

Reševanje polinomskih enačb z geometrijo

Avtorji: Ema Ptičak, Tadej Vovk

Mentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Področje: SŠ matematika

april, 2023

Škofijska gimnazija Vipava

Zahvala

Zahvaljujemo se profesorjem Škofijske gimnazije Vipava:

- profesorju Alojzu Grahorju za usmerjanje in spodbude pri raziskovanju,
- profesorici Sonji Matelič za pregled povzetka v angleškem jeziku.

Povzetek

V nalogi obravnavamo reševanje polinomskih enačb z racionalnimi koeficienti, to je reševanje enačb oblike

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

kjer so koeficienti a_i racionalna števila. Za polinomske enačbe do vključno četrte stopnje so odkrili formule in postopke, pri katerih se rešitve izrazijo s koeficienti polinoma. Sicer pa lahko polinomske enačbe z racionalnimi koeficienti poljubne stopnje rešimo tako, da polinom na levi strani enačbe razcepimo (če je to mogoče). Običajni algebraični postopek je uporaba Hornerjevega algoritma, s katerim poiščemo racionalne ničle. V nalogi obravnavamo alternativne metode reševanja polinomskih enačb in sicer s pomočjo dinamične geometrije, konstrukcije skupnih tangent, s pomočjo prepogibanja papirja ter s pomočjo tako imenovane želvjve grafike. S temi metodami rešimo tudi zelo znan starogrški problem podvojitve kocke.

Ključne besede: *polinomska enačba, matematični origami, dinamična geometrija, želvjva grafika, prepogibanje papirja, podvojitve kocke*

Abstract

The following research project deals with solving polynomial equations with rational coefficients, which is solving equations formed as

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

where the coefficients a_i are rational numbers. Different formulas and procedures have been discovered for solving polynomial equations up to the fourth power, where the solutions can be written with the coefficients of the polynomial. Polynomial equations with rational coefficients can be solved by splitting the left side of the polynomial (if possible). One common algebraic procedure is the use of the Horner's algorithm by which rational solutions are found. This research project, however, discusses alternative methods for solving polynomial equations. The methods presented include the use of dynamic geometry, the construction of common tangents, paper folding and the use of so-called turtle graphics. Following those methods, the famous ancient Greek problem of doubling the cube can also be solved.

Key words: *polynomial equation, mathematical origami, turtle graphic, paper folding, trisection, doubling of cube.*

Kazalo vsebine

Zahvala	3
Povzetek	4
Abstract	4
1 Uvod.....	7
1.1 Pravila konstrukcij z ravnilom in šestilom	7
1.2 Matematični origami	7
1.3 Cilji naloge.....	9
1.4 Metode dela.....	9
2 Reševanje kvadratne enačbe	10
2.1 Reševanje kvadratne enačbe z ravnilom in šestilom	10
2.2 Reševanje kvadratne enačbe z dinamično geometrijo	11
2.3 Parabola	14
2.3.1 Definicija parabole	14
2.3.2 Konstrukcija parabole s prepogibanjem papirja	15
2.4 Reševanje kvadratne enačbe s pomočjo parabole	17
2.5 Reševanje kvadratne enačbe s prepogibanjem papirja	20
2.6 Reševanje kvadratne enačbe z želvjo grafiko	21
3 Reševanje kubične enačbe	23
3.1 Reševanje kubične enačbe s parabolama.....	23
3.2 Reševanje kubične enačbe s prepogibanjem papirja	26
3.3 Reševanje kubične enačbe z želvjo grafiko.....	26
3.4 Primeri reševanja polinomskih enačb tretje stopnje	27
3.5 Hornerjev algoritem z želvjo grafiko in s prepogibanjem papirja	30
4 Podvojitve kocke.....	34
4.1 Podvojitve kocke s parabolama	34
4.2 Podvojitve kocke s prepogibanjem papirja.....	36
4.3 Podvojitve kocke z želvjo grafiko	37
5 Reševanje polinomskih enačbe višje stopnje	38
5.1 Reševanje z želvjo grafiko	38
5.2 Reševanje s prepogibanjem papirja	42
6 Zaključek	44

7	Viri in literatura.....	45
	Slikovno kazalo	46

1 Uvod

1.1 Pravila konstrukcij z ravnilom in šestilom

Navadno za matematične konstrukcije uporabljamo ravnilo (brez merila) in šestilo, to sta tudi tako imenovana evklidski orodji. Po viru (Hatori, brez datuma) je matematična konstrukcija z njima zaporedje treh postopkov v ravnini:

E1: Za dani dve točki P_1 in P_2 lahko narišemo premico, tako da bo ta potekala skozi obe.

E2: Za dano točko O in daljico P_1P_2 lahko narišemo krožnico, katere središče je v točki O in katerega polmer je dolžina daljice P_1P_2 .

E3: Za dane premice in krožnice lahko določimo presečišča.

1.2 Matematični origami

Različni avtorji nekoliko drugače razvrstijo in poimenujejo pravila matematičnega origamija. Nekateri jih imenujejo preprosto pravila, drugi pa aksiomi (Huzita-Justinovi aksiomi). Tu se bomo držali vira (Hull, 2021) in jih poimenovali *osnovne origami operacije*. Pri vseh osnovnih origami operacijah uporabljamo enojni pregib (ko papir enkrat prepognemo).

O1: Za dani različni točki P_1 in P_2 obstaja pregib, s katerim dobimo premico skozi dani točki.

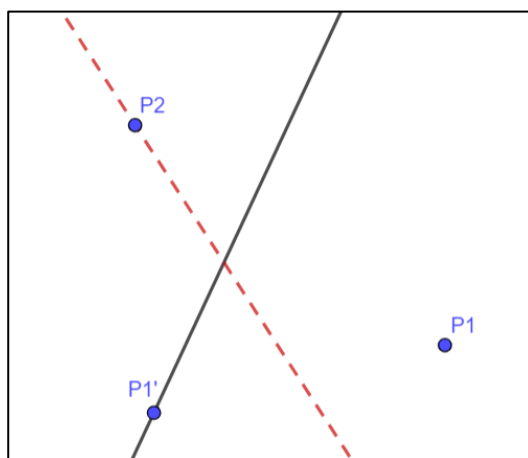
O2: Za dani premici lahko poiščemo presečišče, če obstaja.

O3: Za dani dve točki P_1 in P_2 obstaja pregib, ki točko P_1 preslika v točko P_2 (dobimo simetralo daljice P_1P_2).

O4: Za dani dve različni premici l_1 in l_2 obstaja pregib, ki premico l_1 preslika na premico l_2 (dobimo simetralo kota, ki ga določata premici l_1 in l_2).

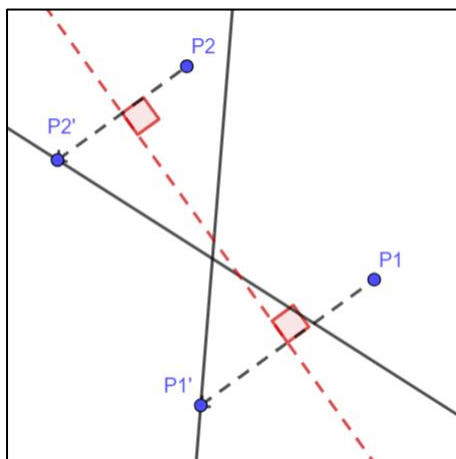
O5: Za dano točko P in premico l lahko naredimo pregib skozi točko P pravokotno na premico l (dobimo pravokotnico na premico, ki poteka skozi dano točko).

O6: Za dani točki P_1 in P_2 ter premico l lahko naredimo pregib tako, da točko P_1 preslika na premico l in da poteka skozi točko P_2 . (Slika 1)



Slika 1: Šesta osnovna origami operacija

O7: Za dani točki P_1 in P_2 ter premici l_1 in l_2 lahko naredimo pregib tako, da se točka P_1 preslika na premico l_1 in točka P_2 preslika na premico l_2 . (Slika 2)



Slika 2: Sedma osnovna origami operacija

1.3 Cilji naloge

V nalogi smo si zastavili tri cilje:

- Prvi cilj: Preučiti, kako z željo grafiko rešimo polinomske enačbe poljubne stopnje.
- Drugi cilj: Preučiti, kako s prepogibanjem papirja rešimo kvadratne in kubične enačbe.
- Tretji cilj: Rešiti starogrški problem podvojitve kocke

1.4 Metode dela

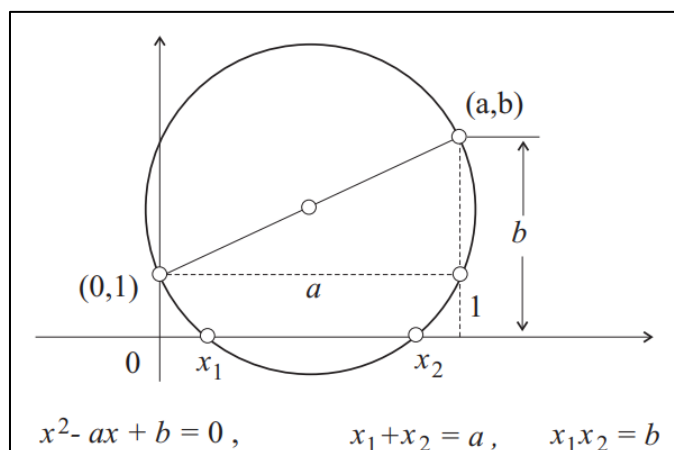
Pri izdelavi raziskovalne naloge smo uporabljali:

- metodo dela po strokovni literaturi in internetnih virih,
- preiskovanje s pomočjo grafičnega programa GeoGebra,
- računanje s pomočjo programa Derive,
- praktično preizkušanje s prepogibanjem papirja ter
- matematično sklepanje in dokazovanje.

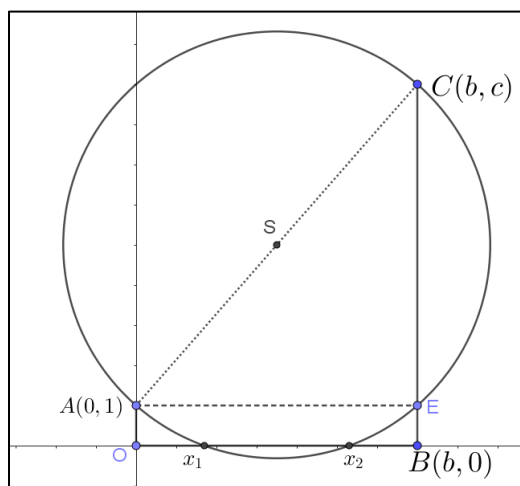
2 Reševanje kvadratne enačbe

2.1 Reševanje kvadratne enačbe z ravnilom in šestilom

V viru (Hladnik, 2014) je objavljena slika (Slika 3), ki opisuje reševanje kvadratne enačbe s krožnico. V nadaljevanju smo oznake priredili in dokazali Trditev 1.



Slika 3: reševanje kvadratne enačbe s Carlyleovo krožnico (Hladnik, 2014)



Slika 4: K dokazu trditve 1 (reševanje kvadratne enačbe s Carlyleovo¹ krožnico)

¹ Thomas Carlyle (1795-1881) je bil škotski filozof, esejist in učitelj. Prav njemu pripisujejo odkritje geometrijske interpretacije reševanja kvadratne enačbe.

Slika 3 nam poda enačbo:

$$x^2 - bx + c = 0, \quad (1)$$

kjer sta b in c racionalni števili.²

Trditev 1: Dana je enačba $x^2 - bx + c = 0$. V koordinatnem sistemu narišemo točke $A(0, 1)$, $B(b, 0)$, $C(b, c)$. Naj bo točka S razpolovišče daljice AC . Tedaj seka krožnica središčem S in polmerom SA abscisno os v rešitvah dane enačbe.

Dokaz: (Slika 4) Koordinati središča krožnice sta $S\left(\frac{b}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$, polmer SA pa je enak $\frac{\sqrt{b^2 + (c-1)^2}}{2}$.

Enačba krožnice je $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c-1)^2}{4}$. Poiščemo presečišče krožnice z abscisno osjo, tako da vstavimo $y = 0$ in enačbo poenostavimo. Dobimo $x^2 - bx + c = 0$. Tako smo dokazali, da presečišča opisane krožnice z abscisno osjo zadoščajo prvotni enačbi.

q. e. d.

2.2 Reševanje kvadratne enačbe z dinamično geometrijo

Programi dinamične geometrije nam omogočajo, da s pomočjo premikanja točk simuliramo dogajanje pri narisanih konstrukcijah. V nalogi smo za preiskovanje uporabljali program GeoGebra. Idejo smo povzeli po prejšnjem poglavju.

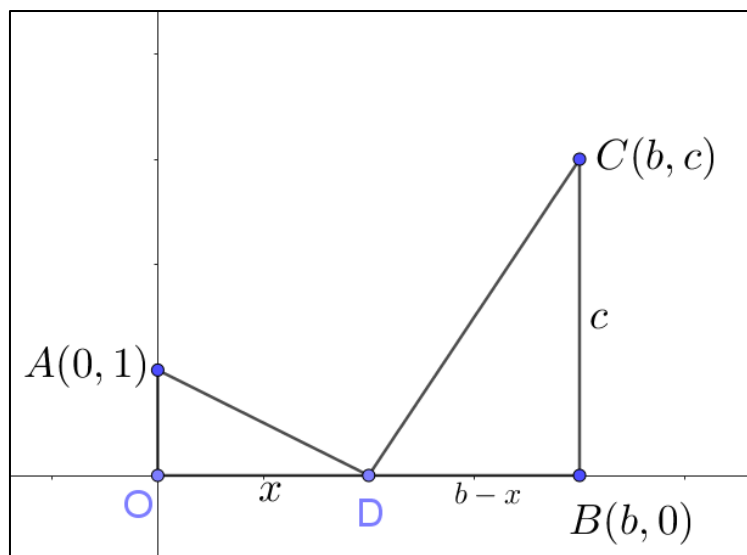
Vzemimo kvadratno enačbo (1) in jo preoblikujemo:

$$x(x - b) = -c, \quad (2)$$

$$\frac{x}{1} = \frac{c}{b - x}.$$

Razmerje (2) nas spomni na podobnost trikotnikov: prvi ima stranici x in 1 , drugi $b - x$ ter c . V koordinatnem sistemu narišimo točke $A(0, 1)$, $B(b, 0)$ in $C(b, c)$ (Slika 5). Na daljici AB pa izberemo točko D . Trikotnika ODA in BCD sta pravokotna, a ne vedno podobna. Podobna sta, ko je izpolnjena enačba (1). To pa je takrat, ko je x rešitev te enačbe.

