

PARADOKSI IN ZMOTE

Področje: matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: Jure Čampa, dijak drugega letnika

Mentorica: mag. Andreja Kramar, profesorica matematike

Somentorica: Nastja Lasič, profesorica informatike

Šolsko leto 2022-23

Gimnazija Šentvid

Prušnikova 98, Ljubljana Šentvid

KAZALO VSEBINE

IZVLEČEK IN KLJUČNE BESEDE	5
1. UVOD	6
2. TEORETIČEN DEL	8
2.1. NEKAJ O PARADOKSIH SKOZI ZGODOVINO	8
2.2 O RAČUNANJU VERJETNOSTI.....	11
3. EMPIRIČNI DEL	14
3.1 ROJSTNODNEVNI PARADOKS	14
3.2 ROJSTNODNEVNI PARADOKS V PRAKSI	18
3.3 PARADOKS MONTY HALL.....	24
3.4. POSPLOŠITEV PARADOKSA – VEČ VRAT	28
3.5 PARADOKS MONTY HALL V PRAKSI	30
3.6 MONTY HALLOV PARADOKS - ANKETA.....	33
4. RAZPRAVA IN ZAKLJUČNE UGOTOVITVE.....	36
5. ZAHVALA.....	37
6. LITERATURA IN VIRI	38

KAZALO SLIK, TABEL IN GRAFOV

Slika 1: Igralna kocka	12
Slika 2: Met kovanca.....	12
Slika 3: Kombinatorično drevo za ponazoritev računanja.....	13
Slika 4: Kombinatorično drevo, ki prikazuje verjetnost rojstnega dneva na isti mesec	14
Slika 5: Kombinatorično drevo, ki prikazuje verjetnost rojstnega dneva na isti dan.....	15
Slika 6: Prikaz ankete Datum rojstva	19
Slika 7: Prikaz zajemanja po štiri	21
Slika 8: Rokjstnodnevni paradoks v Pythonu	22
Slika 9: Rezultati programa Rojstnodnevni paradoks	23
Slika 10: Tekmovalec postavljen pred odločitev ali zamenja ali ne	24
Slika 11: Kombinatorično drevo za Monty Hallov paradoks	27
Slika 12: Kombinatorično drevo za primer s štirimi vrati	28
Slika 13: Kombinatorično drevo za primer s štirimi vrati in dvema menjavama	29
Slika 14: Pythonov program za Monty Hallov paradoks	30
Slika 15: Rezultati programa Monty Hallov paradoks, ko v prvi polovici primerov zamenjamo in v drugi ne.....	31
Slika 16: Sprememba programa da računalnik vedno zamenja vrata.....	31
Slika 17: Rezultati, ko računalnik vedno zamenja vrata	31
Slika 18: Anketa Monty Hallov paradoks.....	33

Tabela 1: Prikazuje naraščanje verjetnosti ujemanja rojstnih dni z večanjem števila ljudi.....	16
Tabela 2: Primerjava rojstnih dni gimnazijcev enega razreda	18
Tabela 3: Prikaz ujemanja rojstnih dni po oddelkih	18
Tabela 4: Verjetnost rojstnega dneva v povprečnem razredu	19
Tabela 5: Rezultati odgovorov na drugo vprašanje ankete	20
Tabela 6: Nekaj začetnih odzivov na anketo	21
Tabela 7: Primerjava teoretične verjetnosti z eksperimentalno verjetnostjo ujemanja rojstnih dni.....	23
Tabela 8: Vsi možni izidi Monty hallovega paradoksa	25
Tabela 9: Razmerje zmag z dvema, eno in brez menjave	29
Tabela 10: Prikaz eksperimenta v Excelu	30
Tabela 11: Rezultati programa zbrani skupaj	32
Tabela 12: Odgovori na prvo vprašanje v anketi Monty Hallov paradoks	34
Tabela 13: Odgovori na drugo vprašanje v anketi Monty hallov paradoks	35
 Graf 1: Rojstnodnevni paradoks.....	17
Graf 2: Tortni prikaz odgovorov na drugo vprašanje	20
Graf 3: Prikaz števila zmag v tisoč ponovitvah	32
Graf 4: Prikaz ustalitve empirične verjetnosti s teoretično	32
Graf 5: Tortni prikaz odgovorov na drugo vprašanje v anketi Monty Hallov paradoks.....	35

IZVLEČEK IN KLJUČNE BESEDE

KLJUČNE BESEDE: paradoks, rojstnodnevni paradoks, paradoks Monty Hall, dogodki in verjetnost dogodkov.

POVZETEK NALOGE:

V uvodnem delu raziskovalne naloge se posvetimo paradoksom nasploh, njihovi klasifikaciji in kratkemu zgodovinskemu pregledu. Nato zapišemo osnovna znanja o verjetnosti, ki so primerna za gimnazijce nižjih letnikov. Sledi predstavitev Rojstnodnevnega paradoksa in kviza 'Koza ali avto'. V obeh primerih smo izvedli anketo, eksperiment ali simulacijo v programskem jeziku Python in rezultate primerjali s teoretičnimi vrednostmi. Na preprost način smo pojasnili, zakaj se pričakovanja ljudi ne ujemajo z izračuni in so zato predstavljene situacije protislovne. Uporabljene metode pri eksperimentalnem delu: anketiranje, simulacija, obdelava pridobljenih podatkov, računanje verjetnosti, primerjanje in povzemanje.

KEY WORDS: paradox, birthday paradox, Monty Hall paradox, events and probability of events.

TASK SUMMARY:

In the introductory part of the research paper, we focus on paradoxes in general, their classification and a brief historical overview. Next, we write down basic knowledge about probability, which is suitable for junior high school students. This is followed by the presentation of the Birthday Paradox and the 'Goat or Car' quiz. In both cases, we conducted a survey, experiment or simulation in the Python programming language and compared the results with theoretical values. We explained in a simple way why people's expectations do not match the calculations and therefore the presented situations are contradictory. Methods used in experimental work: surveying, simulation, processing of obtained data, calculation of probabilities, comparison and summary.

1. UVOD

Med tem, ko smo s sošolci vplačevali srečne številke v trafiki pri eni izmed znanih iger na srečo, sem premišljeval ali je možno dobitno kombinacijo izračunati. Prepričan sem, da je, kar nekaj ljudi že pomislilo na kaj takega. Kljub vsemu sem ob prihodu domov, prižgal svoj računalnik in pogumno začel iskati rešitev. Bil je vroč poletni dan in v moji razgreti sobi sem po nekaj urah branja in brskanja po spletu ugotovil, da obstaja na to temo veliko napisanega, kot tudi ugibanj. Ugotovil sem, da je množica ljudi, ki išče podoben odgovor precej večja kot sem predvideval. Zdaj ob koncu naloge lahko rečem, da je bil to moj prvi paradoks saj je presenetljiva ugotovitev nasprotovala moji intuiciji. Ogledal sem si nekaj znanih filmov na to temo in ugotovil, da je stvar veliko večja in vse bolj zanimiva. Vsakokrat sem naletel na podobne teme, različni paradoksi, neznanke, različne verjetnosti in mnogo drugih. Vsem pa je bila skupna matematika in dobra mera filozofije. Moje prvo odkritje na to temo med videoposnetki na spletu je bila znana igra na srečo iz prejšnjega stoletja, ki se je imenovala Koza ali avto. Tukaj se mi je zdelo, da bi veliko lažje matematično rešili ta problem, kot pri srečki v trafiki, ki sem jo vplačal s prijatelji. Tako sem pričel z raziskovanjem, kaj se pravzaprav dogaja. Ko sem prišel do Monty Hallovega paradoksa sem dobil dodatno motivacijo. Navdušen sem želel sestrama razložiti kaj je paradoks in kako deluje. A sem hitro ugotovil, da različno dojemamo, kaj so paradoksi in kako jih rešujemo. Po več poskusih razlage in brez napredka razložiti paradoks, me je zanimalo, zakaj jima tega ne morem razložiti razumljivo. Zanimalo me je tudi, če bi ga lahko razumljivo razložil komu drugemu.

Zanimivo je videti različno razmišljanje in dojetje omenjenega problema, ki se razlikuje tako od posameznika do posameznika, kot tudi medgeneracijsko.

Naloga je za bralca preprosto napisana in s tem omogoča enostavnejše razumevanje. Kljub temu pa smo v nalogo vložili veliko truda in časa. S teorijo in znanimi dognanji matematikov in filozofov smo nalogo teoretično podprli. V raziskovalnem delu naloge poizkušamo odgovoriti na več vprašanj in dilem, ki se pojavljajo v povezavi s paradoksi. Predvsem pa želimo na razumljiv način predstaviti sam problem.

Naloga tako vsebuje na začetku nekaj obstoječih znanj ter splošnih dejstev o računanju verjetnosti, ter kratko predstavlja najpomembnejša imena s tega področja.

Empirični del naloge vsebuje naše eksperimente s katerimi smo preverjali teorijo paradoksov z realnim življenjem. Naloga tako predstavlja njihovo dojetje v družbi, hkrati pa opozarja na napačna mnenja, ki se ob tem pojavljajo, ponuja tudi rešitve Monty Hallovega in Rojstnodnevnem paradoksa. V njem vzpodbuditi zanimanje in ga morda celo pripraviti, da uporabi pridobljeno znanje.

V raziskovalni nalogi smo si zadali štiri hipoteze:

H1: V mnogih primerih je lažje izračunati verjetnost nasprotnega dogodka kot željenega.

H2: V realnem življenju je verjetnost ujemanja rojstnih dni precej manjša kakor v teoriji rojstnodnevnega paradoksa.

H3: Po prvem razkritju vrat se večini ljudi v Monty Hallovem paradoksu zdi, da so možnosti za zmago 1 : 1.

H4: Več kot oseba ve o dogodku, večje so možnosti za pravo odločitev.

2. TEORETIČEN DEL

2.1. NEKAJ O PARADOKSIH SKOZI ZGODOVINO

Beseda paradoks, je sestavljena iz para, kar pomeni proti, in doksa, kar pomeni vera, mnenje pričakovanje, misel. V dobesednem prevodu bi to pomenilo proti misel, proti mnenju oziroma pričakovanju. Lahko je tudi situacija, postavitev, ki nasprotuje intuiciji in izkušnjam iz življenja. Uporabljata se tudi besedi kontradikcija in antinomija, kar je logična nezdržljivost dveh ali več trditev. Ker se bomo v raziskovalni nalogi ukvarjali tudi z zmotnim, napačnim utemeljevanjem, najprej v Slovarju slovenskega knjižnega jezika poiščimo opise.

»Paradoks je misel, trditev, ki se ne sklada s splošnimi načeli.« Vir: Slovar slovenskega knjižnega jezika, www.fran.si, dostop 5. 2. 2023

*»paradóks -a m (ô) misel, trditev, ki temelji na neskladju s splošno veljavnim, priznanim: ni mogel razumeti paradoksa, da je človeku prekratek čas lahko tudi predolg; značilen dialektični paradoks; paradoks o združitvi nezdržljivega; najti razlago za paradoks
fiz. hidrostatični paradoks dejstvo, da tlak na steno posode ni odvisen od oblike posode, marveč od gostote tekočine in globine; lit. paradoks besedna figura, ki temelji na neskladju s splošno veljavnim, priznanim
// ekspr. nasprotje, protislovje, navadno nesmiselno: zaiti v paradoks; gre samo za navidezen paradoks; znašel se je v nerešljivem paradoksu; to zveni kot paradoks«*

»Zmota je prepričanje oziroma nekaj kar temelji na prepričanju, ki ni v skladu s stvarnostjo.« Vir: Slovar slovenskega knjižnega jezika, www.fran.si, dostop 5. 2. 2023.

»zmóta -e ž (ô)

1. prepričanje, ki ni v skladu s stvarnostjo: odpovedati se zmoti; junakova zmota o samem sebi / spraviti, zavesti koga v zmoto; biti, ravnati, živeti v zmoti; pustiti koga v zmoti

2. kar temelji na prepričanju, ki ni v skladu s stvarnostjo: to je bila zmota; popraviti, spoznati svojo zmoto; razširjati zmote; huda, neodpustljiva, velika zmota; zmota in resnica / človeške zmote; politična, verska, znanstvena zmota

3. glagolnik od zmotiti se: preprečiti zmoto; zmota v ugotavljanju dejstev jur. justična ali sodna zmota v ugotavljanju dejstev ali uporabi prava, zaradi katere je sodna odločba napačna; rel. trojezična zmota v 8. in 9. stoletju prepričanje, da se sme opravljati bogoslužje samo v hebrejskem, grškem ali latinskem jeziku«

V nadaljevanju se bomo posvetili pomembnejšim osebam, ki so osnovalе teorije paradoksov predvsem v matematiki, vendar pa bom omenil tudi nekaj paradoksov s področja filozofije.

