

OŠ LOČE

Šolska ulica 5, 3215 Loče

KRITIČNO MIŠLJENJE IN MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

Področje: Matematika in logika

Avtorici:

Julija Vertelj, 9. b

Ema Jeranko, 9. b

Mentorica:

Ines Potočnik, prof. mat.

Jezikovni pregled:

Katja Jošt, prof. slj.

Mestna občina Celje, Mladi za Celje

Celje, 2024

OŠ LOČE

Šolska ulica 5, 3215 Loče

KRITIČNO MIŠLJENJE IN MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

Avtorici:

Julija Vertelj, 9. b

Ema Jeranko, 9. b

Mentorica:

Ines Potočnik, prof. mat.

Jezikovni pregled:

Katja Jošt

Mestna občina Celje, Mladi za Celje

Celje, 2024

KAZALO

1	POVZETEK	4
2	UVOD	5
3	TEORETIČNI DEL.....	7
3.1	KRITIČNO MIŠLJENJE.....	7
3.1.1	KAJ JE KRITIČNO MIŠLJENJE	7
3.1.2	VEŠČINE KRITIČNEGA MIŠLJENJA	8
3.2	PASCALOV TRIKOTNIK	12
3.2.1	TRIKOTNIŠKA ŠTEVILA.....	13
3.2.2	UPORABA IN NASTANEK PASCALOVEGA TRIKOTNIKA	13
3.3	LEIBNIZEV TRIKOTNIK	15
3.3.1	GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ.....	15
3.3.2	LEIBNIZEV (HARMONIČNI) TRIKOTNIK.....	16
3.3.3	ZANIMIVE POVEZAVE V LEIBNIZEVEM TRIKOTNIKU.....	17
4	EMPIRIČNI DEL.....	19
4.1	CILJI IN HIPOTEZE.....	19
4.2	IZVEDBA RAZISKAVE	23
4.3	REZULTATI RAZISKAVE	24
4.3.1	REZULTATI SEDMOŠOLCEV	24
4.3.2	REZULTATI OSMOŠOLCEV	26
4.3.3	REZULTATI DEVETOŠOLCEV	28
4.3.4	SKUPNA ANALIZA REZULTATOV	30
4.3.5	POTRDITEV HIPOTEZ.....	32
4.3.6	SAMOREFLEKSIJA.....	34
5	Zaključek.....	40
6	VIRI IN LITERATURA	41

KAZALO SLIK, TABEL IN DIAGRAMOV

Slika 1: Poimovanje kritičnega mišljenja	7
Slika 2: Miselni procesi in veščine kritičnega mišljenja	10
Slika 3: Samorefleksija	11
Slika 4: Izpolnjevanje Pascalovega trikotnika	12
Slika 5: Posebna števila v Pascalovem trikotniku	12
Slika 6: Trikotniška števila	13
Slika 7: Aritmetični trikotnik, ki ga je narisal Blaise Pascal	13
Slika 8: Gottfried Wilhelm Leibniz	15
Slika 9: Leibnizev računski stroj	15
Slika 10: Leibnizev trikotnik	16
Slika 11: Leibnizev trikotnik s prikazano vsoto	17
Slika 12: Leibnizev trikotnik s prikazanim produktom	17
Slika 13: Zgornji del Leibnizevega trikotnika	19
Slika 14: Pomanjkljiv Leibnizev trikotnik	20
Slika 15: Manjkajoči členi Leibnizevega trikotnika	21
Slika 16: Leibnizev trikotnik	22
Slika 17: Diagram, ki prikazuje indeks težavnosti po nalogah pri sedmošolcih	24
Slika 18: Diagram, ki prikazuje indeks težavnosti po nalogah pri osmošolcih	26
Slika 19: Diagram, ki prikazuje indeks težavnosti po nalogah za devetošolce	28
Slika 20: Diagram, ki prikazuje indeks težavnosti za vse učence, ki so sodelovali v raziskavi	31
Slika 21: Diagram samorefleksije sedmošolcev	35
Slika 22: Diagram samorefleksije osmošolcev	36
Slika 23: Diagram samorefleksije devetošolcev	38
Tabela 1: Razporeditev točk po nalogah za sedmošolce	24
Tabela 2: Rezultati po nalogah za osmošolce	26
Tabela 3: Rezultati po nalogah za devetošolce	28
Tabela 4: Rezultati po nalogah za tretjo triado	30
Tabela 5: Tabele o potrditvi hipotez	32

1 POVZETEK

Zadnje čase pogosto slišimo govoriti o kritičnem mišljenju, zato smo se odločile, da v naši raziskovalni nalogi najprej raziščemo, kakšna vrsta mišljenja je to. Zanimalo nas je, kako dobri so v kritičnem mišljenju učenci naše šole, natančneje zadnja triada. Povezale smo ga z matematiko, izluščile nekaj običajnejših veščin in se odločile, da preverimo, kako spretni smo. Najprej smo želele te veščine preveriti v Pascalovem trikotniku, vendar je bilo o njem zapisanih že kar nekaj raziskovalnih nalog, zato smo se odločile za Leibnizev trikotnik. Oblikovale smo deset krajših nalog, postavile hipoteze in popravile naloge. Z računalničarjevo pomočjo smo vnesle podatke v excelove tabele in analizirale podatke. S pomočjo podatkov smo preverile pravilnost naših hipotez.

Učenci so na koncu rešili tudi samorefleksijo, ki nam je dala podatke o tem, ali so prehitro sklepali, so si vzeli dovolj časa in ali so dovolj samozavestni pri zagovarjanju svojih trditev, četudi so napačne.

Ugotovile smo, da smo manj spretni predvsem pri oblikovanju kriterijev. Največje težave pa imamo s preverjanjem ustreznosti pravila oz. kriterija. Zanimivo bi bilo narediti primerjavo rezultatov z istimi učenci, če bi učiteljice v naslednjem šolskem letu pri poučevanju te veščine dodatno razvijale.

Ključne besede: Kritično mišljenje, Pascalov trikotnik, Leibnizev trikotnik

2 UVOD

Kritično mišljenje je besedna zveza, ki jo zadnje čase pogosto zasledimo. V raziskovalni nalogi smo najprej poskušale raziskati, kaj to je. Veliko avtorjev kritično mišljenje razloži zelo raznoliko, pri vseh teh razlagah pa gre za nekakšno mišljenje, ki vključuje višje miselne procese. V priročniku o kritičnem mišljenju smo zasledile, da so to procesi, kot so primerjanje, razvrščanje, sklepanje, presojanje, napovedovanje, argumentiranje, iskanje in vrednotenje virov ter druge.

(https://www.zrss.si/pdf/Kriticno_misljenje_prirocnik.pdf, str. 19)

Zanimalo nas je, kako bi »izmerile«, kako dobri smo v kritičnem razmišljanju na naši šoli. Ob procesih, kot so razvrščanje, sklepanje ... smo se najprej spomnile na matematiko, zato smo prosile učiteljico matematike, Ines Potočnik, da nam priskoči na pomoč. Želele smo sestaviti nekaj nalog, s katerimi bi merile uspešnost posameznih veščin kritičnega mišljenja. V sedmem razredu nam je učiteljica pri matematiki med obravnavo trikotnikov predstavila kot zanimivost trikotniško shemo Pascalov trikotnik. Najprej smo pomislile, da bi veščine preverile s pomočjo Pascalovega trikotnika, vendar se nam je zdel že velikokrat raziskan in bi lahko učenci prepisali odgovore s spleta. Ob Pascalovem trikotniku pa smo zasledile še enega, ki ga nismo poznale, to je bil Leibnizev trikotnik. Pri tem smo se v veliki meri oprle na prispevek Leibnizev harmonični trikotnik, ki ga je oblikovala ga. Sonja Rajh in je bil objavljen v reviji Matematika v šoli. Leibnizev trikotnik se nam je zdel zanimiv in primeren za učence tretje triade. Med veščinami smo si jih zadale šest, ki smo jih želele preveriti. Te veščine so bile:

- opazovati in primerjati števila,
- oblikovati kriterije za razvrščanje,
- razvrstiti števila glede na kriterij,
- sistematično opazovati in na osnovi opaženega napovedovati,
- sklepati iz posameznega na splošno,
- analizirati in presojati ustreznost induktivnega sklepanja.

Z učiteljico matematike smo zastavile nekaj nalog V Leibnizevem trikotniku, ki bodo od učencev zahtevale uporabo teh veščin.

Zastavile smo si naslednje hipoteze:

1. hipoteza: Največ preglavic bo učencem povzročala naloga, kjer bodo morali oblikovati relevantne kriteriji za razvrščanje oz. zapisati pravilo, to sta nalogi 3 in 9.

2. hipoteza: Pričakovano je, da bodo učenci spretnejši pri razvrstitvi števil glede na kriterije, kot z razlaganjem pravil. (naloge 1, 4, 7 bodo boljše rešene kot ostale naloge)

3. hipoteza: Sistematično opazovanje ne bo povzročilo večjih težav in bo bolje rešeno kot oblikovanje kriterijev za razvrščanje. (naloge 6)

4. hipoteza: Presoditi ustreznost kriterija bo boljše rešeno, kot oblikovanje kriterijev, saj bodo učenci računali z ulomki in pri tem dobili rezultate. (naloge 10)

5. hipoteza: Večji kot bodo imenovalci ulomkov, več bo napak in slabše bodo razvrščeni ustrezni ulomki. (naloge 7 bo slabše rešene kot naloga 5)

Deset nalog smo razdelile med sedmošolce, deset med osmošolce in deset med devetošolce. To smo naredile tako, da je bila povprečna ocena v teh skupinah okrog tri, pri čemer nam je pomagala učiteljica.

Učenci so naloge reševali doma ali v šoli (med prosto uro), tako da ne vemo, če so vsi rezultati res njihovi, so pa bili na diskretnost opozorjeni. Pomembno se nam je zdelo, da ne razlagamo značilnosti Leibnizevega trikotnika pred raziskavo, ker smo želele, da sami odkrijejo bistvene značilnosti te zanimive številske sheme. Učence smo pred raziskavo povprašale, če poznajo Leibnizev trikotnik, a še ni nihče slišal zanj.

S pomočjo učiteljice smo naloge popravile, točkovale in analizirale podatke. Med analizo smo primerjale rezultate in preverile pravilnost naših hipotez.

Na koncu so imeli učenci samorefleksijo, saj smo želele ugotoviti, če so učenci k nalogam pristopili tako, da so nalogo raziskali ali so reševali spontano, z minimalno aktivacijo možganskih celic.