² V enačbi $ax^2 - bx + c = 0$, $a \neq 0$ lahko vodilni koeficient izpostavimo in dobimo enačbo (1).



Slika 5: Prikaz podobnih trikotnikov

V primeru, ko sta trikotnika ODA in BCD podobna, sta kota ODA in BDC komplementarna. Tedaj je kot ADC pravi kot. Tako smo odkrili preprosto grafično metodo reševanja kvadratne enačbe s pomočjo dinamične geometrije.

Opis postopka:

Dana je enačba (1) iz prejšnjega poglavja

$$x^2 - bx + c = 0,$$

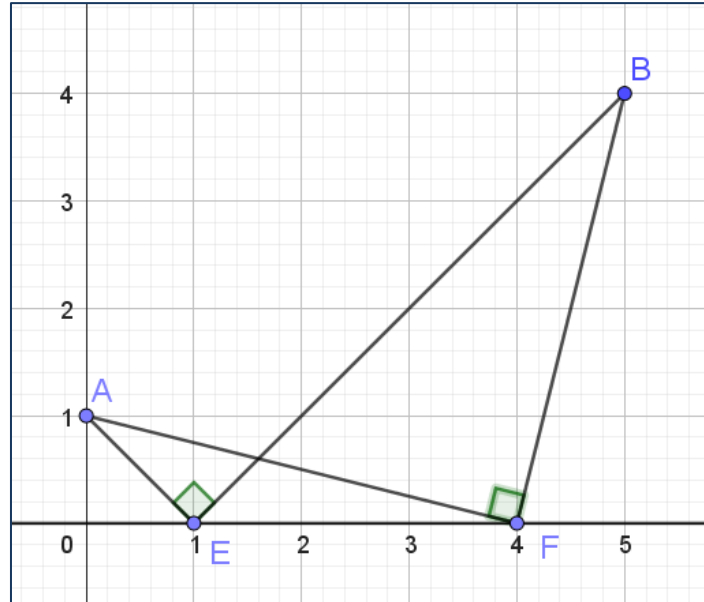
kjer sta b in c racionalni števili.

S programom za dinamično geometrijo narišemo v koordinatnem sistemu točke $A(0,1)$, $B(b,0)$ in $C(b,c)$. Na abscisni osi izberemo poljubno točko D in narišemo daljici AD in DC . Označimo kot ADC . Premikamo točko D vzdolž abscisne osi tako, da je označeni kot pravi kot. Abscisa točke D je rešitev dane enačbe. Druga rešitev je $b - x$ (po enačbi (2)). Lahko pa jo dobimo na drugem položaju točke D . Če ne dobimo pravega kota, enačba nima realnih rešitev. V primeru popolnega kvadrata je rešitev ena sama $x = \frac{b}{2}$, točka D leži na razpolovišču daljice OB .

Iz enačbe (2) in Slike 5 sledi tudi, da je razmerje $\frac{x}{1} = \frac{c}{b-x} = k$ enako smernemu koeficientu premice, nosilke daljice CD . To pa hkrati pomeni tudi, da je smerni koeficient premice skozi CD enak rešitvi dane enačbe. V poglavju 2.4. je to dokazano na drug način.

Na naslednjih dveh slikah (Slika 6 in Slika 7) sta dva primera reševanja kvadratne enačbe.

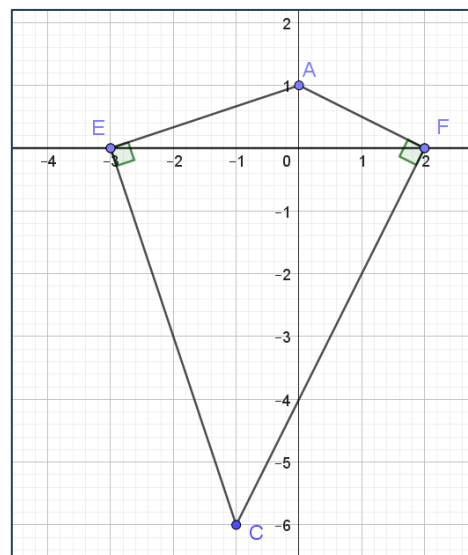
Primer 1: $x^2 - 5x + 4 = 0$ $A(0,1)$ $B(5,0)$ $C(5,4)$



Slika 6: Reševanje kvadratne enačbe (primer 1) z dinamično geometrijo

Prva rešitev je $x_1 = 1$, druga rešitev je $x_2 = 5 - x_1 = 4$.

Primer 2: $x^2 + x - 6 = 0$ $A(0,1)$ $B(-1,0)$ $C(-1,-6)$



Slika 7: Reševanje kvadratne enačbe (primer 2) z dinamično geometrijo

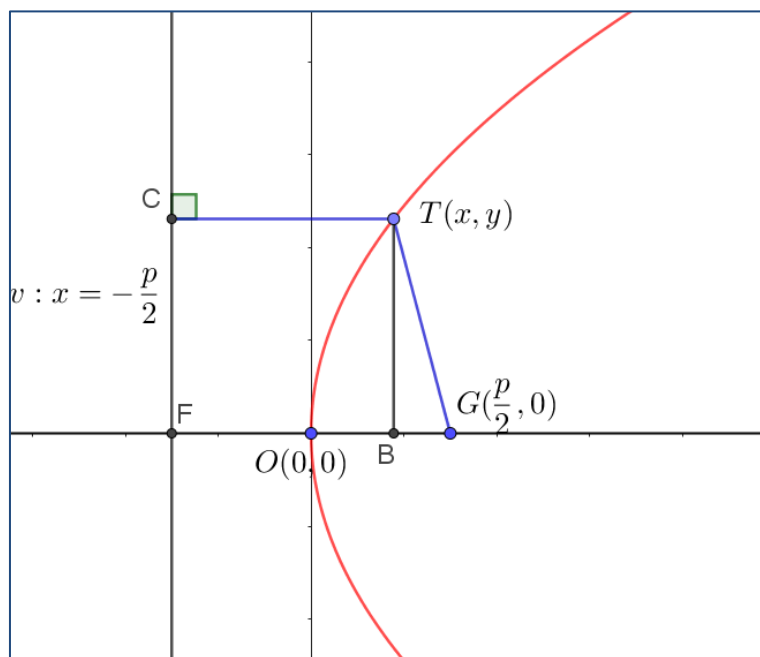
Prva rešitev je $x_1 = 2$, druga rešitev je $x_2 = -3$.

2.3 Parabola

2.3.1 Definicija parabole

Parabola je ena izmed krivulj druge stopnje $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. V nalogi obravnavamo samo tiste parabole, ki imajo os vzporedno eni izmed koordinatnih osi, torej je $B = 0$.

Geometrijsko definiramo parabolo kot množico točk v ravnini, ki so enako oddaljene od dane točke G -gorišča in premice vodnice. Izpeljimo enačbo (Slika 8).



Slika 8: K definiciji parabole

V koordinatnem sistemu sta dani gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ in premica vodnica z enačbo $x = -\frac{p}{2}$. Razdalja med goriščem G in premico vodnico je p . Točka T na paraboli je enako oddaljena od gorišča, zato je

$$d(T, G) = d(T, v),$$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

$$y^2 = 2px$$

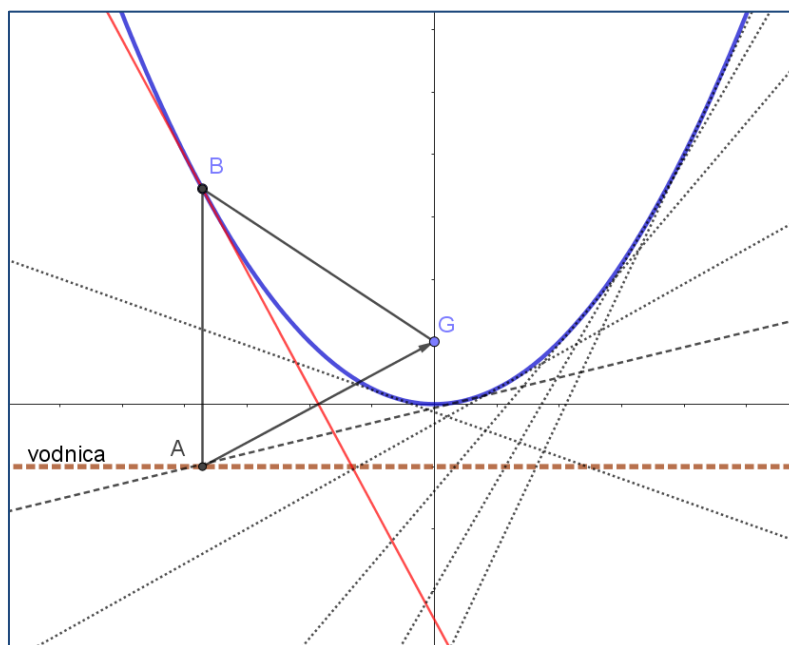
Izpeljana enačba parabole ima teme v koordinatnem izhodišču. Če je teme v točki (r, q) , je njena enačba

$$(y - q)^2 = 2p(x - r)$$

Če je os parabole vzporedna ordinatni osi, je enačba:

- teme v $(0,0)$, gorišče v $(0, \frac{p}{2})$, enačba vodnice $y = -\frac{p}{2}$: $x^2 = 2py$
- teme v (r, q) , enačba vodnice $y = -\frac{p}{2}$: $(x - r)^2 = 2p(y - q)$

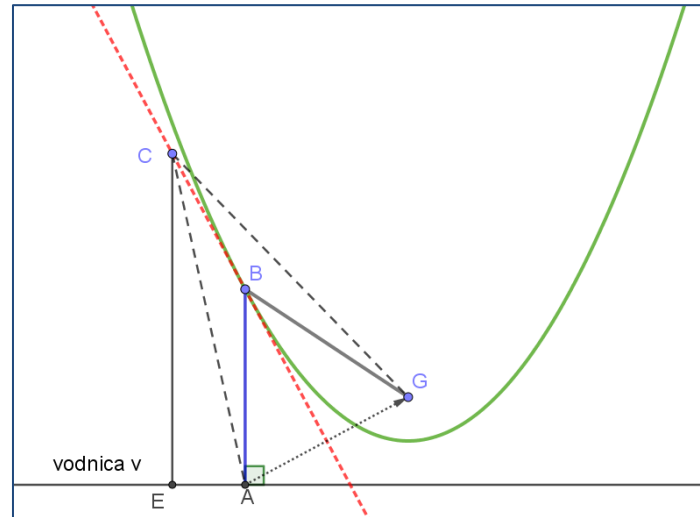
2.3.2 Konstrukcija parabole s prepogibanjem papirja



Slika 9: »Konstrukcija« parabole s prepogibanjem papirja

Potek: Na pravokotnem papirju izberemo točko G (gorišče) in vzporedno s spodnjim robom narišemo premico vodnico. Še bolje je, da za premico vodnico izberemo kar spodnji rob papirja. Premico vodnico (ali spodnji rob papirja) prepogibamo tako, da sovpada z goriščem. Praktično je najlažje, da si na premici vodnici (spodnjem robu) izberemo niz točk in vsako točko prepognemo tako, da sovpada z goriščem. Tako dobimo veliko pregibov. To so tangente na parabolo z goriščem G in premico vodnico (glej Trditev 2). Ogrinjače tangent določajo parabolo (Slika 9).

Trditev 2: Pregib, ki ga dobimo tako, da premico vodnico prepognemo v točko G , je tangenta na parabolo z goriščem G in dano premico vodnico.



Slika 10: K dokazu, da je prečnik tangenta na parabolo

Dokaz: (Slika 10) Pregib BC naredimo tako, da se točka A pokriva s točko G . Za vsako točko C , ki leži na premici BC , velja, da je enako oddaljena od točk A in G (trikotnik AGC je enakokrak). Toda le ena točka med njimi je enako oddaljena od premice vodnice v in točke G . Leži na presečišču pravokotnice na vodnico skozi točko A in premico skozi BC . Za vsako drugo točko C , ki leži na premici (pregibu) skozi BC velja, da njena razdalja do premice vodnice ni enaka razdalji do gorišča $|CE| \neq |CG|$.

q. e. d.

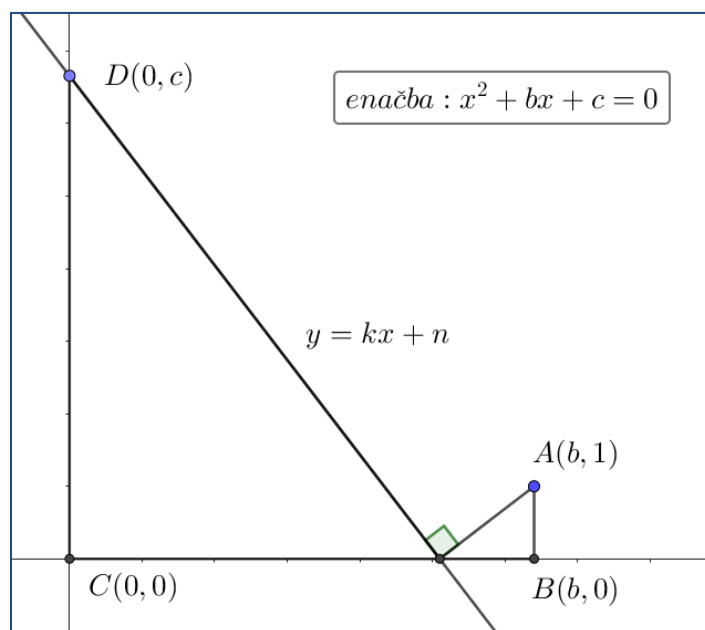
2.4 Reševanje kvadratne enačbe s pomočjo parabole

Pri reševanju prejšnjih primerov smo rešitvi kvadratne enačbe odčitali na abscisni osi, ko je bil kot med DA in DC pravi kot. Hkrati pa smo opazili, da je tudi smerni koeficient premic skozi D in C v primeru, ko je dosežen pravi kot, enak rešitvi dane enačbe. Ker je oznaka koeficientov kvadratne enačbe (1) nekoliko posebna (pozorni moramo biti na koeficient b), vzamemo kar splošno kvadratno enačbo (3), kot jo običajno zapišemo, to je:

$$x^2 + bx + c = 0, \quad (3)$$

kjer sta b in c racionalni števili.

