

Raziskovalna naloga

Merjenje oddaljenosti supernove tipa Ia

Raziskovalno področje: fizika in astronomija

Avtor: Damjan Dovnik

Mentorja: mag. Marko Žigart in dr. Jure Japelj

Srednja šola Slovenska Bistrica, 2021/2022

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujem svojim mentorjema, mag. Marku Žigartu in dr. Juretu Japlju, ki sta mi bila vedno na razpolago ob kakršnih koli nejasnostih ter me naučila ravnanja s teleskopom GoT1. Posebna zahvala gre tudi dr. Andreji Gomboc, ki mi je predstavila projekt GoChile. Prav tako se zahvaljujem tudi lektorju Ivanu Žigartu, prof., ki si je vzel čas za lektoriranje naloge ter Nataši Gumilar Papotnik, prof. za pregled angleške verzije povzetka naloge.

KAZALO VSEBINE

1	UVOD.....	6
2	TEORETIČNI DEL	7
2.1	Supernove.....	7
2.1.1	Supernove tipa Ia.....	8
2.2	Bele pritlikavke.....	9
2.3	Chandrasekharjeva meja	9
2.4	Izsev zvezde in gostota svetlobnega toka	9
2.5	Magnitude	10
2.5.1	Navidezna magnituda.....	10
2.5.2	Absolutna magnituda	10
3	Eksperimentalni del.....	11
3.1	Pripomočki in oprema	11
3.2	Izvedba meritev	12
4	REZULTATI IN RAZPRAVA.....	19
5	ZAKLJUČEK.....	26
6	VIRI IN LITERATURA.....	27

KAZALO SLIK

Slika 1: Bela pritlikavka in zvezda spremljevalka (https://svs.gsfc.nasa.gov/20344)	8
Slika 2: Teleskop GoT1 in njegova lokacija (https://www.gochile.si/)	11
Slika 3: Posnetek zaslona iz programa Voyager	12
Slika 4: Posnetek supernove z okoliškimi zvezdami v modrem filtru	13
Slika 5: Približan posnetek supernove z galaksijo v kateri je eksplodirala v modrem filtru	13
Slika 6: Posnetek zaslona iz programa Astro Pixel Processor	15
Slika 7: Fotografija supernove pred odštetjem galaksije in po njem	16
Slika 8: Posnetek zaslona iz programa AstrolmageJ	16
Slika 9: Podatki za predpis za prilagoditveno krivuljo v programu Logger Pro	21
Slika 10: Ekstinkcija (prirejeno po https://scienceatyourdoorstep.com/2018/07/15/extinction-and-reddening-of-starlight/)	24

KAZALO TABEL

Tabela 2: Izmerjen signal in izračunana instrumentalna magnituda supernove na posamezen dan	17
Tabela 3: Izmerjene ničelne točke in navidezne magnitude supernove na posamezen dan	18

KAZALO GRAFOV

Graf 1: Svetlobna krivulja supernove v modrem filtru	18
Graf 2: Prilagoditvena krivulja v programu Logger Pro	20
Graf 3: Svetlobna krivulja v zelenem filtru, kjer je razvidna maksimalna svetlost	25

POVZETEK

Za to raziskavo sem se odločil, ker sem želel izmeriti razdaljo do eksplozije supernove tipa Ia in s tem dokazati njihovo uporabnost pri merjenju velikih razdalj v vesolju. Da bi izmeril razdaljo do eksplozije tovrstne supernove, sem s teleskopom GoT1 več mesecev meril signal ene od supernov tega tipa. S pomočjo računalniških programov za obdelavo fotografij in fotometrijo mi je uspelo določiti navidezno magnitudo supernove na posamezen dan. Iz teh podatkov sem izrisal svetlobno krivuljo supernove, s pomočjo katere sem preko Phillipsove relacije izračunal njeno absolutno magnitudo ob njeni najvišji svetlosti, katere datum sem zaradi prepoznega začetka meritev dobil na podlagi odvoda prilagoditvene krivulje. Iz funkcije prilagoditvene krivulje sem izračunal tudi navidezno magnitudo supernove ob času njene najvišje svetlosti. Iz zveze med absolutno in navidezno magnitudo ter z upoštevanjem ekstinkcije sem izračunal razdaljo do supernove, katera od vrednosti, ki so jo izmerili profesionalni astronomi, odstopa za manj kot 1 %.

Ključne besede: Supernova tipa Ia, najvišji sij supernove, magnituda, merjenje velikih razdalj v vesolju

ABSTRACT

I decided to do this research because I wanted to measure the distance to the explosion of a type Ia supernova and thus prove its usefulness in measuring large distances in space. To measure the distance to the explosion of this type of supernova, I used the GoT1 telescope to measure the signal from a supernova of this type for several months. Using image processing and photometry programmes, I was able to determine the apparent magnitude of the supernova on each day. Using this data, I plotted the supernova's light curve, which I used to calculate its absolute magnitude at its maximum brightness using the Phillips relation, the date of which I obtained from the derivation of the adaptation curve because of the late start of the measurements. I also calculated the apparent magnitude of the supernova at the time of its maximum brightness using the function of the fitting curve. From the relationship between absolute and apparent magnitude and taking into account the extinction, I calculated the distance to the supernova, which deviates by less than 1% from the value measured by professional astronomers.

Keywords: Type Ia supernova, highest brightness of a supernova, magnitude, measurement of large distances in cosmos

1 UVOD

Že kot otrok sem si vedno želel predstavljati razsežnost vesolja. To navdušenje me ni nikoli minilo, zaradi česar sem se odločil, da bom začel meriti razdalje do zelo oddaljenih objektov v njem. V srednji šoli sem izvedel tri raziskave merjenja razdalj v vesolju. Leta 2021 sem uspešno izračunal razdaljo do zvezde Wolf 359 s pomočjo izmerjene paralakse. Žal lahko celo najzmogljivejši teleskopi na Zemlji s pomočjo paralakse izmerijo razdalje le do 300 svetlobnih let, zaradi česar pridejo za večje razdalje v poštev spremenljive zvezde kefeide. S pomočjo paralakse smo lahko ljudje izmerili razdaljo do spremenljivih zvezd kefeid in odkrili zvezo med njihovo periodo spreminjanja sija in izsevom. Leta 2022 sva s Hano Brumec preko te zveze uspešno izračunala razdalje petih kefeid. Žal je tudi s kefeidami mogoče meriti le omejeno razdaljo, ki pri njih znaša približno 20 milijonov svetlobnih let, saj so premalo svetle, da bi jih na večji razdalji opazili celo s trenutno najzmogljivejšimi teleskopi. Pri merjenju res velikih razdalj zato pridejo v poštev supernove tipa Ia, katerih uporabnost sem dokazal v tej raziskavi in s katerimi je mogoče meriti razdalje vse do ene milijarde svetlobnih let. S pomočjo tovrstnih supernov je Edwin Hubble dokazal, da se vesolje širi, s pomočjo njegovega zakona in izmerjenega rdečega premika pa je mogoče meriti razdalje do samega roba vidnega vesolja, oddaljenega 13,7 milijard svetlobnih let.

Glavni namen moje raziskave je tako dokazati uporabnost supernov tipa Ia pri merjenju velikih razdalj v vesolju, uspešno izračunati razdaljo do supernove in posledično ugotoviti čas njene eksplozije.

V teoretičnem delu bom na kratko opisal enega od njihovih končnih stadijev zvezd – bele pritlikavke. Te so seveda nujno potrebne za eksplozijo supernove tipa Ia, katere sij sem med raziskavo meril. Opisal bom tudi, kako pride do eksplozij tovrstnih supernov ter kako preko izrisane svetlobne krivulje supernove določiti njeno absolutno magnitudo. Prav tako bom tudi predstavil fizikalne zakone, s katerimi sem si pomagal pri raziskavi. V raziskovalnem delu bom predstavil uporabljeno astronomsko opremo ter s pomočjo več fizikalnih zakonov na podlagi meritev izračunal oddaljenost merjene supernove tipa Ia. V zaključku bom pokomentiral dobljene rezultate in predlagal izboljšave za nadaljnje raziskave.