3 TEORETIČNI DEL

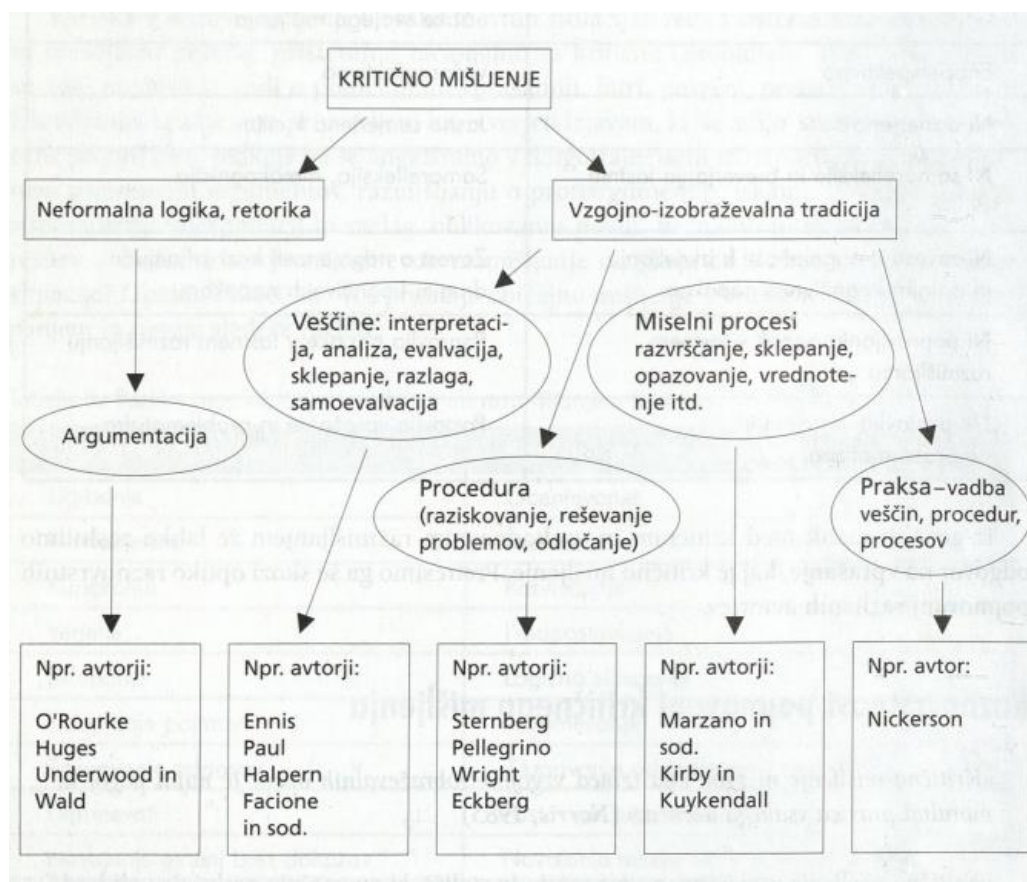
3.1 KRITIČNO MIŠLJENJE

3.1.1 KAJ JE KRITIČNO MIŠLJENJE

Že 2006 je izšla knjiga o kritičnem mišljenju, v kateri je predstavljeno kar nekaj pojmovanj, kaj to je. Pri razlagi terminologije kritično mišljenje avtorici Rupnik Vec in Kompore ločita dve skupini.

Skupino, ki pojmuje kritično mišljenje ožje, in je značilna predvsem za avtorje s področja filozofije (retorike in neformalne logike), kot sposobnost analize in evalvacije ter oblikovanja argumentov. (Rupnik Vec in Kompore, 16)

Znotraj druge skupine zasledimo kritično mišljenje, opredeljeno v terminologiji: veščin, miselnih procesov, procedur, prakticiranja določenih aktivnosti. (Rupnik Vec in Kompore, 16)



Slika 1: Pojmovanje kritičnega mišljenja

(Rupnik Vec in Kompore, 16)

Kritično mišljenje je večje, samouravnajoče mišljenje, ki je občutljivo za kontekst in vključuje višje miselne procese in veščine, kot so primerjanje, razvrščanje, sklepanje, presojanje, napovedovanje, argumentiranje, iskanje in vrednotenje virov ter druge.

(https://www.zrss.si/pdf/Kriticno_misljenje_prirocnik.pdf, str. 19)

Kritično mišljenje je način razmišljanja, pri katerem se sprašujete, analizirate, razlagate, ocenjujete in presojate, kar ste prebrali, slišali, povedali ali napisali. Izraz kritičen izhaja iz grške besede kritikos, ki pomeni »sposoben presojati ali razločevati«. Dobro kritično mišljenje pomeni oblikovanje zanesljivih sklepov na podlagi zanesljivih informacij.

(Prevedeno iz strani: <https://www.monash.edu/student-academic-success/enhance-your-thinking/critical-thinking/what-is-critical-thinking>)

In ko smo (malo za šalo) povprašale o kritičnem mišljenju še ChatGPT, nam je odgovoril takole:

Kritično mišljenje je kot supermoč, ki jo lahko razviješ, da bolje razumeš svet okoli sebe. Gre za sposobnost, da ne sprejemaš informacij le tako, kot so ti predstavljene, ampak da jih analiziraš, razumeš in oceniš. Ko uporabljaš kritično mišljenje, si kot detektiv, ki postavlja vprašanja in zbira dokaze, da bi prišel do resnice.

Kritično mišljenje ti pomaga razvijati tudi veščine, kot so problem reševanja, logično sklepanje in kritična analiza, ki so ključne za uspeh v šoli in življenju. Ko razvijaš kritično mišljenje, postaneš bolj samozavesten in odločen pri sprejemanju odločitev ter manj nagnjen k slepemu sledenju drugim.

Kritično mišljenje je torej ključna veščina na različnih področjih v življenju: izobraževanju, znanosti, vsakdanjem življenju ... Pomaga ljudem sprejemati bolj premišljene odločitve, bolje razumeti svet okoli sebe in bolje ubesediti svoje zamisli in stališča.

(<https://chat.openai.com/?model=text-davinci-002-render-sha>)

3.1.2 VEŠČINE KRITIČNEGA MIŠLJENJA

Miselni procesi in veščine kritičnega mišljenja so bili objavljeni v pdf obliki publikacije iz Zavoda za šolstvo, z naslovom Kritično mišljenje (priročnik).

Miselni procesi in veščine kritičnega mišljenja	Učenec ga izkazuje tako, da:
KM1: PRIMERJANJE	• oblikuje relevantne kriterije za primerjavo in jih uporablja
KM2: RAZVRŠČANJE	• oblikuje relevantne kriterije za razvrščanje • razvršča glede na enega ali več izbranih kriterijev
KM3: PREPOZNAVANJE IN OPREDELJEVANJE PROBLEMOV	• zazna oz. prepozna problem • problem jasno in natančno opredeli • razlikuje posledice od resničnih vzrokov problema • vrednoti problem po različnih kriterijih
KM4: POSTAVLJANJE VPRAŠANJ	• postavlja raznolika vprašanja (na višjih taksonomskih ravneh) • postavlja vprašanja v različnih fazah učenja • postavlja vprašanja v različnih situacijah (za razjasnitev problema, za opredelitev raziskovalnega vprašanja, za opredelitev spremenljivk in odnosov med njimi) • postavlja samorefleksivna vprašanja
KM5: SISTEMATIČNO OPAZOVANJE IN IZPELJAVA SKLEPOV	• opazuje načrtno in analitično • pridobiva relevantne podatke • išče očitne in poglobljene povezave med dejstvi • na osnovi opaženega napoveduje, sklepa ter razlaga dogodke, procese in pojave
KM6: RAZLIKOVANJE DEJSTEV OD MNENJ IN INTERPRETACIJE	• razume razliko med pojmi: dejstvo (kar se je dejansko zgodilo, kar smo opazili, izmerili), sklepanje (izpeljevanje logičnih zaključkov na temelju dejstev), interpretacija (možne razlage dejstev, osmišljanje), mnenje (navajanje lastnosti, stanj na osnovi lastnega vedenja) • pri razlagi dogodkov, procesov in pojavov se zaveda, upošteva in zavzema različne perspektive • se zaveda in pojasni vpliv različnih dejavnikov ter omejitev mnenj in interpretacij (znanja, motivacije, čustev, izkušenj ...)
KM7: OBLIKOVANJE CILJEV IN NAČRTOVANJE PROCESA, PRODUKTA TER POTI DO CILJEV	• vešče oblikuje cilje tako, da so specifični, merljivi, dosegljivi, realistični, časovno obvladljivi • načrtuje korake, strategije, časovni okvir in vire za uresničevanje ciljev • analizira ovire na poti do cilja in oblikuje strategije za njihovo preseganje • opredeli kriterije uspešnosti • spremlja svoj napredek glede na kriterije
KM8: ISKANJE IN VREDNOTENJE VIROV	• pozna raznovrstne vire glede na različne kriterije • pozna kriterije vrednotenja kredibilnosti virov • išče in presoja vire glede na namen ter jih ustrezno navaja

KM9: DEDUKTIVNO SKLEPANJE	• sklepa iz splošnega na posamezno • ugotavlja resničnost/veljavnost premis • izgrajuje razumevanja pojmov • zaveda se možnih napak v deduktivnem sklepanju ter jih prepozna pri sebi in drugih • prepozna priložnosti za deduktivno sklepanje • presoja ustreznost deduktivnih sklepov
KM10: INDUKTIVNO SKLEPANJE	• sklepa iz posameznega (dejstva, dogodka, lastnosti ...) na splošno (princip, pravilo, teorijo) • ugotavlja resničnost/veljavnost premis • izgrajuje pojme • zaveda se možnih napak v induktivnem sklepanju (prehitro posploševanje) ter jih prepozna pri sebi in drugih • prepozna priložnosti za induktivno sklepanje • analizira in presoja ustreznost induktivnega sklepanja v situaciji
KM11: OBLIKOVANJE, ANALIZA IN VREDNOTENJE ARGUMENTOV	• oblikuje argumente (podpira trditve z relevantnimi razlogi) • analizira argumente (prepozna argumente ter določa njihovo strukturo) • vrednoti argumente (presoja premise z vidika relevantnosti, sprejemljivosti in zadostnosti) • izraža različne poglede, podprte z dejstvi/dokazi/razlogi
KM12: VREDNOTENJE IN ODLOČANJE	• ozavešča pomen oblikovanja jasnih in relevantnih kriterijev • oblikuje kriterije • vrednoti na osnovi relevantnih kriterijev • uporabi kriterije za sprejemanje odločitev

Slika 2: Miselni procesi in veščine kritičnega mišljenja

(https://www.zrss.si/pdf/Kriticno_misljenje_prirocnik.pdf str. 20-21)

Skušale smo doseči tudi socialno-čustveno naravnost (da učenci spoznajo svoja čustva in znajo boljše ravnati z njimi), zato smo uvedle samorefleksijo. S priloženim vprašalnikom, ki smo ga povzele iz omenjenega priročnika, smo želele, da učenci uvidijo, kako sami doživljajo problemsko situacijo.

(Povzeto po https://www.zrss.si/pdf/Kriticno_misljenje_prirocnik.pdf, str. 15)

Oceni, v kolikšni meri je bilo v tej situaciji zate značilno naslednje:					
intelektualna skromnost (izogibal sem se prehitri sodbi)	1	2	3	4	5
intelektualni pogum (javno sem zastopal svoje stališče, tudi če je bilo drugačno in nepriljubljeno)	1	2	3	4	5
intelektualna poštenost (problem sem obravnaval z različnih perspektiv, dopuščal in raziskoval sem gledišča sogovornikov)	1	2	3	4	5
intelektualna vztrajnost (problem sem temeljito raziskal, temu sem posvetil čas in napor)	1	2	3	4	5

Slika 3: Samorefleksija

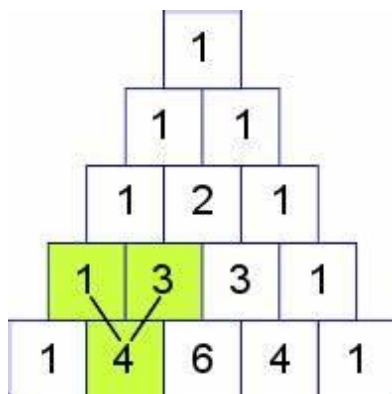
(https://www.zrss.si/pdf/Kriticno_misljenje_prirocnik.pdf, str. 15)

3.2 PASCALOV TRIKOTNIK

Pascalov trikotnik je tvorjenje števil po nekem pravilu v obliki trikotnika. Sestavljen je iz števil, ki si sledijo v neskončnost.