ARISTOTEL

Je s spisi o pravilnem sklepanju, ki jih je pripravljал med leti 384 - 322 pr.n.št postavil temelje in tako postal začetnik logike. Logika je veja matematike, ki se ukvarja z načini mišljenja, sklepanja in njegovih zakonitostih. Začetki segajo v antiko, sprva je bila filozofska vsebina, danes pa je pomemben del matematike in računalništva. V tem obdobju so se oblikovale tudi razne skupine mislecev, ki so namerno uporabljali paradokse in zmote za argumentiranje (s sofistika).

ZENON

Je kot avtor značilnih paradoksov iz obdobja antike. Prihaja iz Elije (današnja južna Italija, 490 – 425 pr.n.št.), njegova dela se ukvarjajo z gibanjem in deljenjem končne količine na neskončno mnogo delov. Poskušal je prikazati, da nas čutila pri opazovanju varajo in da lahko le z umom ugotovimo resnico. Zenon je napisal knjigo o paradoksih o gibanju in neskončnosti, njegovo delo ni ohranjeno, vendar pa o njem pišejo številni misleci in filozofi tistega časa, med drugimi tudi Aristotel. Najbolj znani Zenonovi paradoksi so: Ahil in želva, Dihotomija, Leteča puščica, Stadion. Kaj pravi paradoks o Ahilu in želvi? Ahil da želvi prednost in jo poskuša ujeti. A preden jo ujame, se želva že premakne, tako da jo spet lovi in preden ponovno pride do nje, se želva že spet premakne in spet in spet ... torej nikoli ne pride do nje, saj mora preteči neskončno mnogo vedno krajših poti.

WILLARD VAN ORMAN QUINE

je eden najpomembnejših filozofov 20. stoletja, ki prihaja iz Združenih držav Amerike (1908-2000). Najprej je diplomiral iz matematike, kasneje pa pridobil doktorat iz filozofije. Z nazivom redni profesor je služboval na univerzi Harvard v Bostonu. Pripomogel je pri razvoju analitične filozofije. Spominjal je na filozofskega behaviorista, saj je v svoja dela uvedel značilen vidik objektivnosti, neposrednega videnja, brez čustvene vpletenosti. Zanj resničnost ni bila ena sama, uporabljal je pojme privzeta resnica, empirična resnica, analitična resnica, nujna resnica. V krogih logikov in matematikov pa je poznan po konceptualizaciji in razdelitvi paradoksov v tri skupine, glede na to, na čem temeljijo oz. zakaj sploh spadajo pod paradokse:

- *Napačen paradoks* je trditev, ki se sprva zdi povsem napačna, kakor, da nasprotuje sama sebi, a je resnična. Začeten problem se zdi povsem preprost, vendar je sama rešitev precej bolj težka, kakor se zdi na prvi pogled. Primer je Ahilov paradoks, zakaj Ahil ujame želvo.
- *Resničen paradoks* je trditev, ki se ne sklada s »kmečko« pametjo, temelji na razkolu med našo intuicijo, razumskim sklepanjem, ter matematičnimi dokazi. Rešitev problema se zdi povsem nepravilna, vendar temu ni tako. Primer je zmagovalna strategija v kvizu Monty Hall.
- *Antinomija* je pravi paradoks, protislovje med dvema različnima argumentoma, ki se zdita enako možna, vendar ne moreta biti hkrati resnična, saj sta si povsem

različna. Odgovor pa se nam prav tako ne zdi v skladu s prej postavljenimi pravili. Primer je paradoks Bertranda Russella o brivcu.

BERTRAND RUSSELL

britanski filozof in matematik se je rodil leta 1872 in doživel zavidljivo starost 97 let. Dobro poznan je v filozofskih in matematičnih krogih, kot utemeljitelj analitične filozofije, filozofije jezika in teorije o logičnem atomizmu. Nauk nekaterih starogrških filozofov, da je vse, kar je, sestavljeno iz najmanjših nedeljivih delcev, imenujemo logični atomizem. Leta 1903 sta skupaj z matematičnim filozofom Alfredom North Whiteheadom napisala prvo knjigo z naslovom Principia Mathematica ali po slovensko Matematična načela. V svojem delu je Russell prvič predstavil paradoks brivca, ki se kasneje imenuje tudi Bertrand Russellov paradoks. Paradoks pa se glasi takole: v vasi je brivec, ki brije vse, razen tistih, ki se brijejo samo. Ali tedaj brije tudi samega sebe?

Odgovor: Če bi se bril, bi bilo to v nasprotju z njegovim pravilom. Če pa se ne bi bril, bi ga moral brivec, torej on sam. Nič od tega ni prav, zato tak brivec ne obstaja.

GOTTLOB FREGE

zagovornik logicizma (smer v matematični filozofiji), si je prizadeval uvesti strogost in doslednost v logično razmišljanje matematikov (matematični zapisi in dokazi). Na podlagi logicizma je Frege v matematiko uvedel številne logične operacije »ali«, »če potem«... Večino svojega življenja je Frege posvetil snovanju teorije o tem, da je matematika zgrajena na povsem logičnih temeljih, kot je zapisal: »če nečesa nimamo, tega ne moremo dati nikomur.«

Russell in Frege si v svojem mišljenju nasprotujeta, saj se Russell sprašuje o resničnosti matematičnih izjav, medtem ko se Fregeju te zdijo povsem očitne. Na podlagi njunega nestrinjanja je Russell začel dvomiti o Fregejevih načelih. Ko je Bertrandu Russellu končno uspelo najti anomalijo v Fregejevi teoriji, mu je nemudoma napisal pismo, v katerem je Fregeja še posebej zbodlo to vprašanje: »Kaj pa množica vseh množic, ki ni članica same sebe. Ali je ta množica del same sebe?«. Vsaka množica, ki nekaj vsebuje, mora imeti vsaj en element ločen od ostalih. Pri čemer pridemo do ugotovitve, da nobena množica ne more biti del same sebe in tako tudi rešimo paradoks.

2.2 O RAČUNANJU VERJETNOSTI

Pri verjetnosti govorimo o dogodkih, ki se lahko zgodijo v neki situaciji (poskusu). Dogodki so lahko slučajni, gotovi ali pa nemogoči.

Če poskus mnogokrat ponovimo pri vedno istih pogojih in opazujemo nek slučajni dogodek A, potem lahko preštejemo, kolikokrat se je zgodil, to je frekvenca dogodka. Če frekvenco dogodka delimo s številom poskusov, potem to število imenujemo relativna frekvenca dogodka.

$$f_A = \frac{\text{frekvenca dogodka A}}{\text{število poskusov}}$$

Število f_A je vedno med 0 in 1, če je blizu enici, je dogodek A zelo verjeten. Če smo poskus izvedli res velikokrat (neskončnokrat), potem temu številu rečemo **eksperimentalna verjetnost dogodka A** in zapišemo **P(A)**.

Primer 1: Trideset dni opazujemo vreme in štejemo dneve, ko je deževalo. Če je deževalo 10-krat, potem je eksperimentalna verjetnost za dež enaka $10/30 = 1/3 = 0,33$. Ta ugotovitev ni povsem zanesljiva, saj smo vreme opazovali le 30 dni.

Verjetnost dogodka A lahko določimo tudi na drug način. Preštejemo vse možne dogodke, ki se zgodijo pri nekem poskusu, in vse ugodne dogodke in potem izračunamo razmerje med tema številoma. Tako dobimo **teoretično verjetnost dogodka A**.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Tu štejemo le **enostavne dogodke**, to so taki dogodki, ki se zgodijo na en sam način (če se zgodijo) in če so med seboj enako verjetni.

n = število vseh enostavnih dogodkov

m = število ugodnih enostavnih dogodkov za dogodek A

Primer 2: Pri metu igralne kocke se lahko zgodi marsikaj, dogodkov je veliko. Tu jih je nekaj:

A: Pade 1 pika.

D: Pade sodo pik.

B: Pade 2.

E: Pade več kot 2 piki.

C: Kocka pokaže 3.

F: Kocka pokaže 1 ali 5.

Dogodki na levi so enostavni, na desni pa **sestavljani**, bolj kompleksni, ker se lahko zgodijo na več načinov.

Relativna frekvenca nekega dogodka se zelo približa izračunani verjetnosti dogodka, če se poskus izvede kar se da mnogokrat.

$$f_A \rightarrow P(A)$$

Primer 3: Verjetnost, da pri metu kocke pade število 5 je enaka $1/6 = 0,1667$. Verjetnost lahko zapišemo tudi v odstotkih, stotinah (16,67%). Če kocko zares vržemo 100-krat in se število 5 pojavi 14-krat, je relativna frekvenca enaka 0,14 in je blizu izračunani vrednosti.



$$\frac{1}{6} = 16,67\%$$

Slika 1: Igralna kocka

V nadaljevanju bomo uporabili še tri formule za računanje verjetnosti, zadnji dve sprejmemo brez dodatne razlage.

- Vsota verjetnosti dogodka A in verjetnosti njemu nasprotnega dogodka A' je vedno 1. To velja, ker se vedno zgodi natanko en od dogodkov A oziroma A'.

$$P(A) + P(A') = 1$$

- Zato za verjetnost nasprotnega dogodka velja:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

- Verjetnost, da se hkrati zgodita dva neodvisna dogodka A in B, je enaka produktu njunih verjetnosti. Dogodka sta neodvisna, če en ne vpliva na drugega in obratno.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

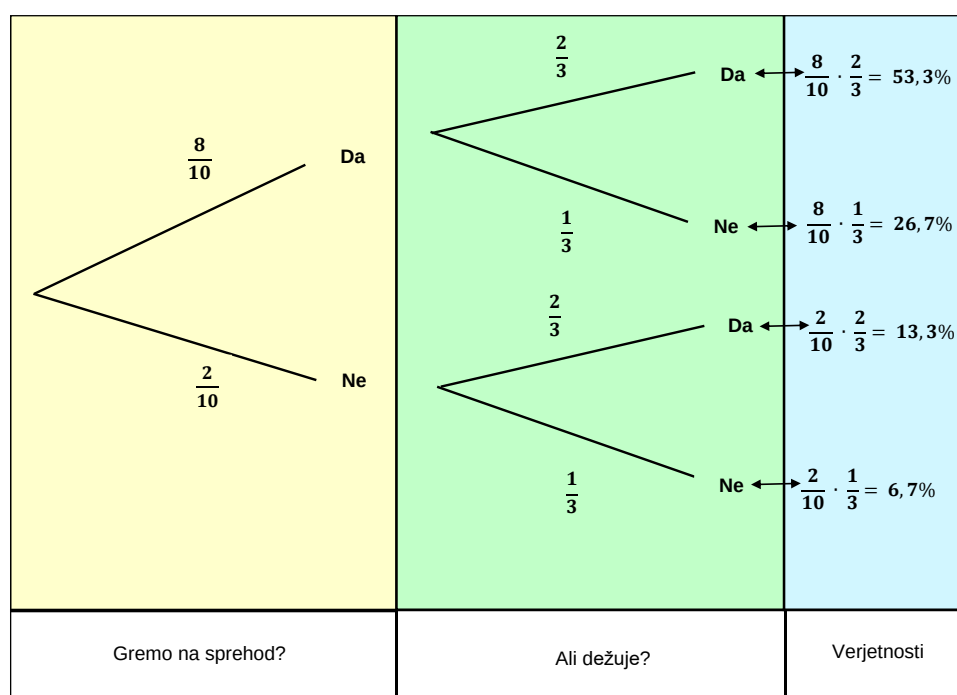
Primer 4: Če vržemo obtežen kovanec in se mož pojavi z verjetnostjo 0,6, potem se cifra pojavi z verjetnostjo $1 - 0,6 = 0,4$. Vsota verjetnosti nasprotnih dogodkov je enaka 1 ali 100 odstotkov (zagotovo se bo zgodilo eno ali drugo).



Slika 2: Met kovanca

Velikokrat možnosti nekega poskusa prikažemo grafično, tedaj narišemo **kombinatorično drevo**. Na njem prikažemo vse enostavne možnosti, zraven pa tudi verjetnosti. Kombinatorično drevo se začne na levem delu (korenina), nadaljuje pa se v vejevje, kjer vsaka veja predstavlja možen dogodek. Če nas zanima pojavnost nekega izbranega določenega dogodka, se samo sprehodimo po vejah, ki ustrezajo temu dogodku, pomnožimo vse verjetnosti vzdolž ene veje in nato seštejemo po vseh vejah, ki ustrezajo našemu dogodku. Kombinatorično drevo je zelo praktično orodje za prikaz in razumevanje težjih izračunov verjetnost.

Primer 5: Na popoldanski sprehod gremo skoraj vsak dan. Verjetnost da gremo, je 80 odstotna. Ne glede na to, so meteorologi izračunali 66,6 odstotno verjetnost, da bo jutri deževalo. Prikažimo vse možnosti in njihove verjetnosti.