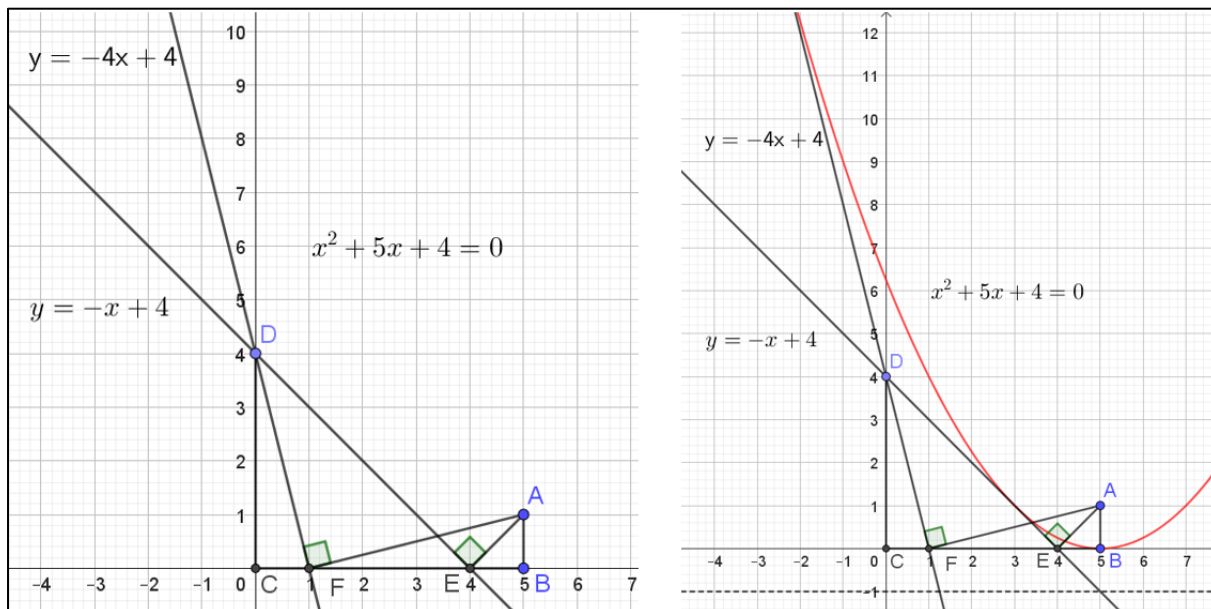
Da ohranimo izvorno idejo (da bo rešitev enačbe enaka smernemu koeficientu ustrezne premice), situacijo zrcalimo preko premice $x = \frac{b}{2}$. Ustrezne točke imajo koordinate: $A(b, 1)$, $B(b, 0)$, $C(0,0)$ in $D(0, c)$ (Slika 11).



Slika 11: Postavitev točk za reševanje kvadratne enačbe

Slika 12 je primer reševanja enačbe $x^2 + 5x + 4 = 0$ v postavitvi, ki ustreza posplošitvi (Slika 11). Premici skozi točki DE in DF imata enačbi $y = -x + 4$ in $y = -4x + 4$. Njuna smerna koeficienta sta enaka -1 in -4 , kar sta tudi rešitvi enačbe $x^2 + 5x + 4 = 0$. Sklepamo, da obstaja povezava med rešitvama dane kvadratne enačbe in smernima koeficientoma premic, ki zadoščajo pogoju, da pravokotnica v presečišču z abscisno osjo poteka skozi točko A .

Opazimo, da situacija, ki jo prikazuje Slika 12, spominja na konstruiranje parabole s pomočjo prepogibanja papirja: na listu si izberemo gorišče in potem spodnji rob prepogibamo (primerno gosto) na točko A . Pregib je tangenta na parabolo.



Slika 12: Primer reševanja kvadratne enačbe in povezave

Če naj bosta premici $y = -x + 4$ ter $y = -4x + 4$ tangenti iskane parabole, domnevamo, da ima ta parabola gorišče v A in premico vodnico $y = -1$ (to bi bil spodnji rob papirja, ki ga prepogibamo). Tudi program GeoGebra sam določi enačbo parabole, pa tudi enačbe tangent.

Domneva: Rešitvi kvadratne enačbe $x^2 + 5x + 4 = 0$ sta smerna koeficienta tangent na parabolo, ki ima gorišče v točki $A(5,1)$ in premico vodnico $y = -1$ in ki potekata skozi točko $D(0,4)$ (Slika 12).

Preverimo, ali je naša domneva pravilna.

Nastavek za enačbo parabole je $(x - r)^2 = 2p(y - q)$. V konkretnem primeru velja $p = 2$, $r = 5$ in $q = 0$, zato je enačba parabole $(x - 5)^2 = 4y$. Naj bo točka $T\left(t, \frac{(t-5)^2}{4}\right)$ na paraboli, v kateri iščemo tangento. Smerni koeficient tangente je enak odvodu $\left(\frac{(x-5)^2}{4}\right)' = \frac{x-5}{2}$ v točki T : $k = \frac{t-5}{2}$. Nastavek za enačbo tangente je $y = kx + n = \frac{t-5}{2}x + n$. Ker je to tangenta v točki P , vstavimo koordinate točke P v enačbo tangente in dobimo $n = -\frac{25-t^2}{4}$.

Enačba tangente je torej:

$$y = \frac{t-5}{2}x - \frac{t^2-25}{4}.$$

Ker je $t = 2k + 5$, enačbo tangente poenostavimo v

$$y = kx - k(k + 5).$$

Upoštevamo, da tangenta poteka skozi točko $D(0,4)$:

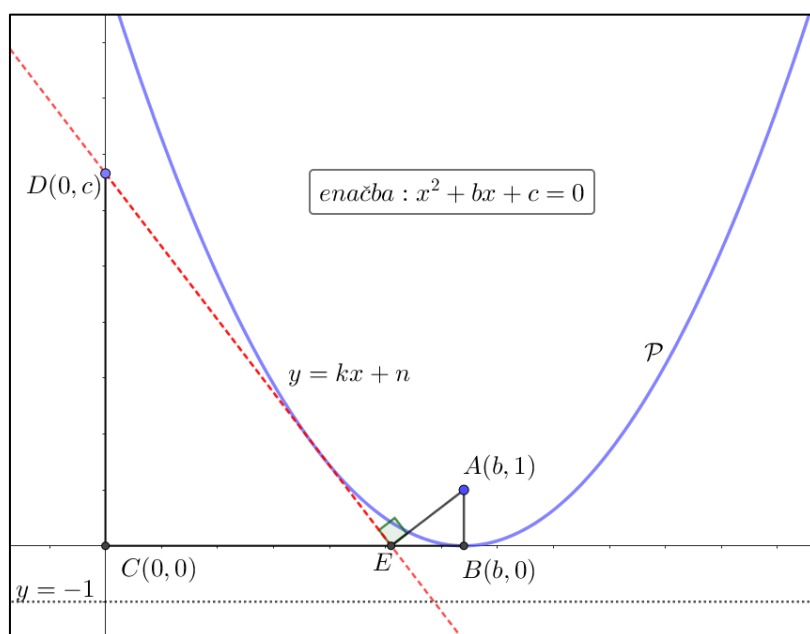
$$4 = k \cdot 0 - k(k + 5).$$

Ko poenostavimo, dobimo

$$k^2 + 5k + 4 = 0.$$

Pokazali smo, da smerni koeficient tangente ustreza prvotni kvadratni enačbi, torej sta rešitvi kvadratne enačbe enaki smernima koeficientoma tangent. Če poiščemo enačbi tangent na kakršenkoli način, smo rešili dano kvadratno enačbo.

Ugotovitve na primeru posplošimo v trditvi 3 (Slika 13).



Slika 13: Povezava rešitve s smernim koeficientom tangente

Trditev 3: Dana je enačba $x^2 + bx + c = 0$. Naj bosta točki $A(b, 1)$ in $D(0, c)$ ter parabola $\mathcal{P}$ z goriščem v A in premico vodnico $y = -1$. Skozi točko D konstruirajmo tangento na parabolo $\mathcal{P}$. Smerni koeficient te tangente je enak rešitvi dane enačbe.

Dokaz: Enačba parabole $\mathcal{P}$ je $(x - b)^2 = 4y$ oziroma $y = \frac{(x-b)^2}{4}$. Na paraboli izberemo točko $T\left(t, \frac{(t-b)^2}{4}\right)$. Smerni koeficient tangente v točki T je enak $y'(T) = k = \frac{(t-b)}{2}$. Nastavek za enačbo tangente je enak $y = kx + n$. Ob upoštevanju smernega koeficienta k in dejstva, da točka T leži na tangenti, dobimo $n = -\frac{t^2 - b^2}{4}$ in enačbo tangente:

$$y = \frac{t-b}{2}x - \frac{t^2-b^2}{4}.$$

Ker tangenta poteka skozi točko $D(0, c)$, dobimo $c = \frac{t-b}{2} \cdot 0 - \frac{t^2-b^2}{4}$. Ko vstavimo še $t = 2k + b$, dobimo enačbo

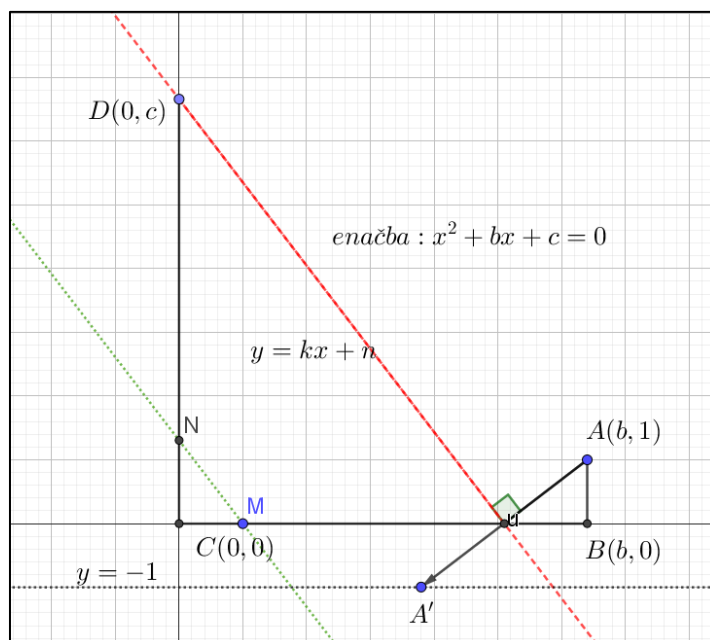
$$k^2 + bk + c = 0.$$

Sklep: Za smerni koeficient tangente smo dobili enako enačbo, kot je dana v začetku. Torej so rešitve dane enačbe enake smernim koeficientom tangents, ki zadoščajo opisanemu pogoju. V nadaljevanju si zastavimo vprašanje, kako bi še drugače poiskali tangento oziroma njen smerni koeficient.

q. e. d.

2.5 Reševanje kvadratne enačbe s prepogibanjem papirja

Kot kažejo primeri in Trditev 3, je rešitev kvadratne enačbe enaka smernemu koeficientu premice – nosilke daljice ED (ali FD), torej premice, ki gre skozi D . S slike (Slika 14) hitro opazimo, da je iskana premica (t. j. tangenta) enaka pregibu, ki ga naredimo, če točko A prepognemo na premico $y = -1$ in ki poteka skozi točko D (Slika 11). Rešitev je potem enaka količniku $x = \frac{|CD|}{|CE|}$, predznak pa izberemo glede na to, ali je premica naraščajoča ali padajoča.



Slika 14: Reševanje kvadratne enačbe s prepogibanjem papirja

Potek reševanja kvadratne enačbe $x^2 + bx + c = 0$ s prepogibanjem papirja.

Prvi korak: Na listu s koordinatnim sistemom označimo točki $A(b, 1)$ in $D(0, c)$ ter narišemo premico z enačbo $y = -1$.

Drugi korak: Naredimo pregib, ki poteka skozi točko D in hkrati preslika točko A na premico z enačbo $y = -1$ (dobimo točko A').

Tretji korak: Odčitamo dolžni daljic CE in CD ter izračunamo količnik $\mp \frac{|CD|}{|CE|}$, ki je enak rešitvi dane enačbe. Predznak določimo glede na to, ali je premica padajoča ali naraščajoča.

Četrty korak: Namesto tretjega koraka pa lahko naredimo vzporedni pregib skozi točko $(1, 0)$ k prvemu pregibu. Ordinata presečišča tega drugega pregiba z ordinatno osjo je do predznaka enaka rešitvi dane enačbe. Predznak določimo glede na naraščanje ali padanje pregiba.

2.6 Reševanje kvadratne enačbe z želvjo grafiko

Želvja grafika (angl. turtle graphics) je enostaven način pojmovanja vektorskega risanja v programerskem svetu. Je del enega izmed prvih izobraževalnih programskih jezikov *Logo*. (Virtualni) želvi uporabnik pove za koliko in pod kakšnim kotom naj se premakne, s svojimi premiki pa »želva« ustvarja »želvjo« pot. Na podlagi te ideje risanja, je zasnovana tudi ta metoda.

Na situacijo, ki jo prikazuje Slika 11, lahko torej pogledamo še drugače (Slika 15). Opazujemo vse štiri označene točke A, B, C in D ter si zamislimo pot, ki jo naredi »želva«, ko se sprehodi po poligonu A, B, C in D . V točki A je obrnjena navzdol in naredi pot dolžine 1. Nato se zasuka desno in naredi pot dolžine b . Če je b negativen, naredi pot »zadenjsko«. V točki C se zasuka desno in naredi pot dolžine c . (Če je c negativen, se premika zadenjsko.) Naredimo premici – nosilki daljic BC in CD . Na nosilki BC si izberemo premično točko $E(K, J)$. V njej naredimo pravokotnico na AE . Nato premikamo točko E po nosilki daljice BC . Ko poteka pravokotnica skozi točko D , je smerni koeficient nosilke daljice ED enak rešitvi dane enačbe. Predznak določimo kot v prejšnjih primerih. Dokaz ni potreben, saj izhaja iz lastnosti, ki smo jih dokazali ob tangenti.

V točkah $E(K, J)$ (Slika 15) se »notranja« pot »odbije kot žogica pri biljardu«, a ne tako, da je vpadni kot enak odbojnemu, ampak sta poti med seboj pravokotni. Ta način odboja poimenujemo »odboj-90«.