2 TEORETIČNI DEL

2.1 Supernove

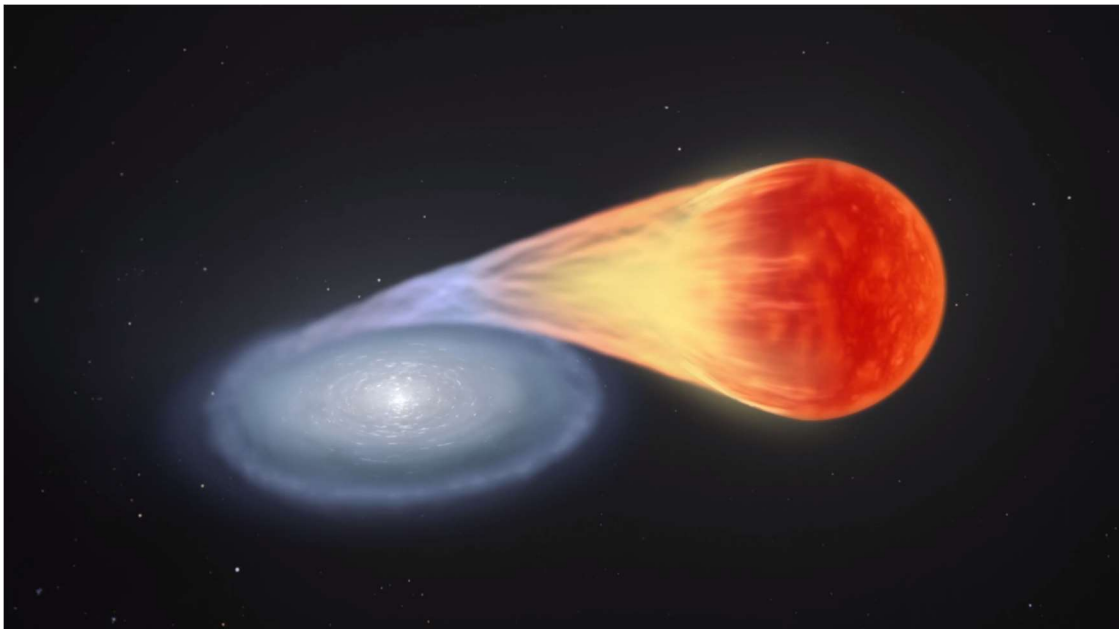
Supernova je v osnovi eksplozija masivne zvezde, ki je posledica sesedanja njenega jedra ob prenehanju jedrske fuzije. Po eksploziji ostanki supernove nekaj tednov sevajo kot milijarda Sonc, kar je primerljivo s sijem povprečne galaksije. Med eksplozijo supernove so ugodne razmere za nastanek elementov, težjih od železa (Dinwiddie idr., 2005).

Supernove delimo na dva glavna tipa (to so supernove tipa I in tipa II), vsak tip pa delimo še na več podtipov, ki pa jih načeloma ločimo po absorpcijskih črtah v njihovih spektrih ali pa po mehanizmu nastanka (Cappellaro in Turatto, 2000):

- **Supernove tipa I** (ne vsebujejo Balmerjeve serije vodikovih absorpcijskih črt)
 - Supernove tipa Ia (spekter vsebuje absorpcijsko črto silicijevega iona (Si^{2+}) pri 615,0 nm)
 - Supernove tipa Ibc (brez izrazite silicijeve absorpcijske črte)
 - Supernove tipa Ib (v spektru je prisotna helijeve absorpcijska črta pri 587,6 nm)
 - Supernove tipa Ic (brez izrazite helijeve absorpcijske črte)
- **Supernove tipa II** (vsebujejo Balmerjevo serijo vodikovih absorpcijskih črt)
 - Supernove tipa II-P, II-L ter IIn
 - Supernove tipa IIb

2.1.1 Supernove tipa Ia

Supernove tega tipa se lahko pojavijo le v binarnih zvezdnih sistemih (v sistemu dveh zvezd, ki krožita druga okoli druge), v katerih mora biti vsaj ena izmed teh dveh zvezd bela pritlikavka (slika 1). Druga zvezda v sistemu je lahko zvezda v katerikoli fazi življenja (razen nevtronska zvezda ali črna luknja). Za razliko od ostalih vrst supernov, supernove tipa Ia ne nastanejo kot posledica sesedanja jedra masivne zvezde, temveč kot posledica tako imenovanega »toplotnega bega«. V prej opisanem sistemu bela pritlikavka zaradi svoje težnosti krade snov svoji spremljevalki in ko masa snovi, ki pada na belo pritlikavko, doseže Chandrasekharjevo mejo, tlak degeneracije elektronov ne more več zadržati sesedanja te snovi pod lastno težo in snov eksplodira kot supernova. Supernova hitro po eksploziji doseže vrh svoje svetilnosti, nato pa ji sij začne počasi padati. Spremljati jo je mogoče še dolgo časa po eksploziji, saj supernova po zaslugi radioaktivnih elementov, ki so nastali ob sami eksploziji (predvsem niklja-56), sveti še več mesecev (Weyant, 2008).



Slika 1: Bela pritlikavka in zvezda spremljevalka (<https://svs.gsfc.nasa.gov/20344>)

Razmerje med najvišjo svetilnostjo supernove tipa Ia in hitrostjo evolucije njene svetilnosti takoj po njeni najvišji svetlosti opisuje Phillipsova relacija. Phillipsovo relacijo prikazuje spodnja enačba, v kateri je $M_{max}(B)$ največja absolutna magnituda supernove v modrem (B) filtru, $\Delta m_{15}(B)$ pa sprememba njene navidezne magnitude v tem filtru 15 dni po njeni največji svetlosti (Rosswog in Bruggen, 2010).

$$M_{max}(B) = -21,72 + 2,698 \cdot \Delta m_{15}(B) \quad (1)$$

2.2 Bele pritlikavke

Bela pritlikavka je zelo gost ostanek Soncu podobne zvezde. Njena masa je manjša od 1,4 mase Sonca oz. Chandrasekharjeve meje. V zadnjih fazah življenja take zvezde se ta osvobodi večine mase, ki odleti v okolico in izoblikuje planetarno meglico. Kmalu po nastanku ima bela pritlikavka visoko površinsko temperaturo, ki navadno znaša okoli 100 000 K, a ker nima notranjega izvora energije, se postopoma ohlaja. Premer bele pritlikavke praviloma znaša le nekaj tisoč kilometrov, njena gostota pa je tudi do milijonkrat večja od gostote vode (Dinwiddie idr., 2005).

2.3 Chandrasekharjeva meja

Chandrasekharjeva meja je zgornja meja za maso določenega telesa, do katere tlak degeneracije elektronov še lahko zdrži njegovo lastno težo (seveda v primeru, da ni prisotnih še drugih tlakov, npr. sevalnega). Če je masa telesa večja od te meje, ki znaša 1,4 Sončeve mase, se to sesede v nevtronsko zvezdo ali črno luknjo. Tako je Chandrasekharjeva meja tudi največja možna masa bele pritlikavke. Prvi je to vrednost izračunal indijski astrofizik Subrahmanyan Chandrasekhar leta 1931, sam izračun pa prikazuje spodnja formula (Schwartz, 2019):

$$M_{ch} = \frac{\omega_3^0 \cdot \sqrt{3\pi}}{2(\mu_e \cdot m_p)^2} \cdot m_{pl}^3 = 2,765 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 1,4 M_{\odot} \quad (2)$$

kjer je ω_3^0 konstanta, povezana z rešitvijo Lane–Emdenove enačbe; μ_e povprečna molekulska masa na elektron, ki je odvisna od kemične sestave telesa in je v večini primerov 2; m_p je mirovna masa protona; m_{pl} pa je Planckova masa, ki je rezultat kvadratnega korena produkta reducirane Planckove konstante, hitrosti svetlobe in obratne vrednosti gravitacijske konstante.