Slika 3: Kombinatorično drevo za ponazoritev računanja

Verjetnost, da bomo jutri šli na sprehod v dežju, je enaka zmnožku obeh verjetnosti:

$$\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{30} = 0,533 = 53,3\%$$

Vsota verjetnosti po vejah kombinatoričnega drevesa pa je vedno enaka 1.

$$0,533 + 0,267 + 0,133 + 0,067 = 1$$

3. EMPIRIČNI DEL

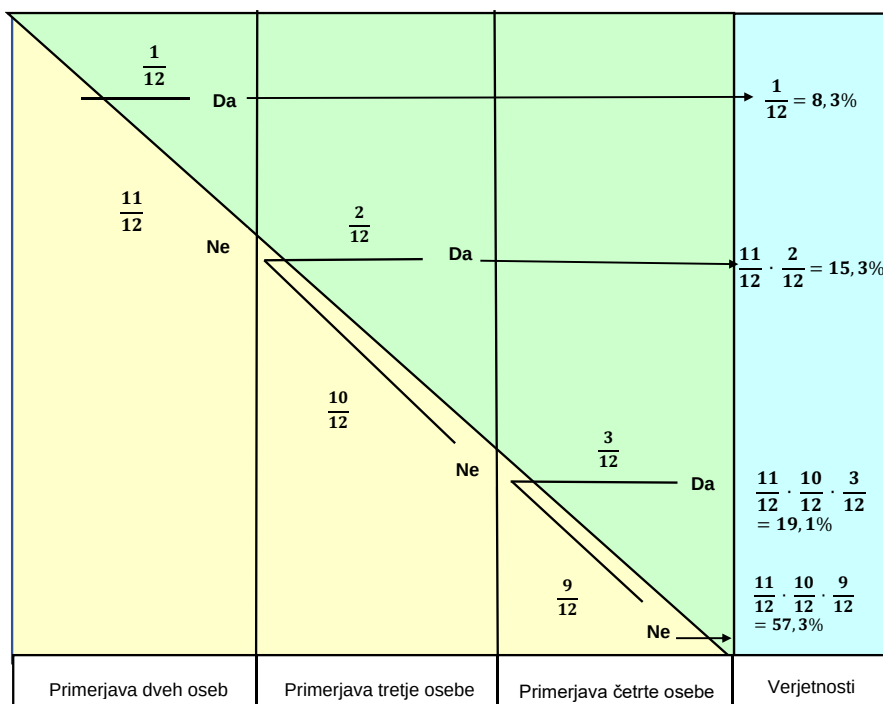
V nadaljevanju bom predstavil dve paradoksnii situaciji, to sta rojstnodnevni paradoks in paradoks Monty Hall. Pri obeh smo izvedeli empirični del in pokazali, da se empirične verjetnosti ujemajo z izračunanimi verjetnostmi in pojasnili, zakaj v obeh situacijah ljudje večinoma sklepajo napačno.

3.1 ROJSTNODNEVNI PARADOKS

Pri vkrcanju na letalo, gre vsak potnik čez kontrolno točko, kjer pregledajo potne liste in preverijo datume rojstva. Vodja letališča je z začetkom novega leta svojim zaposlenim ponudil izziv. Vprašal jih je, ali je zelo verjetno, da sta med 40-imi zaporednimi potniki, ki vstopajo na letalo, vsaj dve osebi, ki praznujeta rojstni dan na isti dan v letu. Zaposleni so pobrali stave. Zaposleni so soglasno odločili za 15 odstotkov, medtem, ko je vodja letališča stavil na veliko večje ujemanje in stavil na rezultat med 85 in 90 odstotki. Zmagovalcu je bila obljubljena nagrada; teden plačanega dopusta. Kakšen je bil razplet? Čez eno leto je vodja letališča z družino odšel na plačan dopust.

V nalogi smo si zadali izziv izračunati verjetnosti za zgornji dogodek. Zanimalo nas je, kakšna je verjetnost, da imata vsaj dve osebi v skupini 40 ljudi na isti dan v letu rojstni dan. Večini ljudi se zdi, da je ta verjetnost zelo majhna, a v resnici ni tako. Ker se pričakovanja ne ujemajo z resnico, govorimo o paradoksu.

Razmišljanje smo začeli z enostavnejšo situacijo in grafičnim prikazom. Kolikšna je verjetnost, da štiri osebe praznujejo rojstni dan v istem mesecu. Pripravili smo kombinatorično drevo. V njem primerjamo sprva dve osebi, nato še ostali dve.

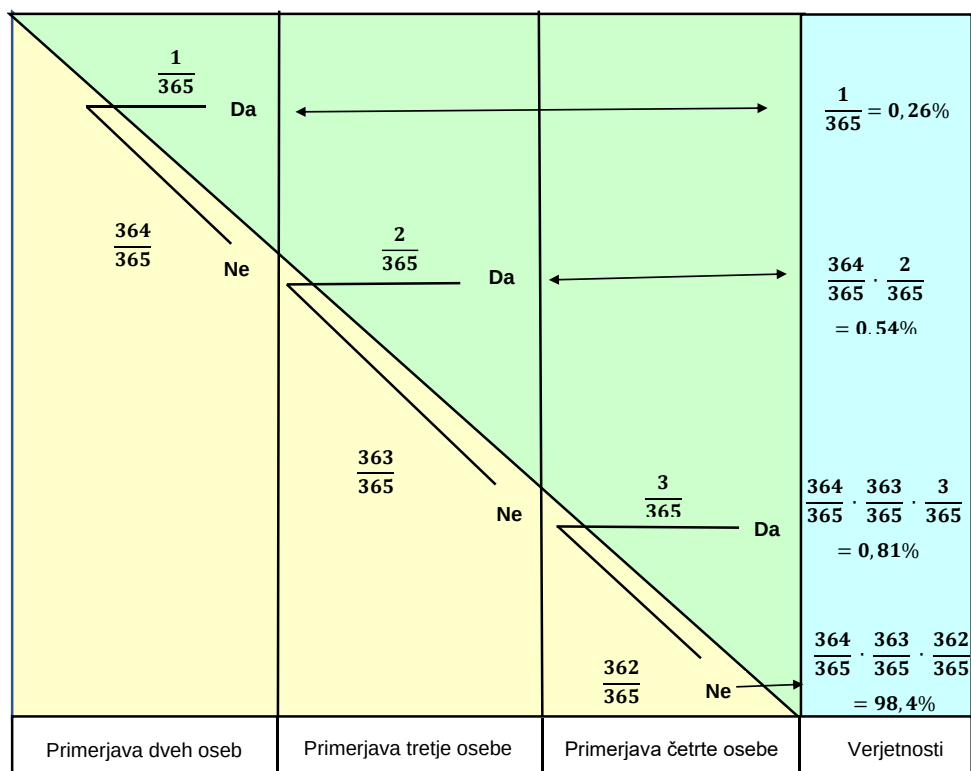


Slika 4: Kombinatorično drevo, ki prikazuje verjetnost rojstnega dneva na isti mesec

Verjetnost, da praznujejo štiri osebe rojstni dan v različnih mesecih, je enaka $0,573 = 57,3$ odstotkov. Verjetnost nasprotnega dogodka (vsaj dva praznujeta v istem mesecu) pa je potem enaka:

$$1 - \left(\frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \right) = 1 - \frac{990}{1728} = 0,427 = 42,7\%$$

Na podoben način, lahko razmislimo pri skupini štiridesetih ljudi in njihovih rojstnih datumih. Kombinatorično drevo prikazuje le primerjavo štirih oseb, naprej pa lahko sklepamo.



Slika 5: Kombinatorično drevo, ki prikazuje verjetnost rojstnega dneva na isti dan

Verjetnost, da ima štirideset oseb rojstni dan ob različnih dnevih, je enaka:

$$P(A') = \frac{365}{365} \cdot \frac{365-1}{365} \cdot \frac{365-2}{365} \dots \frac{365-39}{365} = 0,1088 = 10,9\%$$

Verjetnost nasprotnega dogodka pa je enaka:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0,1088 = 0,8912 = 89,1\%$$

Torej je imel vodja letališča v zgodbi iz začetka še kako prav, da je verjetnost ujemanja zelo velika.

Zgornje račune lahko zapišemo še splošno. Naj bo v skupini n ljudi, potem je verjetnost, da imajo vsi rojstne dneve ob različnih dnevih enaka:

$$P(A') = \frac{365}{365} \cdot \frac{365-1}{365} \cdot \frac{365-2}{365} \dots \frac{365-(n-1)}{365}$$

Verjetnost, da imata vsaj dva izmed n ljudi enak datum, je potem enaka:

$$P(A) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{365-1}{365} \cdot \frac{365-2}{365} \dots \frac{365-(n-1)}{365}$$

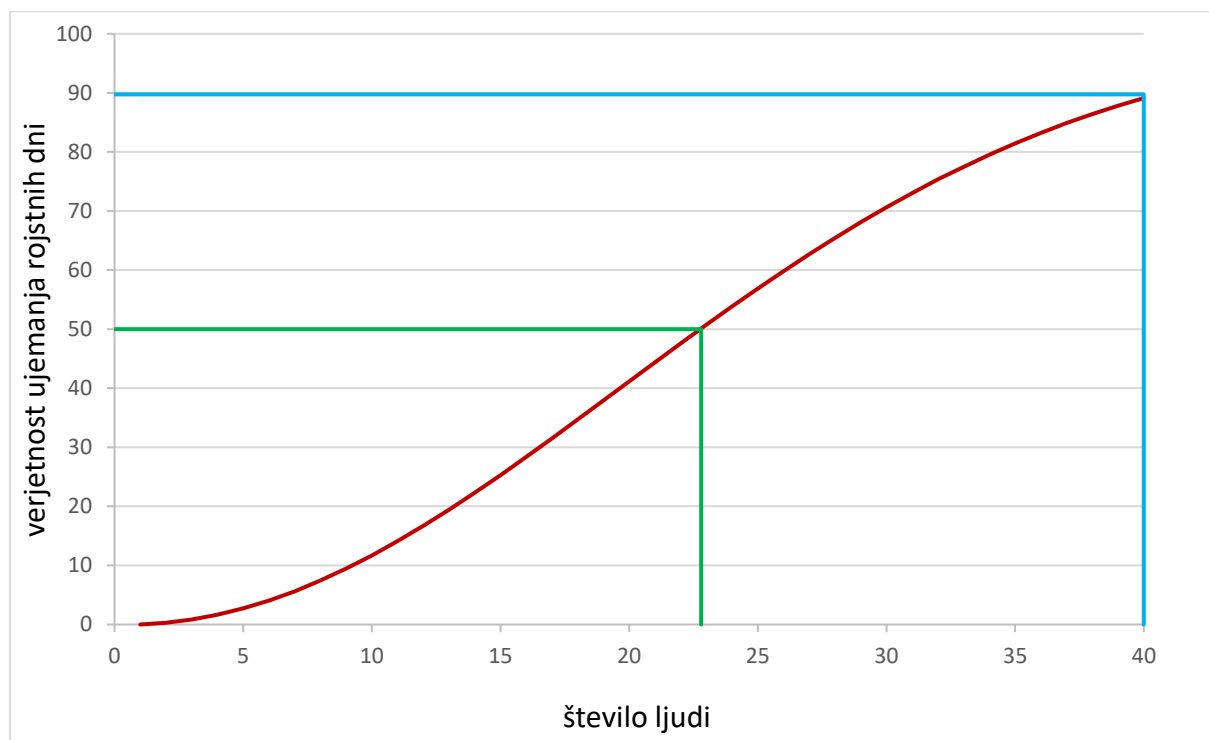
Naslednja tabela prikazuje, kako verjetnost skupnega rojstnega dneva narašča z večjim številom ljudi. Uporabili smo Excel in zgornjo formulo za izračun verjetnosti. Mislim, da se tako najbolj opazi, kako narašča verjetnost.

Tabela 1: Prikazuje naraščanje verjetnosti ujemanja rojstnih dni z večanjem števila ljudi

Število ljudi	Neujemanje rojstnih datumov	Ujemanje rojstnih datumov
1	100,00%	0,00%
2	99,73%	0,27%
3	99,18%	0,82%
4	98,36%	1,64%
5	97,29%	2,71%
6	95,95%	4,05%
7	94,38%	5,62%
8	92,57%	7,43%
9	90,54%	9,46%
10	88,31%	11,69%
11	85,89%	14,11%
12	83,30%	16,70%
13	80,56%	19,44%
14	77,69%	22,31%
15	74,71%	25,29%
16	71,64%	28,36%
17	68,50%	31,50%
18	65,31%	34,69%
19	62,09%	37,91%
20	58,86%	41,14%
21	55,63%	44,37%
22	52,43%	47,57%
23	49,27%	50,73%
24	46,17%	53,83%
25	43,13%	56,87%
26	40,18%	59,82%
27	37,31%	62,69%
28	34,55%	65,45%
29	31,90%	68,10%
30	29,37%	70,63%
31	26,95%	73,05%
32	24,67%	75,33%
33	22,50%	77,50%
34	20,47%	79,53%
35	18,56%	81,44%
36	16,78%	83,22%
37	15,13%	84,87%
38	13,59%	86,41%
39	12,18%	87,82%
40	10,88%	89,12%

Iz tabele je razvidno, da verjetnost preseže 50 odstotkov že pri 23 ljudeh in da je pri 40 enaka 89 odstotkov. Pri 57 ljudeh dosežemo 99 odstotkov, pri 366 ljudeh pa zagotovo 100 odstotkov. Narisan graf prikazuje naraščanje verjetnosti s številom ljudi.