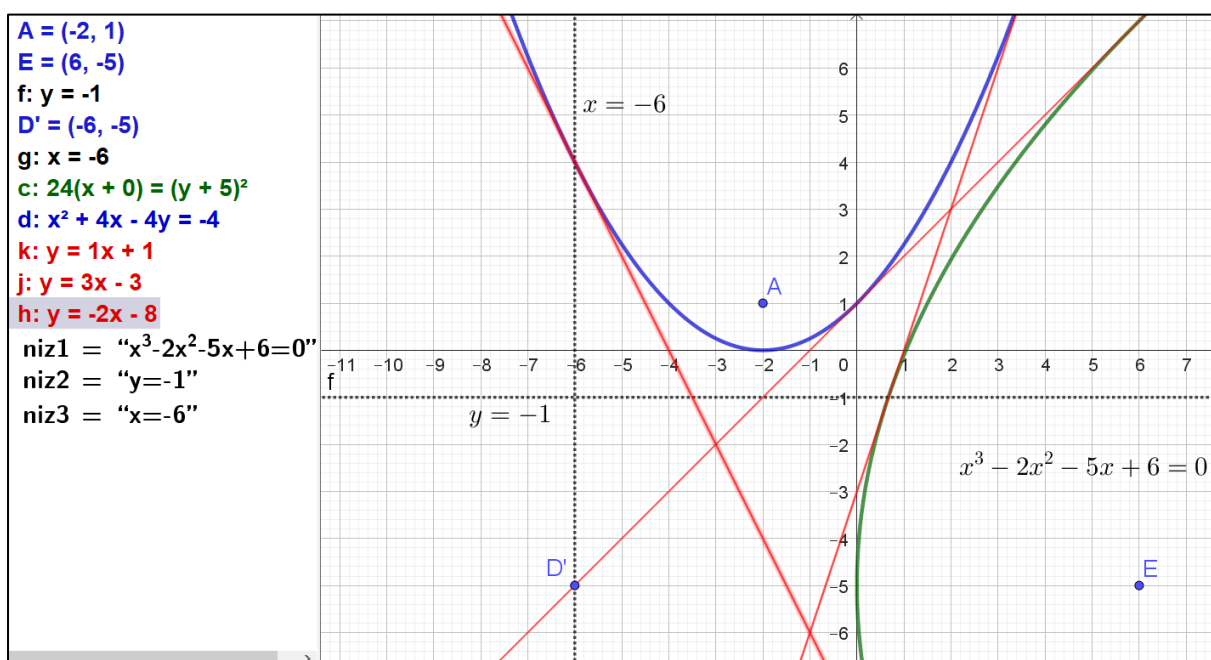
3 Reševanje kubične enačbe

Idejo reševanja kvadratne enačbe z želvjo grafiko (Slika 15) uporabimo tudi pri reševanju kubične enačbe $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Želvo poženemo še en korak dlje do točke $E(d, c)$: želva je v začetni točki $A(b, 1)$, potem pa gre navzdol in se obrača proti desni. Njena končna točka je točka $E(d, c)$.

3.1 Reševanje kubične enačbe s parabolama

Najprej si oglejmo reševanje kubične enačbe s pomočjo parabol. Ker je stopnja enačbe za eno višja, poskusimo z dvema parabolama s pravokotniki osmi. Ker program GeoGebra omogoča tudi načrtovanje skupnih tangent dveh objektov, bomo konstruirati dve paraboli in njune skupne tangente. Oglejmo si naslednji primer.

Vzemimo enačbo $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ in v koordinatnem sistemu narišimo točki $A(-2, 1)$ in $E(6, -5)$. Narišimo premici $y = -1$ ter $x = -6$ ter paraboli: prvo z goriščem v A in vodnico $y = -1$ ter drugo z goriščem E in vodnico $x = -6$. Z ukazom Geogebra narišemo skupne tangente obeh parabol (Slika 16). To so $y = x + 1$, $y = 3x - 3$ in $y = -2x - 8$. Njihovi smerni koeficienti so rešitve dane enačbe. Dokažimo povezavo med smernimi koeficienti skupnih tangent in rešitvami dane enačbe. Idejo dokaza smo povzeli po (Hatori, brez datuma).



Slika 16: Primer reševanje enačbe tretje stopnje s parabolama

Parabola z goriščem v A in vodnico $y = -1$ ima enačbo $(x + 2)^2 = 4y$, parabola z goriščem D in vodnico $x = -6$ pa $(y + 5)^2 = 24x$. Naj bo točka T na prvi paraboli: $T\left(t, \frac{(t+2)^2}{4}\right)$. Smerni koeficient tangente na prvo parabolo je enak odvodu v točki T $k = \frac{t+2}{2}$. V nastavku enačbe tangente $y = kx + n$ upoštevamo k in to, da poteka skozi točko T. Tako dobimo enačbo tangente:

$$y = \frac{t+2}{2}x - \frac{t^2-4}{4}$$

Ker je ta tangenta skupna obema parabolama, vstavimo v drugo parabolo $(y + 5)^2 = 24x$ in dobimo:

$$\frac{(2x(t+2) - t^2 + 4)^2}{16} = 24x$$

Ker je $t = 2k - 2$, sledi enačba (katere parameter je smerni koeficient tangente)

$$k^2x^2 - 2x(k^3 - 2k^2 - 5k + 12) + k^4 - 4k^3 - 6k^2 + 20k + 25 = 0$$

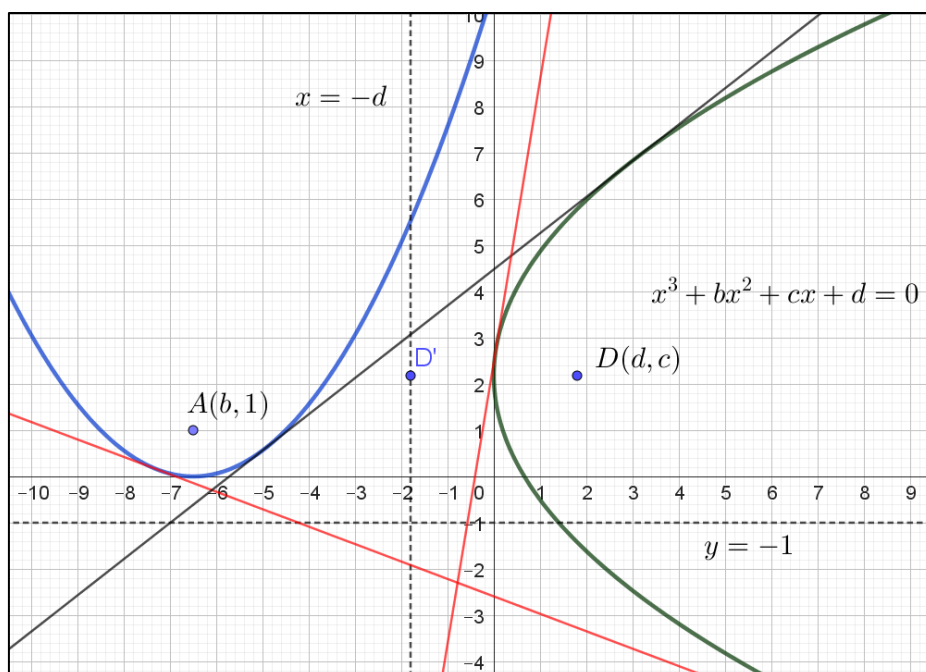
Tangenta ima tudi z drugo parabolo samo eno skupno točko, zato mora biti diskriminanta zadnje kvadratne enačbe enaka 0:

$$\begin{aligned} (-2(k^3 - 2k^2 - 5k + 12))^2 - 4k^2(k^4 - 4k^3 - 6k^2 + 20k + 25) &= 0 \\ 96(k^3 - 2k^2 - 5k + 6) &= 0 \end{aligned}$$

Sklep: Za smerni koeficient skupnih tangent na obe paraboli smo dobili enako enačbo, kot je prvotna enačba. Tako so smerni koeficienti skupnih parabol enaki rešitvam dane enačbe.

Konkretni primer posplošimo.

Trditev 4: Rešujemo enačbo $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. V koordinatnem sistemu narišemo točki $A(b, 1)$ in $D(d, c)$ ter premici $y = -1$ in $x = -d$. Zapišemo enačbi parabol: prva z goriščem v točki A s premico vodnico $y = -1$ ter drugo z goriščem v D in premico vodnico $x = -d$. Smerni koeficienti skupnih tangent obeh parabol so enaki rešitvam dane enačbe (glej Slika 17).



Slika 17: K dokazu reševanja enačbe tretje stopnje s parabolama

Dokaz: Enačba prve parabole ($A, y = -1$) je $(x - b)^2 = 4y$, enačba druge ($D, x = -d$) pa $(y - c)^2 = 4dx$.

Tangenta na prvo parabolo v točki T ima enačbo

$$y = kx - k(b + k)$$

Ker je dobljena tangenta tudi tangenta na drugo parabolo, vstavimo dobljeni y v enačbo druge parabole ter poenostavimo. Upoštevamo, da je tudi $t = b + 2k$. Tako dobimo kvadratno enačbo:

$$k^2x^2 - 2x(k^3 + bk^2 + ck + 2d) + k^4 + 2bk^3 + (b^2 + 2c)k^2 + 2bck + c^2.$$

Diskriminanta te enačbe mora biti enaka 0:

$$(-2(k^3 + bk^2 + ck + 2d) + k^4)^2 - 4k^2(k^4 + 2bk^3 + (b^2 + 2c)k^2 + 2bck + c^2) = 0$$

$$16d(k^3 + bk^2 + ck + d) = 0$$

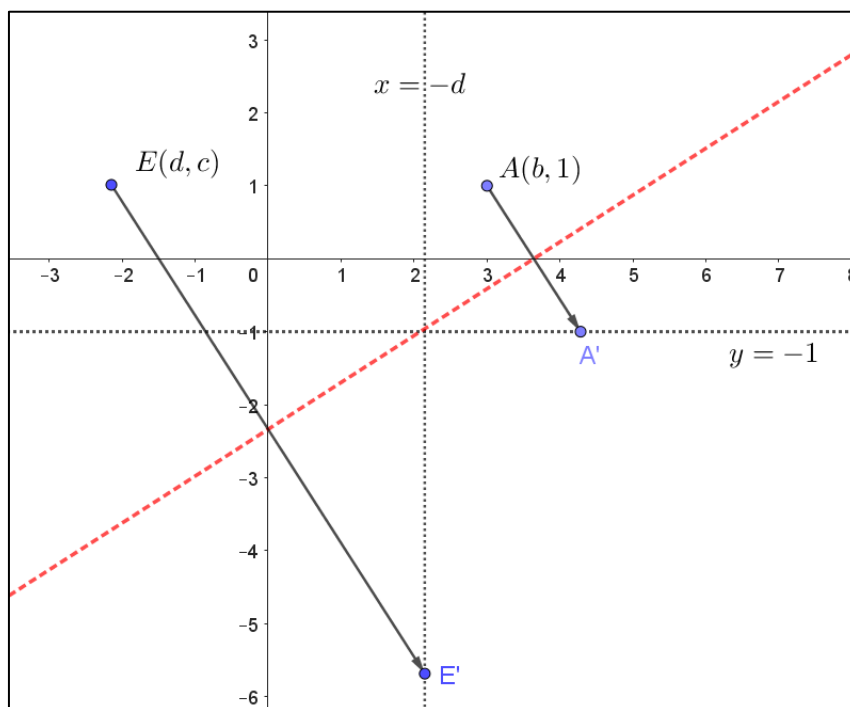
$$k^3 + bk^2 + ck + d = 0.$$

Sklep: Za izračun smernih koeficientov skupnih tangent obeh parabol smo dobili enako enačbo, kot je dana enačba. To pomeni, da so smerni koeficienti skupnih tangent enaki rešitvam dane enačbe.

q. e. d

3.2 Reševanje kubične enačbe s prepogibanjem papirja

Iz predhodno opisane situacije (Slika 17) je očitno, kako bomo enačbo $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ rešili s prepogibanjem papirja. V koordinatnem sistemu označimo točki $A(b, 1)$ in $E(d, c)$ ter naredimo pregiba in sicer prvega vzporednega abscisni osi na spodnji strani x -osi na razdalji 1 ($y = -1$) ter drugega vzporednega ordinatni osi na nasprotni strani, kot je točka E pa na enaki razdalji (Slika 18).

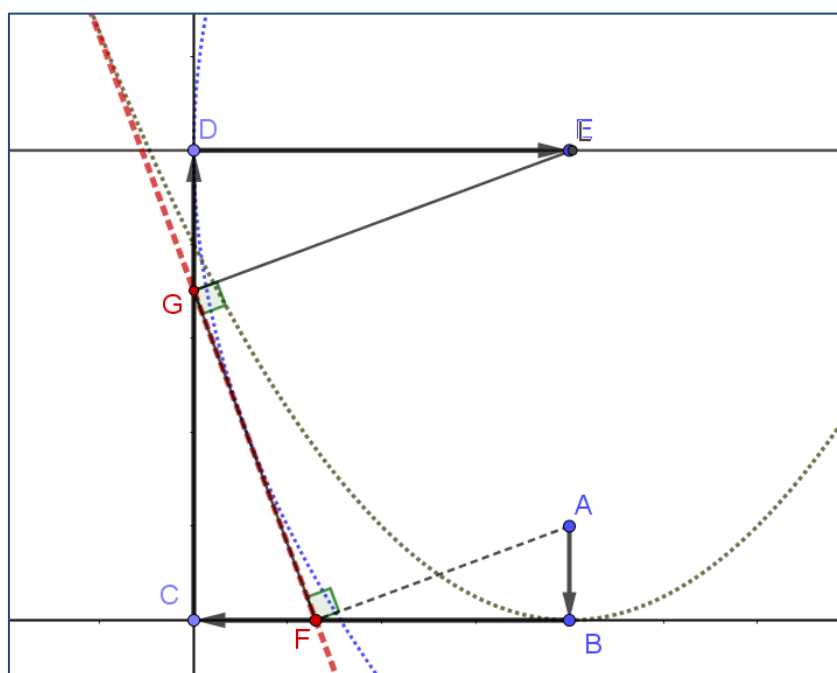


Slika 18: Reševanje enačbe tretje stopnje s prepogibanjem papirja

Potem pa naredimo pregib, tako da točko A prepognemo na premico $y = -1$ in točko E na premico $x = -d$. Smerni koeficient dobljene premice (pregiba) je enak rešitvi dane enačbe. Če obstajajo še druge rešitve, jih poiščemo na enak način.

3.3 Reševanje kubične enačbe z želvjo grafiko

Podobno kot smo iz Slika 11 izpeljali reševanje kvadratne enačbe s pomočjo prepogibanja papirja, lahko izpeljemo tudi reševanje kubične enačbe s pomočjo želvje grafike, kot smo opisali v uvodu v poglavje 3. Pri reševanju enačbe $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peljemo želvico od točke $A(b, 1)$ do točke $E(d, c)$ (Slika 19).

