GIMNAZIJA JOŽETA PLEČNIKA
LJUBLJANA

Žiga Vaupotič, Jaka Jakopin

NUMERIČNA ANALIZA RAYLEIGH BENARDOVE KONVEKCIJE

Raziskovalno delo

Mentor: Grega Celcar, prof. fizike
Somentor: doc. dr. George Mejak

Ljubljana, 2023

Kazalo

1 Uvod **5**

2 Rayleigh-Benardova konvekcija **6**
2.1 Zgodovina 6
2.2 Formulacija problema 6

3 Numerična analiza **8**
3.1 Metoda končnih razlik 8
3.1.1 Ozadje 8
3.1.2 Izpeljava diferenčne sheme 9
3.1.3 Iskanje rešitev za skalarno polje tlaka 11
3.1.4 Uporaba zamaknjene mreže 12
3.2 Metoda končnih volumnov 13
3.2.1 Uvod v metodo 13
3.2.2 Numerična integracija trojnih integralov 14
3.2.3 Numerična integracija ploskovnih integralov 14
3.2.4 Izpeljava metode 15
3.3 Reševanje sistema linearnih enačb 17

4 Interpretacija numeričnih rezultatov **18**
4.1 Fizikalne lastnosti PDE 18
4.1.1 Kritično Rayleighjevo število 18
4.1.2 Hitrost konvekcije 19
4.1.3 Toplotni tok in Nusseltovo število 19
4.2 Časovna zahtevnost PDE 20
4.3 Stabilnost diskretizacije PDE 20

5 Sklep **21**

Kazalo slik

1 Domena Ω 6
2 Prikaz diskretizacije 9
3 Prikaz skalarnega polja tlaka 12
4 Prikaz kontrolnih volumnov 13
5 Prikaz pozicije točk 14
6 Prikaz diskretnih točk kontrolnega volumna 15
7 Prikaz kontrolnega volumna skalarnega polja tlaka 16
8 Simulacija $Ra = 10^2$ 18
9 Simulacija $Ra = 10^4$ 18
10 Simulacija $Ra = 10^6$ 18

Numerična analiza Rayleigh Benardove konvekcije

Povzetek

Ta raziskovalna naloga obravnava numerične metode reševanja Navier-Stokesovih enačb. V nalogi obarvamo dve preprosti mrežni metodi s stališča njune matematične formulacije, časovne zahtevnosti in natančnosti.

Navier-Stokesove enačbe opisujejo gibanje tekočin. Spadajo med zahtevne parcialne diferencialne enačbe drugega reda. Posvetili se bomo predvsem enačbam, ki opisujejo nestisljive tekočine. V nalogi bomo formulirali enačbe na podlagi Rayleigh-Benardove konvekcije in se ukvarjali z najpreprostejšimi robnimi pogoji.

Numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb je sestavljeno iz pretvorbe diferencialnih enačb v sistem navadnih enačb. Za gradnjo sistema se pri Navier-Stokesovih enačbah uporablja veliko metod. Končne metode se delijo na tri, in sicer na metodo končnih elementov, končnih razlik in metodo končnih volumnov. Končne metode so uporabne predvsem zaradi njihove preprostosti in hitrosti izvedbe. V nalogi smo si izbrali dve končni metodi, in sicer metodo končnih volumnov in razlik.

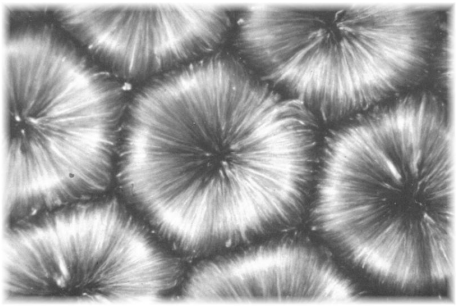
Na primeru Rayleigh-Benardovih enačb so v nalogi razloženi vsi postopki, ki opisujejo numerično rešitev danega problema. V nadaljevanju hierarhično obdelujeva in primerjava končni metodi. Dane enačbe v dveh dimenzijah grafično predstavimo in numerično obdelamo. Časovne primerjave potekajo na računalnikih s sodobnimi centralnimi procesnimi enotami. V najinem primeru je to Intel(R) Core(TM)i7 z 4-mi jedri.

Ključne besede: Numerične metode, parcialne diferencialne enačbe, Navier Stokesova enačba, metoda končnih volumnov.

1 Uvod

V tej raziskovalni nalogi bomo numerično analizirali pojav, ki bo temeljil na reševanju *parcialnih diferencialnih enačb (PDE)*. Pojav imenujemo *Rayleigh Benardova konvekcija* in je primer naravne konvekcije tekočine, ki nastane zaradi sile vzgona. Pojav nastane, ko s stalno temperaturo segrevamo zgornjo in spodnjo mejo domene tekočine. Zaradi razlik v temperaturi med posameznimi deli tekočine se prične konvekcija (dvigovanje in spuščanje posameznih delov tekočine). Ta pojav je znan predvsem po t. i. Benardovih celicah, ki nastanejo med pojavom.

Ta pojav bomo opisali s pomočjo *Navier-Stokesovih enačb (NS)*. Glavni cilj te naloge je zapisati sistem PDE in ga numerično rešiti z *metodo končnih razlik (MKR)* in *metodo končnih volumnov (MKV)*.



Podrobno bomo opisali tudi reševanje problema skalarnega polja tlaka. V drugem delu raziskovalne naloge bomo opisovali obnašanje PDE in numerično zahtevnost PDE.

2 Rayleigh-Benardova konvekcija

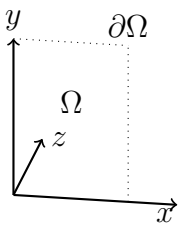
2.1 Zgodovina

Leta 1900 je Henri Benard opazoval tekočino v posodi, ki jo je segreval od spodaj. V tej posodi so nastali konvekcijski tokovi. Pri tem je bil zelo osredotočen na površino gladine kapljevine, ki je spreminjala obliko. Leta 1916 je Rayleigh opisal konvekcijo s temperaturnim gradientom. Pri svoji analizi tekočin je tako opisal pojav in njegovo obnašanje, ter kot prvi postavil skalarno količino in jo poimenoval kot Ra Rayleighjevo število. Ko je razlika v temperaturi med zgornjo ter spodnjo ploskvijo dovolj velika se začne tako imenovana Rayleigh Benardova konvekcija. [1]

2.2 Formulacija problema

Naj bo tekočina, ki jo opisujemo **idealna in nestisljiva**. Naj bo domena pojava $\Omega \subset R^n$ kompaktna. $\partial\Omega$ naj bo gladek rob domene Ω. Takšno tekočino lahko opišemo z Navier-Stokesovo enačbo (2.1)

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u(\nabla \cdot u) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + F, \tag{2.1}$$



Slika 1: Domena Ω

kjer u predstavlja vektorsko polje hitrosti, ρ gostoto tekočine, p skalarno polje tlaka in τ viskozni tenzor. Ker velja ohranitev mase lahko upoštevamo kontinuitetno enačbo (2.2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla \cdot u = 0. \tag{2.2}$$

V primeru, ko je sprememba gostote majhna, smemo uporabiti Boussineqov približek.