2.4 Izsev zvezde in gostota svetlobnega toka

Izsev zvezde je oddana oziroma izsevana svetloba ali svetlobna moč zvezde. Ta nam pove, koliko svetlobe oziroma energije zvezda izseva (odda) v sekundi. Označimo ga s črko P ali L , njegova enota pa je enota za moč vat ($W = J \cdot s^{-1}$).

Gostota svetlobnega toka (j) je povezana z izsevom zvezde in oddaljenosti od le-te. Pomeni, koliko energije pade na neko površino v določenem času. Izračunamo jo tako, da moč, ki prihaja z zvezde, delimo s površino, na katero se ta razporedi. Ker je površina, na katero se moč porazdeli, sferična, jo obravnavamo kot površino krogle. Tako lahko gostoto svetlobnega toka na določeni razdalji od zvezde izračunamo po formuli $j = L \cdot S^{-1} = L \cdot (4\pi r^2)^{-1}$. Njena enota je tako vat na kvadratni meter (Avsec in Prosen, 2006).

2.5 Magnitude

2.5.1 Navidezna magnituda

Navidezna magnituda oziroma navidezni sij (m) nebesnega telesa je povezan z gostoto energijskega toka (j), ki prihaja z nebesnega telesa na Zemljo. Astronomi v starem veku so razporedili vse zvezde, vidne s prostim očesom, po siju v 6 razredov tako, da so imele najsvetlejše zvezde magnitudo 1, tiste komaj vidne pa 6. Ta razdelitev je bila le ocena sija zvezd. Kasneje so astronomi z meritvami gostot svetlobnih tokov zvezd ugotovili, da nebesna telesa prve magnitude pošiljajo na Zemljo približno 100–krat več svetlobe kot zvezde šeste magnitude oziroma imajo 100–krat večjo gostoto svetlobnega toka. Da bi stara razdelitev zvezd po siju ostala v uporabi, so morali magnitude zvezd drugače definirati. Tako sta sija oziroma magnitudi dveh zvezd m_1 in m_2 ter gostoti svetlobnega toka j_1 in j_2 , ki ga ti dve zvezdi pošiljata na Zemljo, opisani z enačbo 3 (Avsec in Prosen, 2006).

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log \frac{j_1}{j_2} \quad (3)$$

2.5.2 Absolutna magnituda

Absolutna magnituda oziroma absolutni sij (M) nekega nebesnega telesa je definiran kot navidezna magnituda tega nebesnega telesa, gledanega z razdalje 10 parsekov. Parsek (pc) je razdalja, s katere vidimo 1 astronomsko enoto (a. e.) oziroma povprečno razdaljo med Zemljo in Soncem (ki je približno $1,50 \cdot 10^8$ km) pod kotom ene ločne sekunde (") in tako parsek znaša okoli $3,09 \cdot 10^{13}$ km oziroma 3,26 svetlobnih let. S pomočjo absolutne magnitude imamo vpogled v dejanski sij teles in jih lahko tako primerjamo med seboj po dejanski svetlosti oziroma izsevu (Avsec in Prosen, 2006). Formulo za izračun absolutne magnitude preko navidezne magnitude prikazuje enačba 4, kjer je M absolutna magnituda, m navidezna magnituda, d pa oddaljenost nebesnega telesa v parsekih.

$$M = m - 5 \cdot \log \frac{d}{1 \text{ pc}} + 5 \quad (4)$$

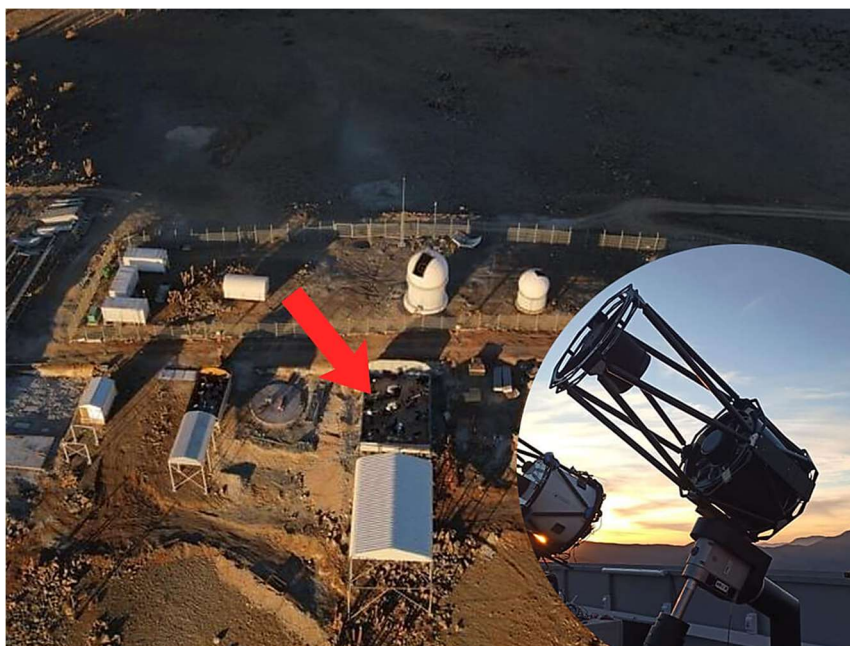
3 EKSPERIMENTALNI DEL

3.1 Pripomočki in oprema

Velik del moje raziskovalne naloge so predstavljala opazovanja. Pri opazovanju oziroma fotografiranju kefeid sem uporabil reflektor GoT1 (slika 2) tipa Ritchey-Chrétien. Na teleskop je nameščena dovršena ekvatorialna montaža ONE50, premer njegovega objektiva pa znaša 400 mm, kar omogoča podrobno raziskovanje galaksij, meglic, zvezdnih kopic in seveda samih zvezd. Na teleskop je pritrjena CMOS kamera ASI6200MM Pro.

Teleskop se nahaja v Čilu, na jugu puščave Atakama na $30^{\circ} 27'$ južne geografske širine ter $70^{\circ} 45'$ zahodne geografske dolžine na nadmorski višini 1560 metrov, v kraju z morda najboljšimi opazovalnimi razmerami na svetu, kjer stojijo tudi veliki svetovni observatoriji. Omogoča opazovanja objektov, ki so vsaj 10° nad obzorjem, kar pomeni, da je z njim možno opazovati nebesna telesa na deklinaciji od -90° do $49^{\circ} 33'$. Observatorij in vsa opazovalna oprema so popolnoma avtomatizirani in omogočajo enostavno upravljanje iz Slovenije. Uporabljal sem ga kot del projekta GoChile. To je izobraževalni, nekomercialni projekt, ki ga vodita Univerza v Novi Gorici in astronomska revija Spika, sam projekt pa omogoča uporabo omenjenega teleskopa tako profesionalnim kot amaterskim astronomom.

Pri opazovanju s teleskopom GoT1 sem imel na razpolago tudi več vrst filtrov. Filtri so namenjeni izboljšanju slike v teleskopu ter opazovanju v določenem delu spektra svetlobe. To so steklene ploščice, ki jih pritrdimo na okular oziroma pred kamero. Narejeni so tako, da prepuščajo samo določene barve, zaradi česar je z njimi mogoče zmanjšati vplive svetlobnega onesnaženja ter poudariti kontrast in specifične barve.

