimes [] = []$$

$$[0\ 0][0\ 0] = []$$

$$[0 + 0\ 0 + 0\ 0 + 0\ 0 + 0] = []$$

$$[0\ 0\ 0\ 0 + 0] = []$$

Če želimo tudi na levi strani dobiti prazno množico, mora biti $0 + 0 = 0$, da se elementi med seboj izničijo.

Seštevanko z Nič = 0 in antiNič = 0 predstavimo s tabelo:

$\oplus$	0	0
0	0	0
0	0	0

3.7.2. Multimnožica in antiMultimnožica

Naj bo M poljubna multimnožica. Po analogiji z računanjem v množici celih števil bi moralo veljati: $[M] \otimes 0 = 0$ oziroma $[M] \otimes [] = []$. Na levi strani enakosti imamo pri drugi množici problem, ker je prazna množica brez elementov.

$$[M] \otimes 0 = 0$$

$$[M] \otimes [] = []$$

Prazno množico nadomestimo z $[] = [0 \text{ } 0]$ in dobimo:

$$[M] \otimes [0 \text{ } 0] = []$$

$$[M + 0 \text{ } M + 0] = []$$

$$[M + 0 \text{ } M + 0] = []$$

$$[M \text{ } M + 0] = []$$

Da bo ta enakost veljala, mora biti $M + 0 = {}^aM$. Multimnožica aM ima lastnost, da se z multimnožico M izniči, ko sta skupaj v isti multimnožici. Multimnožica antiNič = 0 ima zanimivo lastnost: ko jo prištejemo k poljubni multimnožici, se spremeni tip multimnožice. Množico aM zapišemo z oglatimi oklepaji z rdečo barvo. Množica aM vsebuje enake elemente kot množica M , le drugačnega tipa je: Če je $M = [0 \text{ } 0 \text{ } 0]$, je potem ${}^aM = [0 \text{ } 0 \text{ } 0]$. Rekli bomo, da ima lahko multimnožica M pozitivni ali negativni naboj.

Povzemimo dobljene lastnosti:

$$M + 0 = 0 + M = M$$

$$M + 0 = 0 + M = {}^aM$$

Če postavimo $M = 0$, dobimo potrditev že znanega: $0 + 0 = {}^a0 = 0$.

Če postavimo $M = 0$, pa dobimo: $0 + 0 = {}^a0 = 0$. Torej velja ${}^a({}^a0) = 0$ oziroma ${}^a0 = 0$.

Če postavimo v zvezo ${}^aM = M + 0 = 0 + M$ namesto M kar aM , dobimo

$${}^a({}^aM) = {}^aM + 0 = M. \text{ Torej je } {}^a({}^aM) = M.$$

Bodimo pozorni, da zveza $A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0$ ne velja v primeru, ko je $A = 0$, saj je $0 \otimes 0 = 0$.

Zapišimo poštrevanki za 0 in 0 ter 1 in $^{-1}$:

$\otimes$	0	0
0	0	0
0	0	0

$\otimes$	1	⁻¹
1	1	⁻¹
⁻¹	⁻¹	1

3.7.3. Definicija celih števil (kot multimnožice)

Množico celih števil v »svetu multimnožic« vpeljemo podobno kot običajno. Množica **Nar** že vsebuje število 0 (in seveda vsa pozitivna cela števila). Definirati moramo še negativna cela števila. V prejšnjih razdelkih smo že definirali nasprotno število k številu 1, to je $^{-}1 = [0]$. Tam smo negativno število označili z minusom levo zgoraj, da ločimo ta predznak od znaka minus = «-» za operacijo odštevanja. Po vzoru definicije števila $^{-}1$ definirajmo k vsakemu naravnemu številu n njemu nasprotno število ^{-}n tako, da bo veljalo: $n + ^{-}n = 0$.

Definicija: Negativno celo število ^{-}n je multimnožica, ki vsebuje natanko n antiNičel.

$^{-}n = [0\ 0\ 0\ \dots\ 0]$, kjer je n moč množice ^{-}n (Wildberger, jan 2023). Število n vsebuje n števil Nič, število ^{-}n pa natanko n števil antiNič. Ko seštejemo $n + ^{-}n$, pari Nič = 0 in antiNič = 0 izpuhtijo in ostane prazna množica, torej 0: $n + ^{-}n = [] = 0$.

Primer: $^{-}3 = [0\ 0\ 0]$, ker je $3 + ^{-}3 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = [] = 0$.

Velja tudi: $^{-} (^{-}n) = ^{-}[0\ 0\ 0\ \dots\ 0] = [0\ 0\ 0\ \dots\ 0] = n$

Število ^{-}n lahko definiramo tudi kot $^{-}n = (^{-}1) \otimes n$, saj je:

$(^{-}1) \otimes n = [0] \otimes [0\ 0\ \dots\ 0] = [0 + 0\ 0 + 0\ \dots\ 0 + 0] = [0\ 0\ \dots\ 0] = ^{-}n$, ker je v vsaki multimnožico natanko n elementov.

Primer: $(^{-}1) \otimes 3 = [0] \otimes [0\ 0\ 0] = [0 + 0\ 0 + 0\ 0 + 0] = [0\ 0\ 0] = ^{-}3$.

Vse nasprotne vrednosti naravnih števil sestavljajo množico, ki jo imenujemo negativna cela števila. Množica celih števil je sestavljena iz pozitivnih celih števil (to so naravna števila), iz negativnih celih števil ter iz števil 0 in 0.

Odštevanje definiramo kot običajno: $a - b = a + (^{-}b)$

Primeri:

$$a) \ 3 \oplus 2 = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0] = 5$$

$$b) \ 3 - 2 = 3 \oplus (^{-}2) = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0] = [0] = 1$$

- c) $2 - 3 = 2 \oplus (-3) = [0\ 0] \oplus [0\ 0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0] = [0] = -1$
- d) $3 \otimes 2 = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = 6$
- e) $3 \oplus -2 = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0] = [0] = 1$
- f) $3 - -2 = 3 \oplus ((-1) \otimes (-2)) = [0\ 0\ 0] \oplus ([0] \otimes [0\ 0]) = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = 5$
- g) $3 \otimes -2 = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = -6$
- h) $-3 \oplus -2 = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0] = -5$
- i) $-3 \otimes -2 = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = 6$
- j) $-3 - -2 = -3 \oplus ((-1) \otimes (-2)) = [0\ 0\ 0] \oplus ([0] \otimes [0\ 0]) = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0] = -1$

Preverimo še, kako poljubnemu elementu prištevamo 0 in kako množimo z 0. Izračunajmo na primer $3 \oplus 0$ in $3 \otimes 0$.

$3 \oplus 0 = [0\ 0\ 0] \oplus [] = ?$. Rezultat je seveda enak 3, vendar pa ne vemo, kakšnega naboja je.