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)), \tag{2.3}$$

Ta približek predpostavlja linearno odvisnost spremembe gostote od temperature 2.3 in ga upoštevamo le pri vzgonskem delu enačbe (T_0 je temperatura spodnje plošče, α pa koeficiente temperaturnega raztezka.)

Ker ta približek upoštevamo le pri vzgonskem delu člena, lahko kontinuitetno enačbo (2.2) zapišemo kot (2.4)

$$\nabla \cdot u = 0. \tag{2.4}$$

Za nestisljive tekočine velja, da je napetostni tenzor enak (2.5)

$$\nabla \cdot \tau = \mu\nabla \cdot ((\nabla u + \nabla u)^T) = \mu(\nabla \cdot (\nabla u) + \nabla \cdot \overbrace{(\nabla \cdot u)}^{0}) = \mu\nabla^2 u, \tag{2.5}$$

kjer je μ koeficient viskoznosti. Z upoštevanjem vseh teh predpostavk se enačba (2.1) zapiše kot (2.6)

$$\rho_0\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\Big) = -\nabla p + \nabla^2 u + g\rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \tag{2.6}$$

V sistemu velja tudi enačba, ki opisuje prenos toplote po prvem zakonu termodinamike (za več glej [2]).

$$c_v\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \rho\overbrace{(u \cdot \nabla)}^{0}(c_v T) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \overbrace{p(\nabla \cdot u)}^{0} + \Phi, \tag{2.7}$$

kjer je T je temperatura, Φ koeficient mikroskopskega segrevanja, λ koeficient toplotne prevodnost, in c_v je specifična toplota. V tej enačbi se člen Φ zanemari, saj je segrevanje v primerjavi s prevajanjem toplote zelo majhno. Končna oblika enačbe je tako (2.8) pri čemer smo vse konstante zapisali v κ kot, ($\kappa = \frac{k}{\rho_0 c_v}$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla)T = \kappa \nabla^2 T \tag{2.8}$$

V literaturi [2] je izpeljan ves postopek izpeljave teh treh PDE. Končamo s sistemom ($\hat{j}$ predstavlja enotni vektor)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \overbrace{(u \cdot \nabla)u}^{\textit{Kovekcijski pospešek}} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \overbrace{\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\nabla^2 u}^{\textit{Viskozni člen}} + \theta\hat{j} \qquad v\ \Omega \tag{2.9}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad v\ \Omega \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla\theta = \frac{1}{\sqrt{RaPr}}\nabla^2\theta \qquad v\ \Omega, \tag{2.11}$$

kjer je $Ra = \frac{g\alpha\Delta T h^3}{\nu\kappa}$ Rayleighovo število in $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ Prandtlovo število. Funkcija θ je podana s predpisom $\theta = T - T_0$.

Za podano PDE velja Direchletov robni pogoj. Začetni pogoji so enaki robnim pogojem. Na začetku pojav miruje, zato je $u = 0$.

$$\begin{aligned} u &= \vec{0} \qquad \forall x, y, z \in \partial\Omega \vee t = 0 \\ T &= T_0 \qquad \forall x, y, z \in \partial\Omega|_b \\ T &= T_1 \qquad \forall x, y, z \in \partial\Omega|_t \end{aligned}$$

Opomba 2.1. Enačbe so zapisane v brez-dimenzionalni obliki.

3 Numerična analiza

3.1 Metoda končnih razlik

Metoda končnih razlik (MKR) je ena od številnih metod za računanje numeričnih približkov PDE. V mehaniki tekočin prevladuje metoda končnih volumnov. Največji problem metode MKR kot tudi MKV je, kako rešiti enačbo za skalarno polje tlaka. Za tlak ne obstaja enačba, obstajajo pa algoritmi, ki jih predpostavimo in enega od njih uporabimo [3]. Problem pa nastane tudi pri obravnavanju novih robnih pogojev ter problemov, ki nastanejo pri uporabi tovrstnih algoritmov. MKR bomo razvili predvsem zato, ker nastopa tudi v MKV.

3.1.1 Ozadje

Naj bo $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zvezna in diferenciabilna funkcija. Naj bo (x_i) diskretna množica točk. Domeno diskretiziramo v tako imenovano mrežo. Mreža sestoji iz točk imenovanih mrežne točke x_i. Za mrežne točke velja, da je $f(x) := f_d(x_i)$. Naj bodo vse mrežne točke med seboj enako oddaljene. Diskretni diferenčni operator je tako podan s predpisom (3.1) [4]

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}. \tag{3.1}$$

Za diskretno izpeljavo n-tega odvoda funkcije f lahko uporabimo razvoj funkcije f v Taylorjevo vrsto.

Izrek 3.1. *Naj bo f n-krat odvedljiva funkcija. Funkcijo lahko aproksimiramo s Taylorjevo vrsto*

$$f(x_{i+1}) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Delta x^k f_i^{(k)} \qquad f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{1}{2} \Delta x^2 f''(x_i) + ... \tag{3.2}$$

Ker iščemo odvod funkcije lahko iz vrste izpostavimo f_i'

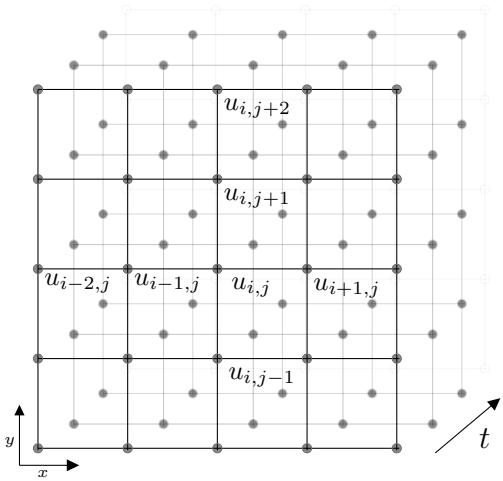
$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \tag{3.3}$$

Ob združevanju različnih Taylorjevih vrst dobimo še več shem za tovrstni približek odvodov. Največkrat se uporablja **centralna diferenčna shema**. Odvode tako nižjega kot višjega reda v tej shemi zapišemo kot (3.4)

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}. \tag{3.4}$$

3.1.2 Izpeljava diferenčne sheme

Naj bo n diskretna časovna spremenljivka, i, j pa diskretni prostorski spremenljivki. Tako je $u_h := (x_i, y_i)$. Domeno razdelimo na n enakih mrežnih točk, tako da sta diskretni razliki Δx in Δy **enakomerni** (slika 2).