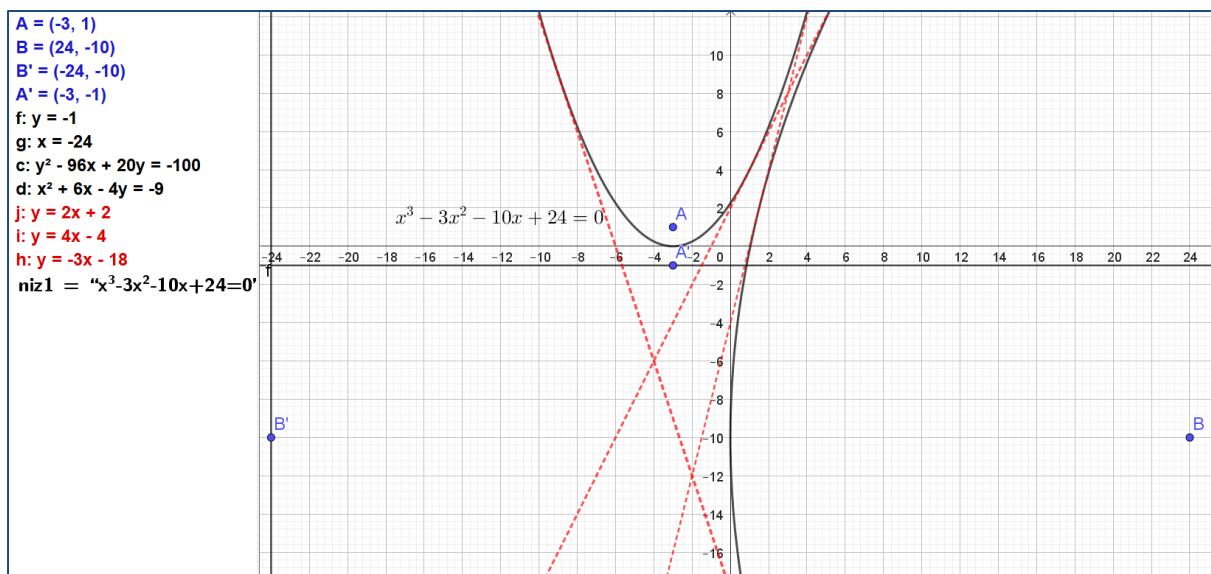


Slika 19: Reševanje enačbe tretje stopnje z želvjo grafiko

Na nosilki daljice CB izberemo drsečo točko F in naredimo notranjo pot *odboj-90*, kot smo jo opisali pri reševanju kvadratne enačbe, le da gremo tu en korak naprej. V F naredimo pravokotnico na daljico AF . Poiščemo presečišče G dobljene pravokotnice z nosilko daljice CD . V točki G narišemo pravokotnico na nosilko daljice FG . Ko gre ta pravokotnica skozi točko E , je smerni koeficient premice nosilke FG enak rešitvi dane enačbe. Dokaz ni potreben, saj se situacija popolnoma ujema z reševanjem s pomočjo parabol in z reševanjem s pomočjo prepogibanja papirja.

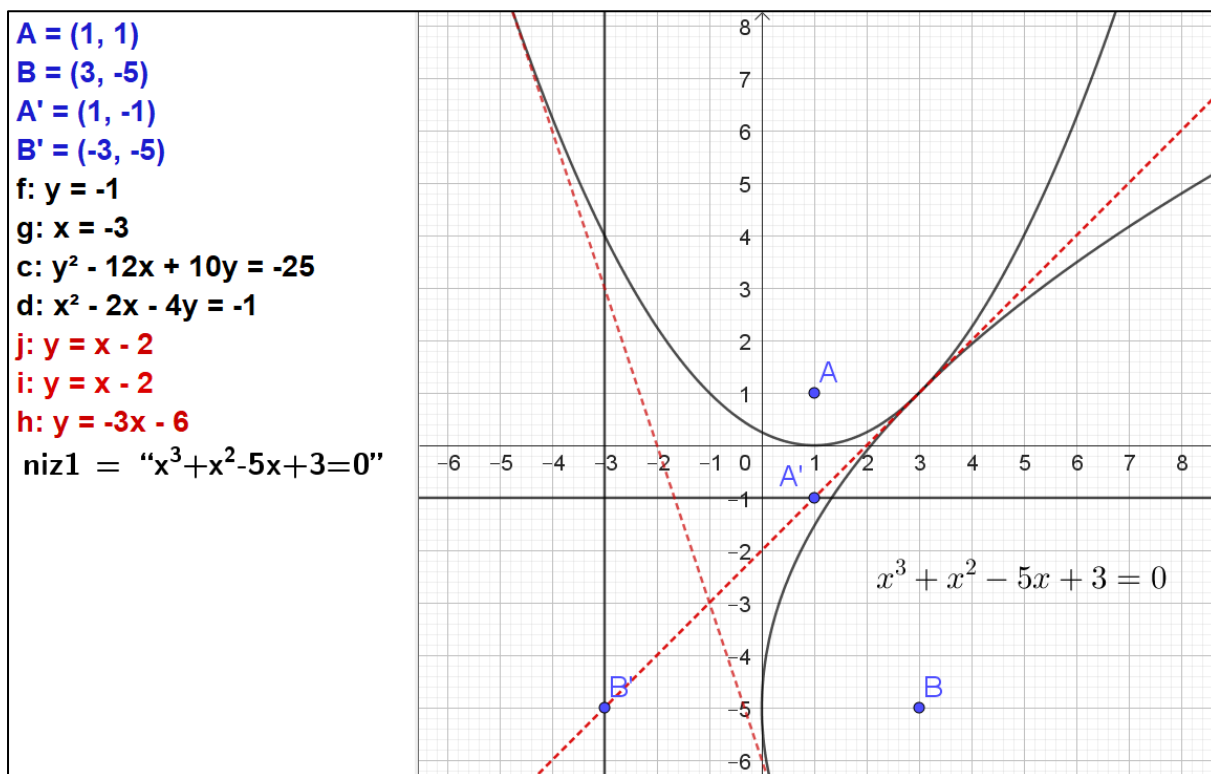
3.4 Primeri reševanja polinomskih enačb tretje stopnje

Tu navajamo štiri primere reševanja enačbe tretje stopnje glede na stopnjo njihovih rešitev. Izbrali smo način reševanja s parabolami, ker nam ta način lepo pokaže tudi medsebojno lego parabol. Slika 20 prikazuje enačbo, ki ima tri različne realne rešitve. Program GeoGebra poišče in nariše tri tangente. Njihovi smerni koeficienti so rešitve dane enačbe.



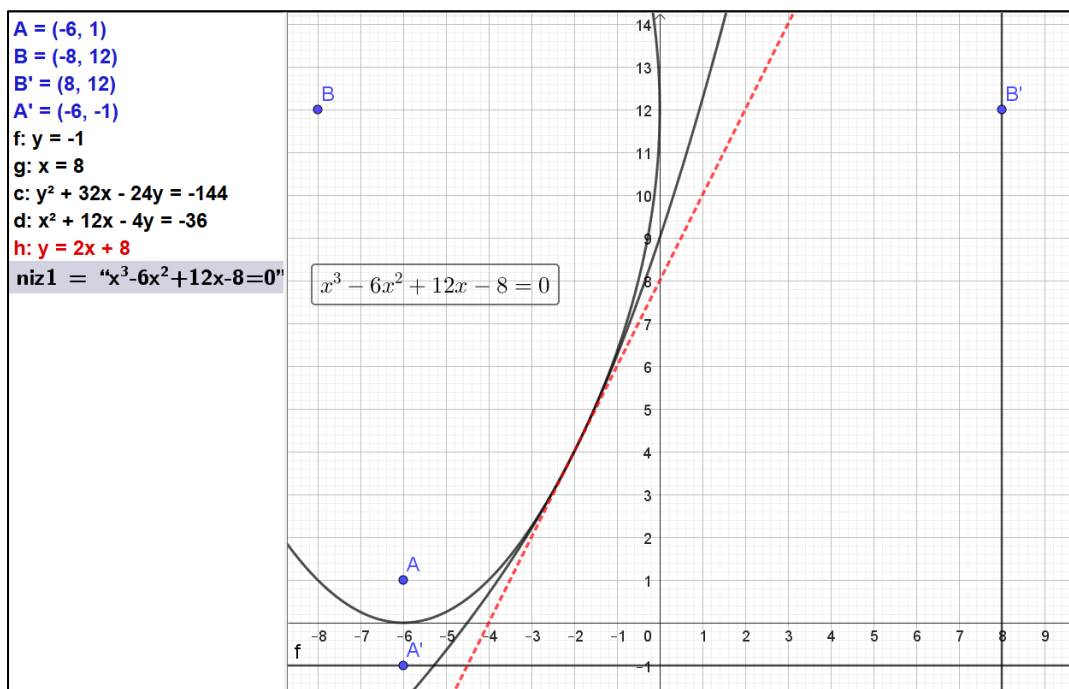
Slika 20: Reševanje enačbe s parabolama (tri različne realne rešitve)

Slika 21 prikazuje primer enačbe, ki ima eno rešitev druge stopnje in eno rešitev prve stopnje. Lepo se pokaže medsebojna lega parabol. Program GeoGebra je skupno dvojno tangento dvakrat zapisal.



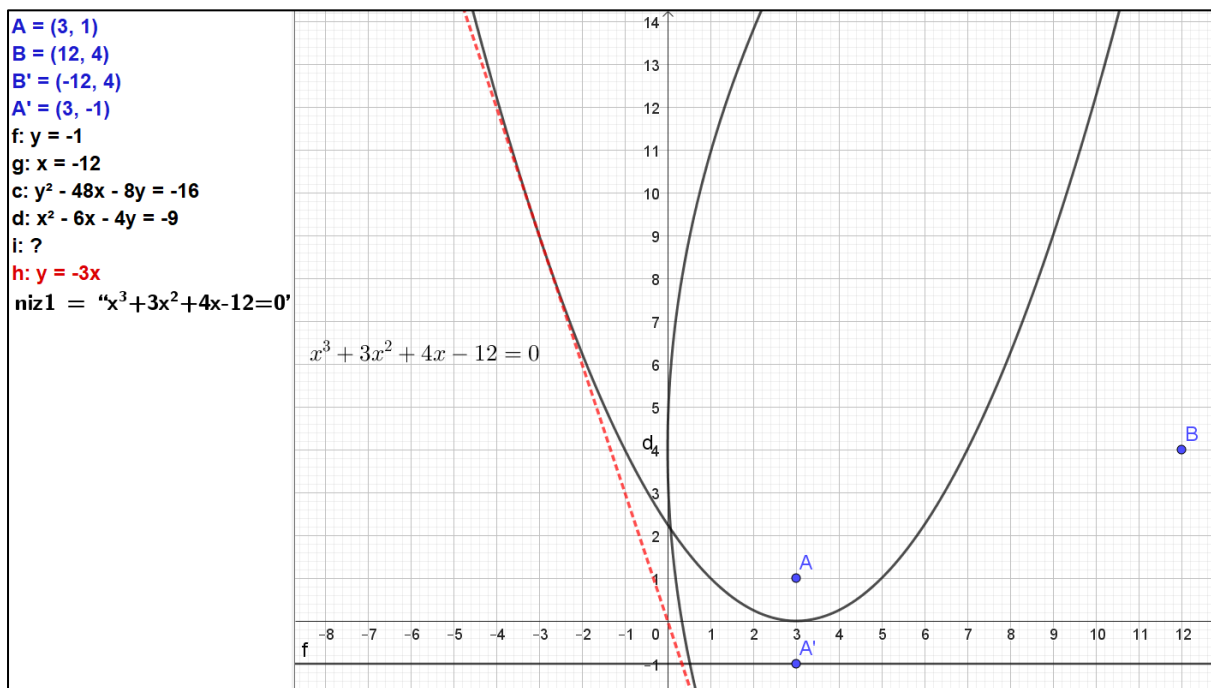
Slika 21: Reševanje enačbe z dvojno rešitvijo s parabolama

Slika 22 prikazuje primer enačbe z rešitvijo tretje stopnje. Položaj parabol je tak, da imata le eno skupno tangento.



Slika 22: Reševanje enačbe z eno, trojno realno rešitvijo

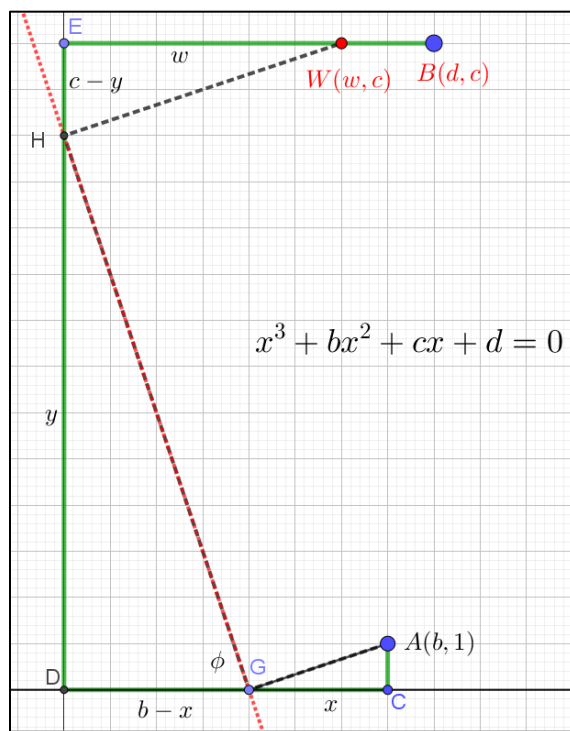
Slika 23 prikazuje enačbo, ki ima eno realno ničlo in par konjugiranih kompleksnih rešitev.



Slika 23: Reševanje enačbe s konjugiranim parom kompleksnih rešitev

3.5 Hornerjev algoritem z želvjo grafiko in s prepogibanjem papirja

V tem poglavju preiskujemo, ali sta postopka, ki smo ju opisali v prejšnjih poglavjih, povezana s Hornerjevim algoritmom. Na Slika 24 $p(x) = 0$, kjer je $p(x)$ polinom tretje stopnje $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, to je poligon, ki ga sestavljajo daljice



Slika 24: K izpeljavi Hornerjevega algoritma na grafični način

AC, CD, DE in EB . Prav tako je narisano *odboj-90*, sestavljen iz daljic AG, GH in HW .