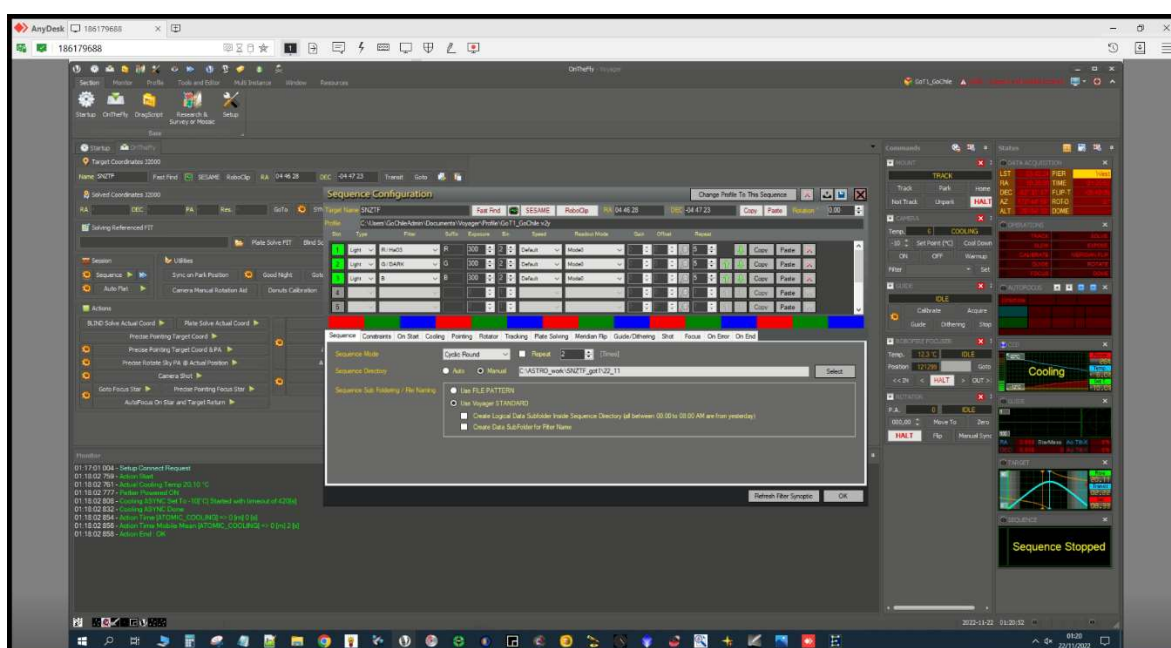


Slika 2: Teleskop GoT1 in njegova lokacija (<https://www.gochile.si/>)

3.2 Izvedba meritev

Za pričetek same raziskave je bilo najprej potrebno najti primerno eksplozijo supernove za opazovanje. To ni bila enostavna naloga, saj supernove tipa Ia v galaksijah eksplodirajo v povprečju na vsakih 500 let, poleg tega pa tudi relativno hitro ugasnejo. Na srečo imajo tovrstne supernove svoj izsev primerljiv z izsevom celotne galaksije, zaradi česar so v poštev prišle tudi supernove v precej oddaljenih galaksijah, ki jih je s teleskopom GoT1 še mogoče zaznati, kar je povečalo možnosti za najdbo primerne supernove. Potrebno je bilo najti na novo eksplodirano supernovo, ki po možnosti še ni dosegla vrha svoje svetilnosti. Pomagal sem si s katalogom na spletni strani <https://www.physics.purdue.edu/brightsupernovae/>, kjer so zabeležene vse na novo odkrite supernove. Na koncu mi je s pomočjo kataloga le uspelo najti na novo eksplodirano supernovo, primerno za opazovanje. To je bila supernova 2022wpy, ki se nahaja na rektascenziji 4 h 46 min 28,022 s in deklinaciji $-4^{\circ} 47' 23,754''$.

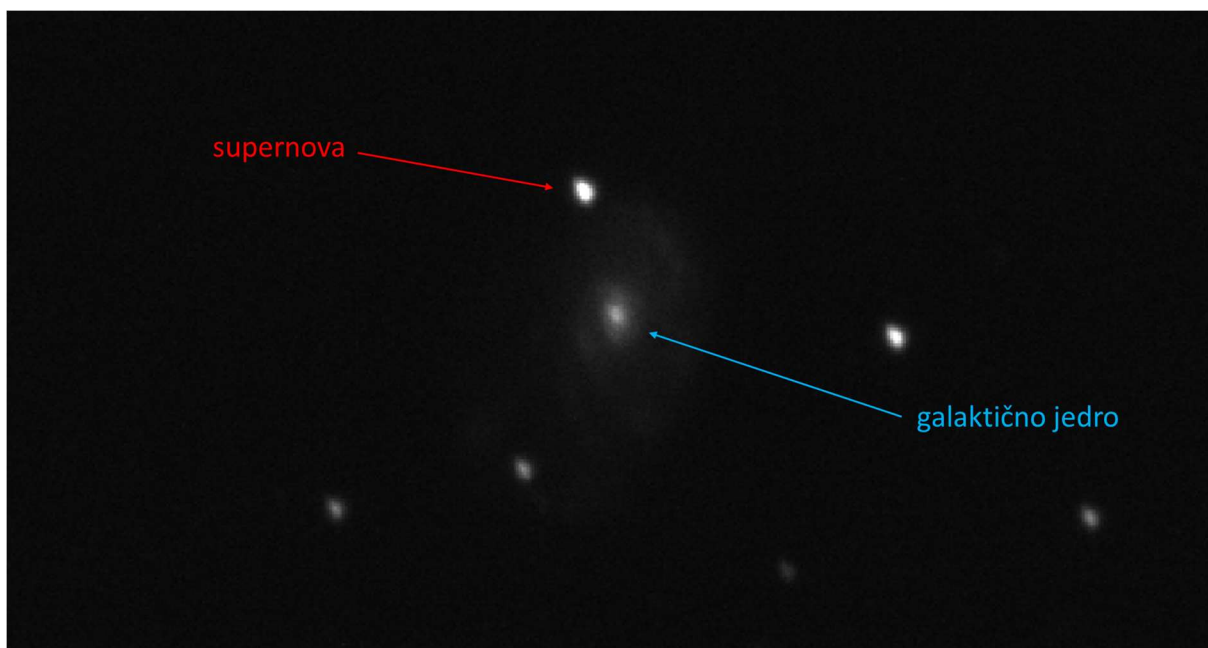
Ko mi je uspelo najti primerno supernovo, je bilo potrebno takoj začeti z opazovanji. Opazovanja so potekala tako, da sem se najprej s pomočjo programa AnyDesk povezal z računalnikom v Čilu, s katerim sem upravljal s teleskopom. Za opazovanje sem potreboval več programov. S pomočjo programa Viking sem vklopil elektriko vsem komponentam teleskopa, s programom MaximDL sem nastavil kamero za opazovanje, s programom PHD sledenje, na koncu pa sem uporabil program Voyager, kamor sem vnesel podatke za filtre, ekspozicijo ter nebesne koordinate in nastavil sekvenco opazovanja (slika 3). Samo opazovanje je bilo v nadaljevanju popolnoma avtomatizirano. Supernovo sem snemal več mesecev, vse fotografije pa sem posnel s teleskopom GoT1 na ekvatorialni montaži s CMOS kamero ASI6200MM Pro v primarnem gorišču. Ekspozicije posnetkov so bile 300 sekund. Pri vsakem opazovanju sem fotografije delal v treh različnih filterih: modrem (B), zelenem (G) in rdečem (R).



Slika 3: Posnetek zaslona iz programa Voyager



Slika 4: Posnetek supernove z okoliškimi zvezdami v modrem filtru



Slika 5: Približan posnetek supernove z galaksijo v kateri je eksplodirala v modrem filtru

Dobljene fotografije supernove je bilo najprej potrebno skalibrirati. Kalibracija fotografij je v bistvu povečanje razmerja med prejetim signalom in šumom, ki ga prejme teleskop oziroma kamera. Ker sem pri fotografiranju supernove uporabljal relativno dolge ekspozicije, se je zaradi tega povečal tudi šum. Da bi lahko s fotografij v nadaljevanju raziskave pridobil čim bolj natančne podatke, sem moral z njih odstraniti šum. To sem storil s pomočjo kalibracijskih fotografij, posnetih s teleskopom. Uporabil sem tri tipe kalibracijskih fotografij oz. posnetkov.