Slika 2: Prikaz diskretizacije

Odvode vektorskega polja u po eni od komponent zapišemo kot

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} u|_{i,j}^{n} \approx \frac{(u^2)_{i+1,j}^{n} - (u^2)_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} u|_{i,j}^{n} \approx \frac{(uv)_{i,j+1}^{n} - (u^2)_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} \tag{3.7}$$

$$\nabla^2 u|_{i,j}^{n} \approx \frac{u_{i-1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2} \tag{3.8}$$

($\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ predstavlja Laplacov operator, **izraza (3.6) in (3.7) sta nelinearna**)

$$\frac{\partial p}{\partial y}|_{i,j}^{n} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta y} \qquad \frac{\partial p}{\partial x}|_{i,j}^{n} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j+1}}{2\Delta x} \tag{3.9}$$

Odvodi temperaturnega skalarnega polja so podani z izrazi približkov:

$$\nabla^2 \theta|_{i,j}^{n} \approx \frac{\theta_{i-1,j}^{n} - 2\theta_{i,j}^{n} + \theta_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^2} - \frac{\theta_{i,j-1}^{n} - 2\theta_{i,j}^{n} + \theta_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2} \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \approx \frac{\theta_{i,j}^{n+1} + \theta_{i,j}^{n}}{\Delta t}. \tag{3.11}$$

Velikokrat zapišemo tovrstne izraze v matrični obliki. Naj bo $\Delta x = \Delta y$, izraz(3.8), ki vsebuje Laplacov operator, lahko tako zapišemo kot

$$\frac{1}{\Delta x^2}(-4u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n} + u_{i,j+1}^{n}). \tag{3.12}$$

Naj bo A $nn \times nn$ razsežna matrika in v n razsežni vektor, n predstavlja število diskretnih točk (3.13)

$$A\vec{v}, \tag{3.13}$$

kjer $\vec{v}$ predstavlja vektor neznanih diskretnih točk $u_{i,j}$. Njegov zapis je enak (3.14)

$$\vec{v} = (u_{1,1}, u_{2,1}, \dots u_{n,1}, u_{1,1}, u_{1,2}, \dots u_{1,n}, \dots u_{n,n})^T, \tag{3.14}$$

A predstavlja preprosto tri diagonalno matriko v obliki (3.15)

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} D & -I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -I & D & -I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & D & -I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -I & D & -I & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -I & D & -I \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -I & D \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

I predstavlja enotsko matriko reda $n \times n$, D je tri diagonalna matrika, ki opisuje vzorec sheme (3.16)

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Končno obliko NS enačbe v matrični obliki lahko zapišemo kot (3.17)

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = -A_{i,j}^{n} + K_{i,j}^{n} - (\nabla p_{i,j})^n + T_{i,j}^{n}. \tag{3.17}$$

Opazimo lahko, da so matrike zelo razpršene, kar zahteva dober način reševanja linearnega sistema enačb, ta je opisana v 3.3.

3.1.3 Iskanje rešitev za skalarno polje tlaka

Skalarno polje tlaka je ponavadi tisto, ki pri numeričnih izpeljavah povzroča največ težav. Za reševanje enačb skalarnega polja tlaka se ponavadi uporabljata algoritma vrste SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*) in PISO (*Pressure-Implicit with Splitting of Operators)*). Bolj preprosta algoritma pa sta AC (*Artificial compressibility*) in PP (**Pressure projection**). Za naše potrebe bomo uporabili algoritem PP.

PP algoritem deluje zaradi Helmholtz-Hodgevega razcepa, ki nam pove, da lahko poljubno diferenciabilno vektorsko polje razcepimo v vsoto polja s čisto rotacijo in polja brez divergence.

Izrek 3.2 (Helmholtz-Hodgev razcep)**.** *Naj bo ξ preprosto in gladko poljubno vektorsko polje na domeni $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ in $\psi : \Gamma \to \mathbb{R}$ poljubno skalarno polje. Vemo, da za poljubno skalarno polje velja, da je rotor $\nabla \times (\nabla\psi) = 0$. Za vektorsko polje ξ posledično velja*

$$\xi = \xi_{div} + \xi_{rot} = \xi_{div} + \nabla\psi. \tag{3.18}$$

Torej lahko izrazimo brez divergentno vektorsko polje kot (3.14)

$$\xi_{div} = \xi - \nabla\psi \qquad . \tag{3.19}$$

Ker je divergenca $\nabla \cdot \xi_{div} = 0$, potem mora biti $\nabla \cdot \xi = \nabla^2\psi$.

Tako lahko izračunamo tudi skalarno polje tlaka v Navier-Stokesovi enačbi. NS enačbo (3.9) zapišemo s diskretno matriko za vektorsko polje, ki ne ohranja mase

$$D^n_{i,j} = -A^n_{i,j} + K^n_{i,j} + T^n_{i,j}, \tag{3.20}$$

ter gradientom skalarnega polja tlaka ($\overline{\nabla}$ predstavlja diskretni del operatorja)

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx D_{i,j} - \overline{\nabla} p_{i,j}. \tag{3.21}$$

Najprej izračunamo vektorsko polje $\widetilde{u}$, ki ne ohranja mase torej $\nabla \cdot \widetilde{u} \neq 0$.

$$\frac{\widetilde{u}^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{\Delta t} = D^n_{f\,i,j}. \tag{3.22}$$

Po Helmholtzevem razcepu lahko zapišemo, da je $u^{n+1}_{i,j} = \widetilde{u}^{n+1}_{i,j} + \overline{\nabla} p \Delta t$. Sledi (3.23)

$$\frac{u^{n+1}_{i,j} - \widetilde{u}^{n+1}_{i,j}}{\Delta t} = \overline{\nabla} p. \tag{3.23}$$

Če vzamemo divergenco (3.23) nam ostane Poissonova enačba tlaka $\nabla^2 p = -f$. Rešitev te enačbe je (3.24)

$$\overline{\nabla}^2 p = \frac{\overbrace{\nabla \cdot \widetilde{u}^{n+1}_{i,j} - \nabla \cdot u^{n+1}_{i,j}}^{0}}{\Delta t} = \frac{\nabla \cdot \widetilde{u}^{n+1}_{i,j}}{\Delta t}. \tag{3.24}$$

To lahko zapišemo v obliki že zapisane diferenčne sheme $\overline{\nabla}^2 p = \frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{\Delta x^2} - \frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{\Delta y^2}$.

3.1.4 Uporaba zamaknjene mreže

Problem, ki nastane ob tovrstni izpeljavi je, da dobimo fizikalno nesmiselne rešitve. To se zgodi zaradi tega, ker sama izpeljava s pomočjo metode PP ni vedno brez divergence. Dokaz je preprost, do napake pride pri izpeljavi diskretnega Laplaceovega operatorja, ker ta ni isti, kot pri diferenčni shemi, ki smo jo izpeljali.