$3 \otimes 0 = [0\ 0\ 0] \otimes [] = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = ?\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0? = ?? = \dots$ ne vemo, ali je rezultat 0 ali 0.

Ta problem bomo skušali rešiti v naslednjih poglavjih.

3.7.4. Negativna multimnožica

Definicijo negativnih celih števil števil razširimo še na negativne multimnožice.

Definicija: Negativna multimnožica $-M$ je tista, za katero velja $M \oplus -M = 0$

Trditev: Naj bo M multimnožica. Potem je negativna multimnožica k množici M enaka $-M = (-1) \otimes M$.

Dokaz: Naj multimnožica M vsebuje kot elemente multumnožice $A, B \dots Z$. Torej je $M = [A\ B \dots Z]$. Za vsako multimnožico $[X]$ velja:

$$-[X] = (-1) \otimes [X] = [0] \otimes [X] = [0 \oplus X] = [{}^aX].$$

Potem je:

$$-M = (-1) \otimes M = [0] \otimes [X\ Y \dots Z] = [0 \oplus X\ 0 \oplus Y \dots 0 \oplus Z] = [{}^aX\ {}^aY \dots {}^aZ] \text{ in}$$

končno

$M \oplus {}^{-}M = [X \ Y \ \dots \ Z] \oplus [{}^aX \ {}^aY \ \dots \ {}^aZ] = [X \ Y \ \dots \ Z \ {}^aX \ {}^aY \ \dots \ {}^aZ] = [] = 0$, saj pari oblike X in aX izpuhtijo.

Hkrati smo pokazali tudi, da velja: ${}^{-}M = [{}^am : m \in M]$, saj množenje z ${}^{-}1$ spremeni naboj vsem elementov v multimnožici M .

Primer: Naj bo $M = [1 \ [2 \ 3]] = [[0] \ [2 \ 3]]$.

Potem je ${}^{-}M = [\textcolor{red}{0}] \otimes [[0][2 \ 3]] = [\textcolor{red}{1}] \otimes [[0][2 \ 3]] = [\textcolor{red}{0} \ [2 \ 3]]$.

Enako dobimo tudi po drugi poti: ${}^{-}M = [{}^a1 \ {}^a[2 \ 3]] = [\textcolor{red}{0} \ [2 \ 3]]$.

Preizkus: $M \oplus {}^{-}M = [[0][2 \ 3] \ \textcolor{red}{0} \ [2 \ 3]] = [] = 0$. (Dvakrat delec in anti-delec izpuhtita).

Trditev: Negativna množica negativne množice je prvotna množica: ${}^{-}({}^{-}M) = M$.

Dokaz:

$${}^{-}M = ({}^{-}1) \otimes ({}^{-}M) = ({}^{-}1) \otimes (({}^{-}1) \otimes M) = (({}^{-}1) \otimes ({}^{-}1)) \otimes M = 1 \otimes M = M$$

V izpeljavi smo upoštevali asociativnost množenja multimnožic.

3.7.5. Cela in antiCela števila

V poglavju 3.6.3. smo opisali množico celih števil. Ta množica vsebuje vsa naravna števila (cela pozitivna števila), število Nič = 0, število antiNič = $\textcolor{red}{0}$ in k vsakemu naravnemu številu še njegovo nasprotno število (negativna cela števila). Opazili pa smo tudi, da nekaj ni v redu. Ko številu prištejemo $\textcolor{red}{0}$, je naboj vsote nedoločen. Prav tako imamo problem glede naboja produkta pri množenju z $\textcolor{red}{0}$.

Tako po vzoru računanja s splošnimi multimnožicami k vsakemu od nič različnemu številu dodamo še antištevilo po vzoru števila 0 (Wildberger, sept. 2023). Antištevilo celega števila n je tisto število, ki znotraj iste množice povzroči, da obe števili izpuhtita:

$$M = [\text{število} \ \text{antištevilo}] = []$$

Antištevilo k vsakemu celemu številu n zapišemo kot an , označimo pa z rdečimi oklepaji, vsebina pa ostane enaka. Tej lastnosti pravimo, da ima vsako celo število lahko

še pozitivni ali negativni naboj. Poimenovanje smo povzeli iz fizike, kjer so za nekatere elementarne delce odkrili tudi njihove anti-delce, torej enake delce, ki se razlikujejo v naboju, na primer: elektron in proton.

Primer: $3 = [0\ 0\ 0]$ ${}^a3 = [0\ 0\ 0]$

$-3 = [0\ 0\ 0]$ ${}^a(-3) = [0\ 0\ 0]$

Opazimo, da imamo v tej množici celih in antiCelih števil dve vrsti ničel (Nič in antiNič) ter štiri vrste neničelnih števil pri vsakem naravnem številu n : n , $-n$, an in ${}^a(-n)$.

Za računanje z njimi vpeljemo še pravila glede določanja naboja. Pravila so:

pozitivni naboj $\oplus$ pozitivni naboj = pozitivni naboj	$[X] \oplus [Y] = [X\ Y]$
pozitivni naboj $\oplus$ negativni naboj = negativni naboj	$[X] \oplus [Y] = [X\ Y]$
negativni naboj $\oplus$ pozitivni naboj = negativni naboj	$[X] \oplus [Y] = [X\ Y]$
negativni naboj $\oplus$ negativni naboj = pozitivni naboj	$[X] \oplus [Y] = [X\ Y]$
pozitivni naboj $\otimes$ pozitivni naboj = pozitivni naboj	$[X] \otimes [Y] = [X\ Y]$
pozitivni naboj $\otimes$ negativni naboj = negativni naboj	$[X] \otimes [Y] = [X\ Y]$
negativni naboj $\otimes$ pozitivni naboj = negativni naboj	$[X] \otimes [Y] = [X\ Y]$
negativni naboj $\otimes$ negativni naboj = pozitivni naboj	$[X] \otimes [Y] = [X\ Y]$

Primeri računanja:

$$3 \oplus {}^a2 = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0] = {}^a5$$

$$3 \otimes {}^a2 = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = {}^a6$$

$$(-3) \oplus {}^a2 = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0] = {}^a(-1)$$

$$(-3) \otimes {}^a2 = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = {}^a(-6)$$

$${}^a3 \oplus {}^a2 = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0] = 5$$

$${}^a3 \otimes {}^a2 = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = 6$$

$${}^a3 \oplus {}^a(-2) = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0] = [0] = 1$$

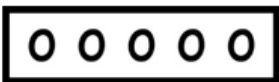
$${}^a3 \otimes {}^a(-2) = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = {}^{-}6$$

4. Računanje s škatlami in antiškatlami

V tem poglavju bomo naredili nekakšen povzetek oziroma neke vrste posplošitev tega, kar smo razvijali na konkretnih primerih v tretjem in četrtem poglavju (Wildberger, okt 2023). Opisali bomo »svet« delcev in anti-delcev ter v njem definirali operaciji seštevanje in množenja ter posebna »dogodka«:

- **izpuhtitev** (anihilacija), ko se v isti množici srečata delec in njegov anti-delec ter
- **pojavitve** (kreacija), ko se istočasno pojavita delec in anti-delec .