Pravila, po katerem nastane ta trikotnik so:

- čisto na vrhu ima enico,
- prav tako je vedno enica na skrajno levi in skrajno desni strani,
- vsako vmesno število pa je vsota števil nad njim (primer: $1 + 3 = 4$).



Slika 4: Izpolnjevanje Pascalovega trikotnika

(<https://th.bing.com/th/id/OIP.Key3KbKdvbl8PTbTSCflKwAAAA?rs=1&pid=ImgDetMain>)

Pascalov trikotnik ima v obeh zunanjih diagonalah enice, v drugi diagonalni vsa naravna števila, v tretji trikotniška števila ...



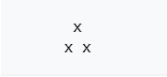
Slika 5: Posebna števila v Pascalovem trikotniku

(Prilagojeno po: <https://www.mathsisfun.com/pascals-triangle.html>)

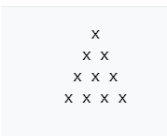
3.2.1 TRIKOTNIŠKA ŠTEVILA

Trikotniška števila: so števila, ki jih, če jih predstavimo s pikicami, lahko razporedimo v enakostranični trikotnik.

 1 → je po dogovoru trikotniško število

 3

 6

 10 Člen zaporedja teh števil pa se izračuna po obrazcu: $a_n = a_{n-1} + n$.
Primer: 4. člen → $a_4 = a_3 + 4 = 6 + 4 = 10$

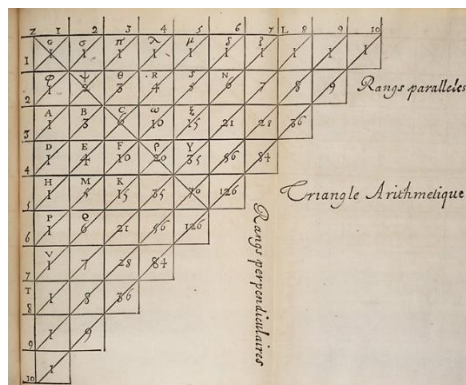
Slika 6: Trikotniška števila

(https://sl.wikipedia.org/wiki/Trikotni%C5%A1ko_%C5%A1tevilo)

3.2.2 UPORABA IN NASTANEK PASCALOVEGA TRIKOTNIKA

Pascalov trikotnik ni bil odkrit s strani ene same osebe, ampak gre za matematično strukturo, ki se je razvila skozi zgodovino matematike, kar pomeni, da je bila znana že dolgo pred tem poimenovanjem.

Tisti, ki je shemo prvi matematično preučil, je bil francoski filozof in matematik Blaise Pascal, zato so ta trikotnik poimenovali po njem.



Slika 7: Aritmetični trikotnik, ki ga je narisal Blaise Pascal

(https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle)

Pascalov trikotnik je matematična struktura, ki se uporablja na različnih področjih pri matematiki:

- v kombinatoriki,
- pri teoriji verjetnosti,
- pri matematični indukciji (dokazovanje),
- pri numeričnih metodah,
- v računalniški grafiki,
- v matematični analizi,
- v raziskovanju geometrije,
- v inženiringu in znanosti.

Splošno gledano, Pascalov trikotnik predstavlja v matematiki močno orodje.

(Povzeto po https://zpm-mb.si/wp-content/uploads/2015/03/O%C5%A0_Matematika_Skrivnosti_Pascalovega_trikotnika.pdf in http://pefprints.pef.uni-lj.si/2747/1/DD_kon%C4%8Dno.pdf)

3.3 LEIBNIZEV TRIKOTNIK

Trikotniška struktura števil, ki je zanimiva za proučevanje in je podobna Pascalovemu trikotniku, se imenuje Leibnizev trikotnik.

3.3.1 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

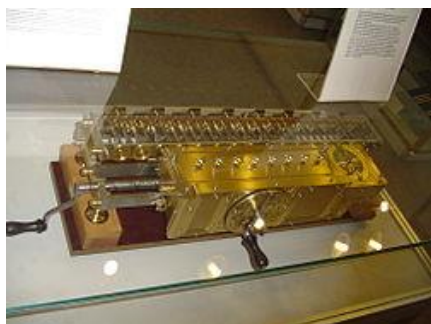


Slika 8: Gottfried Wilhelm Leibniz

(https://sl.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz)

Rodil se je 1. julija 1646 v Leipzigu. Bil je nemški filozof, matematik, fizik, pravnik, zgodovinar, jezikoslovec, knjižničar in diplomat. Študiral je filozofijo in matematiko, poleg tega pa še retoriko, latinščino, grščino in hebrejščino.

Leibniz je prvi uporabil znak $\cdot$ za produkt in znak $:$ za količnik. Leta 1673 je sestavil računski stroj, ki je znal tudi množiti in deliti. Opiral se je na stroj, ki ga je izumil Blaise Pascal, francoski matematik in filozof.



Slika 9: Leibnizev računski stroj

(https://sl.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz#/media/Slika:Leibnitzrechenmaschine.jpg)

Skupaj z Newtonom velja za začetnika sodobnega infinitezimalnega računa (limite, odvodi, integrali in vrste), kar je njegov najpomembnejši dosežek v matematiki, čeprav so v času njegovega življenja ta dosežek pripisovali samo Newtonu. Spor v resnici nikoli ni bil rešen, vendar so kasneje dokazali, da sta ga razvila oba istočasno. Raziskoval je razvoje števil v verižne ulomke. Razvil pa je tudi posebno trikotniško strukturo, ki jo danes imenujemo Leibnizev (harmonični) trikotnik. Umrli je 14. novembra 1716 v Hannovru.

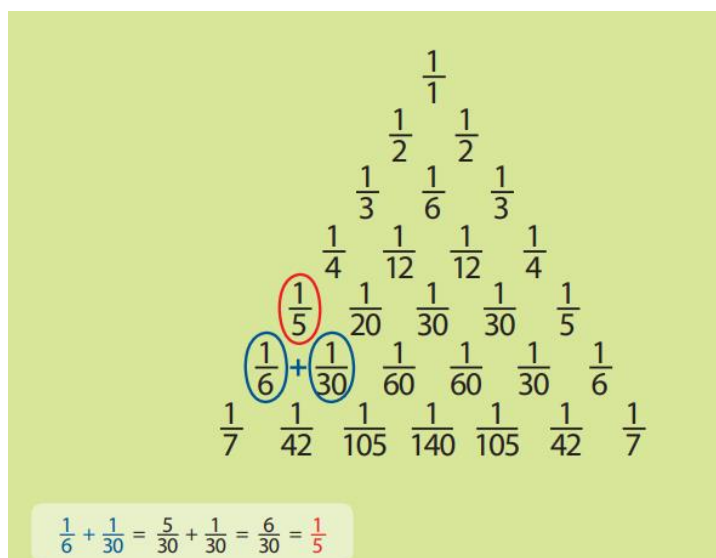
(Povzeto po https://sl.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz)

3.3.2 LEIBNIZEV (HARMONIČNI) TRIKOTNIK

Leibnizev harmonični trikotnik je trikotna shema okrajšanih ulomkov, ki so med seboj povezani na zanimiv način. Ta trikotna shema ima neskončno mnogo vrstic, ki nastajajo po določenih pravilih. Ta pravila so:

- na vrhu trikotnika je ena enina ali ena kot celi del,
- v zunanjih členih so ulomki, ki imajo imenovalec enak kot je število vrste, v kateri se ta ulomek nahaja, števec v zunanjih ulomkih pa je vedno 1 oz. zunanji ulomki n -te vrstice so obratni ulomki števila n ,
- posamezni ulomek je dobljen tako, da je (okrajšana) vsota dveh njegovih spodnjih ulomkov.

(Povzeto po https://skupnost.sio.si/pluginfile.php/620230/mod_resource/content/1/14_Scientix%20Na-Ma_Final_PREISKOVANJE%20V%20LEIBNITZEVEM%20TRIKOTNIKU.pdf 17. 2. 2024)



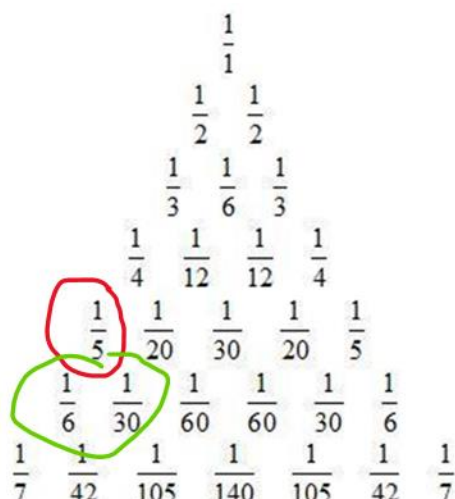
Slika 10: Leibnizev trikotnik

(https://skupnost.sio.si/pluginfile.php/620230/mod_resource/content/1/14_Scientix%20Na-Ma_Final_PREISKOVANJE%20V%20LEIBNITZEVEM%20TRIKOTNIKU.pdf)

3.3.3 ZANIMIVE POVEZAVE V LEIBNIZEVEM TRIKOTNIKU

Pri tej raziskovalni nalogi smo se naslanjale predvsem na zanimivosti v tem trikotniku. Takšne zanimive povezave so:

- v zunanjih členih je imenovalac enak številu vrstice (pr.: 5. vrstica = $\frac{1}{5}$)
- posamezni notranji ulomek je dobljen tako, da je seštevek dveh njegovih spodnjih ulomkov, pri čemer je rezultat okrajšan ulomek:

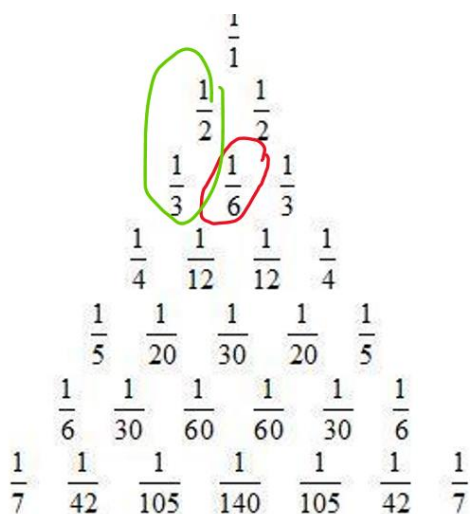


$$\frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{5}{30} + \frac{1}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Slika 11: Leibnizev trikotnik s prikazano vsoto

(https://www.zrss.si/wp-content/uploads/2023/08/09_SonjaRajh.pdf)

- poleg zunanjih členov, kjer se jasno vidi, da si imenovalci sledijo po vrsti, je produkt dveh zaporednih zunanjih členov enak spodnjemu (kot kaže slika)



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Slika 12: Leibnizev trikotnik s prikazanim produktom

(https://www.zrss.si/wp-content/uploads/2023/08/09_SonjaRajh.pdf)

Teh zanimivosti je še več, a mi smo predstavile predvsem lastnosti, ki smo jih uporabile pri preverjanju spretnosti kritičnega mišljenja.

(Povzeto po https://skupnost.sio.si/pluginfile.php/620230/mod_resource/content/1/14_Scientix%20Na-Ma_Final_PREISKOVANJE%20V%20LEIBNITZEVEM%20TRIKOTNIKU.pdf

in https://www.zrss.si/wp-content/uploads/2023/08/09_SonjaRajh.pdf)

4 EMPIRIČNI DEL

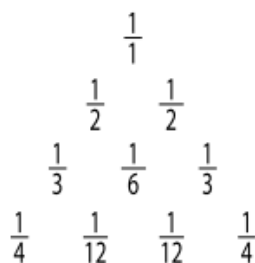
4.1 CILJI IN HIPOTEZE

Cilj prvega dela raziskave je bil, da oblikujemo naloge, s katerimi bomo preverile veščine kritičnega mišljenja. Med veščinami smo si jih zadale šest, ki smo jih želele preveriti. Te veščine so bile:

- opazovati in primerjati števila,
- oblikovati kriterije za razvrščanje,
- razvrstiti števila glede na kriterij,
- sistematično opazovati in na osnovi opaženega napovedovati,
- sklepati iz posameznega na splošno,
- analizirati in presojati ustreznost induktivnega sklepanja.