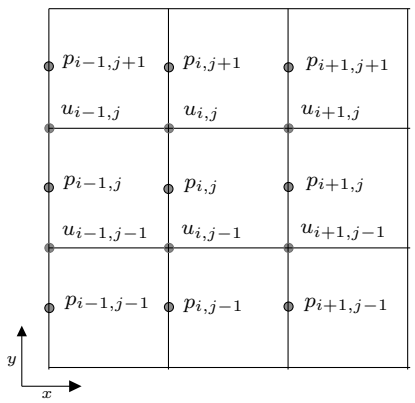
$$\overline{\nabla}^2 p \neq \frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{\Delta x^2} - \frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{\Delta y^2}.$$

Ta je v resnici enak (3.26)

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} p = \frac{\overline{\nabla} p_{i+1,j} - \overline{\nabla} p_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{\overline{\nabla} p_{i,j+1} - \overline{\nabla} p_{i,j-1}}{2\Delta y} \tag{3.25}$$

$$= \frac{p_{i+2,j} - 2p_{i,j} + p_{i-2,j}}{4\Delta x} + \frac{p_{i,j+2} - 2p_{i,j} + p_{i,j-2}}{4\Delta y}. \tag{3.26}$$

Kljub pravilni izpeljavi (3.26), še vedno nastane problem, saj izpeljava ne **konvergira** vedno. Tovrstna izpeljava velikokrat vodi v *odd-even decoupling* in *checkboarding* divergentne probleme [5]. Rešitev je vpeljava zamaknjene mreže, kjer diskretne točke tlaka p stojijo med diskretnimi točkami u (slika 3).



Slika 3: Prikaz skalarnega polja tlaka

Vrednost skalarnega polja tlaka v $u_{i,j}$ sedaj zapišemo kot (3.27)

$$p_x|^n_{u_{i,j}} = \frac{p_{i-1,j} + p_{i+1,j}}{\Delta x}. \tag{3.27}$$

Posledično je Laplacov operator skalarnega polja tlaka enak (3.28)

$$\overline{\nabla}^2 p = \frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{\Delta x^2} - \frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{\Delta y^2}. \tag{3.28}$$

3.2 Metoda končnih volumnov

MKV, kot smo že omenili zgoraj, je dokaj podobna MKR. Na pravokotni domeni z linearnimi elementi se ti dve metodi celo prekrivata. Ta metoda je največkrat uporabljena v mehaniki tekočin. S pomočjo metod iz prejšnjega poglavja lahko obravnavamo številne probleme tudi v tej metodi. Za razliko od MKR je ta metoda konzervativna.

3.2.1 Uvod v metodo

Izpeljava metode končnih volumnov temelji na zapisu kontinuitetne enačbe v integralski obliki. Enačbo (2.2) zapišem kot

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot u) d\Omega = 0. \tag{3.29}$$

Izrek 3.3 (Divergenčni izrek)**.** *Naj bo V omejena množica na $\mathbb{R}^3$ in $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diferenciabilno vektorsko polje z gladkim robom ∂V, orientiranim z zunanjo normalo $\hat{n}$.*

$$\int_{V} (\nabla \cdot F) dV = \oint_{\partial V} (F \cdot \hat{n}) dS. \tag{3.30}$$

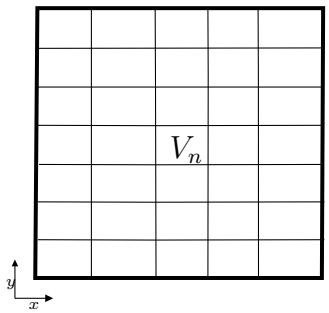
S pomočjo divergenčnega izreka zapišemo kontinuitetno enačbo (3.29) kot ($\Gamma = \partial\Omega$)

$$\int_{\Gamma} (u \cdot \hat{n}) dS = 0. \tag{3.31}$$

To nam pove, da mora pretok vektorskega polja skozi celotno domeno biti 0. Domeno Ω diskretiziramo v *kontrolne volumne (KV)* V (slika 4). To so pod domene $V_i \subset \Omega$ in predstavljajo preprost topološki lik ali telo. Lahko so enakomerno ali neenakomerno razporejeni po domeni Ω, vsekakor pa velja

$$\bigcup_{i=0}^{n} V_i = \Omega. \tag{3.32}$$

Kontinuitetna enačba, mora veljati prav za vse kontrolne volumne. Zagotoviti moramo, da $V_i \cap V_j = \emptyset, \forall (i \neq j)$, kajti če se bi KV prekrivali kontinuitetna enačba več nebi držala, saj se bi posamezni pretoki vektorskega polja na KV prekrivali.



Slika 4: Prikaz kontrolnih volumnov

Če želimo enačbe zapisati v obliki sistema enačb, moramo vse enačbe integrirati z uporabo numeričnih približkov. Če govorimo o pravokotnih domenah so enačbe, ki jih dobimo po integraciji velikokrat enake tistim, ki jih dobimo pri diferenčnih shemah MKR.

3.2.2 Numerična integracija trojnih integralov

Za nekatere člene enačb, potrebujemo uporabiti tudi trojne integrale. Uporabili bomo eno točkovno integracijo. S pomočjo pravila sredinske točke, določimo, da bo integracijska točka v sredi posameznega kontrolnega volumna. Naj bo ψ poljubna funkcija. Izreka o povprečni vrednosti nam pove sledeče

$$\overline{\psi} = \frac{1}{Vol(V)} \int_V (\psi) dV. \tag{3.33}$$

Približek trojnega trojnega integrala je torej enak ($\widetilde{\psi}$ je približek povprečne vrednosti funkcije ψ)

$$\int_V \psi dV \approx \widetilde{\psi} \Delta V. \tag{3.34}$$

3.2.3 Numerična integracija ploskovnih integralov

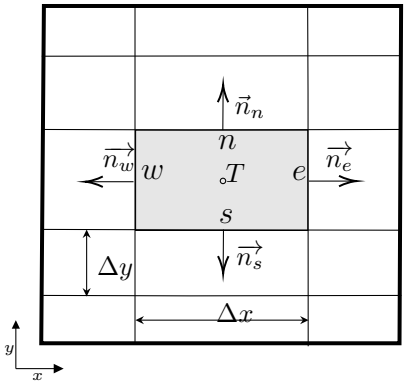
Omejimo se, le na numerično integracijo 2D primera na pravokotni kartezični mreži C. Pri NS enačbah velikokrat govorimo le o 2D diskretizaciji, ki je posebni primer 3D diskretizacije, kajti lahko predpostavimo, da prostorsko odvisne spremenljivke niso odvisne od z dimenzije. Naj bo S_j množica stranic posameznega KV

$$\bigcup_{j=0}^{\xi(V)} S_j = \partial V \tag{3.35}$$

in naj bo ψ poljubno vektorsko polje. Ploskovni integral je tako vsota integralov po vsaki stranic

$$\int_S \psi \cdot \hat{n} dS = \sum_{j=0}^{\xi(V)} \int_{S_j} \psi \cdot \hat{n} dS. \tag{3.36}$$

Obravnavamo 2D primer torej je $\xi(V) = 4$. Naj so $\psi_w, \psi_e, \psi_n, \psi_s$ diskretne točke funkcije na S (slika 5).