Objekte bomo prikazovali s pravokotniki, razen pri nekaterih številskih primerih. Ta način je tudi preglednejši kot zapisovanje z oklepaji. Najprej opišimo univerzalno multimnožico, v kateri bomo definirali operaciji seštevanja in množenja in vpeljali nekaj novih lastnosti. Elemente v tej množici imenujemo objekti. Hkrati pa naj bo v množici za vsak objekt tudi anti-objekt, na primer:

objekt:  anti-objekt: 

V naši nalogi bomo objekte imenovali »škatle«, anti-objekt pa »antiškatla« (po ang: box).

Enako velja tudi za element $Ni\check{c}=0$. Poleg objekta 0 obstaja tudi objekt $antiNi\check{c} = {}^a0=0$. Množico škatel in antiškatel bomo imenovali »svet škatel in antiškatel«.

4.1. Definicija »sveta škatel in antiškatel«

Škatlo definiramo takole:

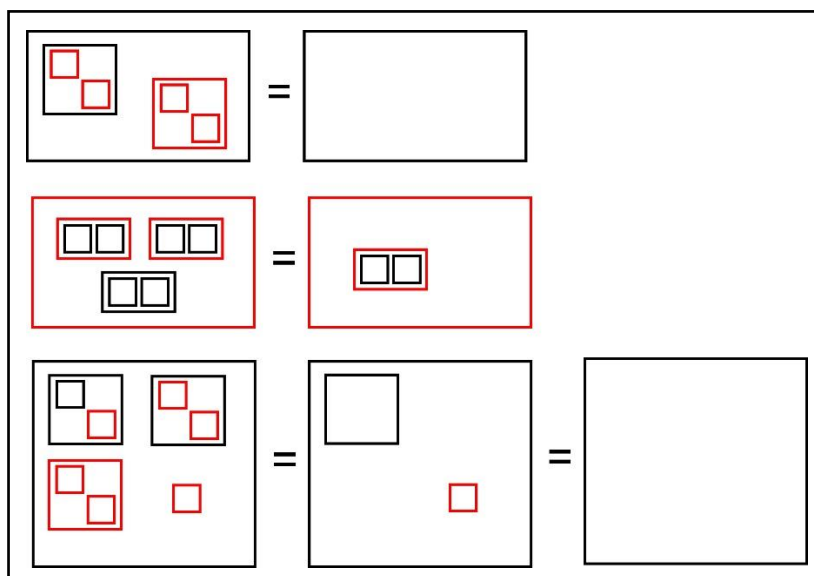
1. $Ni\check{c} = 0 = \square$ in $antiNi\check{c} = 0 = \square$ sta škatli.
2. Če so $P, Q, R, S \dots T$ škatle ali antiškatle, potem sta tudi $A = \text{škatla}(P, Q, R, S \dots T)$ in ${}^aA = \text{antiškatla}(P, Q, R, S \dots T)$ škatli. V tem primeru so $P, Q, R, S \dots T$ elementi škatel A ali aA .

V »svetu škatel in antiškatel« obstajata dogodka **pojavitv** (kreacija) in **izpuhtitev** (anihilacija).

Dogodek **pojavitv** se zgodi, ko praznino nadomestimo hkrati z 0 in 0 oziroma s škatlami A ali aA hkrati: $[] = [0 \ 0]$ $[] = [A \ {}^aA]$

Dogodek **izpuhtitev** se zgodi, ko se škatli A in aA hkrati znajdeta v isti multimnožici in se medsebojno »izničita«: $[0 \ 0] = []$ $[A \ {}^aA] = []$

Primeri izpuhtitev škatel so na Sliki 9.



Slika 9: Primeri izpuhtitev škatel in antiškatel

4.2. Seštevanje škatel

Seštevanje škatel je definirano, kot je definirano seštevanje multimnožic.

Definicija: $A \oplus B = A \cup B$, kjer je naboj vsote določen s tabelo:

$\oplus$		

Seštevanje škatel lahko razširimo na seštevanje več členov, na primer:

$$\square + \square + \square + \square + \square + \square = \square = {}^a0$$

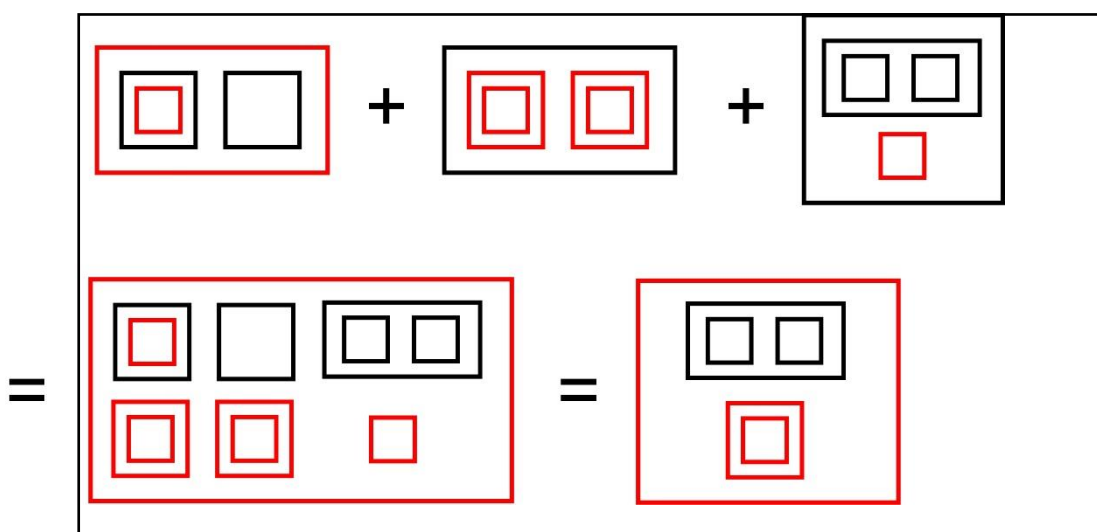
Tu se postavi vprašanje, kašnega naboja je rezultat. Ugotovimo naslednje:

Če je število škatlic z negativnim nabojem sodo število, je potem končna škatla pozitivnega naboja.

Če je število škatlic z negativnim nabojem liho število, je potem končna škatla negativnega naboja.

Dokaz: Naj bo $C = A \oplus B$, kjer so A, B, C škatle. Če ima škatla A pozitivni naboj, potem je naboj škatle C enak naboju škatle B , saj prištevanje škatle s pozitivnim nabojem ne spremeni naboja druge škatle.