Graf 1: Rojstnodnevni paradoks



S tem smo potrdili, da spada rojstnodnevni paradoks v skupino resničnih paradoksov po Willardu Van Orman Quinu.

V nadaljevanju sem se odločil za anketiranje in preveril ujemanje z zgornjimi vrednostmi.

3.2 ROJSTNODNEVNI PARADOKS V PRAKSI

Rojstnodnevni paradoks smo želeli preizkusiti v praksi. Odločili smo se, da pregledamo rojstne datume dijakov naše šole. Od ravnatelja šole smo pridobil bazo podatkov, ki so bili anonimni. V Excelovi tabeli smo datume rojstev dijakov razdelil po podskupinah, tako, da smo vse dijake nekega oddelka, ki praznujejo rojstni dan v januarju prestavil v svojo vrstico in enako naredil za vsak mesec v letu posebej. Dobili smo 12 vrstic. V 13. vrstici so zabeleženi rezultati ujemanja.

V tabeli 2 prikazujemo rezultate za naključno izbran razred.

Tabela 2: Primerjava rojstnih dni gimnazijcev enega razreda

Meseci	Datumi						Ujemanje po mesecih
1	13.01.2008						0
2	9.02.2007	11.02.2007	19.02.2007	23.02.2007	28.02.2007		0
3	1.03.2007	10.03.2007	23.03.2007				0
4	27.04.2007						0
5	6.05.2007	15.05.2007					0
6	5.06.2007	12.06.2007					0
7	12.07.2007	27.07.2007	27.07.2007				1
8	30.08.2007						0
9	13.09.2007	29.09.2007					0
10	10.10.2007	13.10.2006	14.10.2007	17.10.2007	24.10.2007	27.10.2007	0
11	5.11.2007	27.11.2007					0
12	15.12.2006	18.12.2007					0
Končno ujemanje: 1							

Tako smo hitro preverili, če se kak datum ujema z datumom pred njim. V primerih, ko smo v katerem koli mesecu prišli do ujemanja, smo razredu v 13. vrstico pripisali 1. Nadaljnje iskanje v tem razredu smo nato prekinili, saj smo že prišli do ujemanja.

Če v celotnem razredu ni prišlo do ujemanja, smo razredu v 13. vrstico pripisali 0.

Ob koncu preverjanja ujemanja, smo vse podatke uredili v tabelo.

Tabela 3: Prikaz ujemanja rojstnih dni po oddelkih

Oddelok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Število dijakov	30	22	22	22	30	30	28	29	24	23	27	29	28	20	18	29	30	27	24	19	22	26	23
Ujemanje	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
Povprečno število dijakov v oddelku	25																						
Število vseh ujemanj	15																						

Zgornja tabela prikazuje ujemanje rojstnih dni po oddelkih. Nato smo sešteli vsa ujemanja po oddelkih skupaj in jih delili s številom oddelkov.

Tabela 4: Verjetnost rojstnega dneva v povprečnem razredu

Število oddelkov	23
Število vseh ujemanj	15
Verjetnost, da imata vsaj dva dijaka na isti dan rojstni dan	$\frac{15}{23} = 65\%$

Ugotovili smo, da je dobljena verjetnost celo večja od teoretične verjetnosti, ki znaša pri 25 ljudeh 56,87%, verjetnost pridobljena z našim poskusom pa znaša kar 65 odstotkov. Kasneje smo ugotovili, da imamo na šoli tri pare dvojčkov, kar je povečalo verjetnost ujemanja.

Odločili smo se še za en eksperiment. Sestavili smo anketo, da bi primerjali teoretične verjetnosti še s širšim vzorcem ljudi. Anketo smo izvedeli prek spleta, anonimno in jo posredoval preko družabnih omrežij večjemu številu ljudi. Ker je bila anketa poslana splošni populaciji, smatramo, da anketiranci nimajo poglobljenega predznanja o paradoksih in verjetnostnih računih. Tako menimo, da smo dobili realne pokazatelje znanja populacije o rojstnodnevem paradoksu. Anketiranci so odgovarjali na dve vprašanji. In sicer o rojstnem dnevu in mnenju glede ujemanja rojstnih datumov pri 40 ljudeh.

Na anketo smo dobil 173 odgovorov, ki smo jih začeli zbirati 11.11.2022 in z zbiranjem zaključil 12.12.2022.

Datumi rojstva

V anketi bi rad izvedel datum vašega rojstva in vaše mnenje o verjetnosti, da imata v skupini (najdi številko skupine) dve osebi na isti dan rojstni dan. Ta anketa je **anonimna**, namen te ankete pa je pridobivanje čim več datumov rojstev in mnenj o verjetnosti skupnega rojstnega dneva.

[Prijava v Google](#), če želite shraniti napredek. [Več o tem](#)

* **Zahtevano**

Na kateri datum imate rojstni dan? (dd.mm.) *

Vaš odgovor

Kakšna je verjetnost, da imata v skupini 40 ljudi vsaj 2 osebi na isti dan v letu rojstni dan? *

☐ Neverjetno (ni mogoče, 0%)

☐ Malo verjetna (1%-30%)

☐ Srednje verjetna (31%-70%)

☐ Zelo verjetna (71%-99%)

☐ Zagotovo (100%)

Pošlji Počisti obrazec

Slika 6: Prikaz ankete Datumi rojstva

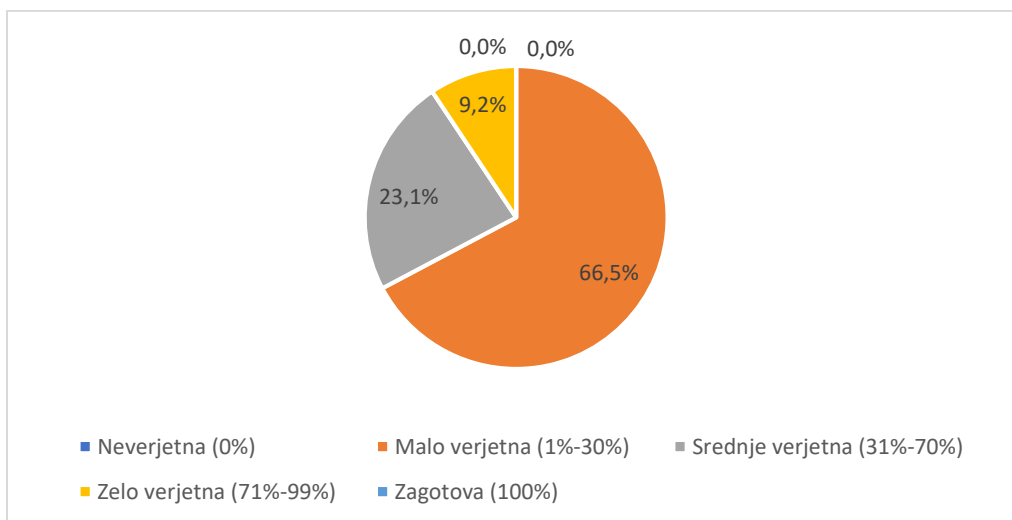
Iz pridobljenih odgovorov na prvo vprašanje smo izločili dva odgovora. Anketiranci sta namesto rojstnega datuma zapisala svojo starost.

Odgovore na drugo vprašanje smo prikazali v tabeli 5 in s tortnim diagramom na sliki 6. Presenetljivo je, da je med 173 anketiranci kar 16 pravih odgovorov. V primeru, da bi bili zaposleni na prej omenjenem letališču, bi se tako veselili plačanega dopusta. Preostali odgovori so bili v skladu s pričakovanji. Večina udeležencev je izbrala srednjo ali manjšo verjetnost ujemanja.

Tabela 5: Rezultati odgovorov na drugo vprašanje ankete

Možnosti	Število odgovorov
Neverjetna (0%)	0
Malo verjetna (1%-30%)	115
Srednje verjetna (31%-70%)	40
Zelo verjetna (71%-99%)	16
Zagotova (100%)	0

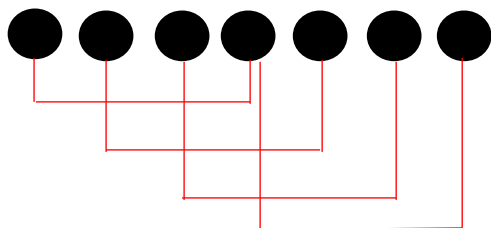
Graf 2: Tortni prikaz odgovorov na drugo vprašanje



Odgovore iz ankete smo uporabili tudi kot eksperiment.

Zastavili smo jo kot navidezni prostor, v katerega vstopi n ljudi. Ko želi vstopiti naslednja oseba, mora izstopi oseba, ki je prva vstopila v prostor. Ko želi vstopiti $(n + 2)$. oseba, mora prostor zapusti oseba, ki je vstopila druga. Tako smo nadaljevali, dokler nam ni zmanjkalo anketirancev.

Na ta način smo dobili večjo množico naključnih skupin ljudi. To nam je v nadaljevanju omogočilo izračun povprečja ujemanja v datumih za n oseb. Slika prikazuje zajemanje skupin po 4 ljudi. Število n smo spreminjali od 2 do 40.



Slika 7: Prikaz zajemanja po štiri

V naslednji tabeli so je prikazanih nekaj začetnih odzivov na anketo.

Tabela 6: Nekaj začetnih odzivov na anketo

Vstopi v prostor	Časovni žig	Na kateri datum imate rojstni dan? (dd.mm.)	Zapis rojstnega datuma	Verjetnost, da v skupini 40-ih ljudi vsaj dve osebi praznujeta na isti dan
1	19.10.2022 18:54	14.01.2020	114	Malo verjetna (1%-30%)
2	23.10.2022 20:18	11.1.	111	Malo verjetna (1%-30%)
3	23.10.2022 20:27	7.03.1997	307	Malo verjetna (1%-30%)
4	23.10.2022 20:27	16.10.	1016	Malo verjetna (1%-30%)
5	23.10.2022 20:27	14.7.	714	Malo verjetna (1%-30%)
6	23.10.2022 20:27	14.06.	614	Malo verjetna (1%-30%)
7	23.10.2022 20:37	07.02.	207	Srednje verjetna (31%-70%)
8	23.10.2022 20:44	19.10.	1019	Srednje verjetna (31%-70%)
9	23.10.2022 20:52	27.10.2023	1027	Malo verjetna (1%-30%)
10	23.10.2022 21:05	31.10.1997	1031	Malo verjetna (1%-30%)
11	23.10.2022 21:16	3.03.2000	303	Malo verjetna (1%-30%)
12	23.10.2022 21:37	16.4.	416	Srednje verjetna (31%-70%)
13	24.10.2022 15:24	25.09.	925	Srednje verjetna (31%-70%)
14	25.10.2022 13:54	12.05.2023	512	Srednje verjetna (31%-70%)
15	25.10.2022 13:54	1.10.2023	1001	Malo verjetna (1%-30%)
16	25.10.2022 13:55	11.11.2023	1111	Zelo verjetna (71%-99%)
17	25.10.2022 14:04	3.02.1992	203	Srednje verjetna (31%-70%)
18	25.10.2022 14:24	03.10.	1003	Zelo verjetna (71%-99%)
19	25.10.2022 14:28	15.08.2023	815	Srednje verjetna (31%-70%)
20	25.10.2022 14:32	30.01.2023	130	Malo verjetna (1%-30%)
21	25.10.2022 14:33	28.7.	728	Malo verjetna (1%-30%)
22	25.10.2022 14:37	16.05.2023	516	Malo verjetna (1%-30%)
23	25.10.2022 14:48	04.01.	104	Malo verjetna (1%-30%)
24	25.10.2022 14:52	18.01.1900	118	Malo verjetna (1%-30%)
25	25.10.2022 14:52	07.11.	1107	Srednje verjetna (31%-70%)
26	25.10.2022 14:53	18.05.1976	518	Zelo verjetna (71%-99%)
27	25.10.2022 14:53	18.05.1976	518	Zelo verjetna (71%-99%)
28	25.10.2022 14:54	12.11.	1112	Srednje verjetna (31%-70%)
29	25.10.2022 14:55	13.03.	313	Malo verjetna (1%-30%)
30	25.10.2022 14:56	27.10.	1027	Srednje verjetna (31%-70%)