Slika 5: Prikaz pozicije točk

Ker ne poznamo predpisa vektorskega polja ψ uporabimo metodo numerične integracije . Obstajajo številne metode numeričnega integriranja, mi bomo uporabili metodo sredinskega pravila. Kot pri trojnih integralih tudi tokrat zapišemo sledeče

$$\int_S \psi \cdot \hat{n} dS = \sum_{j=1}^{4} \int_{S_j} \psi \cdot \hat{n}_j dA_j \approx \sum_{j=1}^{4} \widetilde{\psi} \cdot \hat{n}_j \Delta A_j. \tag{3.37}$$

Zunanje normale $\hat{n}$, kažejo v smeri Δx ali Δy. Tako se zgornji izraz (3.37) poenostavi v

$$\sum_{j=1}^{4} \widetilde{\psi} \cdot \hat{n}_j \Delta A_j = \psi_w \cdot \hat{n}_w \Delta A_w + \psi_e \cdot \hat{n}_e \Delta A_e + \psi_n \cdot \hat{n}_n \Delta A_n + \psi_s \cdot \hat{n}_s \Delta A_s \tag{3.38}$$

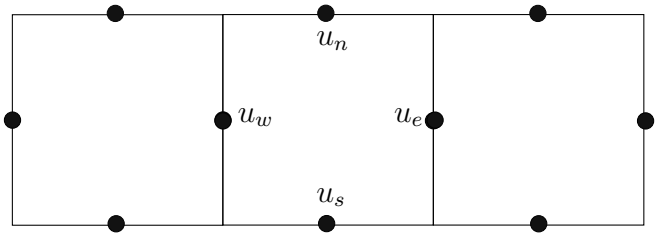
$$= \frac{\psi_n - \psi_s}{\Delta y} + \frac{\psi_e - \psi_w}{\Delta x}. \tag{3.39}$$

3.2.4 Izpeljava metode

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pravokotnik in naj bo C pravokotna kartezična mreža domene Ω. Naj bo $\overline{\mathbb{M}} = \{V_i, i = 0 \dots n\}$ množica diskretnih kontrolnih volumnov, tako, da velja $\mathbb{M} = C$ in

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{n} V_i \quad \wedge \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j.$$

Vsak kontrolni volumen razdelimo na 4 točke. Za diskretno vektorsko polje u, velja da so to točke u_w, u_e, v_n, v_s (u, v sta komponenti u) razporejene po vsaki stranici, tako da med sosednjima kontrolnima volumnoma V obstajata enakomerna $\Delta x, \Delta y \in (\Omega)$ za vse kontrolne volumne (slika 6). Naj $S = \partial V$ predstavlja gladek rob posameznega kontrolnega volumna in $S_j = \{S_j \subset S, j < \xi(V)\}$ množico stranic kontrolnega volumna.



Slika 6: Prikaz diskretnih točk kontrolnega volumna

Kontinuitetna enačba posploši v

$$\int_V (\nabla \cdot u) dV = \int_S (u \cdot \hat{n}) dS. \tag{3.40}$$

Če končno enačbo preuredimo, dobimo izraz, ki je ekvivalenten shemi MKR. Vsi ostali izrazi se diskretizirajo po istem postopku. Konvekcijski pospešek v (3.41)

$$\int_V (u \cdot \nabla) u dV = \int_S (uu \cdot \hat{n}) dS - \int_V u(\nabla \cdot u) dV = \int_S uu \cdot \hat{n} dS. \tag{3.41}$$

Tenzorski del (viskoznosti tenzor) NS se posploši na podoben način v (3.42)

$$\int_V (\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\nabla^2 u)dV = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\int_S \nabla u \cdot \hat{n}dS. \tag{3.42}$$

Integracijo toplotne enačbe (3.43)

$$\int_V \frac{\partial\theta}{\partial t}dV + \int_V (u \cdot \nabla\theta)dV = \int_V \frac{1}{\sqrt{RaPr}}\nabla^2\theta dV, \tag{3.43}$$

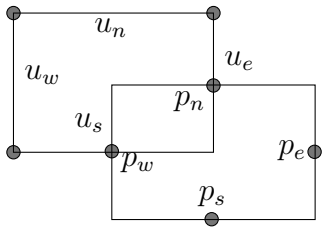
integriramo s pomočjo per partesa v (3.44)

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}\Delta V + \int_S u\theta \cdot \hat{n}dS - \int_V \theta\nabla \cdot udV = \frac{1}{\sqrt{RaPr}}\int_S \nabla\theta \cdot \hat{n}dS. \tag{3.44}$$

Ker vemo, da je $\nabla \cdot u = 0$ je končna oblika enačba (3.45)

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}\Delta V + \int_S u\theta \cdot \hat{n}dS = \frac{1}{\sqrt{RaPr}}\int_S \nabla\theta \cdot \hat{n}dS. \tag{3.45}$$

Opomba 3.4. Za člene, ki so v obliki odvodov uporabimo shemo MKR



Slika 7: Prikaz kontrolnega volumna skalarnega polja tlaka

Skalarno polje tlaka lahko rešimo na enak način, kot smo ga pri MKR. Uporabili bomo zamaknjeno mrežo. KV tlaka se sedaj začne na sredini KV vektorskega polja u (slika 7). Skalarno polje tlaka integriramo po postopku (uporabimo gradiantni izrek)

$$\int_V (-\frac{1}{\rho_0}\nabla p)dV = -\frac{1}{\rho_0}\int_S (p\hat{n})dS \approx -\frac{1}{\rho_0}(\Delta y(p_w - p_e) + \Delta x(p_n - p_s)). \tag{3.46}$$

Tako kot v prejšnjem poglavju bomo tudi tokrat rešili tlak s PP metodo. Torej (3.47)

$$\overline{\nabla}^2 p = \frac{\nabla \cdot \widetilde{u}_{i,j}}{\Delta t}. \tag{3.47}$$

Algoritem za posamezno numerično iteracijo je enak:

1. S funkcijama $u^{(t)}, \theta^{(t)}$ reši $\overline{u}^{(t+1)}$.
2. Izračunaj tak $p^{(t+1)}$, da bo $\nabla \cdot \overline{u}^{(t+1)} = 0$.
3. S pomočjo $u^{(t+1)}, \theta^{(t)}$ izračunaj $\theta^{(t+1)}$.

3.3 Reševanje sistema linearnih enačb

Za vsako numerično iteracijo N, moramo rešiti več linearnih sistemov enačb oblike (3.48)

$$A\vec{v} = \vec{b}. \tag{3.48}$$

Vektorja v, b sta ij razsežnosti, medtem ko je A matrika reda $ij \times ij$, i, j predstavljata število diskretnih točk. Za tovrstne sisteme enačbe se uporablja mnogo različnih načinov reševanja. Največji problem je, da je matrika A zelo velika in razpršena. Posledično moramo izbrati tako metodo, da bo časovna zahtevnost čim manjša. Poznamo direktne in iterativne metode. Mi bomo uporabili direktno metodo imenovano LU razcep.