Prva veščina je bila opazovati in primerjati števila. Učencem smo priložile en del Leibnizevega trikotnika in oblikovale nalogo. Učenci so lahko s primerjanjem in opazovanjem ugotovili, da si sledijo imenovalci kot naravna števila, medtem ko je števec vedno 1. Lahko bi kdo ugotovil, da so obratna števila od števila vrstic ipd.

Naloga 1



LEIBNIZEV TRIKOTNIK oz. njegov del

Slika 13: Zgornji del Leibnizevega trikotnika

(https://www.zrss.si/wp-content/uploads/2023/08/09_SonjaRajh.pdf)

Ugotovi, kateri ulomek je na začetku 5. vrstice in kateri na koncu 5. vrstice.

Druga veščina je bila oblikovati kriterije za razvrščanje. Pričakovale smo, da bodo učenci natančno oblikovali kriterij. Pravilno je bilo:

- obratna vrednost števila, ki predstavlja dano vrstico ali
- števec je 1, imenovalec je enak številu vrstice.

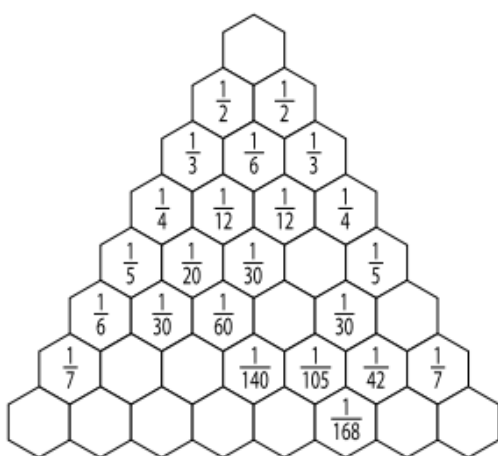
Naloga 2

Po katerem kriteriju si razvrstil ti dve števili. Zapiši ga.

Tretja večšina je bila sistematično opazovati in oblikovati kriterije za razvrščanje. Pričakovale smo, da bodo učenci ugotovili, da je posamezni notranji ulomek dobljen tako, da je vsota njegovih spodnjih ulomkov, pri čemer je rezultat okrajšan ulomek. Lahko pa bi učenci ugotovili vsaj, da je produkt dveh zaporednih zunanjih členov enak spodnjemu desnemu sosednjemu členu ali podobno. Ta večšina se nam je zdela najzahtevnejša.

Naloga 3

Imaš Leibnizev trikotnik, ki mu manjka kar nekaj števil. Uspeš ugotoviti, po kakšnem pravilu so razvrščeni ulomki, ki niso ob levem ali desnem robu trikotnika? Zapiši to pravilo.



Slika 14: Pomanjkljiv Leibnizev trikotnik

(https://www.zrss.si/wp-content/uploads/2023/08/09_SonjaRajh.pdf)

Četrta večšina je bila (ponovno) razvrstiti števila glede na kriterije. Pri čemer je 4. naloga mišljena kot razvrščanje zunanijh vrstic, simetričnih, skratka razvrščanje po kriterijih, ki so izoblikovani s pomočjo opazovanja.

Kot 5. nalogo pa smo preverjale, kako so razvrstili števila glede na kriterij, ki so ga sami oblikovali. Pričakovale smo, da bodo učenci izpolnili še zadnji dve manjkajoči števili, to sta ulomka $\frac{1}{56}$ in $\frac{1}{280}$.

Naloga 4, 5

S pomočjo pravila, ki si ga ugotovil, dopolni čim več manjkajočih števil.

Peta veščina je bila sistematično opazovati in na osnovi opaženega napovedovati. Pričakovale smo, da bodo učenci ugotovili, da gre za simetričen trikotnik. Lahko bi tudi opazili, da so ulomki v vsaki vrstici proti somernici vedno manjši ...

Naloga 6

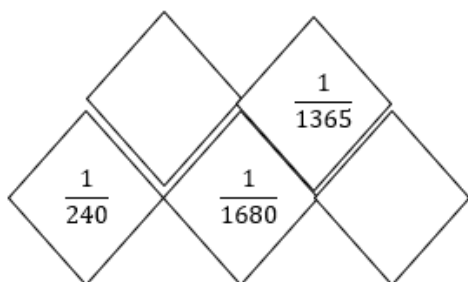
Kaj meniš, lahko izpolniš do 7. vrstice ta trikotnik (iz 3. naloge) brez računanja? Kako bi utemeljil svojo odločitev?

Sedma naloga je preverjala veščino razvrstiti števila glede na kriterij. Pričakovalo se je, da bodo imeli učenci več napak zaradi večjih imenovalcev ulomkov.

Naloga 7

Leibnizev trikotnik se tvori po pravilu: posamezno število v notranjosti Leibnizevega trikotnika je dobljeno kot vsota obeh števil pod njim.

Po pravilu izpolni posamezni izsek Leibnizevega trikotnika.



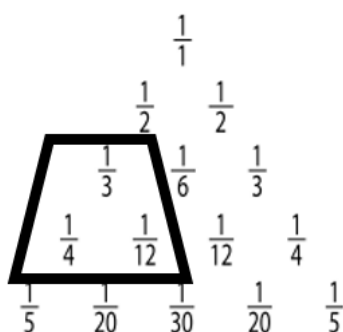
Slika 15: Manjkajoči členi Leibnizevega trikotnika

Osma naloga je ponovno preverjala veščine opazovanja, primerjanja števil in oblikovanje kriterija za razvrščanje. Pričakovalo se je, da bodo odkrili, da je zmnožek zunanjih dveh enak tretjemu ulomku in podobno.

Naloga 8

Opazuj ulomke, ki so označeni s trapezom.

Kakšna zveza je med označenimi števili? Ne upoštevaj že zapisanega pravila iz naloge 7, odkrij novega.



Slika 16: Leibnizev trikotnik

(https://www.zrss.si/wp-content/uploads/2023/08/09_SonjaRajh.pdf)

Deveta naloga je preverjala veščino, kako učenci sklepajo iz posameznega na splošno. Pričakovale smo nekaj podobnega kot, da je zmnožek zunanjih dveh členov enak tretjemu členu, ki je sosednji člen spodnjega člena ipd.

Naloga 9

Kako bi posplošil pravilo, ki si ga odkril?

Z zadnjo nalogo smo preverjale veščino analiziranja in presojanja o ustreznosti induktivnega sklepanja. Pričakovale smo, da bodo učenci naredili nekaj primerov iz vsake strani in primerjali rezultate, ki jih bodo dobili z množenjem s »tretjim« členom v takem izboru števil.

Naloga 10

Preveri pravilnost svojega razmišljanja.

Ker je bil cilj te raziskovalne naloge ugotoviti, kako spretni so naši učenci pri obravnavanih veščinah kritičnega mišljenja, smo zastavile 5 hipotez:

1. hipoteza: Največ preglavic bo učencem povzročala naloga, kjer bodo morali oblikovati relevantne kriteriji za razvrščanje oz. zapisati pravilo, to sta nalogi 3 in 9.
2. hipoteza: Pričakovano je, da bodo učenci spretnejši pri razvrstitvi števil glede na kriterije, kot z razlaganjem pravil. (naloge 1, 4, 7 bodo boljše rešene kot ostale naloge)
3. hipoteza: Sistematično opazovanje ne bo povzročilo večjih težav in bo bolje rešeno kot oblikovanje kriterijev za razvrščanje. (naloga 6)
4. hipoteza: Presoditi ustreznost kriterija bo boljše rešeno, kot oblikovanje kriterijev, saj bodo učenci računali z ulomki in pri tem dobili rezultate. (naloga 10)
5. hipoteza: Večji kot bodo imenovalci ulomkov, več bo napak in slabše bodo razvrščeni ustrezni ulomki. (naloga 7 bo slabše rešene kot naloga 5)

4.2 IZVEDBA RAZISKAVE

S pomočjo učiteljice smo razdelile učne lističe med 10 sedmošolcev, osmošolcev in devetošolcev. To so bili po trije učenci z zaključeno oceno 5, trije z zaključeno oceno 4, trije z zaključeno oceno 3 in po en učenec z zaključeno oceno 2. Med temi učenci so imeli osmošolci manj sigurne ocene, torej si bile komaj petice, komaj štirice ... Skratka bili so učno nekoliko šibkejši učenci.

Učenci so rešili učne liste z 10 opisanimi nalogami. Z učiteljico smo jih skupaj popravile in vnesle rezultate v excellovo tabelo, ki nam je sproti računala povprečja reševanj posameznih nalog in oblikovala diagrame. Rezultati te raziskave so predstavljeni v naslednjih točkah.

4.3 REZULTATI RAZISKAVE

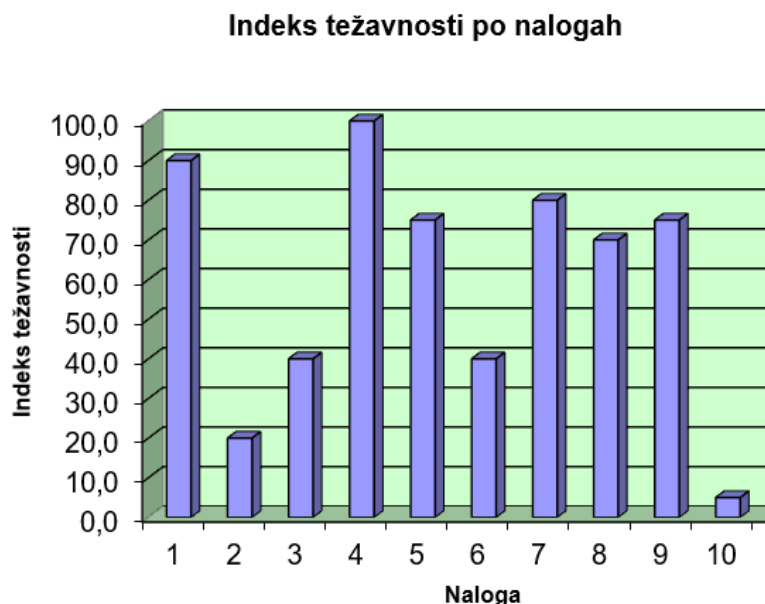
4.3.1 REZULTATI SEDMOŠOLCEV

Naloga	vzorec	kriterij	pravilo	vzorec	računanje	simetrija	računanje	trapez	pravilo	preizkus	Skupaj
Možnih točk	2	1	1	2	2	1	2	1	1	1	14
1. učenec	2	0	1	2	2	1	2	1	1	0	12
2. učenec	2	0	0	2	1	0	0	0	0	0	5
3. učenec	2	0	0	2	0	0	2	0	1	0	7
4. učenec	2	1	1	2	2	0	2	1	1	0,5	12,5
5. učenec	2	0,5	0	2	2	1	2	1	0,5	0	11
6. učenec	2	0,5	0	2	2	1	2	1	1	0	11,5
7. učenec	0	0	0	2	2	1	2	1	1	0	9
8. učenec	2	0	0	2	2	0	0	1	1	0	8
9. učenec	2	0	1	2	1	0	2	1	1	0	10
10. učenec	2	0	1	2	1	0	2	0	0	0	8

I_t	90,0	20,0	40,0	100,0	75,0	40,0	80,0	70,0	75,0	5,0	67,1
Povprečje	1,80	0,20	0,40	2,00	1,50	0,40	1,60	0,70	0,75	0,05	9,40

Tabela 1: Razporeditev točk po nalogah za sedmošolce

Povprečje pri sedmošolcih je bilo 67,1 %. Težavnost po nalogah je bila:



Slika 17: Diagram, ki prikazuje indeks težavnosti po nalogah pri sedmošolcih

Kot je razvidno iz diagrama, jim je najmanj težav povzročala 4. naloga, kjer so učenci razvrstili ulomke glede na kriterije, ki so jih postavili z opazovanjem. Zelo dobro je rešena tudi prva naloga, kjer so prav tako s primerjanjem in opazovanjem razvrščali neznane člene. Največje težave pa sta jim povzročali:

- 2. naloga, kjer so morali oblikovati kriterije za razvrščanje (števec in imenovalec/obratna vrednost) in
- 10. naloga, kjer smo preverjale veščino analiziranja in presojanja o ustreznosti induktivnega sklepanja.