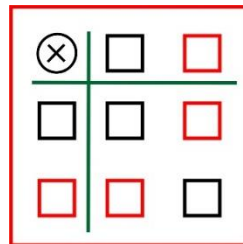
Če pa ima škatla A negativni naboj, je naboj škatle C enak nasprotnemu naboju škatle B , saj škatla z negativnim nabojem spremeni naboj. Ker je vsota dveh škatel z negativnim nabojem škatla s pozitivnim nabojem, je vsota sodega števila škatel z negativnim nabojem vedno škatla s pozitivnim nabojem. Tako nam v vsoti več škatel ostane na koncu vsota dveh škatel s pozitivnim nabojem ali vsota škatel z različnima nabojema. Prvi primer nastopi, ko je bilo v začetku sodo število škatel z negativnim nabojem, drugo pa v primeru, ko je bilo v začetku liho število škatel z negativnim nabojem (glej primer na Sliki 10).



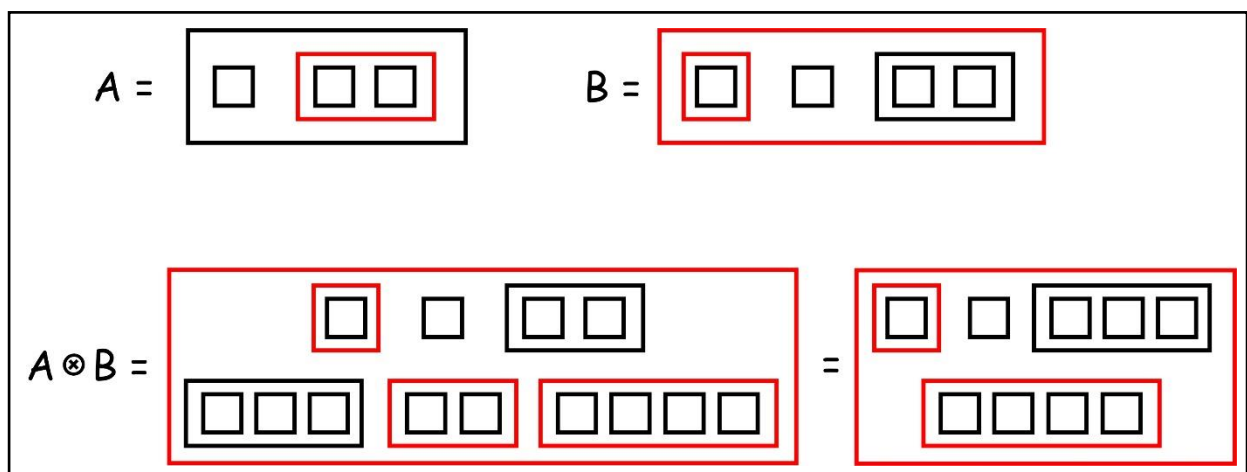
Slika 10: Določanje naboja končne škatle

4.3. Množenje škatel

$A \otimes B = [a \oplus b; (a \in A) \wedge (b \in B)]$, kjer je naboj produkta določen s tabelo:



Primer je na Sliki 11.



Slika 11: Množenje škatel (primer)

4.4. Lastnosti osnovnih računskih operacij

Trditev: Seštevanje škatel in antiškatel je komutativno in asociativno.

Dokaz:

komutativnost: $A \oplus B = A \cup B = B \cup A = B \oplus A$

asociativnost: $A \oplus (B \oplus C) = A \oplus (B \cup C) = A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C =$

$$= (A \oplus B) \cup C = (A \oplus B) \oplus C$$

Trditev: Množenje škatel in antiškatel je komutativno in asociativno.

Dokaz:

komutativnost: $A \otimes B = [a \oplus b; a \in A \text{ in } b \in B] = [b \oplus a; a \in A \text{ in } b \in B] = B \otimes A$

asociativnost: $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

Na levi strani izračunamo najprej vse možne vsote elementov iz množic B in C , nato pa vse možne vsote, kjer je prvi element iz množice A , drugi element pa iz množice $B \otimes C$. Tako dobimo vse možne vsote elementov $a + b + c$, kjer je $a \in A, b \in B, c \in C$.

Tudi na desni strani dobimo s podobnim premislekom vse možne vsote $a + b + c$, kjer je $a \in A, b \in B, c \in C$.

Lahko bi dokazali tudi takole:

Množica $A \otimes (B \otimes C)$ vsebuje vse možne vsote $a + (b + c)$. Ker je $a + (b + c) = (a + b) + c$, velja $(a + b) + c \in (A \otimes B) \otimes C$.

Množica $(A \otimes B) \otimes C$ vsebuje vse možne vsote $(a + b) + c$. Ker je $(a + b) + c = a + (b + c)$, velja $a + (b + c) \in A \otimes (B \otimes C)$. Množici $A \otimes (B \otimes C)$ ter $(A \otimes B) \otimes C$ vsebujeta enake elemente, torej sta enaki.

Trditev: Za seštevanje in množenje škatel ne velja distributivni zakon.

Protiprimer 1:

$$A = \boxed{} \quad B = \boxed{} \quad C = \boxed{}$$

$$A \otimes (B \oplus C) = \boxed{} \otimes (\boxed{} \oplus \boxed{}) = \boxed{} \otimes \boxed{} = \boxed{} = \boxed{} = 0$$

$$(A \otimes B) \oplus (A \otimes C) = (\boxed{} \otimes \boxed{}) \oplus (\boxed{} \otimes \boxed{}) = \boxed{} \oplus \boxed{} = \boxed{} = \boxed{} = 0$$

Protiprimer 2:

$$A = \boxed{} \quad B = \boxed{} \quad C = \boxed{}$$

$$A \otimes (B \oplus C) = \boxed{} \otimes (\boxed{} \oplus \boxed{}) = \boxed{} \otimes \boxed{} = \boxed{} = \boxed{} = {}^A 1$$

$$(A \otimes B) \oplus (A \otimes C) = (\boxed{} \otimes \boxed{}) \oplus (\boxed{} \otimes \boxed{}) = \boxed{} \oplus \boxed{} = \boxed{} = 1$$

Protiprimer 3:

$$A = \boxed{\square} = {}^a 1 \quad B = \boxed{\boxed{\square}} = x \quad C = \boxed{\boxed{\square}} = x^{-1}$$

$$\boxed{\square} \otimes (\boxed{\boxed{\square}} \oplus \boxed{\square}) = \boxed{\square} \otimes \boxed{\boxed{\square} \boxed{\square}} = \boxed{\boxed{\square} \boxed{\square}} = -(x + x^{-1})$$

$$(\boxed{\square} \otimes \boxed{\boxed{\square}}) \oplus (\boxed{\square} \otimes \boxed{\square}) = \boxed{\boxed{\square}} \oplus \boxed{\square} = \boxed{\boxed{\square} \boxed{\square}} = (x + x^{-1})$$

Trditev: Distributivni zakon velja, če so vse škatle pozitivnega naboja.