Opomba 3.5. Predpostavimo, da A ni singularna.

Izrek 3.6. *Za A obstaja enoličen razcep na zgornjo trikotno matriko U in spodnjo trikotno matriko z enicami po diagonali L, tako da velja [6]*

$$A = LU. \tag{3.49}$$

Najprej matriko A razcepimo po $LU = A$. Nato rešimo sledeč sistem s premo substitucijo ($Y = U\vec{v}$)

$$LY = \vec{b}. \tag{3.50}$$

Nato z obratno substitucijo rešimo (3.51)

$$U\vec{v} = Y. \tag{3.51}$$

Tovrstna izpeljava ni najboljša. Ta ima velik problem in sicer, ko je element na poziciji pivota ≈ 0 metoda odpove.

Primer 3.7. Primer, kjer standardna LU dekompozicija ne deluje, je sledeč

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

. ♢

Zato smo uporabljali algoritem LU razcepa s pivotiranjem. Ta uporablja permutacijsko matriko, da prepreči razcep s pivotom, ki je ≈ 0. Postopek je podoben, kot pri prejšnji izpeljavi le, da razcep poteka v obliki 3.52

$$LU = PA, \tag{3.53}$$

kjer je P je permutacijska matrika.

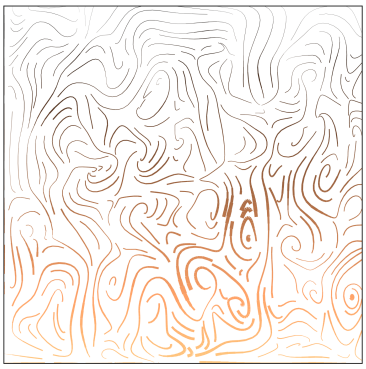
4 Interpretacija numeričnih rezultatov

V tem poglavju prikažemo rezultate numeričnih simulacij. Prav tako predstavimo nekaj ugotovitev do katerih smo prišli med samimi simulacijami. Simulacija je narejena v programskem jeziku Python. V vseh numeričnih simulacijah sta bili prisotni konstanti $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ in Prandtlovo število ($Pr = 1$). Obravnavamo domeno $\Omega = [0, 5] \times [0, 5]$.

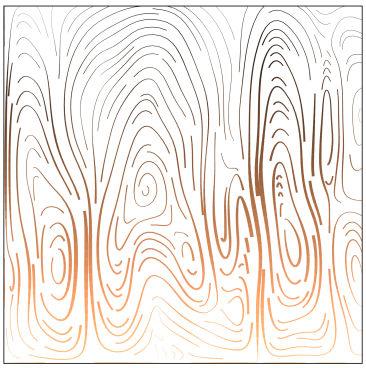
4.1 Fizikalne lastnosti PDE

4.1.1 Kritično Rayleighjevo število

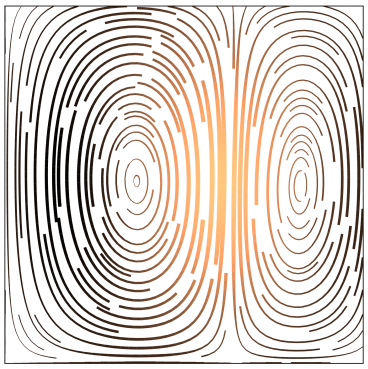
Konvekcija nastane ko vrednost Rayleighovega števila (Ra) doseže njegovo kritično vrednost. Dokler ta vrednost ni presežena, tekočina miruje. Toplota se v tem primeru ne prenaša s konvekcijo. Hitrost nastanka konvekcije je odvisna od velikosti Ra, tako kot tudi sama stabilnost pojava.



Slika 8: Simulacija $Ra = 10^2$



Slika 9: Simulacija $Ra = 10^4$



Slika 10: Simulacija $Ra = 10^6$

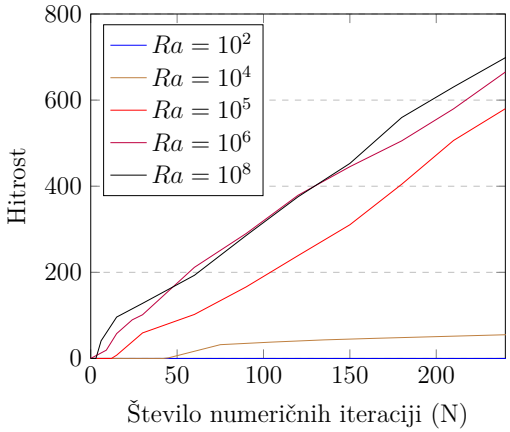
Kritična analitična rešitev je $Ra_c = 1707$ [7]. Na sliki 8 opazimo, da se konvekcija sploh ne ustvari, ker je $Ra_1 < Ra_c$. Pri ostalih dveh slikah pa opazimo prehod v konvekcijo (slika 9) ali konvekcijo (slika 10). To je zato, ker velikost Ra vpliva na čas nastanka konvekcije (v_f). To lahko vidimo na slikah zgoraj, kjer velja $v_f(Ra_2) < v_f(Ra_3)$. Hitrost nastanka konvekcije v odvisnosti od časa in velikosti kontrolnih volumnov mreže $\mathcal{M}$ je zapisana na grafu. Naj bo $h = |\mathcal{M}|$.

Stabilnost se z večanjem Ra manjša. Hkrati pa, čim se približujemo kritičnemu Ra številu, postaja čas nastanka konvekcije vse krajši. Nestabilnost konvekcije sovpada z večanjem Ra. Večje število Ra pomeni, da se v tekočini pojavijo veliko močnejše sile vzgona. Le te pa posledično vplivajo na stabilnost same konvekcije. Pri neki točki postane gibanje delcev tako močno in neurejeno, da ti destabilizirajo celoten sistem. Na koncu sistem postane tako destabiliziran, da ga ne moremo več smatrati za stabilen pojav. Sistem nato preide v turbulentno stanje.

4.1.2 Hitrost konvekcije

Hitrost same konvekcije se z večanjem Ra povečuje. Večji kot je Ra, večje so sile vzgona v sistemu. Rayleigh–Bénardovo konvekcijo poganja temperaturni gradient, ki omogoča pretok tekočine s silami vzgona. Ko je razlika v temperaturi med vročo in hladno mejo majhna, je pretok tekočine šibek in hitrost konvekcije nizka. Vendar se zaradi povečevanja temperaturne razlike (posledično se poveča tudi Ra), povečajo tudi sile vzgona. To pa vodi do povečanja hitrosti konvekcije. Na grafu 1, lahko pri $Ra = 10^2$ opazimo, da se hitrost ne razvije. Razlog za to tiči v tem, da je samo Ra pod kritično vrednostjo. (glej prilogo).