Trditev 5: Naj bo leva stran enačbe $p(x) = 0$ polinom $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Vrednost polinoma $p(x)$ pri $x = x_0$ je enaka razliki abscis točk B in W , kjer je točka B končna točka želvje poti, W pa končna točka *odboja-90* iste poti.

Dokaz: Naj bo $x = x_0$ dolžina daljice CG . Trikotniki ACG, GDH in HEW so podobni. Tako velja:

$$\frac{x_0}{1} = \frac{y}{b-x_0} = \frac{w}{c-y}.$$

Opazimo, da je x_0 enak smernemu koeficientu premice skozi točki GH , to je tangensu kota DGH . Iz prejšnje trojne enačbe dobimo: $y = x_0(b - x_0)$, $w = x_0(c - y)$:

$$\begin{aligned} w &= x_0(c - x_0(b - x_0)) = x_0(c - bx_0 + x_0^2) = cx_0 - bx_0^2 + x_0^3 \\ &= cx_0 - bx_0^2 + x_0^3 - d + d. \end{aligned}$$

Ko v zadnjo enačbo vstavimo $-x_0$ namesto x_0 , dobimo

$$w = -cx_0 - bx_0^2 - x_0^3 - d + d = -p(x_0) + d.$$

Od tod pa sledi $p(x_0) = d - w$. Torej je razlika med abscisama točk B in D enaka vrednosti polinoma $p(x_0)$. Hkrati smo dokazali tisto, kar že vemo, da je rešitev enačbe $p(x) = 0$ (ko točki B in D sovpadata) enaka smernemu koeficientu premice skozi G in H .

q. e. d.

Na Slika 24 je kot primer upodobljena enačba $p(x) = 0$, kjer je $p(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$.

Odboj-90 se konča v točki W , ki ima absciso enako 6. Torej je vrednost polinoma pri $x_0 = -3$ enaka $p(-3) = d - w = 2$. Vrednost -3 je enaka smernemu koeficientu premice skozi točki G in H , pa tudi abscisi točke G glede na absciso točke A , ker je ordinata točke A enaka 1, saj je vodilni koeficient polinoma $p(x)$ enak 1.

Obenem smo dobili tudi količnik in ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ s polinomom $(x + 3)$. Koeficienti količnika so odseki *odboja-90*, pri čemer vzamemo za enoto dolžino prvega odseka AG . Odseki so 1, 4, 2, ostanek je 2. Tako je:

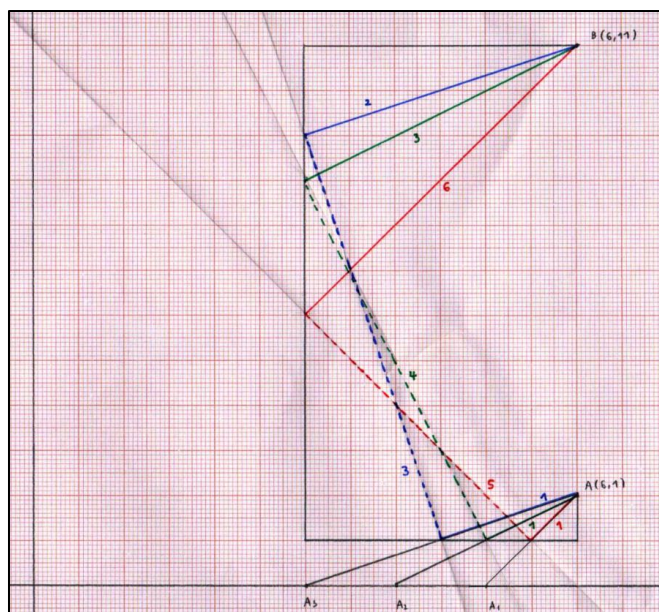
$$p(x) = (x + 3)(x^2 + 4x + 2) + 2.$$

Ko točki W in B sovpadata, dobimo, da je smerni koeficient premice skozi G in H rešitev dane enačbe, *odboj-90* pa nam da koeficiente količnika. Iskanje rešitev lahko nadaljujemo kar na *odboju-90*. Na Slika 25 je prikazano reševanje enačbe $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ s prepogibanjem papirja. Dobljene ničle (glej smerne koeficiente premic) so -1 , -2 in -3 . Pri posameznih ničlah pa iz *odboja-90* odčitamo tudi količnike:

$$\text{ničla } -1: x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$$

$$\text{ničla } -2: x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 2)(x^2 + 4x + 3)$$

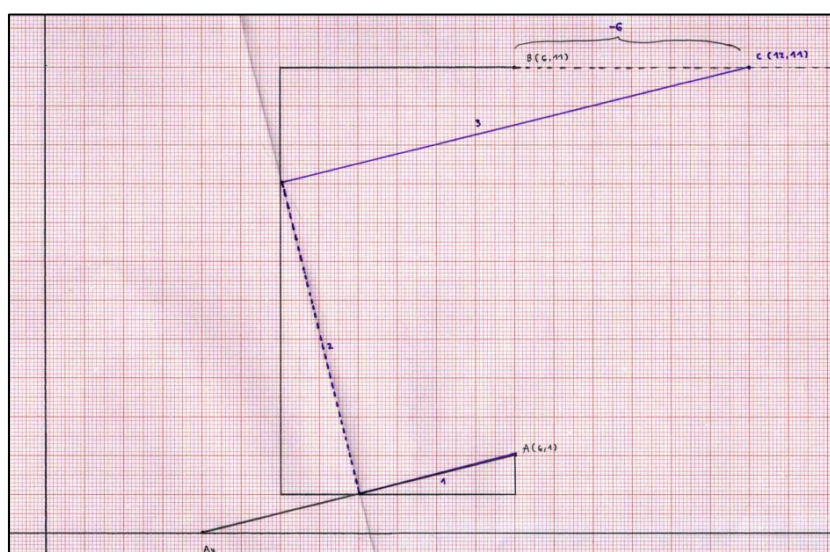
$$\text{ničla } -3: x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 3)(x^2 + 3x + 2)$$



Slika 25: Reševanje enačbe tretje stopnje s prepogibanjem papirja (foto: Ema Ptičak)

Na Slika 26 je prikazano računanje vrednosti polinoma $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ pri $x_0 = -4$. Določiti moramo pregib, to je premico s smernim koeficientom -4 . Potekati mora skozi točko $(-2,0)$, ki jo dobimo tako, da naredimo premik točke A za 4 v levo in 1 navzdol. Nato naredimo še pravokotnico na ta pregib v presečišču z ordinatno osjo. Ta pravokotnica seka premico, na kateri leži točka $B(6,11)$, v točki $C(12,11)$, pri $w = 12$. Vrednost polinoma $p(-4) = 6 - 12 = -6$. Dobljeni rezultat iz iste slike zapišemo še v obliki osnovnega izreka o deljenju:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 4)(x^2 + 2x + 3) - 6.$$



Slika 26: Računanje vrednosti polinoma s prepogibanjem papirja (foto: Ema Ptičak)

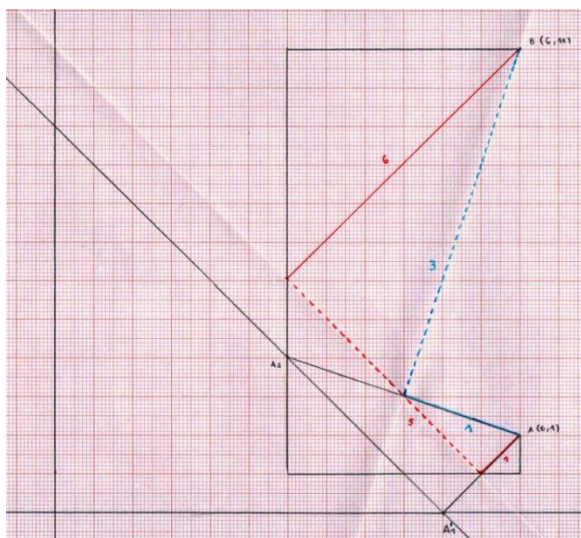
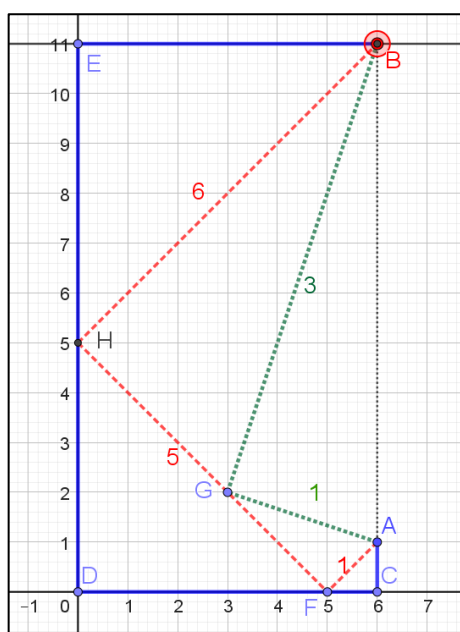
Na levi strani Slika 27 je prikazano zaporedno iskanje ničel polinoma $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Želvjo pot predstavlja zaporedje daljic AC, CD, DE in EB , *odboj-90* pa daljice AF, FH in HB . Odčitamo ničlo -1 in koeficiente količnika 1, 5, 6. Torej je:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x^2 + 5x + 6).$$

Ta *odboj-90* vzamemo kot novo želvjo pot in narišemo drugi *odboj-90*: AG, GB . Smerni koeficient premice skozi BG glede na novo ordinatno os HB in novo abscisno os HG je enak -2 , količnik pa ima koeficienta 1 in 3. Torej je:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

Isto situacijo smo prikazali tudi s prepogibanjem papirja (Slika 27, desna stran).



Slika 27: Razstavljanje polinoma (foto: Ema Ptčak)

4 Podvojitev kocke

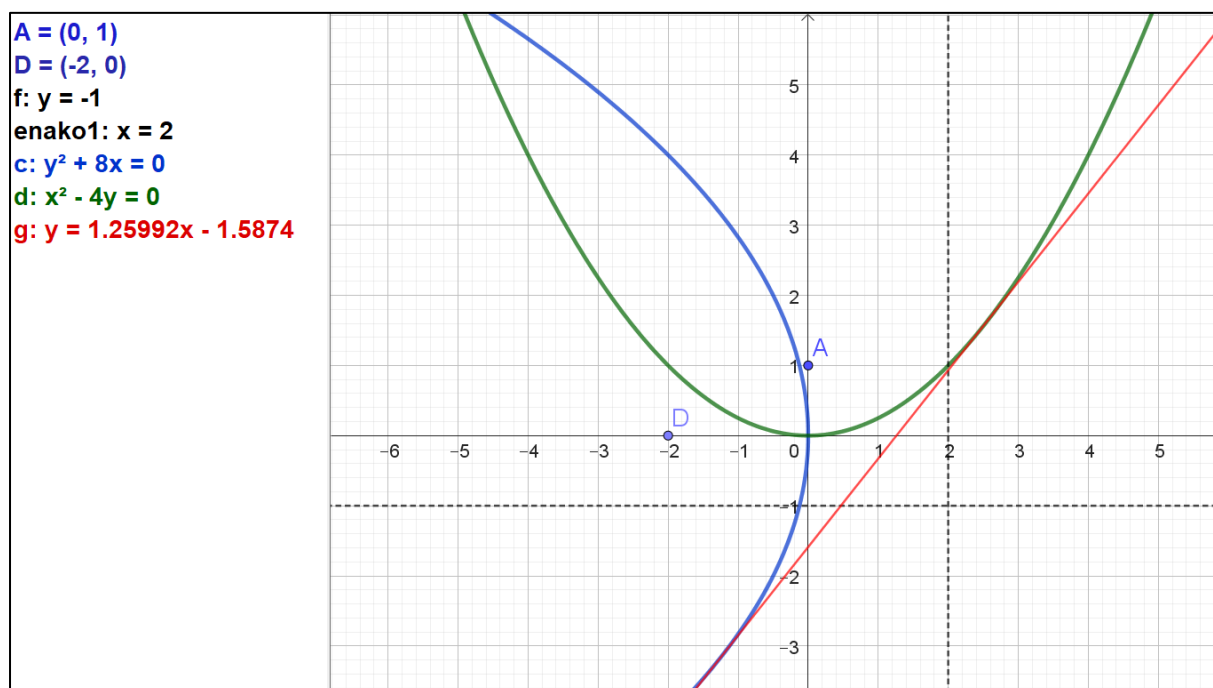
Podvojitev kocke je eden izmed starogrških problemov. Za dano kocko s stranico a moramo poiskati stranico b nove kocke, ki ima dvojno prostornino:

$$b^3 = 2a^3.$$

Enačbo preoblikujemo v $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = 2$. Označimo količnik $\frac{b}{a} = x$. Tako dobimo enačbo $x^3 = 2$ oziroma $x^3 - 2 = 0$.

4.1 Podvojitev kocke s parabolama

Rešimo enačbo $x^3 - 2 = 0$ z metodo iskanja skupne tangente dveh parabol (Slika 28).



Slika 28: Podvojitev kocke s parabolama

Iz enačbe $x^3 - 2 = 0$ sledi, da sta točki A(0,1) in D(-2,0). Narišemo še premici vodnici $y = -1$ ter $x = 2$ ter v GeoGebri poiščemo enačbi obeh parabol ter njuno skupno tangento. GeoGebra izpiše približek $y = 1.25992x - 1.5874$.

Dodatno naredimo še računsko potrditev. Enačba prve parabole (gorišče A , vodnica $y = -1$) je $x^2 = 4y$, enačba druge (gorišče D , vodnica $x = 2$) pa $y^2 = -8x$. Kot ponavadi naj bo točka $T\left(t, \frac{x^2}{4}\right)$ na prvi paraboli. Smerni koeficient tangente na prvo parabolo v točki T je enak odvodu pri $x = t$: $k = \frac{t}{2}$. V enačbo tangente $y = \frac{t}{2}x + n$. Ker je točka T skupna, dobimo $n = -\frac{t^2}{4}$ in tangento $y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$. Vstavimo v enačbo druge parabole:

$$\left(\frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}\right)^2 = -8x.$$

Upoštevamo še, da je $t = 2k$ in dobimo:

$$k^2x^2 + (8 - 2k^3)x + k^4 = 0$$

Izračunajmo diskriminanto in jo izenačimo z 0 (ker gre za tangento):

$$(8 - 2k^3)^2 - 4k^6 = 0$$

$$32(2 - k^3) = 0$$

$$k^3 = 2$$

Enačba za smerni koeficient skupne tangente in dane enačbe se ujemata.