Fotografije temnega polja (dark frames)

S to vrsto kalibracijskih fotografij sem odpravil šum, ki je nastal zaradi občutljivosti CMOS kamere. CMOS kamera deluje na podlagi prehajanja atomov v vzbujeno stanje s pomočjo absorbiranih fotonov. Čeprav je bila kamera ohlajena na $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$, je bila ta temperatura še vedno nad absolutno ničlo in so atomi lahko v vzbujeno stanje prešli tudi sami od sebe. Za odpravo te napake sem uporabil posnetek temnega polja, ki je nastal na ta način, da se je ob fotografiranju kalibracijskih fotografij uporabil filter, ki ne prepušča nobene svetlobe. Ekspozicija je morala biti tako dolga kot pri fotografiranju supernove (v mojem primeru 300 s).

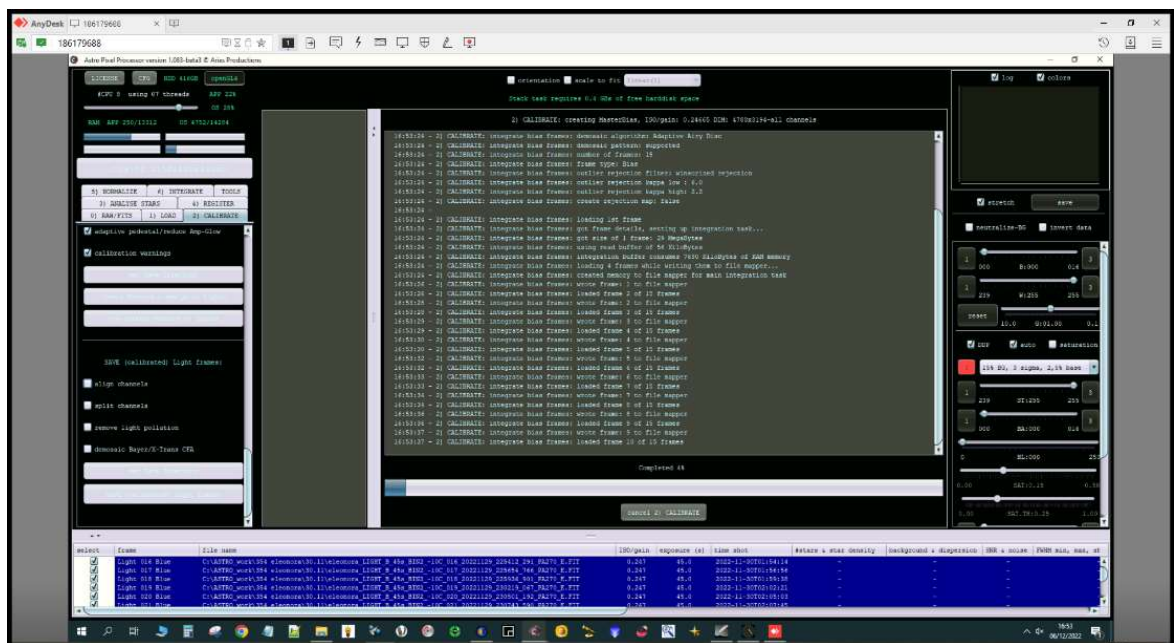
Fotografije pristranskega polja (bias frames)

S pomočjo teh kalibracijskih fotografij sem odpravil šum, ki ga ustvarja kamera. Ko električni tok teče skozi senzor za snemanje fotografij, se zaradi njega ustvari določena količina šuma. Za odpravo te vrste šuma se uporablja fotografija pristranskega polja. Ta kalibracijska fotografija je bila posneta pod enakimi pogoji kot fotografija temnega polja, vendar je bila zanjo uporabljena minimalna ekspozicija (okoli 0,05 s).

Fotografije ravnega polja (flat frames)

S pomočjo te vrste kalibracijskih fotografij sem odpravil šum, ki je nastal zaradi delcev prahu oziroma umazanije, ki se je nahajala na kameri, čeprav v zelo majhnih količinah. Za odpravo te napake je moral biti kalibracijski posnetek narejen takrat, ko je bilo nebo enakomerno osvetljeno (zjutraj ali zvečer).

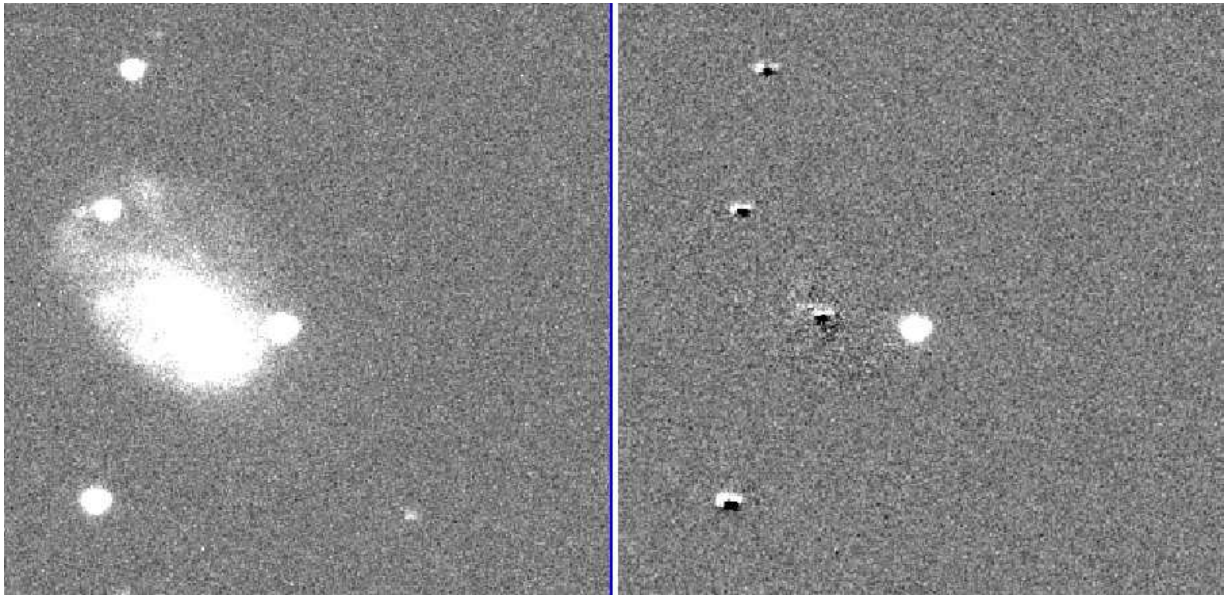
Šum sem s fotografij odpravil na ta način, da sem vse posnetke supernove naložil v program Astro Pixel Processor (slika 6), kamor sem vnesel tudi 15 kalibracijskih posnetkov vsakega tipa in na podlagi le-teh mi je program odpravil šum s fotografij.



Slika 6: Posnetek zaslona iz programa Astro Pixel Processor

V nadaljevanju raziskave se je pojavila težava. Ker je supernova eksplodirala v galaksiji, je na fotografijah na položaju supernove tako svetloba eksplozije kot svetloba galaksije (slika 5). Preden sem izvedel fotometrijo, je bilo zato potrebno odšteti svetlobo galaksije. Za ta manever sem torej potreboval posnetek polja z galaksijo, na katerem ni vidne supernove. Veliki pregledi neba imajo take posnetke že na voljo, saj neprestano opazujejo nebo, jaz pa sem moral za končno analizo počakati, da je supernova ugasnila, šele nato sem lahko posnel končni posnetek. Ta je moral imeti dolgo ekspozicijo, da sem lahko dobil visok signal proti šumu in detektiral tudi območja z nizko površinsko svetlostjo.

Samih posnetkov žal ne moremo kar enostavno odšteti enega od drugega, saj posamezna opazovanja potekajo pri različnih pogojih (različen lom svetlobe v atmosferi zaradi vremena, različna svetlost Lune itd.). Vse te razlike se poznajo pri končni fotografiji. Za odštetje galaksije in enakomerno porazdelitev svetlosti neba je bilo potrebno uporabiti za ta namen napisano programsko kodo s pomočjo programov SWarp in SExtractor. Program je nato za začetek vse fotografije pravilno obrnil oziroma storil, da so vse zvezde ležale na enakih slikovnih pikah, odštel ozadje, izenačil svetlost vseh fotografij, tako da je izenačil magnitudo zvezd in signalu supernove prištel oziroma odštel isti faktor kot izenačenim zvezdam in na koncu odštel galaksijo s fotografij (slika 7).