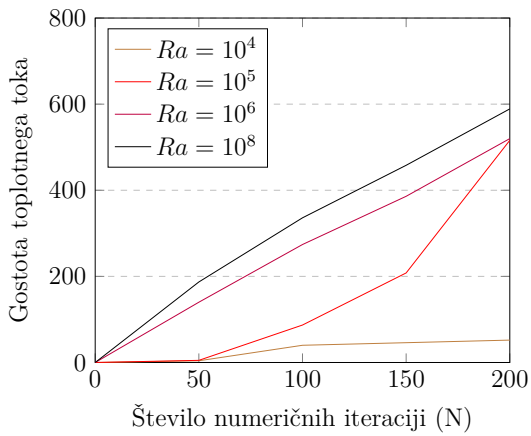
Graf 1. Hitrost konvekcije z različnimi Ra



4.1.3 Toplotni tok in Nusseltovo število

Fizikalne lastnosti termodinamične enačbe lahko opišemo z dvema količinama. Gostota toplotnega toka $\phi_q = -k\nabla T$ in Nusseltovim številom $Nu = \frac{hL}{k}$, ki sta neposredno odvisna od Ra. Kot pričakovano se tako ϕ_q kot Nu višata v odvisnosti od Ra (graf 2)

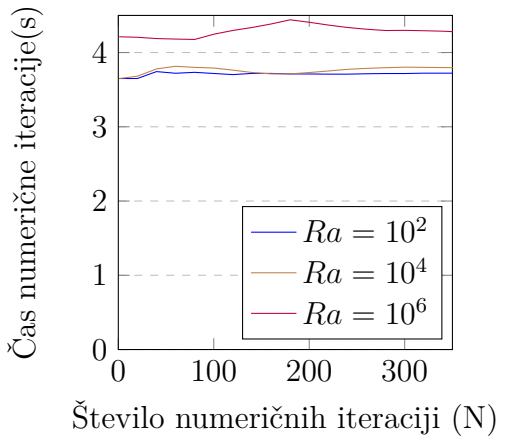
Graf 2. Odvisnost ϕ_q od različnih Ra



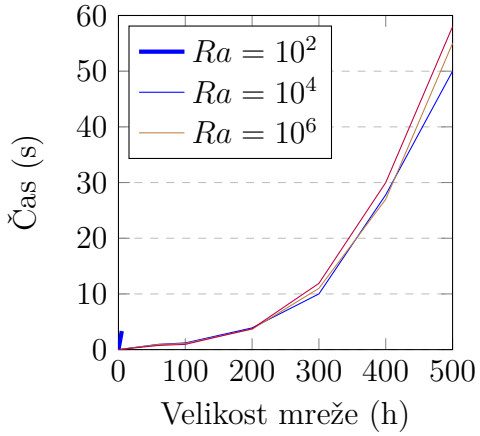
4.2 Časovna zahtevnost PDE

Časovna zahtevnost Rayleighovega števila je odvisna od velikosti in oblike kontrolnih volumnov ter od velikosti Ra.

Graf 3. Povprečni čas simulacije



Graf 4. Čas simulacije z različnimi R_a



V grafu 3 sva med seboj primerjala čas ene numerične iteracije za različne Ra. Zgenerirala sva 350 iteracij, da bi ugotovila ali pride do večjih odstopanj. Za samo simulacijo smo si izbrali velikost kontrolnega volumna $|h|= 200$. S tem smo zagotovili hitre rezultate. Ob manjši velikosti kontrolnih volumnov bi bil, zaradi omejenih zmožnosti računalnika, celoten proces veliko daljši. Prav tako lahko opazimo, da čas, ki je potreben za izvedbo ene simulacije ne niha drastično. To pomeni, da število numeričnih iteraciji ne vpliva bistveno na sam čas. Vpliva samo Ra.

Na grafu 4 lahko vidimo, kako velikost mreže in Ra vplivata na sam čas simulacije. Ugotovila sva, da so si rezultati med seboj precej podobni oziroma se krivulje skoraj prekrivajo. Opazimo razmerje med velikostjo kontrolnega volumna in časom. Določiti samo numerično zahtevnost za MKV je težko, ker je ta odvisna od oblike kontrolnih volumnov in od uporabljene metode za reševanje linearnega sistema enačb. Mi smo uporabili LU razcep, tako lahko pričakujemo, da bo $t \leq O(N^3)$, kjer je N število diskretnih točk.[8], [9]

4.3 Stabilnost diskretizacije PDE

Če je diskretizacija PDE nestabilna potem lahko že majhne spremembe v vhodnih podatkih ali prehodih numeričnih iteraciji povzročijo velike spremembe v sami rešitvi, oziroma, da se ta rešitev ne približuje pravi rešitvi. Stabilnost je zelo pomembna lastnost, saj omogoča, da dobimo zanesljive rezultate. S pomočjo Von Neumanove analize lahko določimo stabilnost diskretizacije. Mi smo uporabljali le enega izmed glavnih pogojev za stabilno diskretizacijo t.i Courant–Friedrichs–Lewyjev pogoj(CFL) pogoj, ki pravi, da mora Δt za zagotavljanje stabilnega pojava biti manjši ali enak vrednosti, ki jo določa razmik diskretnih elementov. Imenuje se po Richardu Courantu, Kurtu Friedrichsu in Hansu Lewyju, ki so ga opisali v svojem dokumentu iz leta 1928. [10].

5 Sklep

V raziskovalnem delu predstavimo metodo končnih volumnov na primeru Rayleigh Benardove konvekcije. Potrdili smo pravilnost rešitve naše metode. Zaradi preproste zgradbe metode, ta omogoča prilagodljivost za ostale probleme, ki nastanejo v mehaniki tekočin. Veliko pozornosti smo namenili tudi obnašanju PDE. Ugotovili smo, da je metoda končnih volumnov pri pravilni diskretizaciji domene lahko zelo hitra učinkovita, kar pojasni njeno uporabo na področju mehanike tekočin.

Raziskovalna naloga ima veliko možnosti za uporabo kot tudi nadgradnjo. Rayleigh Benardov pojav je obravnavan že vrsto let. Skozi leta je bilo ugotovljeno, da se pojav in njemu podobne strukture velikokrat pojavijo tudi v naravi. S pomočjo izpeljane numerične metode omogočamo fizikom nadgradnjo naloge z opisom obnašanja različnih poskusov, ki temeljijo na podlagi Rayleigh Benardove konvekcije.

Nalogo lahko preprosto razvijejo tudi ostali. NS smo izpeljali za enega najosnovnejših pojavov, ki uporablja nestisljive Navier Stokesove enačbe. Tako lahko našo izpeljavo zelo hitro prilagodijo za drugačne robne in začetne pogoje ali pa za probleme, ki ne vključujejo termodinamične komponente.

Nalogo se preprosto nadgradi tudi s primerjanjem različnih oblik topološke domene kontrolnih volumnov (metoda MKV), ki lahko močno vplivajo na natančnost in hitrost numerične izpeljave. V nalogi smo dobili odlične rezultate s preprostim likom, predvsem zaradi oblike primarne domene.