Odločili smo se za programiranje v Python programu. Pripravili smo seznam rojstnih datumov iz četrtega stolpca v obliki mesec in dan, in jih skrajšano označili z mmdd. Na začetku smo ustvarili funkcijo, ki je iz celotnega seznama, ustvarila seznane po x elementov in jih uredila po velikosti. Ko smo ustvarili podseznane, smo seznam z x elementi dodali praznemu seznamu velikosti za toliko elementov. Nato smo dovolili funkciji, da je ustvarila še več podseznamov, vse do vključno 40-tega podseznama. Temu je sledilo sestavljanje funkcije, ki je preverjala, ali sta elementa v seznamu po x na i-tem in na (i + 1)- mestu enaka. V primeru, da sta elementa enaka, smo preverjanje tega podseznama zaključili in številu ujemanj prišteli 1. V kolikor do ujemanja i-tega in (i + 1) elementa ni prišlo, številu ujemanj ni smo prištel ničesar. Ko je program tako prešel vse podseznane po x, je števila ujemanj delil s številom podseznamov po x elementi (len(s)), ter ta podatek shranil. Enako je storil z vsemi podseznami po y (y = x+1) in tako naprej. Ko je program prišel do zadnjega podseznama, ki je vseboval 40 elementov se je njegova naloga končala.

```

1 def seznami_poX (s,x):
2     #funkcija iz seznama s tvori seznam seznamov po x elementov, ki so
3     # urejeni po velikosti
4     sez = list()
5     for i in range(len(s)-x+1):
6         k = i
7         sez1 = list()
8         for j in range(x):
9             sez1.append(s[k])
10            k +=1
11        sez1.sort()
12        sez.append(sez1)
13    return sez
14
15 def enaka(s):
16     # funkcija prešteje koliko podseznamov ima znotraj seznama vsaj 2 enaki vrednosti in
17     # izračuna število enakih/vsi seznami
18     st_ujemanj =0
19     for i in range(len(s)):
20         sez = s[i]
21         for j in range(len(sez)-1):
22             if sez[j] == sez[j+1]:
23                 st_ujemanj +=1
24                 break
25     return round(st_ujemanj/len(s),2)
26
27 ime=input("Vstavi ime datoteke")
28 dat=open(ime,"r")
29 Rd=dat.readlines()
30 dat.close()
31 Rd=Rd[1:]
32 for l in range(len(Rd)):
33     Rd[l]=int(Rd[l])
34 print(Rd)
35 print(seznami_poX(Rd,5))
36 verjetnosti = list()
37 for l in range(2,41):
38     a=seznami_poX(Rd,l)
39     b=enaka(a)
40     verjetnosti.append(b)
41 print(verjetnosti)

```

Slika 8: Rokjstnodnevni paradoks v Pythonu

Ko program zaključi primerjave in račune, izpiše seznam povprečnih ujemanj elementov po skupinah od 2 do vključno 40. Prvi element v izpisu predstavlja verjetnost ujemanja v skupini dveh oseb. Tako 22. element predstavlja verjetnost ujemanja v skupini 23 oseb in 39. element v izpisu predstavlja verjetnost ujemanja v skupini 40 oseb. Zaradi preglednosti, so rezultati zapisani še v tabeli, dodane so tudi teoretične verjetnosti.

```

main
for i in range(241)

"C:\Users\Jures PC\PycharmProjects\mh\venv\Scripts\python.exe" "C:/Users/Jures PC/PycharmProjects/mh/main.py"
[0.01, 0.01, 0.02, 0.04, 0.07, 0.09, 0.12, 0.15, 0.18, 0.22, 0.26, 0.3, 0.34, 0.38, 0.42, 0.48, 0.53, 0.57, 0.62, 0.66, 0.7, 0.74, 0.78, 0.81, 0.84, 0.86, 0.88, 0.9, 0.91,
0.92, 0.92, 0.93, 0.94, 0.94, 0.95, 0.96, 0.96, 0.97, 0.98]

Process finished with exit code 0
    
```

Slika 9: Rezultati programa Rojstnodnevni paradoks

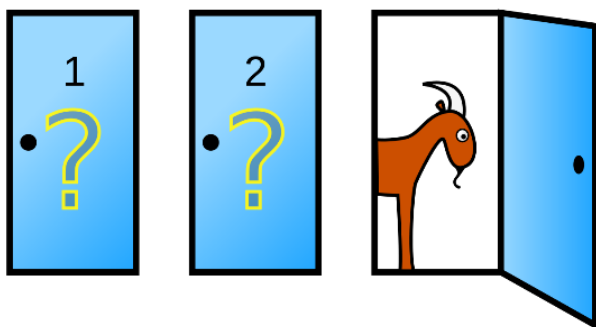
Tabela 7: Primerjava teoretične verjetnosti z eksperimentalno verjetnostjo ujemanja rojstnih dni

Število ljudi	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Verjetnost ujemanja	1%	1%	2%	4%	7%	9%	12%	15%	18%
Teoretična verjetnost ujemanja	0,27%	0,82%	1,64%	2,71%	4,05%	5,62%	7,43%	9,46%	11,69%
Število ljudi	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Verjetnost ujemanja	22%	26%	30%	34%	38%	42%	48%	53%	57%
Teoretična verjetnost ujemanja	14,11%	16,70%	19,44%	22,31%	25,29%	28,36%	31,50%	34,69%	37,91%
Število ljudi	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Verjetnost ujemanja	62%	66%	70%	74%	78%	81%	84%	86%	88%
Teoretična verjetnost ujemanja	41,14%	44,37%	47,57%	50,73%	53,83%	56,87%	59,82%	62,69%	65,45%
Število ljudi	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Verjetnost ujemanja	90%	91%	92%	92%	93%	94%	94%	95%	96%
Teoretična verjetnost ujemanja	68,10%	70,63%	73,05%	75,33%	77,50%	79,53%	81,44%	83,22%	84,87%
Število ljudi	38	39	40						
Verjetnost ujemanja	96%	97%	98%						
Teoretična verjetnost ujemanja	86,41%	87,82%	89,12%						

Verjetnosti iz simulacije so večje kot iz teorije, v povprečju so večje za 13 odstotkov. Torej je verjetnost ujemanja rojstnih datumov v praksi večja od pričakovane, kar je v nasprotju s pričakovanjem ljudi.

3.3 PARADOKS MONTY HALL

Leta 1963 je bil na televiziji zelo priljubljen kviz, ki so ga poimenovali Koza ali avto, glavna nagrada je bil seveda avto. Voditelj Monty Hall je izbral igralca kviza in mu ponudil, naj izbere ena od treh vrat. Za enimi vrati se skriva avto, za preostalimi pa kozi, torej je verjetnost dobitka $1/3$. Igralec si izbere vrata, vendar jih še ne odpre. Monty Hall nato odpre ena izmed preostalih vrat, za katerimi ni avta. Sedaj ima igralec pred seboj dveje zaprtih vrat in ena odprta.



Slika 10: Tekmovalec postavljen pred odločitev ali zamenja ali ne

Zagotovo je, da je avto za enimi izmed od dveh zaprtih vrat. Za katerimi pa še vedno ostaja uganka. Tukaj pa v igro vstopi voditelj in igralcu ponudi možnost, da zamenja vrata ali pa ostane pri prvotni izbiri. Večina igralcev kviza, kot tudi gledalcev pred malimi ekrani, je bila mnenja, da so možnosti za dobitok sedaj 50% in so se celo povečale glede na začetek, ko je bila verjetnost dobitka 33%. Tako se jim zamenjava vrat ne zdi smiselna. A izkaže se, da je zamenjava vrat ključnega pomena in pripomore k dobitku.

Prva je paradoks uspešno pojasnila Marilyn Mach vos Savant, ki je imela kolumno Ask Marilyn v reviji Parade magazin, kjer je odgovarjala na pisma bralcev. Bila je izjemno inteligentna (najvišji IQ, Guinnessov rekord). Bralcu je v odgovoru pojasnila, kako se verjetnost dobitka spremeni, če igralec kviza zamenja vrata, ki jih je sprva izbral.

Z odgovorom je razburila številne ugledne učenjake, profesorje in doktorje matematike. Ti so bili mnenja, da se moti. Številni priznani matematiki so ji pisali zaničevalna in grozilna pisma. Sprožil se je plaz nesramnih komentarjev. Spodaj je nekaj prevodov, ki smo jih našli na spletu.

Močno si zavozila. Ker imaš težave z osnovnimi načeli, ti bom razložil. Ko voditelj odpre vrata, imamo 50 odstotno možnost, da imamo prav. Četudi spremenimo izbiro, se možnosti ne spremenijo (ostanejo 50 odstotkov). V Ameriki je že dovolj matematične nepismenosti in ne želimo, da bi oseba z največjim IQ-jem to potrjevala. Sram te bodi! (dr. Scot Smith, Univerza na Floridi)

Bi lahko predlagal, da si pridobite osnovno znanje o verjetnosti preden poizkušate rešiti take vrste problem." (dr. Charles Reid, Univerza na Floridi)

'Prepričan sem, da vam bo pisalo veliko dijakov in študentov na to temo, mogoče lahko obdržite naslove in njihovo znanje uporabite v naslednji kolumni. (dr. W. Robert Smith, Državna univerza Georgia)

Popolnoma se motiš glede tega problema in upam, da bo ta polemika dobila kaj pozornosti javnosti o resni krizi v matematičnem poučevanju. Če priznaš, da se motiš, bi konstruktivno pomagala rešiti ta problem. Koliko jeznih matematičarjev je potrebno, da se boš premislila. (dr. E. Ray Bobo, Univerza Georgetown)

Naredila si napako, ampak poglej iz pozitivne strani, če bi se vsi ti doktorji matematike motili, bi bila država v resni krizi. (dr. Everett Harman, U.S. Vojaški raziskovalni inštitut)

Ti si koza! (Glenn Calkins, Državna fakulteta Western)

Mogoče ženske gledajo matematične probleme drugače kot moški. (Don Edwards Sunriver, Oregon)

Prav neverjetno je prebirati zapise bralcev z nasprotnimi mnenji. Bili so žaljivi in nesramni in dopisovanju med njimi ni bilo konca.

Premislimo kaj se zgodi, če vrata zamenjamo. Predpostavljamo, da izberemo vrata številka 1. Možnosti za dobiček so enake $1/3$, za izgubo pa $2/3$. Če odpremo vrata številka 2, vidimo, da je za njimi skrita koza. Sledi vprašanje, ali želimo vrata zamenjati. Z odprtjem vrat številka 2 in informacijo, da se za njimi skriva koza, se tehtnica prevesi na stran tekmovalca. Tako se je del možnosti iz vrat številka 2 prištel k vratom številka 3. Če se odločimo, da bomo zamenjali vrata, bo možnost zmage $2/3$ in bomo domov morda pripeljali nov avto.

V spodnji tabeli so zapisane vse možnosti, v zadnji vrstici pa je izračunana verjetnost za dobiček. Izračunali smo jo kot razmerje med ugodnimi možnostmi in vsemi možnostmi.

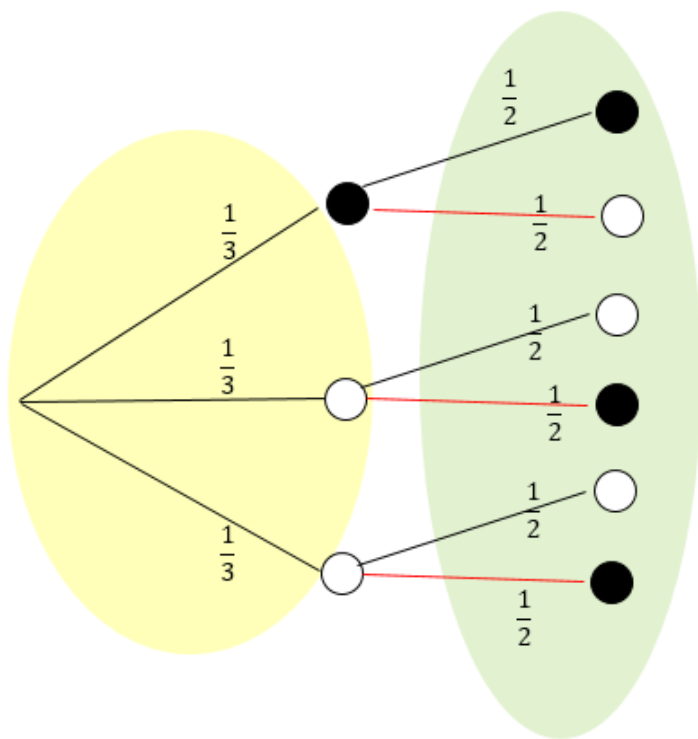
Tabela 8: Vsi možni izidi Monty hallovega paradoksa

Izberemo	Zmagovalna vrata	Ostanemo	Zamenjamo
1	1	Avto	Koza
1	2	Koza	Avto
1	3	Koza	Avto
2	1	Koza	Avto
2	2	Avto	Koza
2	3	Koza	Avto
3	1	Koza	Avto
3	2	Koza	Avto
3	3	Avto	Koza
		33,33%	66,67%

Tu nas čaka presenečenje; če zamenjamo prvotno izbiro vrat, se možnost dobitka kar podvoji. Zakaj torej večina ljudi misli, da menjava vrat ne poveča možnosti za dobiček?