Dokaz: Naj bodo X, Y in Z škatle.

$$A = \boxed{x} \quad B = \boxed{y} \quad C = \boxed{z}$$

$$\begin{aligned} A \otimes (B \oplus C) &= \boxed{x} \otimes (\boxed{y} \oplus \boxed{z}) = \\ &= \boxed{x} \otimes \boxed{y z} = \boxed{x+y \quad x+z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) &= (\boxed{x} \otimes \boxed{y}) \oplus (\boxed{x} \otimes \boxed{z}) = \\ &= \boxed{x+y} \oplus \boxed{x+z} = \boxed{x+y \quad x+z} \end{aligned}$$

Trditev: Distributivni zakon ne velja, če so vse škatle negativnega naboja

Protiprimer: Naj bodo X, Y in Z antiškatle.

$$A = \boxed{x} \quad B = \boxed{y} \quad C = \boxed{z}$$

$$\begin{aligned} A \otimes (B \oplus C) &= \boxed{x} \otimes (\boxed{y} \oplus \boxed{z}) = \\ &= \boxed{x} \otimes \boxed{y z} = \boxed{x+y \quad x+z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) &= (\boxed{x} \otimes \boxed{y}) \oplus (\boxed{x} \otimes \boxed{z}) = \\ &= \boxed{x+y} \oplus \boxed{x+z} = \boxed{x+y \quad x+z} \end{aligned}$$

4.5. Odštevanje škatel in antiškatel

Podobno kot smo že odštevali splošne multimnožice, lahko odštevamo tudi škatle.

$A \ominus B = A \oplus (\bar{B})$, kjer je $\bar{B} = (-1) \otimes B$. Množica $\bar{B}$ je negativna množica k množici B . Velja $B \oplus \bar{B} = 0$.

Primer:

$$\begin{aligned}
 A &= \boxed{\square \boxed{\square}} & B &= \boxed{\boxed{\square \square} \boxed{\square}} \\
 A - B &= A \oplus \bar{B} = A \oplus (-1) \otimes B = \boxed{\square \boxed{\square}} \oplus \boxed{\square} \otimes \boxed{\boxed{\square \square} \boxed{\square}} = \\
 &= \boxed{\square \boxed{\square}} \oplus \boxed{\boxed{\square \square} \boxed{\square}} = \boxed{\square \boxed{\square \square \square} \boxed{\square}} = \boxed{\square \boxed{\square \square}}
 \end{aligned}$$

4.6. Vrste škatel – povzetek

V svetu škatel imamo štiri vrste škatel: škatlo = A , negativno škatlo = $\bar{A}$, antiškatlo = aA , in antiNegativno škatlo = ${}^a(\bar{A})$. Še narišimo:

$$\begin{aligned}
 A &= \boxed{\square} & \bar{A} &= \boxed{\square} \\
 {}^aA &= \boxed{\square} & {}^a(\bar{A}) &= \boxed{\square}
 \end{aligned}$$

4.7. Primeri množic škatel škatlic in antiškatlic

4.7.1. Nič kot prazna škatlica

Število nič je prazna multimnožica $\text{Nič} = [] = 0$.

Število 0 prikažemo s prazno škatlico. $0 = \square$

4.7.2. Naravna števila kot škatle

Naravno število n je multimnožica/škatlica, ki vsebuje število 0 natanko n -krat. Dogovorimo se, da v tem poglavju števila 0 ne bomo šteli k naravnim številom.

Primeri:

$$\begin{array}{lcl} 1 = & \boxed{} & \\ 2 = & \boxed{}\boxed{} & \\ & \vdots & \\ 3 = & \boxed{}\boxed{}\boxed{} & \\ & \vdots & \\ n = & \boxed{}\boxed{}\boxed{} \dots \boxed{} & \text{število } \boxed{} = n \end{array}$$

Primer: $3 = \boxed{0\ 0\ 0} = \boxed{}\boxed{}\boxed{}$

Množica naravnih števil je torej množica $[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots]$.

Ker so v našem primeru naravna števila predstavljena z multimnožicami/škatlami ničel, je seštevanje definirano z unijo $m \oplus n = m \cup n$, množenje pa kot v poglavju 4.3, to je

$$m \otimes n = [a \oplus b; (a \in m) \wedge (b \in n)].$$

Primeri:

$$2 \oplus 3 = \boxed{0\ 0} \oplus \boxed{0\ 0\ 0} = \boxed{0\ 0\ 0\ 0\ 0} = 5$$

$$2 \otimes 3 = \boxed{0\ 0} \otimes \boxed{0\ 0\ 0} = \boxed{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0} = 6$$

4.7.3. Naravna in antinaravna števila s škatlami

Vzemimo množico naravnih števil tako, kot v prejšnjem poglavju, brez števila 0, se pravi brez prazne škatlice: $[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots]$. K tej množici naravnih števil dodajmo še množico antinaravnih števil, k operacijama seštevanja in množenja (ki sta definirani kot običajni v svetu škatel) pa še dogodek izpuhtitve. Za vsako naravno število n je antištevilo ${}^a n$ tisto, s katerim znotraj iste multimnožice izpuhtita: $[n\ {}^a n] = []$. Za računanje in določanje naboja veljajo enaka pravila, kot smo jih definirali v svetu škatel in antiškatel. Antinaravno število predstavimo v rdečem okvirčku.

Primeri:

$${}^a3 = \boxed{000} \quad \boxed{2} \quad {}^a2 = \boxed{\boxed{00} \boxed{00}} = \boxed{} = 0$$

$$3 \oplus {}^a4 = \boxed{000} \oplus \boxed{0000} = \boxed{0000000} = {}^a7$$

$$3 \otimes {}^a4 = \boxed{000} \otimes \boxed{0000} = \boxed{00000000000000} = {}^a12$$

$${}^a3 \oplus {}^a4 = \boxed{000} \oplus \boxed{0000} = \boxed{0000000} = 7$$

$${}^a3 \otimes {}^a4 = \boxed{000} \otimes \boxed{0000} = \boxed{00000000000000} = 12$$

4.7.4. Cela in anticela števila kot škatle

Množica celih števil vsebuje cela pozitivna števila (to so naravna števila), cela negativna števila in število 0. V poglavju 3.6.3 pa smo utemeljili, da mora k vsakemu elementu obstajati antielement, da velja $[M] \otimes 0 = 0$. Tako smo dodali še antinič (${}^a0 = 0$) in k vsakemu celemu številu še antištevilo ter dogodka izpuhtitve in pojavitve.