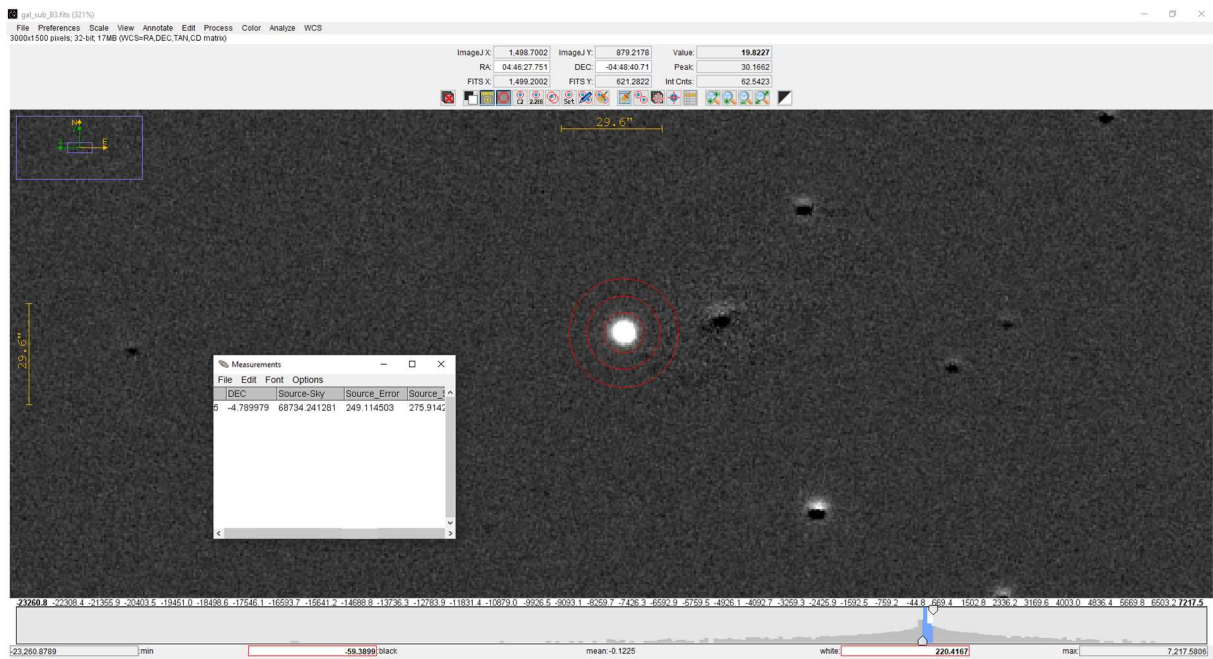


Slika 7: Fotografija supernove pred odšteti galaksije in po njem

Ker pride za izračun oddaljenosti supernove v pošte le magnituda v modrem filtru, sem se v nadaljevanju raziskave posvetil le obdelavi podatkov s fotografij v tem filtru.

Naslednji korak je bil merjenje navidezne instrumentalne magnitude (magnitude glede na prejet signal) supernove ob različnih datumih. To sem storil tako, da sem v programu AstroImageJ (slika 8) uporabil orodje za fotometrijo zaslonke, s katerim sem izmeril signal na posamezni fotografiji. Meril sem z aperturo 10 slikovnih pik. Ta signal sem lahko nato pretvoril v navidezno instrumentalno magnitudo s pomočjo spodnje enačbe.

$$m_i = -2,5 \cdot \log \text{signal} \quad (5)$$



Slika 8: Posnetek zaslona iz programa AstroImageJ

V tabeli 2 je naveden posamezen izmerjen signal na določen datum in izračunana navidezna instrumentalna magnituda.

Tabela 1: Izmerjen signal in izračunana instrumentalna magnituda supernove na posamezen dan

Datum opazovanja	Izmerjen signal	Izračunana instrumentalna magnituda
24. 10. 2022	80682	-12,27
25. 10. 2022	33766	-11,32
26. 10. 2022	68718	-12,09
28. 10. 2022	60241	-11,95
30. 10. 2022	49304	-11,73
2. 11. 2022	36384	-11,40
4. 11. 2022	29427	-11,17
10. 11. 2022	15485	-10,47
14. 11. 2022	9124	-9,90
22. 11. 2022	4577	-9,15
24. 11. 2022	4121	-9,04
1. 12. 2022	2106	-8,31
10. 12. 2022	1363	-7,84
14. 12. 2022	1602	-8,01
20. 12. 2022	677	-7,08

Žal nam navidezna instrumentalna magnituda skoraj nič ne pove o njenem pravem navideznem siju, zaradi česar je bilo treba instrumentalno magnitudo supernove pretvoriti v pravo navidezno magnitudo. Pri določitvi le-te si lahko pomagamo s tako imenovano ničelno točko. Ničelna točka (N) je v bistvu razlika med pravo navidezno (m) in navidezno instrumentalno magnitudo (m_i).

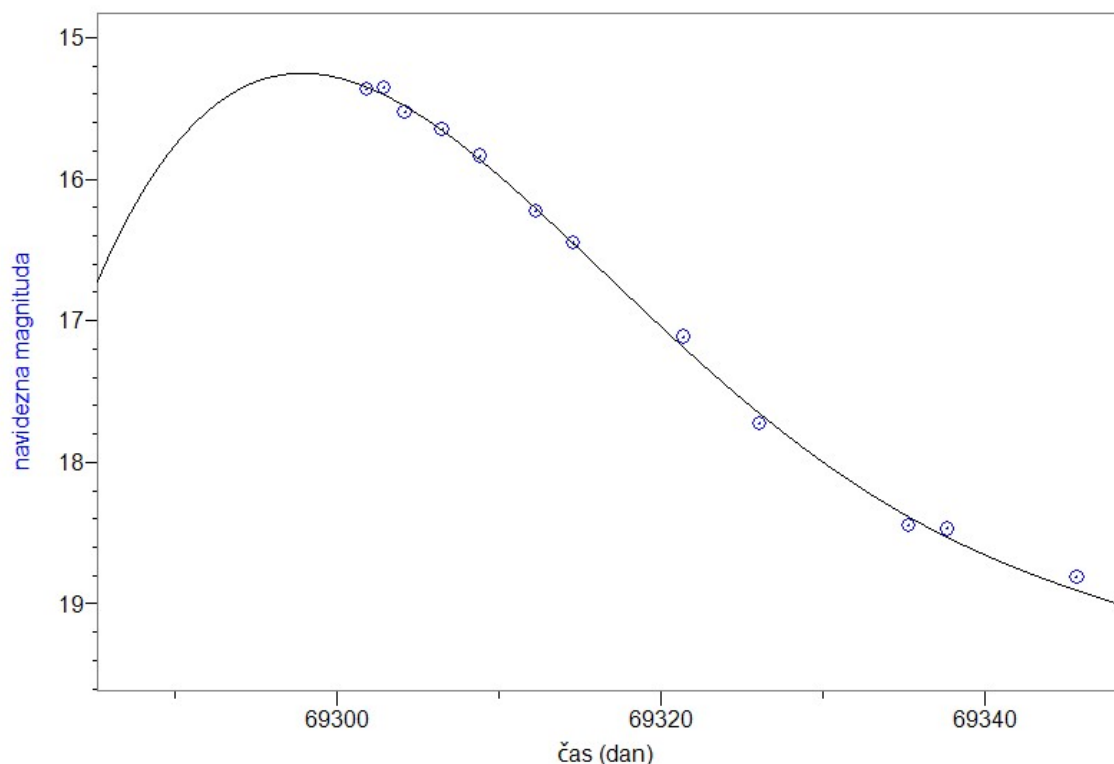
$$m = m_i + N \quad (6)$$

Pri določitvi ničelne točke sem si pomagal z že znanimi magnitudami za okoliške zvezde, katerim sem izmeril signal, ki sem ga nato pretvoril v navidezno instrumentalno magnitudo in dobljen rezultat odštel od prave navidezne magnitude (v B filtru), ki sem jo dobil v spletnem katalogu Vizier na spletni strani <https://vizier.cds.unistra.fr/viz-bin/VizieR?-source=V/154&&-to=3>.