Najbrž zato, ker se nam zdijo stvari nepovezane in dogodki neodvisni med seboj. Vseeno, je katera vrata izberemo, saj je to igra na srečo. V Monty Hallovemu paradoksu, vrata, ki jih odpre Monty niso naključno izbrana, saj on ve za katerimi vrati se skrivata kozi in za katerimi avto. Prav tako pa se spreminjajo naše možnosti, da izberemo zmagovalna vrata. S tem, ko nam je Monty pokazal za katerimi vrati ni avta, lahko tekmovalec ta podatek izkoristi v svoj prid, kar imenujemo pogojna verjetnost. Ne glede na to katera vrata izberemo, se nam zdi verjetnost za zmago vedno enaka, vendar pa se verjetnost pojava nekega dogodka spremeni, če sta odvisna drug od drugega. Igra je dvignila ogromno prahu in slabe volje, saj se na prvi pogled zdi rešitev povsem v nasprotju z našo zdravo pametjo in sklepanjem. Seveda se igralec počuti zelo nesrečno, če po zamenjavi vrat ne dobi avta, ki ga je sprva že imel v rokah. A tu gre za verjetnosti, ne pa za gotovost.

Možnosti prikažimo še s kombinatoričnim drevesom. V rumenem delu je prikazana začetna izbira vrat. Z črnim krogom so označena vrata z avtom. Z belim krogom smo označili vrata, za katerimi se skrivata kozji. V zelenem delu smo prikazali odločitve o zamenjavi vrat. Rdeča črta prikazuje menjavo vrat.



Slika 11: Kombinatorično drevo za Monty Hallov paradoks

Z zmnožkom verjetnosti na posameznih vejah lahko izračunamo posamezne verjetnosti izidov. Če oseba že v prvem krogu izbere zmagovalna vrata in nato ostane pri istih vratih (in se domov odpelje z novim avtom), je verjetnost približno enaka 17 odstotkom.

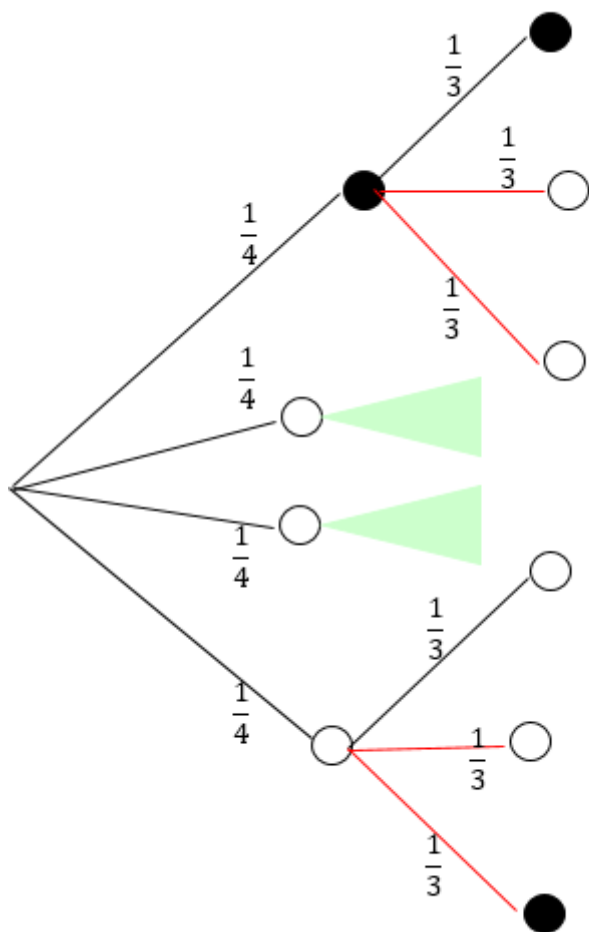
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = 0,1667 = 16,67\%$$

Verjetnosti vseh možnosti so enake, zato lahko preštejemo, kolikokrat zmagamo z menjavo vrat in kolikokrat brez menjave. Verjetnost, da po zamenjavi vrat dobimo avto, je enaka $2/3$, saj sta od treh možnosti dve ugodni. Verjetnost dobitka brez menjave pa je le $1/3$. Zato je zamenjava vrat res ugodnejša.

Razmerje med številom zmag z menjavo in zmagami brez menjave je torej 2:1.

3.4. POSPLOŠITEV PARADOKSA – VEČ VRAT

Ali kaj podobnega velja, če bi na začetku imeli 4 vrata? Predpostavimo, da bo kviz potekal na isti način kot pri treh vratih. Za lažje razumevanje smo pripravili kombinatorično drevo. Dobitek je prikazan s črnim krogcem, izguba pa z belim. Menjava vrat je označena z rdečo barvo. Zelena trikotnika predstavljata enake možnosti, kot so na zadnji spodnji veji.

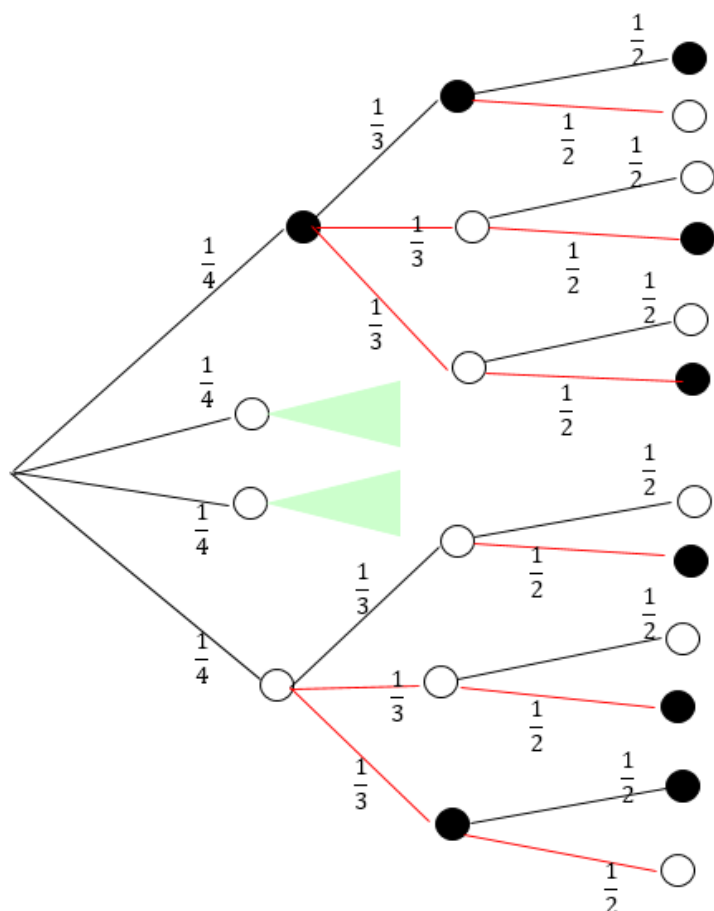


Slika 12: Kombinatorično drevo za primer s štirimi vrati

Tu je vseh možnosti 12 in vse so enako verjetne. Vseh možnosti, kjer smo zamenjali vrata je osem. Med njimi so tri ugodne. Torej je možnost dobitka pri menjavi vrat $\frac{3}{8} = 37,8$ odstotka. V kolikor se odločimo, da vrat ne menjamo, je verjetnost dobitka le $\frac{1}{4} = 25$ odstotna. **Razmerje med zmago z menjavo in zmago brez menjave je 3:2.**

Če bi imeli na voljo 5 vrat, bi bilo razmerje 4:3, pri n vratih pa $(n - 1) : (n - 2)$. Torej je smiselno zamenjati vrata ne glede na število vrat. Res pa je, da se to razmerje pri večjem številu vrat zmanjšuje.

Možna je še ena posplošitev, kjer Monty večkrat odpira nepravna vrata in tekmovalec lahko večkrat zamenja svojo odločitev. Na naslednjem kombinatoričnem drevesu so prikazane možnosti za 4 vrata in največ dve menjavi, vseh izidov je kar 24.



Slika 13: Kombinatorično drevo za primer s štirimi vrati in dvema menjavama

Na drevesu lahko preštejemo zmage glede na število menjav:

Tabela 9: Razmerje zmag z dvema, eno in brez menjave

Zmaga z 2 menjavama	Zmaga z 1 menjavo	Zmaga brez menjave
5/8	6/12	1/4
62,5%	50%	25%

Razmerje zmag z dvema, eno ali nobeno menjavo je sedaj enako

$$\frac{5}{8} : \frac{6}{12} : \frac{1}{4} = 15 : 12 : 6$$

Če združimo zmage z menjavami, pa dobimo

$$\frac{11}{20} : \frac{1}{4} = 11 : 5 = 2,2 : 1$$

Torej se v vsakem primeru izplača menjati izbiro vrat.

3.5 PARADOKS MONTY HALL V PRAKSI

Kviz Koza ali avto smo izvedli v Excelu s 1000 naključnimi ponovitvami. Tu je prvih pet iger.

Tabela 10: Prikaz eksperimenta v Excelu

V primeru, da izberejo vrata številka 1						
Ponovitev	Zmagovalna vrata	Vrata 1	Vrata 2	Vrata 3	Ostanemo s prvotno izbiro	Zamenjamo vrata
1	3	Izgubil	Izgubil	Zmaga	Koza	Avto
2	1	Zmaga	Izgubil	Izgubil	Avto	Koza
3	1	Zmaga	Izgubil	Izgubil	Avto	Koza
4	3	Izgubil	Izgubil	Zmaga	Koza	Avto
5	2	Izgubil	Zmaga	Izgubil	Koza	Avto

V Pythonu smo napisali program, ki v vsaki simulaciji naključno določi zmagovalna vrata. Izbrana vrata (tekmovalca) in voditeljev izbor (vrata, ki niso niti tekmovalčeva izbira, niti zmagovalna). Nato smo računalniku dali možnost, da odloča ali bo vrata zamenjal in/ali želi ostati s prvotno izbiro. Tu je koda programa.

```

1 import random
2
3 random.seed(1)
4 st_vrat = 3
5 st_simulacij = 1000
6 st_zmag_z_menjavo = 0
7 st_zmag_brez_menjave = 0
8 z_menjavo_izgubili = 0
9 st_porazov_brez_menjave = 0
10
11
12
13 for i in range(st_simulacij):
14     L = list(range(st_vrat))
15     # random.sample vrne trojico razlicnih nakljucnih stevil, kjer je:
16     # 1. stevilo enako številki zmagovalnih vrat
17     # 2. stevilo enako številki izbranih vrat v prvem krogu
18     # 3. stevilo enako številki vrat, ki jih voditelj izbere in niso niti zmagovalna niti niso izbrana v prvem krogu
19     izbire = random.sample(range(st_vrat), 3)
20     zv = random.choice(L)
21     iv = random.choice(L)
22     vi = random.choice([x for x in L if x not in [zv, iv]])
23     izbire = [zv, iv, vi]
24     menjava = random.choice([True, False])
25
26
27 izbrana_vrata = izbire[1]
28 #print(izbire, menjava, izbrana_vrata)
29 if menjava:
30     izbrana_vrata = random.choice( list(set(range(st_vrat)) - set([izbrana_vrata, vi])) )
31     #print(f"tnova izbrana vrata {iv} -> {izbrana_vrata} ")
32     if izbrana_vrata == izbire[0]:
33         st_zmag_z_menjavo += 1
34     else:
35         z_menjavo_izgubili += 1
36 else:
37     if izbrana_vrata == izbire[0]:
38         st_zmag_brez_menjave += 1
39     else:
40         st_porazov_brez_menjave += 1
41
42
43 print(f"\nIgralec je:\n zmagal z menjavo: {st_zmag_z_menjavo},\n izgubil z menjavo: {z_menjavo_izgubili}\n\n in brez menjave:

```

Slika 14: Pythonov program za Monty Hallov paradoks

Kadar se je računalnik odločil za menjavo vrat, potem je izbrana vrata zamenjal tako, da ni izbral prvotnih vrat, niti vrat, ki jih je TV voditelj odprl. V naslednjem delu je računalnik preveril, če se ponovno izbrana vrata ujemajo z vrati v izbire [0] (zmagovalna vrata). Pri ujemanju je prištel enko k 'st zmaga z menjavo', v nasprotnem primeru pa je prištel enko k 'st z menjavo izgubil'.