Za računanje z 0 in 0 veljata seštevanka in poštevanka:

$\oplus$	0	0
0	0	0
0	0	0

$\otimes$	0	0
0	0	0
0	0	0

Velja seveda tudi: ${}^a({}^a0) = 0$ oziroma ${}^a0 = 0$.

Števili Nič in antiNič bomo zapisali tudi s škatlicama:

$$0 = \boxed{} \quad \text{in} \quad 0 = \boxed{}$$

Naboj vsote ali produkta določimo po znanih pravilih (glej poglavji 4.2 in 4.3).

Zapišimo še nekaj računov s škatlami:

$$[-3 \quad {}^a(-3)] = \boxed{000} \boxed{000} = \boxed{} = 0$$

$$3 \otimes 0 = \boxed{000} \otimes \boxed{} = \boxed{000} \otimes \boxed{00} = \boxed{000000} = \boxed{} = 0$$

$$2 - 3 = 2 \oplus {}^{-3} = \boxed{00} \oplus \boxed{000} = \boxed{00000} = \boxed{0} = {}^{-1}$$

$$2 \otimes {}^{-3} = \boxed{00} \otimes \boxed{000} = \boxed{000000} = {}^{-6}$$

$$2 - ({}^{-3}) = 2 \oplus {}^{-(}{}^{-3}) = 2 \oplus ({}^{-1}) \otimes ({}^{-3}) = \boxed{00} \oplus \boxed{0} \otimes \boxed{000} = \boxed{00} \oplus \boxed{000} = 5$$

$${}^a2 \oplus {}^{-5} = \boxed{00} \oplus \boxed{00000} = \boxed{0000000} = \boxed{000} = {}^a({}^{-3})$$

$${}^a({}^{-2}) \otimes {}^a({}^{-3}) = \boxed{00} \otimes \boxed{000} = \boxed{0000000} = 6$$

4.7.5. Računanje s polinomi¹ z naravnimi stopnjami

Oglejmo si nekoliko drugačno predstavitev škatel in računanja z njimi.

Izkaže se, da lahko s škatlami tudi seštevamo in množimo polinome.

Definicija: Polinom s celimi koeficienti in pozitivnimi stopnjami je veččlenik oblike

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, kjer so koeficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ cela števila, n pa naravno število.

Primeri polinomov: $3 - 2x$, $2 + 3x + x^2$, $4 - 16x^5$

¹ V nalogi se ne ukvarjamo s polinomi kot funkcijami, ampak s polinomi kot izrazi: vzamemo kombinacije potenc za primer računanja s škatlami.

Uvedimo nove oznake: $x = \boxed{\boxed{\square}} = \boxed{1}$

Izračunajmo, koliko je x^2 .

$$x^2 = x \otimes x = \boxed{\boxed{\square}} \otimes \boxed{\boxed{\square}} = \boxed{\boxed{\square} + \boxed{\square}} = \boxed{\boxed{\square \square}} = \boxed{2}$$

Primeri:

$$2 + x^3 = \boxed{\square \square \square \square \square}$$

$$1 + x + x^3 = \boxed{\square \square \square \square \square}$$

$$3 + 2x = \boxed{\square \square \square \square \square}$$

$$\boxed{\boxed{\square}} = -x, \text{ saj je } \boxed{\boxed{\square}} \oplus \boxed{\boxed{\square}} = \boxed{\boxed{\square} \square} = \boxed{\square} = 0$$

$$\boxed{\boxed{\square \square}} = -x^2, \text{ saj velja } \boxed{\boxed{\square \square}} \oplus \boxed{\boxed{\square \square}} = \boxed{\boxed{\square \square} \square \square} = \boxed{\square \square} = 0$$

S pomočjo te predstavitve lahko »zapišemo« katerikoli polinom in z njimi računamo, kot seštevamo in množimo škatle.

Oglejmo si nekaj primerov:

$$\begin{aligned} (1-x)(1+x) &= \boxed{\square \boxed{\square}} \otimes \boxed{\square \square} = \boxed{\square \square \square \square} = \\ &= \boxed{\square \boxed{\square \square}} = 1-x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2+x)(4-2x+x^2) &= \boxed{\square \square \square} \otimes \boxed{\square \square \square \square \boxed{\square} \boxed{\square} \square \square} = \\ &= \boxed{\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square & \boxed{\square} & \boxed{\square} & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \boxed{\square} & \boxed{\square} & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \boxed{\square \square} & \boxed{\square \square} & \square & \square \end{array}} = \\ &= \boxed{\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \square \square \square} = 8+x^3 \end{aligned}$$

4.7.6. Računanje s polinomi² s pozitivnimi in negativnimi stopnjami

Definicija: Polinom s celimi koeficienti in s celimi stopnjami je veččlenik oblike $a_{-m}x^{-m} + \dots + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, kjer so koeficienti $a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n$ cela števila, n in m sta naravni števili.

Primeri: $x^{-1} + 3 - 2x$, $x^{-2} + 2 + 3x + x^2$, $x^{-3} + 4 - 16x^5$

Predstavitev polinomov s pozitivnimi stopnjami s škatlami lahko razširimo še na potence z negativnimi stopnjami tako, da opišemo:

$$\boxed{\boxed{\square}} = x^{-1}, \text{ saj je } x \cdot x^{-1} = \boxed{\boxed{\square}} \otimes \boxed{\boxed{\square}} = \boxed{\boxed{\square} + \boxed{\square}} = \boxed{\boxed{\square} \boxed{\square}} = \boxed{\square} = 1$$

$$\boxed{\boxed{\square}} = -x^{-1}, \text{ saj velja } (-x) \cdot (-x^{-1}) = \boxed{\boxed{\square}} \otimes \boxed{\boxed{\square}} = \boxed{\boxed{\square} + \boxed{\square}} = \boxed{\boxed{\square} \boxed{\square}} = \boxed{\square} = 1$$

Izračunajmo še primer:

$$\begin{aligned} (2-x^{-2})(2+x^{-2}) &= \boxed{\square} \boxed{\square} \boxed{\boxed{\square} \boxed{\square}} \otimes \boxed{\square} \boxed{\square} \boxed{\boxed{\square} \boxed{\square}} = \\ &= \boxed{\begin{array}{cc} \square & \square & \boxed{\square} \boxed{\square} \\ \square & \square & \boxed{\square} \boxed{\square} \\ \boxed{\square} \boxed{\square} & \boxed{\square} \boxed{\square} & \boxed{\square} \boxed{\square} \boxed{\square} \boxed{\square} \end{array}} = \\ &= \boxed{\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array}} \boxed{\square \square \square \square} = 4 - x^{-4} \end{aligned}$$

² Tudi tukaj polinomov ne obravnavamo kot funkcije, ampak le kot izraze, se pravi kot kombinacije potenc s celimi eksponenti in celoštevilskimi koeficienti.