Posplošitev: Metodo, ki smo jo opisali v tem razdelku, lahko zlahka posplošimo na reševanje enačbe $x^3 - d = 0$. Začetna točka D ima koordinati $D(-d, 0)$, Prva parabola ima gorišče v $A(0,1)$ in premico vodnico $y = -1$, njena enačba je $x^2 = 4y$, druga pa gorišče v $D(-d, 0)$ in premico vodnico $x = d$, njena enačba pa je $y^2 = -4dx$. Po znanem postopku dobimo enačbo skupne tangente

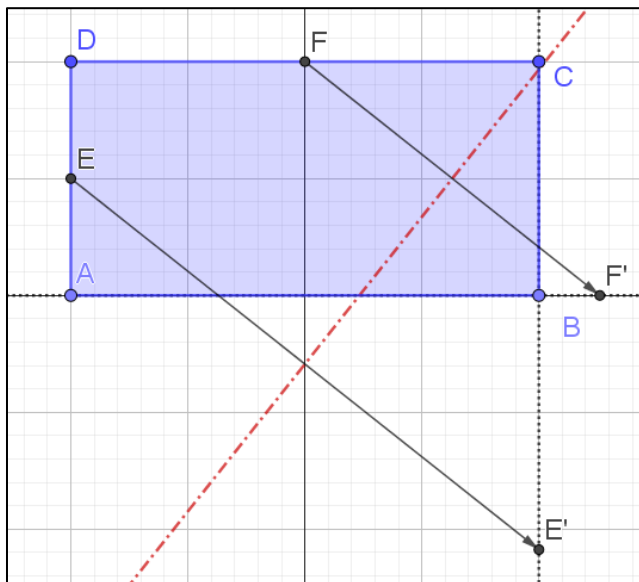
$$k^2x^2 + (4d - 2k^3)x + k^4 = 0, \text{ kjer je } k \text{ smerni koeficient skupne tangente.}$$

Iz pogoja $D = 0$ sledi enačba za smerni koeficient skupne tangente: $d - k^3 = 0$.

Skupna tangenta obeh parabol ima torej smerni koeficient $\sqrt[3]{d}$.

4.2 Podvojitev kocke s prepogibanjem papirja

Iz opisanega lahko enostavno izpeljemo postopek za rešitev problema podvojitve kocke s prepogibanjem papirja (Slika 29). Smerni koeficient pregiba je enak $\sqrt[3]{2}$.



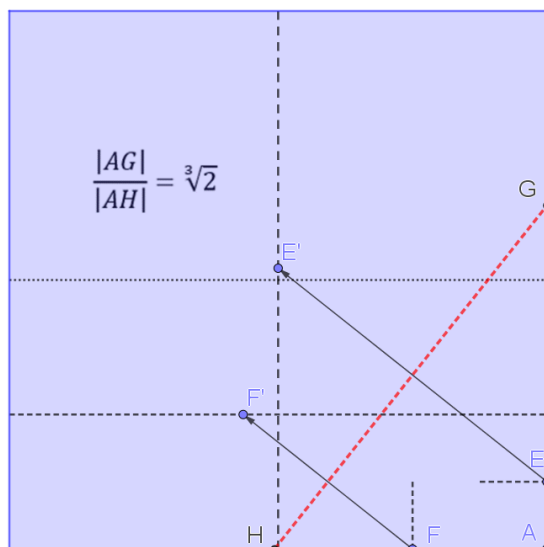
Slika 29: Podvojitev kocke v pravokotni mreži

Potek: V zgornjem levem vogalu papirja pravokotne oblike narišemo pravokotno mrežo osmih kvadratov $ABCD$ 4×2 . Poiščemo razpolovišče E leve stranice in razpolovišče F zgornje stranice tega pravokotnika. Naredimo pregiba (premici) vzdolž desne stranice in pregib (premico) vzdolž spodnje stranice. Nato pa točko E prepognemo na premico (pregib) skozi desno stranico in hkrati točko F na nosilko spodnje stranice. Smerni koeficient nastalega pregiba je enak $\sqrt[3]{2}$.

Sklep je neposredna posledica ugotovitev v prejšnjem razdelku.

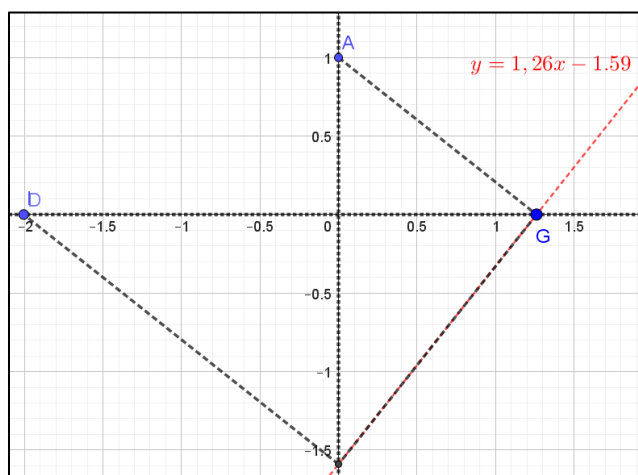
Lahko pa izhajamo tudi iz kvadrata (Slika 30). Ker je smerni koeficient premice – pregiba enak $\sqrt[3]{2}$, je potem

$\frac{|AG|}{|AH|} = \sqrt[3]{2}$ ali $|AG| = \sqrt[3]{2} \cdot |AH|$. Za vsako dano dolžino $|AH|$ stranice prvotne kocke lahko z vzporednico k dobljenemu pregibu konstruiramo (ali odčitamo) dolžino $|AG|$ stranice podvojene kocke.



Slika 30: Podvojitev kocke v kvadratu

4.3 Podvojitev kocke z želvjo grafiko



Slika 31: Podvojitev kocke z želvjo grafiko

S pomočjo Slika 28 lahko neposredno odkrijemo, kako rešimo enačbo $x^3 - 2 = 0$ tudi z želvjo grafiko. Želvico peljemo od točke $A(0,1)$ do točke $D(-2,0)$. Kjer se želva obrne na mestu (to je v koordinatnem izhodišču), vsakič narišemo premico v njeni smeri. Ti premici služita za konstrukcijo *odboja-90* (glej Slika 31). Z opisano metodo lahko rešimo tudi poljubno enačbo $x^3 - d = 0$, le točka D ima koordinate $D(-d, 0)$.

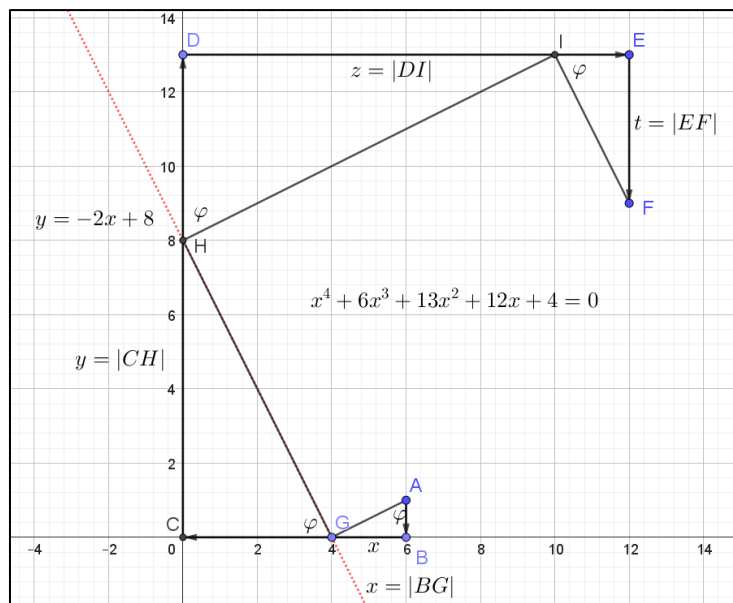
Enačbo $x^3 - d = 0$ lahko rešimo tudi s prepogibanjem papirja. Postopek je razviden iz Slike 29, le da moramo vzeti $|FD| = |FC| = d$.

5 Reševanje polinomskih enačbe višje stopnje

5.1 Reševanje z želvjo grafiko

Z želvjo grafiko lahko rešujemo tudi polinomske enačbe višjih stopenj od 3 (seveda, če imajo realne rešitve). Oglejmo si primer enačbe četrte stopnje, potem pa posplošimo.

Dana naj bo enačba $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$. Slika 32 prikazuje rešitev z želvjo grafiko.



Slika 32: K dokazu, da želvja grafika deluje tudi pri enačbah višje stopnje

Domneva. V primeru reševanja enačbe $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$ z želvjo grafiko dobimo rešitev dane enačbe takrat, ko se notranja pot konča v točki F (glej Slika 32). Rešitev x je enaka negativni vrednosti tangensa naklonskega kota premice nosilke daljice GH :

$$x = -\tan \varphi.$$

Utemeljitev. Trikotniki AGB, GHC, HID in IFE so podobni. Naj bo $\frac{|BG|}{|BA|} = x$. V trikotniku

GHC velja: $\frac{|CH|}{|CG|} = x = \frac{y}{6-x}$, v trikotniku HID : $\frac{|DI|}{|DH|} = x = \frac{z}{13-y}$, v trikotniku IFE pa podobno $\frac{|EF|}{|EI|} = x = \frac{4}{12-x}$.

Zapišemo drugače: $y = x(6-x)$, $z = x(13-y)$, $4 = x(12-z)$.

$$\begin{aligned} \text{Razvijmo: } 4 &= x(12-z) = x(12-x(13-y)) = x(12-x(13-x(6-x))) = \\ &= x(12-x(13-6x+x^2)) = x(12-13x+6x^2-x^3) = \end{aligned}$$

$$= 12x - 13x^2 + 6x^3 - x^4.$$

Tako dobimo enačbo: $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$.

V trikotniku AGB velja, da je $x = \tan \varphi$. Hitro pa vidimo, da dobimo enačbo enako prvotni enačbi, če x nadomestimo z $-\tan \varphi$. To je tudi vrednost, ki je enaka tangensu naklonskega kota premice GH , kar je enako njenemu smernemu koeficientu.

Sklepamo, da bo dokaz pri splošni enačbi stopnje n potekal enako, le koeficienti bodo poljubni, nekaj nadaljnjih korakov »želve« pa bo analognih. Tako da lahko zapišemo:

Trditev 6: Polinomska enačba $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ rešujemo po naslednjih korakih:

Pri korak: V koordinatnem sistemu narišemo pot od točke $A(a_{n-1}, 1)$ do končne točke X tako, da začne želva pot v točki A in se potem na vsakem koraku zasuka v desno za 90° . Če je naslednji koeficient pozitiven, se premakne sicer pa nazaj ta toliko, kolikor je velikost trenutnega koeficienta. Če je koeficient enak 0, se samo zasuka. Želvja pot se konča v točki X na zadnjem koraku, ko se želva premakne za koeficient a_0 .

Drugi korak: Na vsakem odseku narišemo premice, nosilke odsekov.

Tretji korak: Na premici, nosilki drugega odseka, izberemo (gibljivo) točko G in jo povežemo z začetno točko A (narišemo daljico AG). Nadaljujemo risanje poti *odboj-90*.

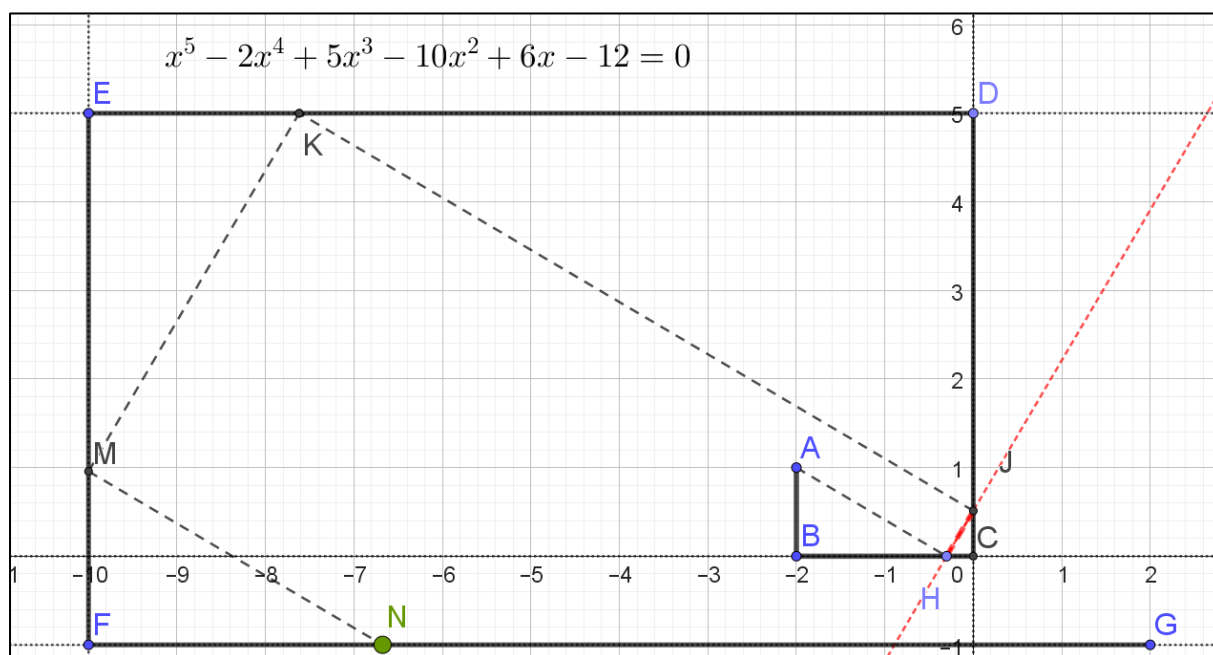
Četrty korak: Premikamo točko G po nosilki drugega odseka tako, da zadnja pravokotnica sovпада z zadnjo točko želvje poti, to je s točko X .

Rezultat: Smerni koeficient nosilke daljice GH je enak rešitvi dane enačbe.