V kolikor se računalnik ni odločil za menjavo, je ponovno preveril, če so izbrana vrata enaka zmagovalnim. V tem primeru je računalnik prištel enko k številu 'st zmag brez menjave', v nasprotnem primeru jih je prištel k številu 'st porazov brez menjave'. Rezultat simulacije s 1000 ponovitvami je prikazan na sliki 15.

```
Igralec je v 500 simulacijah ko je zamenjal:
  zmagal z menjavo: 344, kar znaša: 68.8 odstotkov in
  izgubil z menjavo: 158, kar znaša 31.6 odstotkov

  in v 500 simulacijah ko ni zamenjal:
  zmagal brez menjave 170, kar znaša 34.0 odstotkov
  in brez menjave izgubil 328, kar znaša 65.60000000000001 odstotkov

od vsega skupaj 1000 iger.

Process finished with exit code 0
```

Slika 15: Rezultati programa Monty Hallov paradoks, ko v prvi polovici primerov zamenjamo in v drugi ne

V primeru, da se tekmovalec v vseh 1000 simulacijah odloči za zamenjavo, pa kodo programa spremenimo tako, da v delu, v katerem določamo ali je menjava True ali False, nastavimo vrednost True. Pri čemer računalnik sedaj samo preverja ali so izbire [0] enake izbrana vrata. V tem primeru prišteje enko k 'st zmag z menjavo', sicer prišteje enko k 'st z menjavo izgubil'.

```
iv = random.choice(L)
vi = random.choice([x for x in L if x not in [zv, iv]])
izbire = [zv, iv, vi]
menjava = True ← To je spremenjeni del programa
```

Slika 16: Sprememba programa da računalnik vedno zamenja vrata

```
Igralec je v 1000 simulacijah zmagal z menjavo: 652 kar znaša: 65.2 odstotkov in brez menjave zmagal: 348 kar znaša: 34.8 odstotkov
Process finished with exit code 0
```

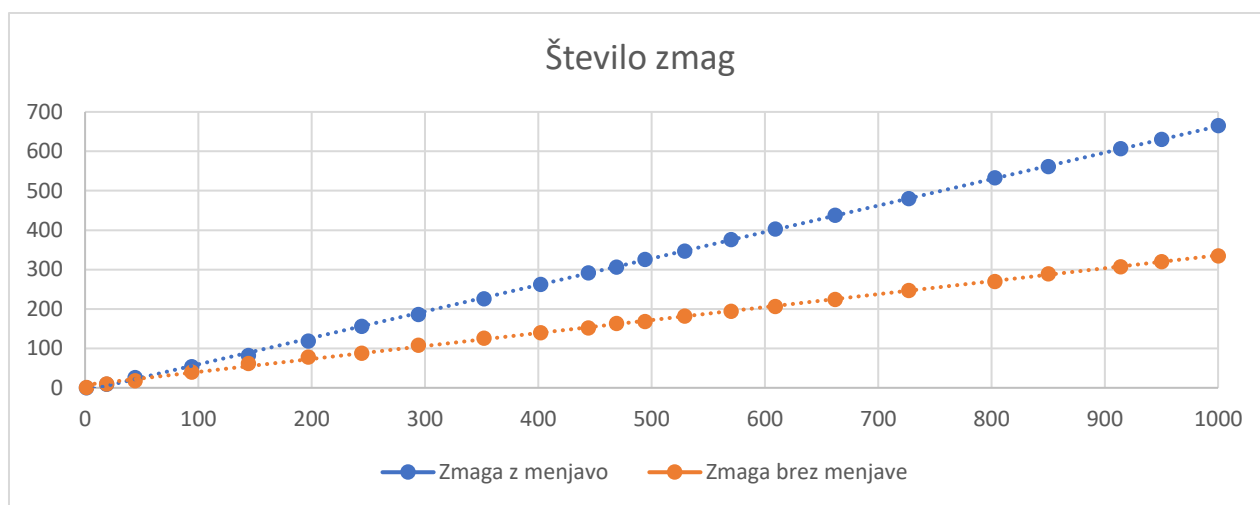
Slika 17: Rezultati, ko računalnik vedno zamenja vrata

Tabela 11: Rezultati programa zbrani skupaj

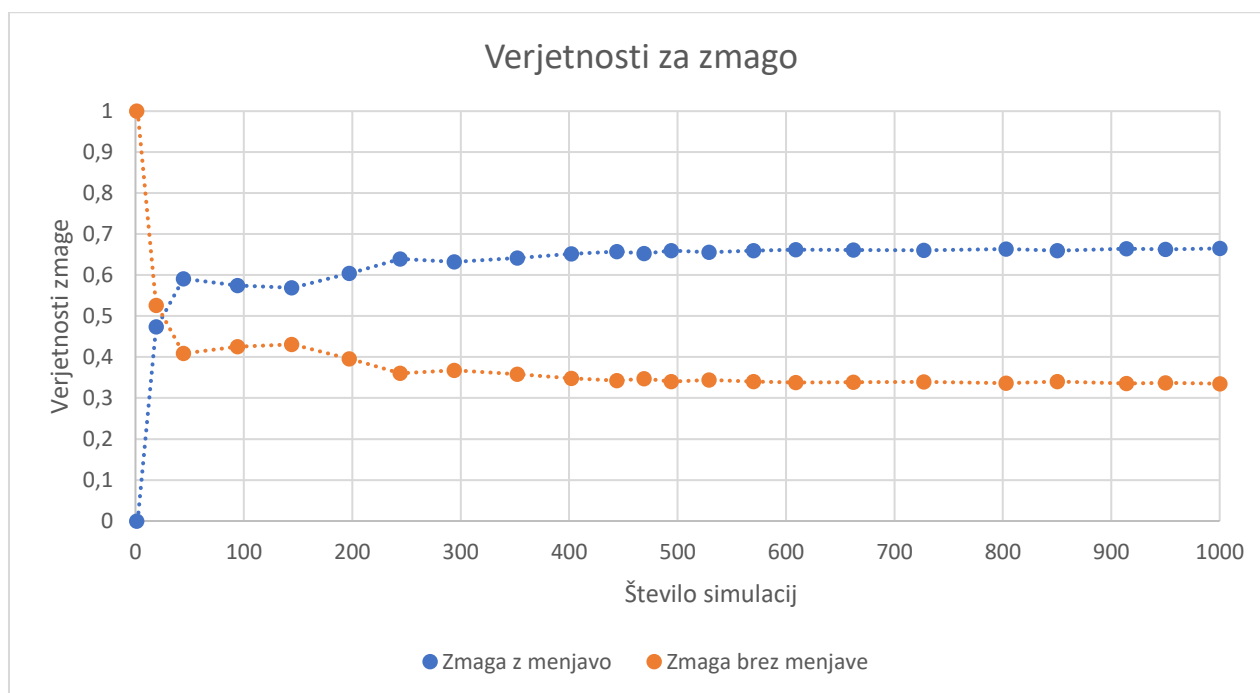
		Verjetnost zmage
Število ponovitev	1000	
Število zmag z menjavo	652	65,2%
Število zmag brez menjave	348	34,8%

Opazimo, da se verjetnost zmage z menjavo skorajda do potankosti ujema z izračunano verjetnostjo. Eksperimentalna verjetnost bi se še bolj približala teoretični verjetnosti, če bi povečali število simulacij.

Graf 3: Prikaz števila zmag v tisoč ponovitvah



Graf 4: Prikaz ustalitve empirične verjetnosti s teoretično



3.6 MONTY HALLOV PARADOKS - ANKETA

Anonimno anketo smo sestavili z namenom, da bi preveril, kaj mislijo ljudje. Anketo smo izvedeli prek spleta. Splet na je omogočil posredovanje ankete velikemu naključnemu številu ljudi brez kakršnega koli predznanja ter poskrbel, da smo zajeli vzorec celotne populacije (od otrok do starostnikov, žensk in moških). Odgovore smo dobil v elektronski obliki. Vprašanja v anketi so bila zaprtega tipa. Pridobil smo 68 odgovorov. Anketa je bila odprta med 1.1. 2023 in 9.2.2023.

Anketa: Monty Hallov paradoks

Pozdravljeni,

sem Jure Čampa, dijak Gimnazije Šentvid in pripravljam raziskovalno nalogo z naslovom: Paradoksi v vsakdanjem življenju. Namen raziskave je predstaviti in ugotoviti, kakšne zmote imajo ljudje pri paradoksih, ter paradokse tudi razložiti.

Anketa je **anonimna**, za izpolnjevanje pa ne boste potrebovali preveč časa.

Za vaše sodelovanje se vam zelo zahvaljujem.

 jani.ejmm@gmail.com (ni deljeno) [Preklopi med računi](#) 

TV oddaja Let's make a deal, ki jo vodi Monty Hall, ponuja ljudem igro na srečo. Dobitek je avtomobil, ki je skrit za enimi izmed treh vrat. Za drugimi vrati so v posmeh skrite koze.

Recimo, da sodelujete v tej igri in izberete ena vrata, a jih še ne odprete. Nato voditelj odpre vrata, za katerimi ni glavnega dobitka in jih vi niste izbrali. Tedaj vam ponudi možnost, da si premislite in izberete druga vrata, ki so še zaprta. Ali se boste odločili za zamenjavo vrat?

☐ Da, zamenjam vrata

☐ Ne, ne zamenjam vrat

Pojasnite svoj odgovor.

☐ Da, zamenjam vrata, saj je bila na začetku 33% verjetnost, da imamo prav, sedaj pa je 50%

☐ Ne, ne zamenjam vrat, saj je sedaj verjetnost 50% da imam prav in 50% da se motim, na začetku pa smo imeli prav samo v 33% primerov

☐ Da, zamenjam, saj je verjetnost, da imamo prav sedaj 66%

☐ Ne, ne zamenjam vrat, ker se mi zdi prav

☐ Ne, ne zamenjam. Če bi zamenjal in izgubil, bi se počutil, kot da sem imel zmago že v rokah

Pošlji

Počisti obrazec

Slika 18: Anketa Monty Hallov paradoks

Na prvo vprašanje, ali vrata zamenjamo ali ne, je kar 57 odstotkov anketirancev odgovorilo pritrdilno. Rezultat je močno presegel naša pričakovanja. Potrebno je upoštevati, da je velika večina anketirancev, na prvo vprašanje odgovorilo pritrdilno brez kakršne koli podlage ali predznanja. V slepem prepričanju in zmotnem prepričanju, so imeli resnično prav. Število odgovorov tistih, ki so odgovorili na 1. vprašanje z ne, smo pričakovali veliko več (odstotno gledano), kot smo jih sicer dobili. Tisti, katerih odgovor se je glasil 'ne', so odgovorili pričakovano.

Tabela 12: Odgovori na prvo vprašanje v anketi Monty Hallov paradoks

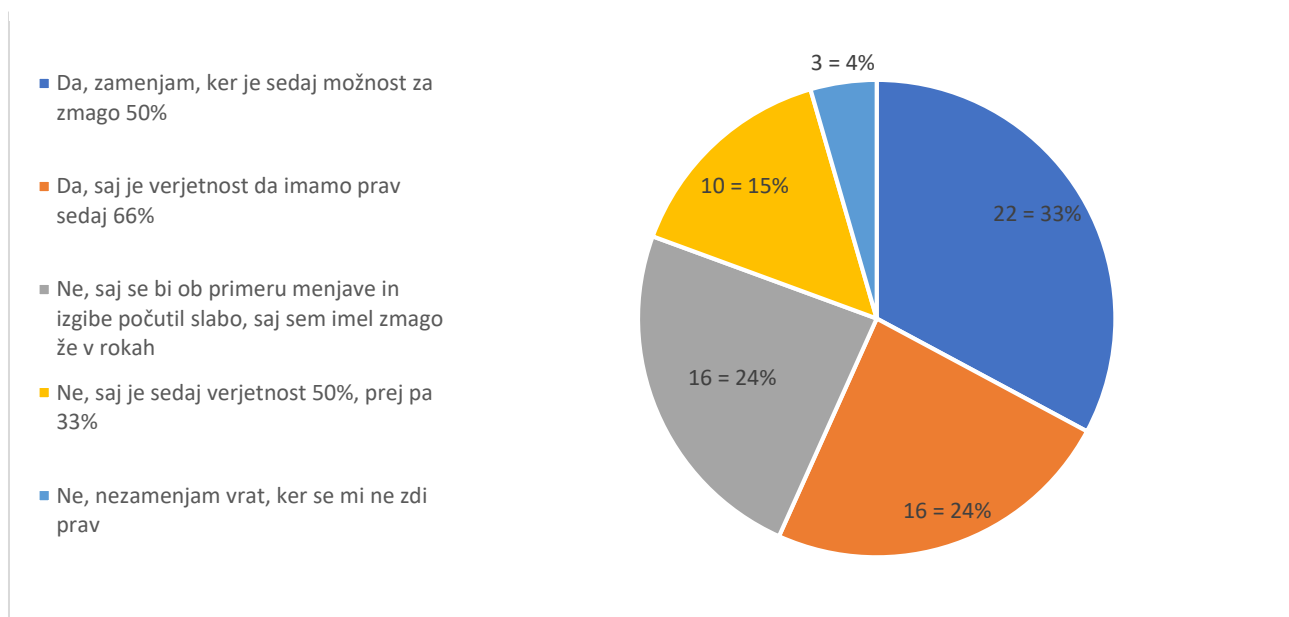
	Odgovori na 1. vprašanje	Odstotki
Da, zamenjam	39	57%
Ne, ne zamenjam	29	43%