Tabela 2: Izmerjene ničelne točke in navidezne magnitude supernove na posamezen dan

Datum opazovanja	Izmerjene ničelne točke	Navidezna magnituda
24. 10. 2022	$27,63 \pm 0,05$	$15,36 \pm 0,05$
25. 10. 2022	$26,68 \pm 0,05$	$15,36 \pm 0,05$
26. 10. 2022	$27,62 \pm 0,05$	$15,53 \pm 0,05$
28. 10. 2022	$27,60 \pm 0,05$	$15,65 \pm 0,05$
30. 10. 2022	$27,57 \pm 0,05$	$15,84 \pm 0,05$
2. 11. 2022	$27,63 \pm 0,05$	$16,23 \pm 0,05$
4. 11. 2022	$27,62 \pm 0,05$	$16,45 \pm 0,05$
10. 11. 2022	$27,59 \pm 0,05$	$17,12 \pm 0,05$
14. 11. 2022	$27,63 \pm 0,05$	$17,73 \pm 0,05$
22. 11. 2022	$27,60 \pm 0,05$	$18,45 \pm 0,05$
24. 11. 2022	$27,51 \pm 0,05$	$18,47 \pm 0,05$
1. 12. 2022	$27,12 \pm 0,05$	$18,81 \pm 0,05$
10. 12. 2022	$27,36 \pm 0,05$	$19,52 \pm 0,05$
14. 12. 2022	$27,40 \pm 0,05$	$19,39 \pm 0,05$
20. 12. 2022	$27,27 \pm 0,05$	$20,19 \pm 0,05$

Iz zgornjih podatkov izrišemo svetlobno krivuljo supernove (graf navidezne magnitude v odvisnosti od časa). Podatke o času nastanka fotografij po reduciranem julijanskem datumu (JD - 2400000) v dnevih, ki ga je zabeležil teleskop in izmerjenih navideznih magnitudah sem vnesel v program Logger Pro, ki je izrisal svetlobno krivuljo.



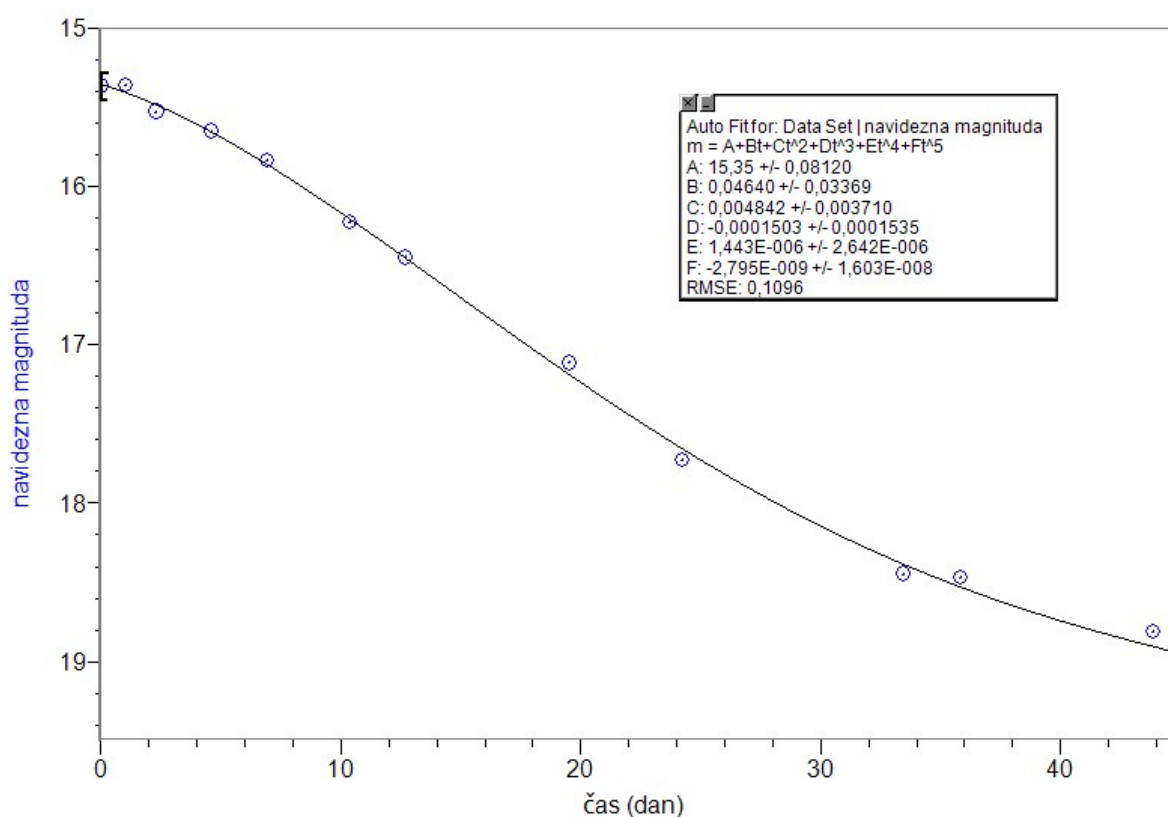
Graf 1: Svetlobna krivulja supernove v modrem filtru

4 REZULTATI IN RAZPRAVA

Meritve in rezultate izračunov, ki sledijo v tem delu, sem opremil z napakami. S pomočjo izračunanih napak sem lahko prikazal, za koliko lahko vrednosti meritev oz. izračunov odstopajo od izmerjene oz. izračunane vrednosti. Same napake meritev mi je avtomatično določil program za fotometrijo ali pa sem jo ocenil. Napake rezultatov izračunov pa sem v nadaljevanju naloge izračunal na naslednji način:

- a) Ob vsaki meritvi ali rezultatu sem navedel absolutno napako. S to vrsto napake opišemo razpon možnih vrednosti okrog izmerjene oz. izračunane vrednosti. Zapišemo jo lahko kot $a \pm da$, kjer je a podatek oz. rezultat, da pa absolutna napaka, ki pripada temu podatku oz. rezultatu. V primeru, da seštevamo ali odštevamo vrednosti, se seštevajo tudi absolutne napake.
- b) V primeru množenja ali deljenja pa absolutnih napak ne moremo seštevati. V tem primeru se seštevajo relativne napake. Relativna napaka je razmerje med absolutno napako in izmerjeno oz. izračunano vrednostjo. Zapišemo jo lahko kot $a (1 \pm d)$, kjer je a podatek oz. rezultat, d pa relativna napaka, ki pripada temu podatku oz. rezultatu. Relativno napako lahko pretvorimo v absolutno tako, da jo pomnožimo s podatkom. V primeru množenja ali deljenja se, kot je bilo že omenjeno, relativne napake seštevajo, v primeru potenciranja oz. korenjenja, pa se relativna napaka pomnoži z eksponentom.
- c) V primeru, da je napaka v eksponentu, absolutno napako izračunamo na naslednji način: če imamo potenco npr. $10^{a \pm da}$, absolutno napako izračunamo po formuli $10^a \cdot \ln 10 \cdot da$, kjer je a podatek, da absolutna napaka, ki pripada temu podatku, $\ln 10$ pa naravni logaritem števila 10.
- d) V primeru, da se podatek z napako nahaja v logaritmantu, absolutno napako najlažje določimo tako, da izračunamo razliko zgornje in spodnje vrednosti meje in vse skupaj delimo z 2. Tako absolutno napako iz logaritma npr. $\log(a \pm da)$ določimo po formuli $(\log(a + da) - \log(a - da)) : 2$, kjer je a podatek, da pa absolutna napaka, ki pripada temu podatku.
- e) Pri seštevanju oz. odštevanju magnitud pa se napaka določi kot $\sqrt{(d_1 a_1)^2 + (d_2 a_2)^2}$, kjer je $d_1 a_1$ absolutna napaka prve magnitude, $d_2 a_2$ pa absolutna napaka druge magnitude.