Preverjanje hipotez

H1: Naloga 3 je res povzročala veliko težav, a naloga 9 je bila zelo dobro rešena naloga, torej so učenci dosti prej opazili povezavo med členi, če gre za računsko operacijo množenja kot pa za seštevanje. Hipoteze ne moremo potrditi.

H2: Naloge 1, 4 in 7 so res boljše rešene od ostalih nalog, torej so učenci res spretnejši, če že imajo kriterije, kot če jih morajo sami oblikovati. Hipoteza je potrjena.

H3: Oblikovanje kriterijev se je preverjalo z 2., 3. in 8. nalogo. Sistematično opazovanje je bilo mišljeno pri 6. nalogi. Iz diagrama je razvidno, da je samo 2. naloga slabše rešena od 6. Zanimivo se nam je zdelo, da so učenci znali upoštevati simetričnost, saj se je videlo, da so imeli manj računov, niso pa znali utemeljiti, da gre za lastnost simetričnosti znotraj Leibnizevega trikotnika. Hipoteza ni potrjena.

H4: Naloga 10 je bila najslabše rešena naloga na celém učnem listu. Učenci nikakor niso znali računsko preveriti ustreznost svojega induktivnega sklepanja (pravila iz naloge 9). Ta hipoteza je ovržena.

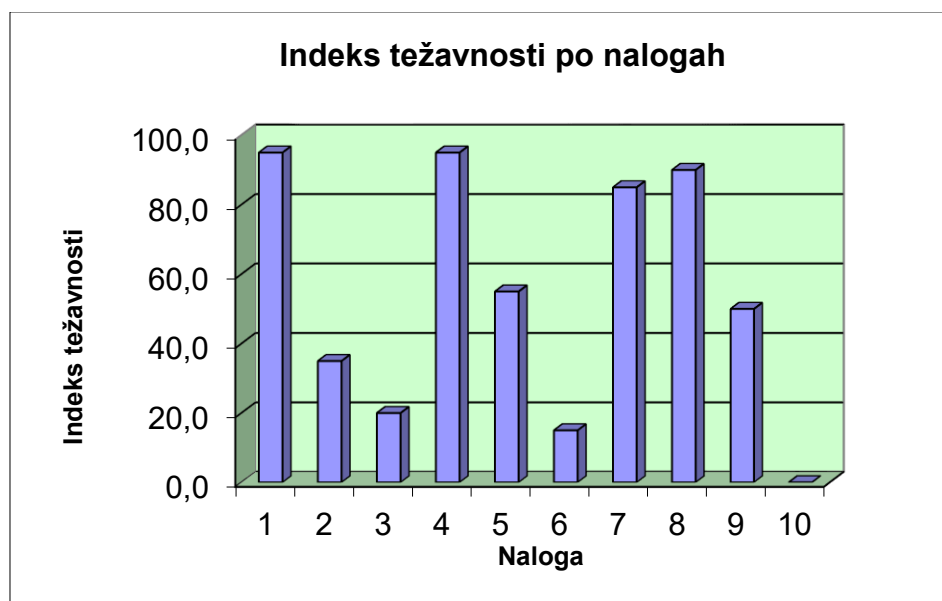
H5: Naloga 7 ni slabše rešena kot naloga 5. Ta hipoteza je ovržena. Predvidevamo, da zaradi natančno oblikovanega kriterija pri nalogi 7, pri čemer so učenci pri nalogi 5 morali predhodno sami oblikovati kriterij.

4.3.2 REZULTATI OSMOŠOLCEV

Naloga	vzorec	kriterij	pravilo	vzorec	računanje	simetrija	računanje	trapez	pravilo	preizkus	Skupaj
Možnih točk	2	1	1	2	2	1	2	1	1	1	14
1. učenec	2	0	0	2	2	1	2	1	1	0	11
2. učenec	2	0	0	2	0	0	2	1	1	0	8
3. učenec	2	1	0	2	2	0	2	1	1	0	11
4. učenec	2	1	0	2	2	0	2	1	0	0	10
5. učenec	2	1	0	2	2	0	2	1	0	0	10
6. učenec	2	0	1	2	0	0,5	0	1	1	0	7,5
7. učenec	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	3
8. učenec	2	0,5	0	2	1	0	2	1	0	0	8,5
9. učenec	2	0	0	2	1	0	2	1	0,5	0	8,5
10. učenec	2	0	1	2	1	0	2	1	0,5	0	9,5
I_t	95,0	35,0	20,0	95,0	55,0	15,0	85,0	90,0	50,0	0,0	62,1
Povprečje	1,90	0,35	0,20	1,90	1,10	0,15	1,70	0,90	0,50	0,00	8,70

Tabela 2: Rezultati po nalogah za osmošolce

Povprečni uspeh osmošolcev na tem testiranju veščin kritičnega mišljenja je bil 62,1%. Kako so reševali posamezne naloge, pa je prikazano na diagramu:



Slika 18: Diagram, ki prikazuje indeks težavnosti po nalogah pri osmošolcih

Kot je razvidno iz diagrama, sta jim najmanj težav povzročali 1. in 4. naloga, kjer so učenci razvrstili ulomke glede na kriterije, ki so jih postavili s primerjanjem in opazovanjem. Največje težave jim je povzročala zadnja naloga, kjer so oz. bi morali

presoditi, ali je njihovo sklepanje pravilno. Tega ni storil nihče od osmošolcev. Zelo slabo pa sta rešeni tudi:

- 6. naloga, kjer so morali sistematično opazovati, ugotoviti, da gre za simetričnost in na osnovi opaženega napovedovati in
- 3. naloga, kjer je bilo potrebno sistematično opazovati in oblikovati kriterije za razvrščanje.

Preverjanje hipotez

H1: Naloga 3 je res povzročala veliko težav, a naloga 9 ni bila med najslabše rešenimi nalogami. Hipoteze ne moremo potrditi.

H2: Naloge 1, 4 in 7 so res boljše rešene od ostalih nalog, torej so učenci res spretnejši, če že imajo kriterije, kot če jih morajo sami oblikovati. Hipoteza je potrjena.

H3: Iz diagrama je razvidno, da sta 2. in 3. naloga slabše rešeni od 6., medtem ko je 8. naloga boljše rešena, kar pomeni, da je hipoteza ovržena.

H4: Tudi pri osmošolcih je bila naloga 10 najslabše rešena naloga na celém učnem listu. Učenci nikakor niso znali računsko preveriti ustreznost svojega induktivnega sklepanja (pravila iz naloge 9). Ta hipoteza je ovržena.

H5: Naloga 7 ni slabše rešena kot naloga 5. Ta hipoteza je ovržena. Predvidevamo, da so razlogi enaki, kot smo jih navedli pri sedmošolcih.

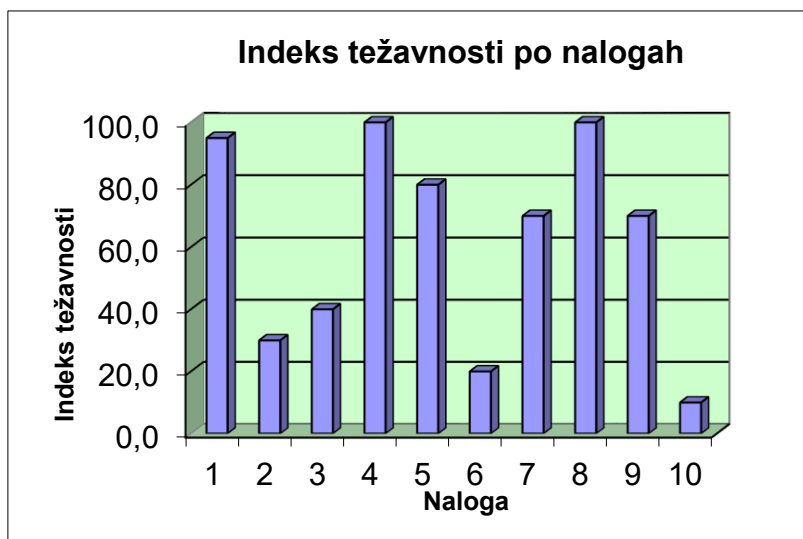
4.3.3 REZULTATI DEVETOŠOLCEV

Naloga	vzorec	kriterij	pravilo	vzorec	računanje	simetrija	računanje	trapez	pravilo	preizkus	Skupaj
Možnih točk	2	1	1	2	2	1	2	1	1	1	14
1. učenec	2	1	0	2	1	0	0	1	0	0	7
2. učenec	2	0	0	2	2	0	2	1	1	0	10
3. učenec	2	1	1	2	2	0	2	1	1	0	12
4. učenec	2	0	0	2	2	1	1	1	1	0	10
5. učenec	2	0	0	2	2	0	0	1	1	1	9
6. učenec	2	0	1	2	2	1	2	1	1	0	12
7. učenec	2	0	1	2	0	0	1	1	0	0	7
8. učenec	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	10
9. učenec	1	0	1	2	2	0	2	1	0	0	9
10. učenec	2	0	0	2	2	0	2	1	1	0	10

I_t	95,0	30,0	40,0	100,0	80,0	20,0	70,0	100,0	70,0	10,0	68,6
Povprečje	1,90	0,30	0,40	2,00	1,60	0,20	1,40	1,00	0,70	0,10	9,60

Tabela 3: Rezultati po nalogah za devetošolce

Povprečje v uspešnosti reševanja nalog je bilo 68,6 %. Katere naloge so bile najboljše rešene, pa prikazuje spodnji diagram.



Slika 19: Diagram, ki prikazuje indeks težavnosti po nalogah za devetošolce

Kot je razvidno iz diagrama, jim je najmanj težav povzročala 4. naloga, kjer so učenci razvrstili ulomke glede na kriterije, ki so jih postavili z opazovanjem in 8. naloga, kjer

smo preverjale veščine opazovanja, primerjanja števil in oblikovanje kriterija za razvrščanje in 1. naloga, kjer so prav tako s primerjanjem in opazovanjem razvrščali neznane člene. Največje težave pa so jim povzročale:

- 10. naloga, kjer smo preverjale veščino analiziranja in presojanja o ustreznosti induktivnega sklepanja,
- 6. naloga, kjer so morali sistematično opazovati in na osnovi opaženega napovedovati (simetričnost) in
- 2. naloga, kjer so morali oblikovati kriterije za razvrščanje (števec in imenovalec/obratna vrednost).