Na drugo vprašanje, v katerem so utemeljili svoj prejšnji odgovor, je največ anketirancev izbralo prvi ponujen odgovor. Da se je verjetnost za zmago iz 33 odstotkov povečala na 50 odstotkov, kar 33 odstotkov anketirancev. Ta odgovor se zdi za ljudi brez predznanja povsem pravilen. Drugo mesto po številu izbranih odgovorov si delita tako drugi kot tretji odgovor. Zamenjam, saj je sedaj verjetnost 66 odstotna, ta odgovor je povsem pravilen, saj smo v teoretičnem delu to teorijo potrdili in jo podkrepili v eksperimentalnem delu. Ne zamenjamo, saj se ob primeru menjave in izgube počutimo slabo, saj smo zmago že imeli praktično v rokah. Ta odgovor ima bolj kot matematično znanje za sabo močan psihološki vtis. Vsakdo izmed nas se počuti slabo, če je zmago že imel v rokah, vendar mu je naposled spolzela med prsti. S četrtem odgovorom, ki se je glasil, ne zamenjam, saj je sedaj verjetnost 50 odstotna, prej pa je bila 33 odstotna. Se je strinjalo kar 15 odstotkov ljudi, zakaj so anketiranci sploh izbrali ta odgovor, ne znamo razložiti. Kljub temu, da smo v opisu odgovora omenili, sicer posredno, da se jim možnosti za zmago dvignejo. Odgovor lahko interpretiramo, da se anketiranci niso posvečali izbiri pravilnega odgovora. Zadnji ponujeni odgovor, ne zamenjam, saj se mi ne zdi prav, je izbralo le 4 odstotke anketirancev. Izid tega odgovora je zanimiv, saj smo bili mnenja, da bodo anketiranci imeli izoblikovano kakšno mnenje. Predvidevamo lahko, da je ta odgovor izbralo nekaj ljudi zgolj zato, ker odgovorov niso pazljivo prebrali in so z reševanjem ankete hiteli. Vse rezultate ankete smo tako prikazali v tabeli 12 nato pa še grafično graf 5

Tabela 13: Odgovori na drugo vprašanje v anketi Monty hallov paradoks

Podane možnosti za odgovor	Odgovori na 2. vprašanje	Odstotki
Da, zamenjam, ker je sedaj možnost za zmago 50%	22	33%
Da, saj je verjetnost da imamo prav sedaj 66%	16	24%
Ne, saj se bi ob primeru menjave in izgibe počutil slabo, saj sem imel zmago že v rokah	16	24%
Ne, saj je sedaj verjetnost 50%, prej pa 33%	10	15%
Ne, nezamenjam vrat, ker se mi ne zdi prav	3	4%

Graf 5: Tortni prikaz odgovorov na drugo vprašanje v anketi Monty Hallov paradoks



4. RAZPRAVA IN ZAKLJUČNE UGOTOVITVE

V raziskovalni nalogi smo predstavili dva zanimiva paradoksa. Oba smo predstavili teoretično, izvedli eksperiment in anketo, ter dobljene rezultate primerjali s teoretičnimi vrednostmi. Poskušali smo na enostaven način pojasniti zakaj se pričakovanja ljudi ne ujemajo z računi. Uporabili smo programa Excel in Python.

Na podlagi teoretičnega dela o računanju verjetnosti, lahko hipotezo 1: »V mnogih primerih je lažje izračunati verjetnost nasprotnega dogodka kot željenega.« potrdimo. V eksperimentalnem delu naloge, smo na podlagi poskusa izvedenega v Excelu in Pythonu, primerjali rojstne dneve gimnazijcev z obstoječo teorijo. Pravilno verjetnost ujemanja rojstnega dneva lahko izračunali tako, da smo od celote (1) odšteli verjetnost vseh nasprotnih dogodkov od želenega.

Hipotezo 2: » V realnem življenju je verjetnost ujemanja rojstnih dni precej manjša kakor v teoriji rojstnodnevnega paradoksa.«, ovržemo. Na podlagi podatkov, ki smo jih dobili iz ankete in iz baze podatkov v kateri hranijo datume rojstnih dni v gimnaziji, smo v empiričnem delu izdelali Excelov in Pythonov eksperiment. Prišli smo do ugotovitev, s katerimi lahko hipotezo H2 ovržemo. Eksperimentalna verjetnost ujemanja rojstnih dni celo presega teoretično verjetnost.

Hipotezo 3: »Po prvem razkritju vrat se večini ljudi v Monty Hallovem paradoksu zdi, da so možnosti za zmago 1:1.«. Na podlagi rezultatov vidimo, da se je za odgovor pod zaporedno številko dva v anketi Monty Hallov paradoks odločilo 33 odstotkov anketirancev. Zaradi tega hipotezo ovržemo. Hkrati pa je ta odgovor najpogostejše izbran. S tem rezultatom hipotezo potrdimo. Zato se odločimo, da hipotezo 3 delno potrdimo.

Hipotezo številka 4: »Več kot oseba ve o dogodku, večje so možnosti za pravo odločitev.«, lahko potrdimo. Na podlagi teorije Monty Hallovega paradoksa smo prišli do ugotovitve, da verjetnost zmage na začetku znaša 33 odstotkov in se ob menjavi vrat dvigne na 66 odstotkov. Hipotezo smo potrdili v eksperimentalnem delu naloge, kjer smo z izvedbo Excelovega in Pythonovega eksperimenta dokazali, da se verjetnost za zmago ob menjavi vrat prav zares dvigne z 33 odstotkov na 66 odstotkov.

Ob zaključku naloge sem ugotovil, da me to področje zelo zanima in bi z veseljem pripravil kako delavnico za vse, ki bi jih to področje zanimalo. Zdi se mi, da to specifično področje ni tako pogosto v uporabi kot ostala področja matematike. Raziskovanje paradoksov in njihova predstava sta matematično, kot tudi filozofsko zelo zanimiva in odpirata nove možnosti za premislek ter debato. Naloga omogoča nadaljnja raziskovanja, razmislek ter diskusijo.

5. ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujem mentorici mag. Andreji Kramar za usmerjanje, nasvete in pomoč pri izdelavi raziskovalne naloge. Zahvaljujem se tudi somentorici Nastji Lasić, ki je s svojo strokovnostjo in potrpežljivostjo usmerjala moje delo.

6. LITERATURA IN VIRI

2022. Fran. [Uporabljeno dne 5.02.2022]. Dostopno na spletni naslovu: <https://fran.si/iskanje?All=paradoks&IsAdvanced=True>

2022. Fran. [Uporabljeno dne 5.02.2022]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://fran.si/iskanje?View=1&Query=zmota>

Abramson, M.; Moser, W. O. J. (1970). "More Birthday Surprises". *American Mathematical Monthly*. 77 (8): 856–858. doi:10.2307/2317022

Alemañ-Berenguer, R. A. (2021). On the gnoseologic principles of Bertrand Russell.

Benkovič, D. (2022). *Verjetnost* (1. izd.). Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba. doi:10.18690/um.fnm.7.2022

Birthday Paradox. 2022. GeeksforGeeks. [Uporabljeno dne 6.12.2022]. Dostopno na spletnem mestu: <https://www.geeksforgeeks.org/birthday-paradox/>

Bloom, D. (1973). "A Birthday Problem". *American Mathematical Monthly*. 80 (10): 1141–1142. doi:10.2307/2318556.

Bon Klanjšček, M., & Felda, D. (2018). *Matematika 4, Učbenik za gimnazije* (1. izd.). DZS.

Brilej, R., Nikič, B., & Seljak, R. (2011). *Omega 4, Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika: zbirka nalog za matematiko v 4. letniku gimnazijskega izobraževanja* (1. izd.). Ataja.

Cook, M. (2020). *Sleight of mind: 75 ingenious paradoxes in mathematics, physics, and philosophy*. The MIT Press.

https://avtotrgovina.com/uploads/s_pro/simbol-presenecenj_1510521628.jpg

https://www.dbs.si/uploads/numizmatika/2022/35.obleznica_programa_Erasmus.PNG

https://www.svetlesa.si/wp-content/uploads/2022/09/3022_IGRALNA_KOCKA_25mm-scaled.jpg

Koparan, T., & Koparan, E. T. (2019). Empirical approaches to probability problems: An action research. *European Journal of Education Studies*.

Manfreda, T. (2022). Pouk verjetnosti in znameniti paradoksi. In A. Mohorič, B. Rovšek, & B. Kuzman (Eds.), *Zbornik 1. mednarodne konference o poučevanju matematike, fizike in astronomije: Bled, 27. in 28. september 2019* (pp. 58–64). DMFA Založništvo. https://www.dmfa.si/_CmsFiles/2022/08/zbornik-1-konferenca-dmfa-2022.pdf

McKinney, E. H. (1966). "Generalized Birthday Problem". *American Mathematical Monthly*. 73 (5): 385–387. doi:10.2307/2315408

Monty Hall Problem. 2014. Numberphile. [Uporabljeno dne 23.11.2022]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://www.youtube.com/watch?v=4Lb-6rxZxx0>

Monty Hall Problem. 2018. Tvtropes. [Uporabljeno dne 19.11.2022]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://tvtropes.org/pmwiki/pmwiki.php/Main/MontyHallProblem>

Monty Hall Problem. 2022. Wolfram MathWorld. [Uporabljeno dne 12.11.2022]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://mathworld.wolfram.com/MontyHallProblem.html>

Pavlič, G., Kavka, D., Rugelj, M., & Šparovec, J. (2019). Tempus novum: matematika za gimnazije (2. izd.). Modrijan izobraževanje.

Probability and the Birthday Paradox. 2012. SCIENTIFIC AMERICAN. [Uporabljeno dne 6.12.2022]. Dostopno na spletnem mestu: <https://www.scientificamerican.com/article/bring-science-home-probability-birthday-paradox/>

Quine, W. V. (1962). PARADOX. Scientific American, 206(4), 84–99. <http://www.jstor.org/stable/24937290>

Rayo, A., & Rochford, D. (2019). On the brink of the paradox: highlights from the intersection of philosophy and mathematics. The MIT Press.

Schneps, Leila; Colmez, Coralie (2013). "Math error number 5. The case of Diana Sylvester: cold hit analysis". Math on Trial. How Numbers Get Used and Abused in the Courtroom. Basic Books. ISBN 978-0-465-03292-1.

Stewart, A. (2019). Birthday Paradox. Australian Mathematics Education Journal, 1(3), 13-15.

STYLIANOU, N. (2020). On 'Probability'.

Sun, Q. (2021). The probability principle of the birthday paradox and extended applications. The Frontiers of Society, Science and Technology, 3(3).

The Birthday Paradox. 2018. Vsauce2. [Uporabljeno dne 12.1.2023]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://www.youtube.com/watch?v=ofTb57aZHZs>

The Monty Hall Problem. 2019. D!NG. [Uporabljeno dne 29.11.2022]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://www.youtube.com/watch?v=TVq2ivVpZgQ&t=749s>

The Time Everyone "Corrected" the World's Smartest Woman. 2015. Priceonomics. [Uporabljeno 19.12.2022]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://priceonomics.com/the-time-everyone-corrected-the-worlds-smartest/>

Understanding the Birthday Paradox. Leto. Better Explained. [Uporabljeno dne 3.12.2022]. Dostopno na spletnem mestu: <https://betterexplained.com/articles/understanding-the-birthday-paradox/>

Understanding the Monty Hall Problem. 2017. Better Explained. [Uporabljeno 12.11.2022]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://betterexplained.com/articles/understanding-the-monty-hall-problem>

Understanding the Monty Hall Problem. 2017. Better Explained. [Uporabljeno 12.11.2022]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://betterexplained.com/articles/understanding-the-monty-hall-problem/>

Understanding the Monty Hall Problem. 2017. Better Explained. [Uporabljeno 12.11.2022]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://betterexplained.com/articles/understanding-the-monty-hall-problem>

Wells, J. M. (2020). Surprises in Probability: Seventeen Short Stories: by Henk Tijms. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Press, 2018, xiii+ 131 pp., \$29.95 (P), ISBN: 978-0-36-700043-1.

Wójtowicz, A. (2021). An Analysis of Paradoxes. In Philosophical Approaches to the Foundations of Logic and Mathematics (pp. 258-270). Brill.