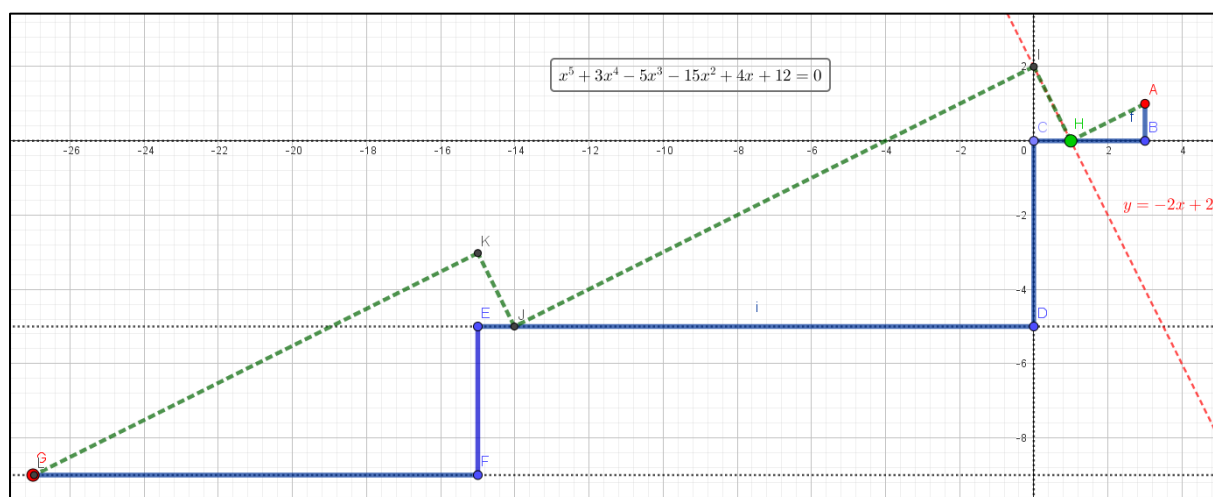
Dokaz: Splošni dokaz je v viru (Hull, 2021)) na strani 20.

Slika 33, Slika 34 in Slika 35 so primeri reševanja enačb. Slika 33 ne prikazuje rešitve, temveč vmesno fazo. Rešitev dobimo, ko točko H premaknemo tako, da točka N sovпада s točko G . Takrat je smerni koeficient premice skozi H in J enak 3, kar je rešitev dane enačbe.

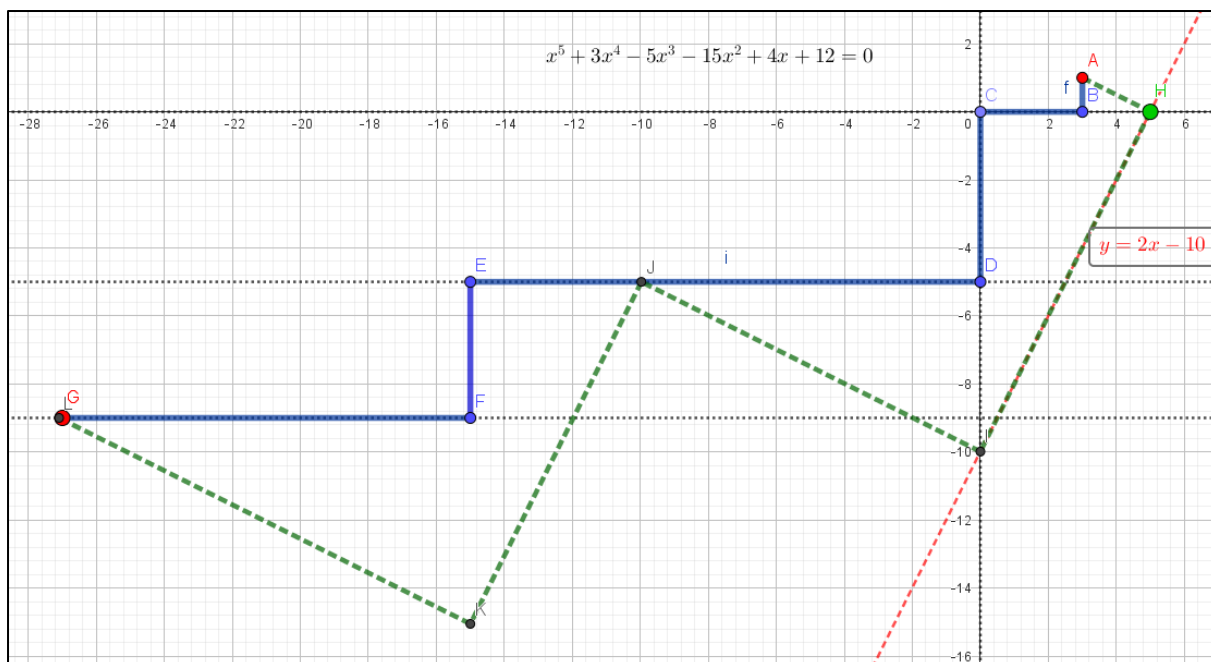
Enačba $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$, prikazana na Slika 34 in Slika 35, ima rešitve: $1, -1, 2, -2$ in -3 .



Slika 33: Prvi primer reševanja enačbe pete stopnje



Slika 34: Drugi primer reševanja enačbe pete stopnje. Rešitev je -2.



Slika 35: Tretji primer reševanja enačbe pete stopnje. Rešitev je 2.

Trditev 4 lahko posplošimo tudi na polinome višje stopnje. Dokaz poteka enako. Ker se položaji končnih točk želvje poti in *odboja-90* razlikujejo, ugotovimo vrednost polinoma $p(x_0)$ tako:

Naj bo točka D končna točka želvje poti, točka W pa končna točka *odboja-90*; vektor $\vec{d}$ vektor v smeri zadnjega premika želve, vektor $\vec{w}$ pa vektor od točke W do točke D . Števili d in w sta abscisi (pri enačbah lihe stopnje) ali ordinati (pri enačbah sode stopnje) točk D in W . Vrednost polinoma je enaka $p(x_0) = \mp |d - w|$. Predznak je pozitiven, ko sta vektorja $\vec{d}$ in $\vec{w}$ enako usmerjena, negativen pa, ko sta ta vektorja različno usmerjena.

Ko točki D in W sovpadeta in dobimo rešitev enačbe $p(x) = 0$, nam dajo odseki *odboja-90* koeficiente količnika. Poglejmo primere. Upoštevamo, da peljemo želvico po *odboju-90* enako kot pri konstrukciji želvje poti. Želva začne pot v začetni točki *odboja-90* in se na vogalih zasuka za 90° v desno. Odsek, po katerem se giblje zadensko, ima negativen predznak.

Slika 32: $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = (x + 2)(x^3 + 4x^2 + 5x + 2)$

Slika 34: $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = (x + 2)(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6)$

Slika 35: $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = (x - 2)(x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6)$

5.2 Reševanje s prepogibanjem papirja

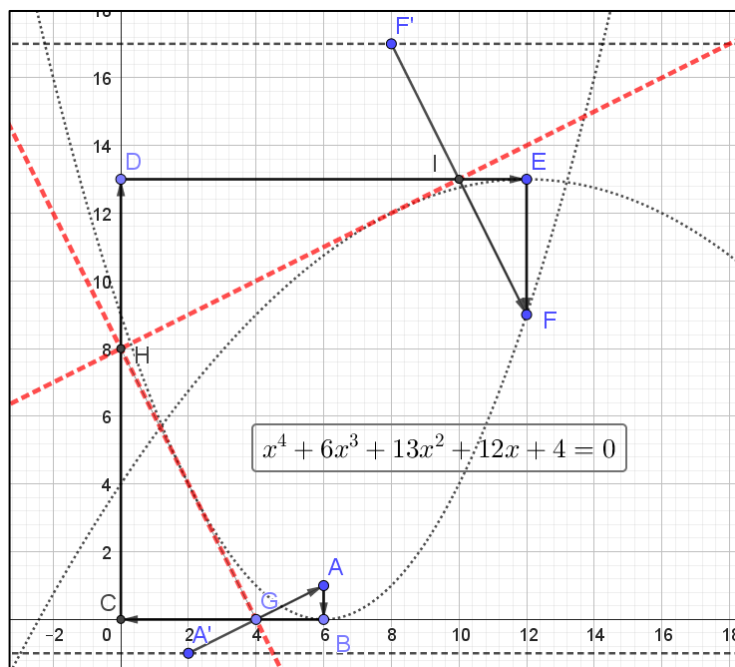
Reševanje polinomskih enačb s pomočjo enojnega prepogibanja papirja se konča pri stopnji 3. Zadnji aksiom O7 je tisti, ki omogoča konstruiranje skupnih tangent na dve paraboli, kar pripelje do enačbe tretje stopnje. Dokazano pa je (v viru (Hull, 2021)), da se z večkratnimi pregibi da rešiti tudi enačbe višjih stopenj (glej Trditev 6). Večkratni pregib je tisti, ko pri prepogibanju naredimo hkrati n pregibov. Pri tem pa moramo biti pozorni na več pogojev ujemanja. Primer dvojnega pregiba je tretjinjenje kota, ko »primemo vsakega izmed krakov« in jih zapognemo proti notranjosti, tako da se kraka ujemata z zunanima robovoma.

V (Hull, 2021) je na strani 68 naveden izrek, ki ga tu navajamo kot Trditev 7:

Trditev 7: Vsako polinomsko enačbo stopnje n z realnimi rešitvami lahko rešimo z $(n - 2)$ kratnim pregibom.

Dokaz: Glej vir (Hull, 2021) stran 69.

Primeri reševanja polinomskih enačb višje stopnje sta prikazana na slikah 36 in 37. Pri reševanju enačbe četrte stopnje (primer Slika 36) sledimo *odboju-90*. Hkrati naredimo dva, sicer vsak zase neodvisna pregiba, a morata biti med sabo pravokotna. S pregibi naredimo *odboj-90*.



Slika 36: Primer reševanja enačbe četrte stopnje z dvojnim pregibom

6 Zaključek

V raziskovalni nalogi smo obravnavali reševanje polinomske enačbe s pomočjo geometrije. Metodo s prepogibanjem papirja je objavila M. Beloch leta 1936, ki jo je kasneje razvil E. Lill v metodo s pomočjo tako imenovane želje grafike. Po uvodnih raziskovanjih smo vzeli za osnovo reševanje kvadratne enačbe, kot prikazuje Slika 11. Od tam smo izpeljali iskanje rešitev s pomočjo parabole (pri kubični enačbi s pomočjo dveh parabol), s pomočjo dinamične geometrije, s prepogibanjem papirja in s tako imenovano želvjo grafiko. Rešitve dobimo kot smerni koeficient določene premice - pregiba ali kot tangens naklonskega kota te iste premice. Pri dokazovanju smo v veliki večini uporabljali metodo dokazovanja s pomočjo parabol. Idejo je objavil K. Hatori, drugje v nam dostopni literaturi pa nismo zasledili te metode dokazovanja. Ker je program GeoGebra razvit do stopnje, da omogoča konstrukcijo skupnih tangent več parabol, lahko s pomočjo dinamične geometrije poiščemo rešitev polinomske enačbe tretje stopnje na zelo preprost način. Na ta način smo rešili tudi znan starogrški problem podvojitve kocke.

7 Viri in literatura

Hatori, K. (brez datuma). *K's Origami*. Pridobljeno 11. 3 2023 iz Origami versus Straight-Edge-and-Compass: <https://origami.ousaan.com/library/conste.html>

Hladnik, M. (13. 10 2014). Pridobljeno 6. 3 2023 iz Franc Močnik in konstrukcija pravilnega petkotnika: http://www2.arnes.si/~supmrazp/Zgodovina/MocZMP5K_b.pdf

Hull, T. (2021). *ORIGAMETRY: Mathematical Methods in Paper Folding*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lill, E. (1867). Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 359-362. Pridobljeno 11. marec 2023 iz http://www.numdam.org/item/NAM_1867_2_6__359_0.pdf

Riaz, M. (avgust 1962). Geometric Solutions of Algebraic Equations. *The American Mathematical Monthly*, 654-658. Pridobljeno 11. marec 2023 iz https://ethw.org/w/images/5/58/PVB_geometric-solutions-of-algebraic-equations.pdf

Slikovno kazalo

Slika 1: Šesta osnovna origami operacija.....	8
Slika 2: Sedma osnovna origami operacija	8
Slika 3: reševanje kvadratne enačbe s Carlyleovo krožnico (Hladnik, 2014).....	10
Slika 4: K dokazu trditve 1 (reševanje kvadratne enačbe s Carlyleovo krožnico)	10
Slika 5: Prikaz podobnih trikotnikov	12
Slika 6: Reševanje kvadratne enačbe (primer 1) z dinamično geometrijo	13
Slika 7: Reševanje kvadratne enačbe (primer 2) z dinamično geometrijo	13
Slika 8: K definiciji parabole	14
Slika 9: »Konstrukcija« parabole s prepogibanjem papirja	15
Slika 10: K dokazu, da je pregib tangenta na parabol	16
Slika 11: Postavitev točk za reševanje kvadratne enačbe	17
Slika 12: Primer reševanja kvadratne enačbe in povezave	18
Slika 13: Povezava rešitve s smernim koeficientom tangente.....	19
Slika 14: Reševanje kvadratne enačbe s prepogibanjem papirja.....	20
Slika 15: Reševanje kvadratne enačbe z želvjo grafiko	22
Slika 16: Primer reševanje enačbe tretje stopnje s parabolama	23
Slika 17: K dokazu reševanja enačbe tretje stopnje s parabolama	25
Slika 18: Reševanje enačbe tretje stopnje s prepogibanjem papirja	26
Slika 19: Reševanje enačbe tretje stopnje z želvjo grafiko	27
Slika 20: Reševanje enačbe s parabolama (tri različne realne rešitve)	28
Slika 21: Reševanje enačbe z dvojno rešitvijo s parabolama.....	28
Slika 22: Reševanje enačbe z eno, trojno realno rešitvijo	29
Slika 23: Reševanje enačbe s konjugiranim parom kompleksnih rešitev	29
Slika 24: K izpeljavi Hornerjevega algoritma na grafični način	30
Slika 25: Reševanje enačbe tretje stopnje s prepogibanjem papirja (foto: Ema Ptičak)	32
Slika 26: Računanje vrednosti polinoma s prepogibanjem papirja (foto: Ema Ptičak)	32
Slika 27: Razstavljanje polinoma (foto: Ema Ptičak)	33
Slika 28: Podvojitve kocke s parabolama.....	34
Slika 29: Podvojitve kocke v pravokotni mreži.....	36
Slika 30: Podvojitve kocke v kvadratu	37
Slika 31: Podvojitve kocke z želvjo grafiko.....	37
Slika 32: K dokazu, da želvja grafika deluje tudi pri enačbah višje stopnje	38
Slika 33: Prvi primer reševanja enačbe pete stopnje	40
Slika 34: Drugi primer reševanja enačbe pete stopnje. Rešitev je -2.....	40
Slika 35: Tretji primer reševanja enačbe pete stopnje. Rešitev je 2.	41
Slika 36: Primer reševanja enačbe četrte stopnje z dvojnim pregibom	42
Slika 37: Primer reševanja enačbe pete stopnje s trojnim pregibom	43