5. Nove ideje

Ob raziskovanju novega računanja so se nam porodile še nekatere ideje. Pri drugi in tretji ideji ne vidimo praktične uporabe. Morda pa se bo kdaj kasneje izkazalo za uporabno.

5.1. Računanje s polinomi z večjimi koeficienti

V poglavjih 4.7.6 in 4.7.7 smo opisali računanje s polinomi s celimi koeficienti, ki niso preveliki. Če so koeficienti po absolutni vrednosti večja števila, je ta način računanja zelo neroden in nepregleden. Predlagamo naslednji način zapisa in računanja tako, da s posebno oznako levo spodaj označimo, kolikokrat nastopa posamezni člen.

Primeri:

$$5 - 3x = \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 5 \square \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 3 \square \\ \hline \end{array}}$$

$$(5 + 7x^2) + (5 - 7x^2) = \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 5 \square \\ \hline \end{array}} \oplus \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 7 \square \\ \hline \end{array}} = \dots = \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 10 \square \\ \hline \end{array}} = 10$$

$$(3x + 5x^{-2}) \cdot (3x - 5x^{-2}) = \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 3 \square \\ \hline \end{array}} \otimes \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 5 \square \\ \hline \end{array}} =$$

$$= \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 9 \square \square \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 15 \square \square \square \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 15 \square \square \square \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 25 \square \square \square \square \\ \hline \end{array}} =$$

$$= \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 9 \square \square \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 25 \square \square \square \square \\ \hline \end{array}} = 9x^2 - 25x^{-4}$$

5.2. Ničle funkcij

Vzemimo množico celih in anticelih števil in v njej pogledimo nekaj primerov, kako je z ničlami funkcij.

Definicija: Naj bo dana funkcija $f(x)$ v množici celih in anticelih števil. Ničla funkcije $f(x)$ je tisto število x , pri katerem je vrednost funkcije enaka 0. Če je funkcija na primer $f(x) = -2x + 6$, je število 3 ničla te funkcije, ker je $f(3) = 0$.

Primer 1: Naj bo dana linearna funkcija s predpisom: $f(x) = 2x - 4$, definirana v množici celih in anticelih števil. Naredimo tabelo z nekaj števili in antištevili.

x	$f(x)$
-1	-6
0	-4
1	-2
2	0
3	2

x	$f(x)$
$^a(-1)$	$^a(-6)$
0	$^a(-4)$
a1	$^a(-2)$
a2	0
a3	a2

Ugotovitev:

Funkcija $f(x) = 2x - 4$ ima v množici celih in anticelih števil dve ničli: 2 in a2 .

Primer 2: Naj bo dana funkcija s predpisom $g(x) = x^2 - 1$, definirana v množici celih in anticelih števil. Naredimo tabelo z nekaj števili in antištevili.

x	$g(x)$
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

x	$g(x)$
$^a(-2)$	3
$^a(-1)$	0
0	-1
a1	0
a2	3

Ugotovitev:

Funkcija $g(x) = x^2 - 1$ ima v množici celih in anticelih števil štiri ničle: 1, -1, a1 , $^a(-1)$.

5.3. Praštevila in razcep na praštevila

Vzemimo množico celih in anticelih števil in v njej pogledimo nekaj primerov, kako je z ničlami funkcij.

Definicija: Pozitivno celo število p je praštevilo natanko takrat, ko je razcep na praštevila enak $p = p \cdot 1$ ali $p = ^ap \cdot ^a1$.

Definicija: Pozitivno anticelo število ap je praštevilo natanko takrat, ko je njegov razcep na praštevila enak $^ap = ^ap \cdot 1$ ali $^ap = p \cdot ^a1$.

Naštejmo nekaj prvih praštevil:

2, a2 , 3, a3 , 5, a5 , 7, a7 , 11, a11 , 13, a13 , 17, a17 , 19, a19 , ...

Anticela praštevila imenujmo tudi antipraštevila. Cela števila, ki niso praštevila, so sestavljena števila. Pozitivna cela števila lahko razcepimo na en sam način. Če upoštevamo še antipraštevila, je razcepov več.

Primeri:

$$6 = 2 \cdot 3 = {}^a2 \cdot {}^a3$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = {}^a2 \cdot {}^a2 \cdot 3 = 2 \cdot {}^a2 \cdot {}^a3$$

5.4. Drugi poskus definicije celih števil z multimnožicami

V poglavju 3.6.5. smo problem določitve naboja vsote, ko je en člen enak 0 in produkta z 0 rešili tako, da smo uvedli nova antištevila. Poskusimo sedaj omenjeni problem rešiti drugače, še vedno pa z multimnožicami.

Množica celih števil:

- vsebuje število 0,
- vsebuje število antinič = ${}^a0 = 0$,
- vsa cela pozitivna števila, ki so multimnožice, sestavljene iz števil 0, ter
- vsa cela negativna števila, ki so multimnožice, sestavljene iz števil ${}^a0 = 0$.

Primer pozitivnega celega števila je $5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, negativnega celega števila pa ${}^{-4} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$.

Seštevanje in množenje naj bo definirano tako, kot smo definirali že prej pri multimnožicah:

$$A \oplus B = A \cup B$$

$$A \otimes B = [a \oplus b; (a \in A) \wedge (b \in B)].$$

Za seštevanje in množenje s številoma 0 in 0 naj veljajo enaka pravila, kot običajno pri multimnožicah:

$\oplus$	0	0
0	0	0
0	0	0

$\otimes$	0	0
0	0	0
0	0	0

V tej množici pa sta še dva dogodka in sicer:

- izpuhtitev (anihilacija), ko 0 in 0 znotraj iste multimnožice izpuhtita (izgineta):
 $[0\ 0] = []$, ter
- pojavitev (kreacija), ko se v isti multimnožici hkrati pojavita 0 in 0: $[] = [0\ 0]$

Na novo pa definiramo: Prištevanje števila 0 k neničelnemu številu ne spremeni naboja, prav tako ne spremeni naboja množenje neničelnega števila z 0, na primer:

$$3 \oplus 0 = 3 \qquad 0 \oplus 3 = 3 \qquad 3 \otimes 0 = 3 \qquad 0 \otimes 3 = 3$$

Ali drugače rečeno: Vsi neničelni elementi imajo samo pozitivni naboj. Ko jih predstavljamo s škatlami, imajo vse neničelne škatle samo črne okvirje.

V tej množici veljajo asociativnostni in komutativnostni zakon za seštevanje in množenje ter distributivnostni zakon (razen ko gre za same antiničle).

To množico bomo imenovali **cela števila s številom antiNič**.