Preverjanje hipotez

H1: Naloga 3 je res povzročala veliko težav, a naloga 9 je bila zelo dobro rešena naloga, torej so tudi devetošolci dosti prej opazili povezavo med členi, če gre za računsko operacijo množenja, kot pa če gre za seštevanje. Hipoteze ne moremo potrditi.

H2: Naloge 1, 4 in 7 so boljše rešene od ostalih nalog, torej so učenci res spretnejši, če že imajo kriterije, kot če jih morajo sami oblikovati. Čeprav je pri devetošolcih tudi zelo visoko rezultat osme naloge. Hipoteza je potrjena.

H3: Oblikovanje kriterijev se je preverjalo z 2., 3. in 8. nalogo. Sistematično opazovanje je bilo mišljeno pri 6. nalogi. Iz diagrama je razvidno, da je 6. naloga ena najslabše rešenih nalog. Hipoteza je ovržena.

H4: Naloga 10 je bila najslabše rešena naloga na celém učnem listu. Učenci nikakor niso znali računsko preveriti ustreznost svojega induktivnega sklepanja (pravila iz naloge 9). Ta hipoteza je ovržena.

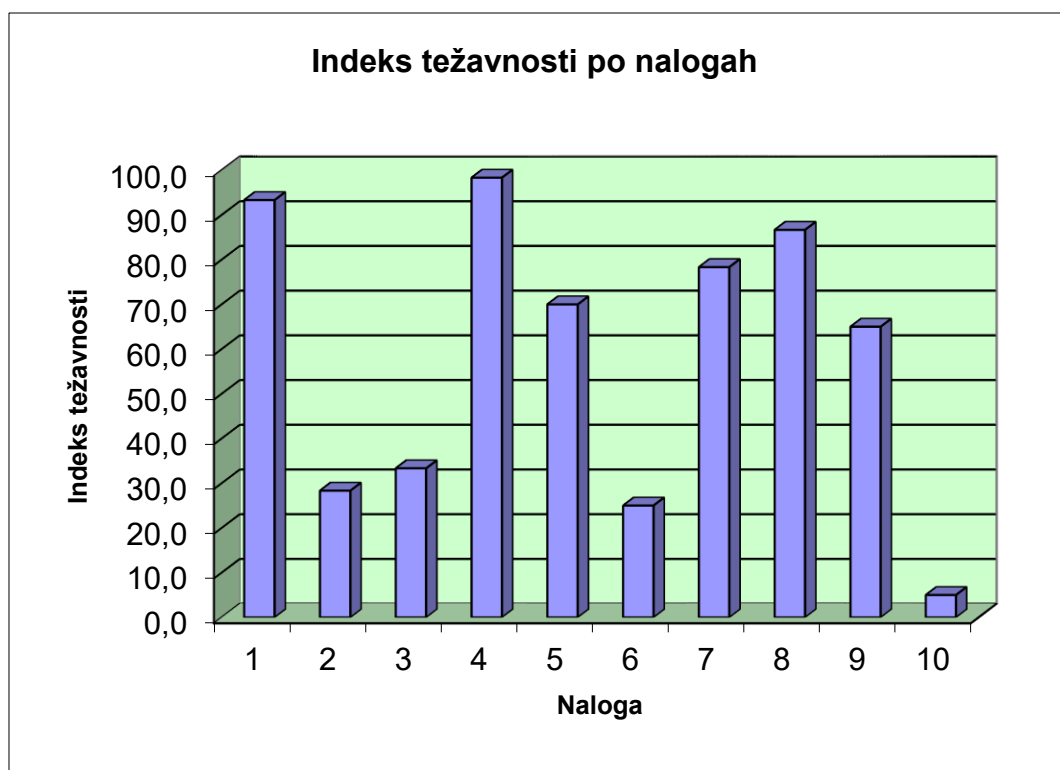
H5: Naloga 7 je slabše rešena kot naloga 5. Ta hipoteza je potrjena.

4.3.4 SKUPNA ANALIZA REZULTATOV

	vzorec	kriterij	pravilo	Vzorec	računanje	simetrija	računanje	trapez	pravilo	preizkus	Skupaj
Možnih točk	2	1	1	2	2	1	2	1	1	1	14
1. učenec (9.)	2	1	0	2	1	0	0	1	0	0	7
2. učenec	2	0	0	2	2	0	2	1	1	0	10
3. učenec	2	1	1	2	2	0	2	1	1	0	12
4. učenec	2	0	0	2	2	1	1	1	1	0	10
5. učenec	2	0	0	2	2	0	0	1	1	1	9
6. učenec	2	0	1	2	2	1	2	1	1	0	12
7. učenec	2	0	1	2	0	0	1	1	0	0	7
8. učenec	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	10
9. učenec	1	0	1	2	2	0	2	1	0	0	9
10. učenec	2	0	0	2	2	0	2	1	1	0	10
1. učenec (8.)	2	0	0	2	2	1	2	1	1	0	11
2. učenec	2	0	0	2	0	0	2	1	1	0	8
3. učenec	2	1	0	2	2	0	2	1	1	0	11
4. učenec	2	1	0	2	2	0	2	1	0	0	10
5. učenec	2	1	0	2	2	0	2	1	0	0	10
6. učenec	2	0	1	2	0	0,5	0	1	1	0	7,5
7. učenec	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	3
8. učenec	2	0,5	0	2	1	0	2	1	0	0	8,5
9. učenec	2	0	0	2	1	0	2	1	0,5	0	8,5
10. učenec	2	0	1	2	1	0	2	1	0,5	0	9,5
1. učenec (7.)	2	0	1	2	2	1	2	1	1	0	12
2. učenec	2	0	0	2	1	0	0	0	0	0	5
3. učenec	2	0	0	2	0	0	2	0	1	0	7
4. učenec	2	1	1	2	2	0	2	1	1	0,5	12,5
5. učenec	2	0,5	0	2	2	1	2	1	0,5	0	11
6. učenec	2	0,5	0	2	2	1	2	1	1	0	11,5
7. učenec	0	0	0	2	2	1	2	1	1	0	9
8. učenec	2	0	0	2	2	0	0	1	1	0	8
9. učenec	2	0	1	2	1	0	2	1	1	0	10
10. učenec	2	0	1	2	1	0	2	0	0	0	8
lt	93,3	28,3	33,3	98,3	70,0	25,0	78,3	86,7	65,0	5,0	66,0
Povprečje	1,87	0,28	0,33	1,97	1,40	0,25	1,57	0,87	0,65	0,05	9,23

Tabela 4: Rezultati po nalogah za tretjo triado

Iz tabele je razvidno, da so učenci na naši šoli v povprečju rešili 66 % veščin kritičnega mišljenja, ki smo jih zajele v našo raziskavo.



Slika 20: Diagram, ki prikazuje indeks težavnosti za vse učence, ki so sodelovali v raziskavi

Kot je razvidno iz diagrama, sta jim najmanj težav povzročali 1. in 4. naloga, kjer so učenci razvrstili ulomke glede na kriterije, ki so jih postavili s primerjanjem in opazovanjem.

Največje težave pa jim je povzročala 10. naloga, kjer smo preverjale večino analiziranja in presojanja o ustreznosti induktivnega sklepanja.

Zelo veliko težav pa so imeli tudi s

- 6. nalogo, kjer so morali sistematično opazovati in na osnovi opaženega napovedovati (simetričnost) in
- 2. naloga, kjer so morali oblikovati kriterije za razvrščanje (števec in imenovalec/obratna vrednost).

Preverjanje hipotez

H1: Naloga 3 je res povzročala veliko težav, a naloga 9 je bila zelo dobro rešena naloga, torej je hipoteza ovržena.

H2: Naloga 1, 4 in 7 so res boljše rešene od ostalih nalog, torej so učenci res spretnjši, če že imajo kriterije, kot če jih morajo sami oblikovati. Čeprav je tudi zelo visoko rezultat osme naloge. Hipoteza je potrjena.

H3: Oblikovanje kriterijev se je preverjalo z 2., 3. in 8. nalogo. Sistematično opazovanje je bilo mišljeno pri 6. nalogi. Iz diagrama je razvidno, da je 6. naloga ena najslabše rešenih nalog. Hipoteza je ovržena.

H4: Naloga 10 je bila najslabše rešena naloga na celém učnem listu. Učenci nikakor niso znali računsko preveriti ustreznost svojega induktivnega sklepanja (pravila iz naloge 9). Ta hipoteza je ovržena.

H5: Naloga 7 je boljše rešena kot naloga 5. Ta hipoteza ni potrjena.

4.3.5 POTRDITEV HIPOTEZ

	SEDMOŠOLCI	OSMOŠOLCI	DEVETOŠOLCI	VSI
H1	NE	NE	NE	NE
H2	DA	DA	DA	DA
H3	NE	NE	NE	NE
H4	NE	NE	NE	NE
H5	NE	NE	DA	NE

Tabela 5: Tabele o potrditvi hipotez

H1: Največ preglavic bo učencem povzročala naloga, kjer bodo morali oblikovati relevantne kriteriji za razvrščanje oz. zapisati pravilo, to sta nalogi 3 in 9.

Hipoteza je ovržena. Lahko pa potrdimo en del hipoteze, to je, da imajo učenci velike težave pri oblikovanju kriterijev za razvrščanje, če je med ulomki seštevanje in odštevanje. In dodamo spremenjen drugi del hipoteze, učenci hitreje opazijo kriterije za razvrščanje, če je prisotno množenje, kot pa seštevanje.

H2: Pričakovano je, da bodo učenci spretnejši pri razvrstitvi števil glede na kriterije, kot z razlaganjem pravil. (naloge 1, 4, 7 bodo boljše rešene kot ostale naloge)

Hipoteza je potrjena.

H3: Sistematično opazovanje ne bo povzročilo večjih težav in bo bolje rešeno kot oblikovanje kriterijev za razvrščanje. (naloga 6)

Hipoteza je ovržena, učenci niso znali sistematično opazovati in ubesediti, kaj so opazili. Zanimivo se nam je zdelo, da so učenci znali upoštevati simetričnost, saj se je videlo, da so imeli manj računov, niso pa znali utemeljiti, da gre za lastnost simetričnosti znotraj Leibnizevega trikotnika.

H4: Presoditi ustreznost kriterija bo boljše rešeno, kot oblikovanje kriterijev, saj bodo učenci računali z ulomki in pri tem dobili rezultate. (naloga 10)

Hipoteza je ovržena. Učenci so imeli največ težav ravno s preizkušanjem ustreznosti kriterija, sklepanja. To je njihova najšibkejša veščina kritičnega mišljenja. Nekateri so zapisali $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ali $3 \cdot 4 = 12$, celo $12 : 4 = 3$, ampak niso vključili nobenega števila izven trapeza.

H5: Večji kot bodo imenovalci ulomkov, več bo napak in slabše bodo razvrščeni ustrezni ulomki. (naloga 7 bo slabše rešene kot naloga 5)

Hipoteza je ovržena. Učenci so bili zelo spretni pri ulomkih z večjimi imenovalci. Ta hipoteza je bila čisto matematična.

Iz potrjevanja hipotez lahko oblikujemo nekaj sklepov o kritičnem mišljenju na naši šoli:

1. Učenci znajo zelo dobro opazovati in primerjati števila in jih razvrstiti na osnovi opaženih kriterijev.
2. Dobro znajo razvrstiti člene, če so že določeni kriteriji za razvrščanje.
3. Veliko preglavic povzroča oblikovati in ubesediti kriterije za razvrščanje (manj v primeru množenja), četudi temeljijo samo na sistematičnem opazovanju (simetrija).
4. Največ težav pa jim dela analiziranje in presojanje ustreznosti induktivnega sklepanja.