Zahvala

Za mentorstvo se zahvaljujeva šolskemu mentorju Gregi Celcarju, prof. fiz. in doc. dr. Georgeu Mejaku iz Fakultete za matematiko in fiziko. Nudila sta podporo in usmeritev pri nastajanju raziskovalne naloge ter bila vedno pripravljena pomagati.

Zahvaljujeva se tudi ravnateljici Gimnaziji Jožeta Plečnika Ljubljana, gospe Lidiji Žigon, za odobritev raziskovanja in za podporo pri obšolskem raziskovalnem delu ter drugim profesorjem na šoli.

Zahvala gre tudi najinim sošolcem 3.A in razredničarki Simoni Granfol, prof. matematike, ki so naju spodbujali pri raziskovanju.

Literatura

[1] Paul Manneville. *Rayleigh-Bénard Convection: Thirty Years of Experimental, Theoretical, and Modeling Work*, volume 207, pages 41–65. 06 2010.

[2] Benjamin James Hepworth. Nonlinear two-dimensional rayleigh-bénard convection. University of Leeds, March 2014.

[3] Airil Yasreen Mohd Yassin Norsarahaida Amin Nursalasawati Rusli, Erwan Hafizi Kasiman Ahmad Kueh Beng Hong. Numerical computation of a two-dimensional navier-stokes equation using an improved finite difference method. *MATEMATIKA - Department of Mathematics, UTM*, 27:5–6, 08 2011.

[4] Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

[5] J.H. Ferziger, M. Perić, and R.L. Street. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2020.

[6] J. Kozak and Z. Bohte. Numericna analiza. pages 247–280, 2008.

[7] Nasreddine Ouertatani, Nader Ben-Cheikh, Brahim Beya, and Taieb Lili. Numerical simulation of two-dimensional rayleigh–bénard convection in an enclosure. *Comptes Rendus Mécanique*, 336:464–470, 05 2008.

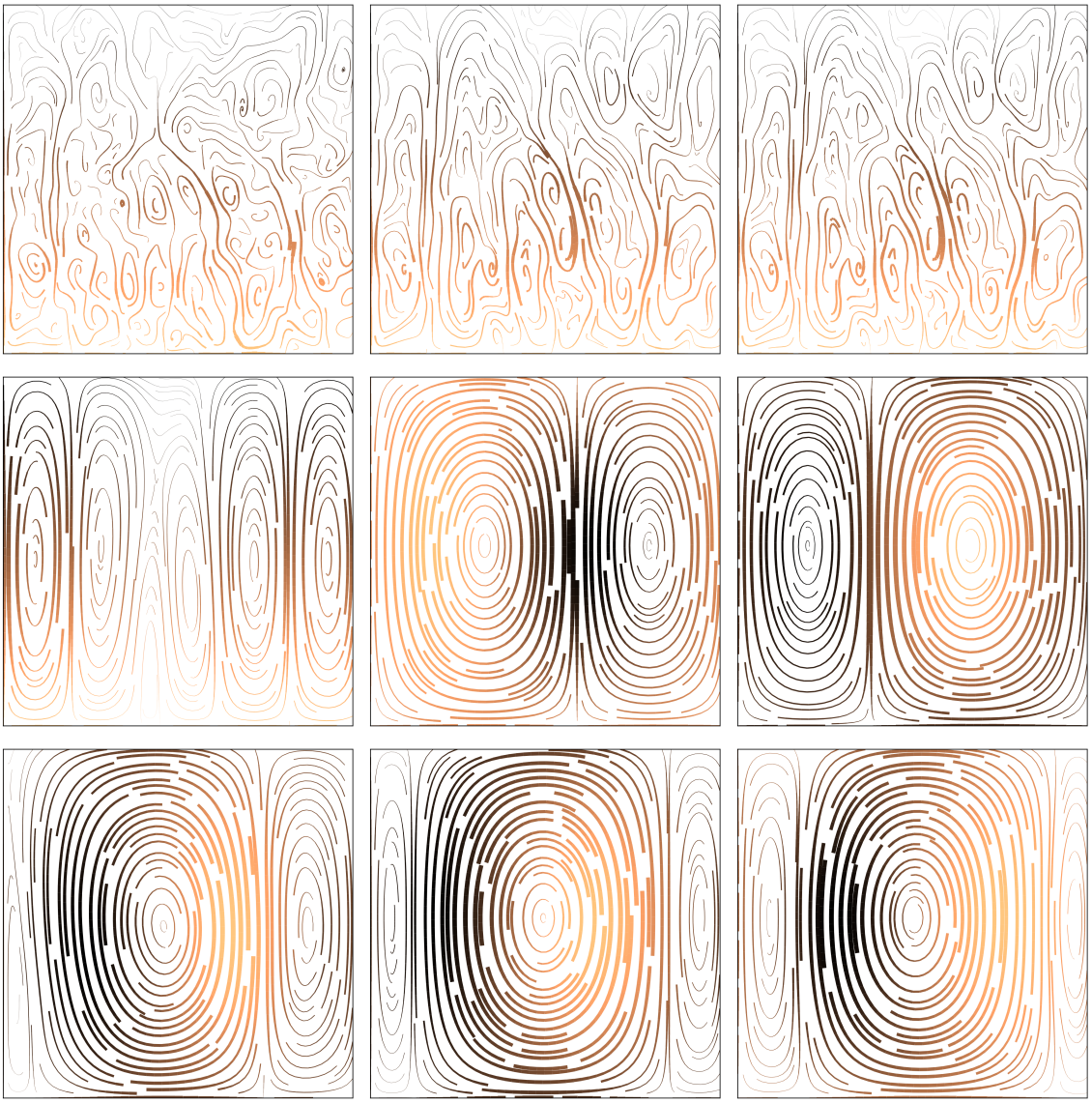
[8] Hidajet Hadić. Development and application of finite volume method for the computation of flows around moving bodies on unstructured, overlapping grids. 2006.

[9] A. Pinelli, I.Z. Naqavi, U. Piomelli, and J. Favier. Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume navier–stokes solvers. *Journal of Computational Physics*, 229(24):9073–9091, 2010.

[10] Rebecca Fiebrink. Ode and pde stability analysis. pages 35–39, 2019.

[11] S. Vedantam, M.T. Dhotre, and J.B. Joshi. Three-dimensional cfd simulation of rayleigh–benard convection for low prandtl number fluids. *Chemical Engineering Research and Design*, 84(1):29–37, 2006.

[12] Roshan Samuel, Ravi Samtaney, and Mahendra K. Verma. Large-eddy simulation of rayleigh-bénard convection at extreme rayleigh numbers, 2022.



Priloga 1 - Konvekcija v odvisnosti od $Ra = 10^4$, $Ra = 10^6$, $Ra = 10^8$ v iteraciji 5, 100, 400