Primeri računanja: $3 \oplus 0 = [0\ 0\ 0] \oplus [] = [0\ 0\ 0] = 3$

$$3 \oplus 0 = [0\ 0\ 0] \oplus [] = [0\ 0\ 0] = 3$$

$$3 \otimes 0 = [0\ 0\ 0] \otimes [] = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = [] = 0$$

$$3 \otimes 0 = [0\ 0\ 0] \otimes [] = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = [] = 0$$

$$^{-}3 \oplus 2 = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0] = [0] = ^{-}1$$

$$^{-}3 \otimes 2 = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = ^{-}6$$

$$^{-}3 \otimes ^{-}2 = [0\ 0\ 0] \otimes [0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = 6$$

$$3 \ominus 4 = 3 \oplus ^{-}4 = [0\ 0\ 0] \oplus [0\ 0\ 0\ 0] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = [0] = ^{-}1$$

Menimo, da bi za predstavitev celih števil, seštevanja in množenja, zadoščala že tu opisana množica in pravila, kjer ni potrebno uvajati antištevil (razen antiničle).

5.5. Nazorna predstavitev seštevanja in množenja celih števil s škatlicami

Opis celih števil, ki smo ga razvili v poglavju 5.4., bomo nekoliko priredili, da bomo lahko nazorno predstavili seštevanje in množenje celih števil s škatlicami. Namesto števil nič in antinič bomo vzeli rumene kroglice, ki bodo predstavljale pozitivno število nič = 0 in rdeče kroglice, ki bodo predstavljale negativno število nič = 0. Lastnost teh dveh števil 0 in 0 je, da ko nastopita hkrati obe v isti škatlici, izpuhtita: [0 0] = []. Za računanje s številoma 0 in 0 veljajo preprosta pravila: vsota ali produkt enako predznačenih števil nič je vedno pozitivno število 0, vsota ali produkt različno predznačenih števil nič je vedno negativno število 0:

$$0 + 0 = 0, 0 + 0 = 0, 0 \times 0 = 0, 0 \times 0 = 0, 0 + 0 = 0, 0 + 0 = 0, 0 \times 0 = 0, 0 \times 0 = 0.$$

Pozitivna cela števila predstavimo s škatlicami pozitivnih števil 0, negativna cela števila pa s škatlicami negativnih števil 0, na primer: $3 = [000]$, $-4 = [0000]$.

Seštevanje celih števil definiramo z njuno unijo: $a \oplus b = a \cup b$. Praktično izvedemo seštevanje tako, da škatlici a in b stresemo v tretjo škatlico, pogledamo morebitne izpuhtitve 0 in 0 in preštejemo ostanek kroglic, na primer:

$$\begin{aligned} 3 + 5 &= [000] + [00000] = [0000000] = 8 \\ -3 + -5 &= [000] + [00000] = [0000000] = -8 \\ 3 + -5 &= [000] + [00000] = [0000000] = [00] = -2 \end{aligned}$$

Množenje celih števil je definirano kot množenje škatel:

$A \otimes B = [a \oplus b; (a \in A) \wedge (b \in B)]$. Oglejmo si nekaj primerov.

$$\begin{aligned} 3 \times 2 &= [000] \times [00] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ \hline 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = 6 \\ -3 \times 2 &= [000] \times [00] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ \hline 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = -6 \\ -3 \times -2 &= [000] \times [00] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ \hline 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = 6 \end{aligned}$$

Konkretna izvedba bi bila z rumenimi in rdečimi kroglicami na plošči z jamicami ali predalčki/škatlicami. Vsako število iz druge množice seštejemo z vsakim številom iz prve množice in seštejemo dobljene pare po pravilih za računanje s številoma 0 in 0.

6. Zaključek

V nalogi smo raziskali temeljne principe seštevanja in množenja naravnih in celih števil s pomočjo računanja z multimnožicami. Razvili smo računanje tudi z anti-delci, ki je (po naši vednosti) popolnoma novo. Pomagali smo si z video posnetki profesorja Wildberga (glej Vire). V nam dostopni literaturi nismo zasledili pisnih virov s tega področja. Opisani pristop se razlikuje od običajnega v tem, da za enoto naravnega števila ne vzamemo števila 1 temveč število 0. Število 0 predstavimo s prazno množico in iz tega izpeljemo vse druge predstavitve naravnih in celih števil. Posebej je zanimiva definicija množenja števil, ki jo izvedemo s seštevanjem. Da je množenje dobro izvedeno, je lepota matematike ravno v ideji, da se števila predstavi kot multimnožice ničel. Ker smo izhajali iz predpostavke, da se znane lastnosti računanja ohranjajo, smo uvedli še posebno število antinič in k vsakemu neničelnemu številu še antištevilo. Zaradi nazornejše predstavitve smo števila predstavili s škatlami in tako opisali »svet škatel in antiškatel«. Računanje s števili smo razširili še na seštevanje in množenje polinomov s pozitivnimi in negativnimi potencami. Po vseh raziskovanjih smo na koncu predstavili nazorno predstavitev seštevanja in množenja celih števil z multimnožicami.

Naša dognanja bi lahko še razširili in nadaljevali raziskave:

- a. Zanimivo bi bilo poskusiti, kako bi s tem pristopom zapisali ulomke in izvedli deljenje.
- b. Druga možna poglobitev bi lahko šla v smeri, da bi v »notranjosti škatel« dodajali nove škatle in iskali predstavitve v praksi. Domnevamo, da bi bili to izrazi z več neznankami.
- c. Tretja možnost pa predstavlja morebitno uporabo takšnega računanja v svetu delcev in anti-delcev. Fiziki so že odkrili nekaj anti-delcev k znanim delcem. V bistvu smo v nalogi že opisali računanje z delci in anti-delci, le da smo jih imenovali škatle in antiškatle.

7. Viri in literatura

[1] Wildberger, N.J. (17. december 2022). *A multiset approach to arithmetic* [Video datoteka]. Pridobljeno 5. septembra 2023 s

https://www.youtube.com/watch?v=4xoF2SRp194&list=PLIjB45xT85D94vHAB8joyFTH4dmVJ_Fw&index=1

[2] Wildberger, N.J. (30. januar 2023). *Negatives numbers from anti msets* [Video datoteka]. Pridobljeno 5. septembra 2023 s

https://www.youtube.com/watch?v=KQ1o_NYhQNA&list=PLIjB45xT85D94vHAB8joyFTH4dmVJ_Fw&index=5

[3] Wildberger, N.J. (3. september 2023). *Introducing (finally!) Box Arithmetic* [Video datoteka]. Pridobljeno 25. septembra 2023 s

https://www.youtube.com/watch?v=Im7nYgvZ9Q0&list=PLIjB45xT85D94vHAB8joyFTH4dmVJ_Fw&index=11

[4] Wildberger, N.J. (15. oktober 2023). *Box Arithmetic with Polynumbers* [Video datoteka] Pridobljeno 3. novembra 2023 s

https://www.youtube.com/watch?v=Qsolqf_wo3g&list=PLIjB45xT85D94vHAB8joyFTH4dmVJ_Fw&index=12