4.3.6 SAMOREFLEKSIJA

Za samorefleksijo smo se odločile iz dveh razlogov:

- ker smo želela pridobiti informacije o tem, če so se učenci potrudili ali so reševali kar tako, da jim je minil čas in
- želele smo, da učenci v tašnih situacijah ugotovijo oz. skušajo razumeti, da so rezultati v največji meri odvisni od njih in njihove volje.

Rezultate samorefleksije smo jim predstavile v skupini, vendar smo samo razložile pomen posameznih rezultatov, npr. Kaj pomeni, če so pri prvem odgovoru obkrožili ena ...

Samorefleksivni vprašalnik je bil prilagojen na podlagi vprašalnika iz priročnika o kritičnem mišljenju. (https://www.zrss.si/pdf/Kriticno_misljenje_prirocnik.pdf, str. 15)

Samorefleksija (razmišljanje o lastnem mišljenju, poznavanju sebe ...)

Obkroži številko, ki zate najbolj drži, pri čemer velja:

1 – nikoli 2 – včasih 3 – vedno

Oceni, v kolikšni meri je bilo v reševanju nalog v Leibnizevem trikotniku zate značilno naslednje:

Izogibal sem se prehitri sodbi . 1 2 3

Še vedno bi zastopal svoje stališče, četudi je v rešitvah prikazano drugače.

1 2 3

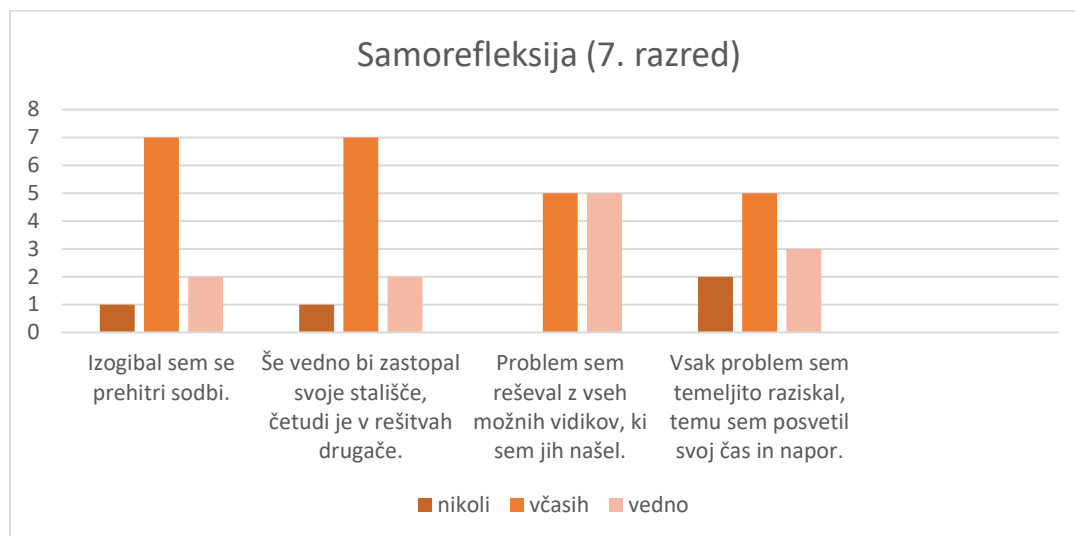
Problem sem reševal oz. obravnaval z vseh možnih vidikov, ki sem jih našel.

1 2 3

Vsak problem sem temeljito raziskal, temu sem posvetil svoj čas in napor.

1 2 3

4.3.6.1 SAMOREFLEKSIJA V 7. RAZREDU



Slika 21: Diagram samorefleksije sedmošolcev

Intelektualna skromnost

Iz diagrama razberemo, da sta bila samo 2 učenca, kar predstavlja 20 %, taka, ki sta se v vseh nalogah izogibala prehitri sodbi in s tem priznala, da se lahko tudi kdaj zmotita.

1 učenec (10 %) je očitno reševal učni list zelo hitro, večji del reševanja se je ravnal po hitri sodbi, ali pa je s to izjavo nakazal, da bi sicer opravil boljše.

Večina učencev se je ponekod osredotočila na naloge, ponekod pa ne (ali pa so skušali opravičiti svoje zmote).

Redki učenci so torej zmožni priznati, da so imeli narobe, ali da v reševanju nalog kritičnega mišljenja niso blesteli.

Iz povedanega se vidi, da se je večina sedmošolcev potrudila pri reševanju lista s kritičnim mišljenjem.

Intelektualni pogum

Odgovori so enaki, kot pri prvem vprašanju. Samo en učenec bi se takoj sprijaznil s stališči ostalih (je nesiguren v svoje znanje), dva bi pogumno zastopala svoje poglede, svoja reševanja, ostali pa bi se z nekaterimi drugačnimi rešitvami strinjali in z nekaterimi ne.

Očitno sta dva učenca intelektualno pogumna, ostali pa niso bili dovolj sigurni v pravilnost svojega reševanja in niso tako sigurni v svoje znanje.

Intelektualna poštenost

Tukaj je pol učencev odgovorilo, da so poskušali reševati probleme z vseh mogočih vidikov, polovica pa jih je trdila, da so to pri nekaterih problemih počeli, pri nekaterih

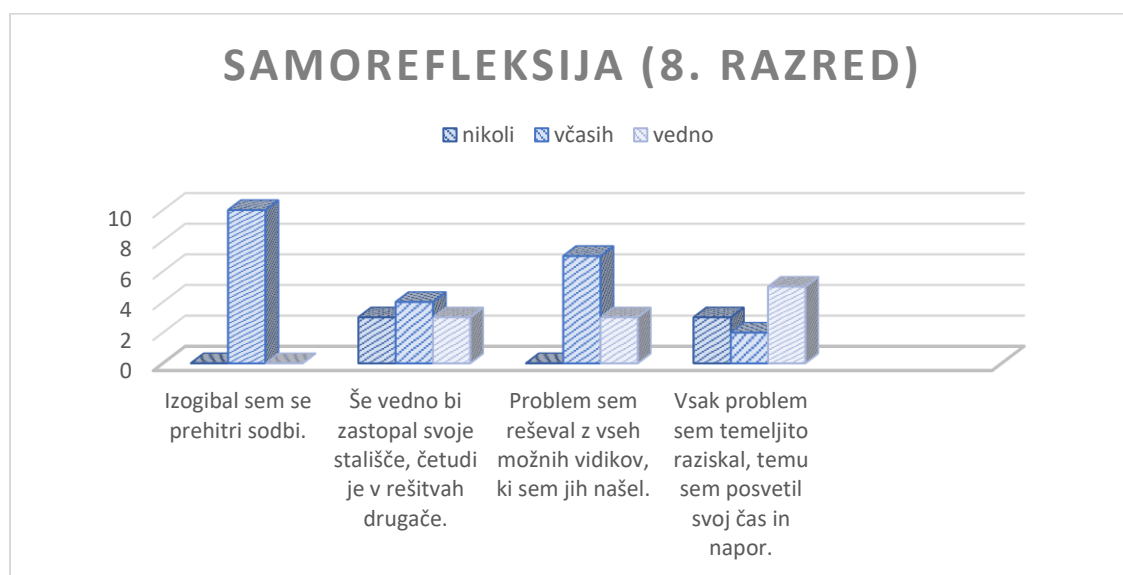
pa se reševali hitreje, kot bi lahko - da bi lahko reševali še kako drugače. Nihče izmed sedmošolcev ni reševal nalog, ne da bi se vsaj malo poglobil v matematične izzive.

Intelektualna vztrajnost

3 učenci (30 %) so vsako nalogo temeljito raziskali, jo rešili in se zelo potrudili, 2 učenca (20 %) sta priznala, da si nista vzela dovolj časa in nista bila dovolj vztrajna pri reševanju nalog, polovica sedmošolcev pa se je pri nekaterih nalogah zelo potrudila, vztrajala, medtem ko pri ostalih nalogah ni pokazala dovolj zagnanosti in vztrajnosti.

Splošno gledano, menimo, da so sedmošolci vzeli merjenje veščin kritičnega mišljenja s pomočjo Leibnizevega trikotnika dokaj resno in so rezultati za ta razred realni.

4.3.6.2 SAMOREFLEKSIJA V 8. RAZREDU



Slika 22: Diagram samorefleksije osmošolcev

Intelektualna skromnost

Iz diagrama razberemo, da so se učenci ponekod osredotočili na naloge, ponekod pa ne (ali pa so skušali opravičiti svoje zmote). Težko jim je torej priznati, da so imeli narobe ali da v reševanju nalog kritičnega mišljenja niso bili uspešni.

Iz povedanega se vidi, da se je večina osmošolcev potrudila pri reševanju vsaj nekaj nalog z učnega lista.

Intelektualni pogum

Trije učenci bi se takoj sprijaznil s stališči ostalih (so nesigurni v svoje znanje), trije bi pogumno zastopali svoje poglede, svoja reševanja, ostali (4) pa bi se z nekaterimi drugačnimi rešitvami strinjali in z nekaterimi ne.

Očitno so trije učenci intelektualno pogumni, vendar le-ti niso dosegli najboljših rezultatov, ostali pa niso bili dovolj sigurni v pravilnost svojega reševanje in niso tako sigurni v svoje znanje.

Analiza je pokazala, da so osmošolci manj sigurni v svoje znanje kot sedmošolci, pogumnejši pa niso ravno pokazali več znanja, tako da težko sodimo, da gre za matematični pogum, bolj najstniško trmoglavost.

Intelektualna poštenost

Tukaj so 3 učenci odgovorili, da so poskušali reševati probleme z vseh mogočih vidikov, 7 pa jih je trdilo, da so to pri nekaterih problemih počeli, pri nekaterih pa so reševali hitreje, kot bi lahko. Nihče izmed osmošolcev ni reševal nalog, brez da bi se vsaj malo poglobil v matematične izzive.

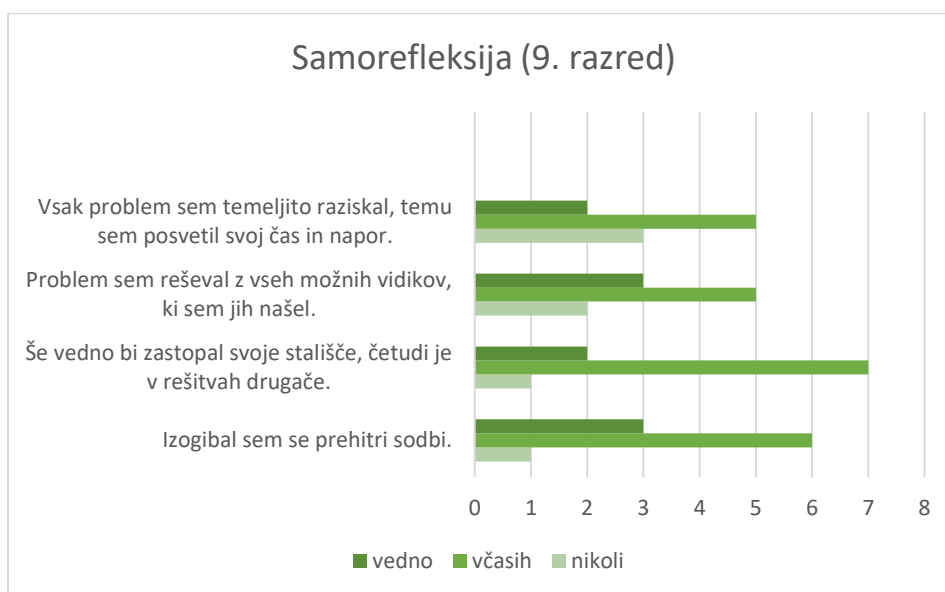
Iz zapisanega lahko sklepamo, da so se potrudili po svojih močeh.

Intelektualna vztrajnost

5 učencev (50 %) je vsako nalogo temeljito raziskalo, jo rešilo in se za njo temeljito potrudilo, 3 učenci (30 %) so priznali, da si niso vzeli dovolj časa in niso bili dovolj vztrajni pri reševanju nalog, 2 osmošolca pa sta se pri nekaterih nalogah zelo potrudila, vztrajala, medtem ko pri ostalih nalogah nista pokazala dovolj zagnanosti in vztrajnosti.

Osmošolci so imeli nekoliko nižje rezultate kot sedmošolci. Iz analize samorefleksije lahko sklepamo, da so se potrudili pri nekaterih nalogah – predvsem pri tistih, ki so zahtevale malo manj časa.

4.3.6.3 SAMOREFLEKSIJA V 9. RAZREDU



Slika 23: Diagram samorefleksije devetošolcev

Intelektualna skromnost

Iz diagrama razberemo, da so bili 3 učenci taki, ki so se v vseh nalogah izogibali prehitri sodbi in s tem priznali, da se lahko tudi kdaj zmotijo.

1 učenec je očitno reševal učni list zelo hitro, se ravnal po hitri sodbi, ali pa je s to izjavo nakazal, da bi v primeru, če bi si vzel več časa, opravil boljše.

6 učencev pa se je ponekod osredotočila na naloge, ponekod pa ne (ali pa so skušali opravičiti svoje zmote).

Iz povedanega se vidi, da se je večina devetošolcev potrudila pri reševanju lista s kritičnim mišljenjem.

Intelektualni pogum

En učenec bi se takoj sprijaznil s stališči ostalih (je nesiguren v svoje znanje), dva bi pogumno zastopala svoje poglede, svoja reševanja, ostali (7) pa bi se z nekaterimi drugačnimi rešitvami strinjali in z nekaterimi ne.

Očitno sta dva učenca intelektualno pogumna, dosegala sta tudi rezultate, ki so med najvišjimi v devetih razredih, ostali pa niso dovolj sigurni v pravilnost svojega reševanje in tako niso sigurni v svoje znanje.

Analiza je pokazala, da imajo devetošolci enake rezultate kot sedmošolci.

Intelektualna poštenost

Tukaj so trije učenci odgovorili, da so poskušali reševati probleme z vseh mogočih vidikov, polovica pa jih je trdila, da so to pri nekaterih problemih počeli, pri nekaterih pa se reševali hitreje, kot bi lahko - da bi lahko reševali še kako drugače. Dva izmed devetošolcev sta reševala naloge, ne da bi se vsaj malo poglobila v matematične izzive.

Ta rezultat pokaže, da so prizadevneje reševali sedmošolci. Devetošolci ae niso potrudili po svojih najboljših močeh.

Intelektualna vztrajnost

2 učenca sta vsako nalogo temeljito raziskala, jo rešila in se za njo temeljito potrudila, 3 učenci so priznali, da si niso vzeli dovolj časa in niso bili dovolj vztrajni pri reševanju nalog, polovica devetošolcev pa se je pri nekaterih nalogah zelo potrudila, vztrajala, medtem ko pri ostalih nalogah niso pokazali dovolj zagnanosti in vztrajnosti.

Za devete razrede bi lahko na podlagi zapisanega trdile, da bi lahko bili rezultati boljši.

5 Zaključek

V raziskovalni nalogi smo želele odkriti del veččin kritičnega mišljenja, ki so nam blizu, za katere lahko trdimo, da jih obvladamo, in katere veččine bi še morali razvijati. To se nam je vsekakor zdela pozitivna stran naše raziskovalne naloge. Najprej smo spoznavale, kaj je kritično mišljenje. Spoznale smo osnovne lastnosti Pascalovega in Leibnizevega trikotnika. Ukvarjale smo se s sestavljanjem matematičnega preverjanja znanja, ga popravljale in analizirale rezultate. Tudi to delo nam je bilo všeč.

Pri delu smo naleteli na kar nekaj ovir. Nekatere so bile povezane z vsebino (kdo ima najbolj prav, kaj je to kritično mišljenje ...), nekatere pa s samim sestavljanjem naloge (nismo vedele, da je potrebno toliko korakov, če želiš napisati na računalnik en sam ulomek ...). S skupnimi močmi smo ovire uspele premagati.

Če bi raziskovalno ponovile, bi mogoče spremenile način preverjanja znanja. Vsi bi ga pisali v šoli, in sicer točno določeno uro, vendar zaradi pouka to tokrat ni bilo mogoče, saj bi s tem motile učni proces.

Nadaljevanje te raziskovalne bi bilo mogoče, če bi učitelji vključevali v svoje poučevanje več veččin, ki so se izkazale za problematične (oblikovanje kriterijev, preverjanje rezultatov) in bi vzele za kontrolno skupino iste učence s podobnimi nalogami. Bistvo bi bilo, da se izmeri napredek oz. naredi primerjavo med rezultati.

6 VIRI IN LITERATURA

Tanja Rupnik Vec in Alenka Kompare. Kritično mišljenje v šoli: strategije poučevanja kritičnega mišljenja. 1. izd., 1. natis. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo, 2006

https://www.zrss.si/pdf/Kriticno_misljenje_prirocnik.pdf, dostop 30. 1. 2024

<https://www.monash.edu/student-academic-success/enhance-your-thinking/critical-thinking/what-is-critical-thinking>, dostop 15. 2. 2024

<https://chat.openai.com/?model=text-davinci-002-render-sha>, dostop 23. 12. 2023

https://sl.wikipedia.org/wiki/Trikotni%C5%A1ko_%C5%A1tevilico, dostop 3. 1. 2024

https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle, dostop 24. 1. 2024

<https://th.bing.com/th/id/OIP.Key3KbKdvbl8PTbTSCfIKwAAAA?rs=1&pid=ImgDetMain>, dostop 3. 1. 2024

http://pefprints.pef.uni-lj.si/2747/1/DD_kon%C4%8Dno.pdf, dostop 30. 1. 2024

https://zpm-mb.si/wp-content/uploads/2015/03/O%C5%A0_Matematika_Skrivnosti_Pascalovega_trikotnika.pdf, dostop 23. 12. 2023

<https://www.mathsisfun.com/pascals-triangle.html>, dostop 4. 12. 2023

https://sl.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz, dostop 30. 1. 2024

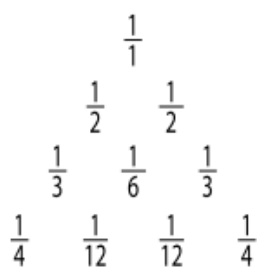
https://skupnost.sio.si/pluginfile.php/620230/mod_resource/content/1/14_Scientix%20Na-Ma_Final_PREISKOVANJE%20V%20LEIBNITZEVEM%20TRIKOTNIKU.pdf, dostop 4. 12. 2023

https://www.zrss.si/kupm2016/wp-content/uploads/od-pascalovega-do-leibnizovega-trikotnika-kupm_2016_predstavitev.pdf, dostop 23. 12. 2023

(https://skupnost.sio.si/pluginfile.php/620230/mod_resource/content/1/14_Scientix%20Na-Ma_Final_PREISKOVANJE%20V%20LEIBNITZEVEM%20TRIKOTNIKU.pdf), dostop 30. 1. 2024

Obkroži, kateri razred obiskuješ. 7. 8. 9.

Narisana slika je Leibnizev trikotnik. Vse naloge se nanašajo na značilnosti tega trikotnika.



LEIBNIZEV TRIKOTNIK oz. njegov del

Naloga 1

Ugotovi, kateri ulomek je na začetku 5. vrstice in kateri na koncu 5. vrstice.

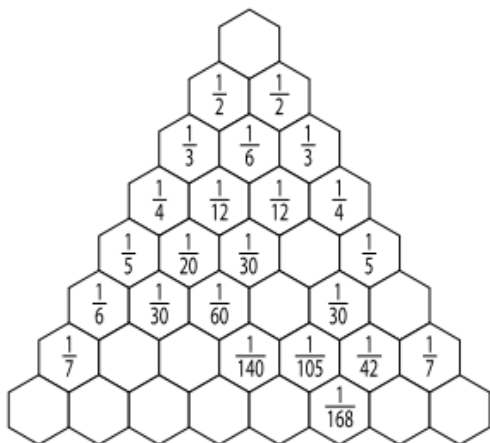
Na začetku 5. vrstice je _____, na koncu pa _____.

Naloga 2

Po katerem kriteriju si razvrstil ti dve števili. Zapiši ga.

Naloga 3

Imaš Leibnizev trikotnik, ki mu manjka kar nekaj števil. Uspeš ugotoviti, po kakšnem pravilu so razvrščeni ulomki, ki niso ob levem ali desnem robu trikotnika? Zapiši to pravilo.



Pravilo:

Naloga 4 (brez računanja), naloga 5 (z računanjem)

S pomočjo pravila, ki si ga ugotovil, dopolni čim več manjkajočih števil.

Prostor za račune.

Naloga 6

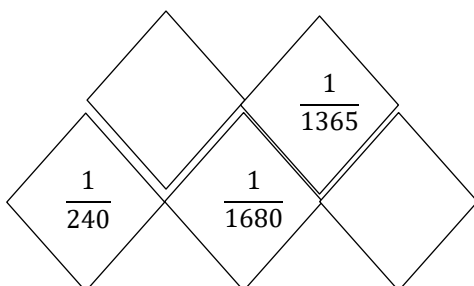
Kaj meniš, lahko izpolniš do 7. vrstice ta trikotnik (iz 3. naloge) brez računanja? Kako bi utemeljil svojo odločitev?

Naloga 7

Leibnizev trikotnik se tvori po pravilu: posamezno število v notranjosti Leibnizevega trikotnika je dobljeno kot vsota obeh števil pod njim.

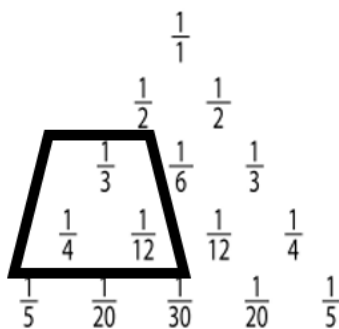
Po pravilu izpolni posamezni izsek Leibnizevega trikotnika.

Prostor za račune.



Naloga 8, 9, 10

Opazuj ulomke, ki so označeni s trapezom.



Kakšna zveza je med označenimi števili? Ne upoštevaj pravila iz naloge 7, odkrij novega.

Kako bi posplošil pravilo, ki si ga odkril?

Pravilo:

Preveri pravilnost svojega razmišljanja.

Prostor za račune:

In še vprašalnik za samorefleksijo.

Samorefleksija (razmišljanje o lastnem mišljenju, poznavanju sebe ...)

Obkroži številko, ki zate najbolj drži, pri čemer velja:

1 – nikoli 2 – včasih 3 – vedno

Oceni, v kolikšni meri je bilo v reševanju nalog v Leibnizevem trikotniku zate značilno naslednje:

Izogibal sem se prehitri sodbi . 1 2 3

Še vedno bi zastopal svoje stališče, četudi je v rešitvah prikazano drugače.

1 2 3

Problem sem reševal oz. obravnaval z vseh možnih vidikov, ki sem jih našel.

1 2 3

Vsak problem sem temeljito raziskal, temu sem posvetil svoj čas in napor.

1 2 3