V nadaljevanju naloge sem se posvetil analizi podatkov s svetlobne krivulje (graf 2). Zaradi lažjega računanja v nadaljevanju sem čas začetka mojih opazovanj definiral kot 0. Za izračun absolutne magnitude supernove preko Phillipsove relacije in posledično oddaljenosti sem potreboval spremembo navidezne magnitude supernove 15 dni po maksimalni svetlosti. Za začetek sem predpostavil, da je bila prva izmed meritev maksimalna svetlost, saj skoraj ničelni začetni naklon grafa kaže na to. Za dokaj točno določitev spremembe navidezne magnitude v 15 dneh sem svetlobni krivulji supernove v programu Logger Pro definiral prilagoditveno krivuljo. Začetnim meritvam se zelo dobro prilega graf polinoma pete stopnje, zato sem ta podatek definiral v samem programu, ta pa mi je vrnil predpis za to funkcijo, s katerim sem lahko natančno izračunal spremembo magnitude v 15 dneh.

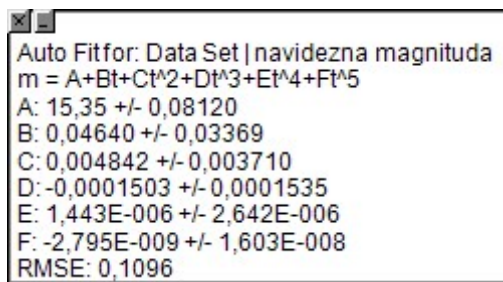


Graf 2: Prilagoditvena krivulja v programu Logger Pro

Glede na podatke o krivulji, ki sem jih dobil s pomočjo programa, je funkcijski zapis, ki opisuje ta del krivulje:

$$f(t) = m = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + Ft^5. \quad (7)$$

Vrednosti za spremenljivke A , B , C , D , E in F so bile izpisane ob prilagoditveni krivulji in so navedene na sliki 9.



Slika 9: Podatki za predpis za prilagoditveno krivuljo v programu Logger Pro

S pomočjo prilagoditvene krivulje in danega predpisa mi je uspelo izračunati navidezno magnitudo supernove 15 dni po predpostavljeni maksimalni svetlosti, od te vrednosti pa sem odštel navidezno magnitudo ob najvišji svetlosti in tako dobil samo spremembo navidezne magnitude, ki sem jo potreboval za izračun oddaljenosti.

$$f(15) = m_{15} = 16,70 \pm 0,05$$

$$\Delta m_{15} = m_{15} - m_0 = (16,70 \pm 0,05) - (15,36 \pm 0,05) = 1,34 \pm 0,07$$

Ker sem imel podatek za spremembo navidezne magnitude supernove 15 dni po njeni najvišji svetlosti, sem lahko ta podatek vstavil v enačbo 1 in tako dobil njeno absolutno magnitudo ob predpostavljeni najvišji svetlosti.

$$M_{max}(B) = -21,72 + 2,698 \cdot (1,34 \pm 0,07) = -18,1 \pm 0,2$$

Ker sem imel izračunano absolutno magnitudo supernove v danem trenutku in izmerjeno njeno takratno navidezno magnitudo, sem lahko preko ekvivalentno preoblikovane enačbe 4 izračunal njeno oddaljenost.

$$d = 10^{\frac{M_{max} - m_0 - 5}{5}} \cdot 1 \text{ pc} = 10^{\frac{(-18,1 \pm 0,2) - (15,36 \pm 0,05) - 5}{5}} \cdot 1 \text{ pc} = 49,4 \pm 5,5 \text{ Mpc}$$

$$= 161 \pm 18 \text{ milijonov svetlobnih let}$$

Izračunano razdaljo sem primerjal s tisto, ki so jo izmerili s pomočjo drugih metod merjenja razdalj. Na spletni strani Transient Name Server (<https://www.wis-tns.org/object/2022wpy>) je zapisana vrednost rdečega premika galaksije, v kateri je eksplodirala opazovana supernova, ki pa je enak rdečemu premiku supernove in znaša približno 0,0152. Kozmološki rdeči premik je premik spektralnih črt v spektru določenega objekta, ki je posledica širjenja vesolja in posledičnega oddaljevanja objektov od Zemlje.

Rdeči premik (z) lahko zapišemo kot:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \quad (8)$$

kjer je $\Delta\lambda$ sprememba valovne dolžine, λ opazovana valovna dolžina, v hitrost oddaljevanja objekta, c pa hitrost svetlobe v vakuumu, ki znaša približno 300 000 km/s.

Hitrost oddaljevanja objektov pa opisuje Hubblov zakon:

$$v = H_0 \cdot d \quad (9)$$

kjer je v hitrost oddaljevanja objekta, d njegova oddaljenost, H_0 pa Hubblova konstanta, ki trenutno znaša približno 69,8 km/s/Mpc.

S pomočjo formule za rdeči premik in Hubblovega zakona sem izračunal oddaljenost supernove preko rdečega premika, ki so ga izmerili profesionalni astronomi. To sem storil tako, da sem vstavil enačbo 8 v ekvivalentno preoblikovano enačbo 9 in izpostavil oddaljenost.

$$d = \frac{z \cdot c}{H_0} = \frac{0,0152 \cdot 300\,000 \text{ km/s}}{69,8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}} = 65,3 \text{ Mpc} = 213 \text{ milijonov svetlobnih let}$$

S tem rezultatom sem dobil tudi pravo oddaljenost supernove, s katero sem lahko primerjal vrednost, ki sem jo izračunal iz svojih meritev. Odstopanje vrednosti, ki sem jo izračunal jaz, od tiste, ki so jo preko rdečega premika izmerili profesionalni astronomi, je tako približno 24 %. Odstopanje je najverjetneje posledica predpostavke, da je bil maksimum na začetku opazovanja, čeprav je bil morda prej, zaradi česar je bilo potrebno za natančno določitev oddaljenosti supernove upoštevati ta podatek.

Ena izmed možnosti za določitev datuma najvišje svetlosti supernove je odvajanje funkcije prilagoditvene krivulje svetlobne krivulje. Ničle prvega odvoda prej omenjene funkcije nam tako povedo možne datume najvišje svetlosti supernove.

Če odvajamo predpis funkcije prilagoditvene krivulje, dobimo novo funkcijo s predpisom:

$$f'(t) = \frac{dm}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2 + 4Et^3 + 5Ft^4 \quad (10)$$

Vrednosti spremenljivk B , C , D , E in F se nahajajo na sliki 9.

Če izračunamo ničle danega odvoda funkcije, dobimo štiri različne vrednosti, od katerih je za moj primer edina mogoča vrednost -4,01. To pomeni, da je glede na prilagoditveno krivuljo supernova svojo najvišjo svetlost dosegla 4 dni pred pričetkom mojih opazovanj. Ker se prilagoditvena krivulja, ki sem jo izrisal glede na svoje podatke v modrem filtru, zelo dobro prilega teoretični svetlobni krivulji supernove (vsaj od ekstrema dalje), sem lahko v neodvedeno enačbo krivulje vstavil čas 4 dni pred pričetkom opazovanj oz. ob času najvišje svetlosti in 11 dni po njem (15 dni razlike) in tako dobil navidezni magnitudi supernove na ta dva dneva.

$$f(-4) = m_{-4} = 15,25 \pm 0,05$$

$$f(11) = m_{11} = 16,27 \pm 0,05$$

S pomočjo teh dveh podatkov sem lahko ponovno izračunal spremembo navidezne magnitude 15 dni po maksimalni svetlosti, vendar v novem časovnem intervalu.

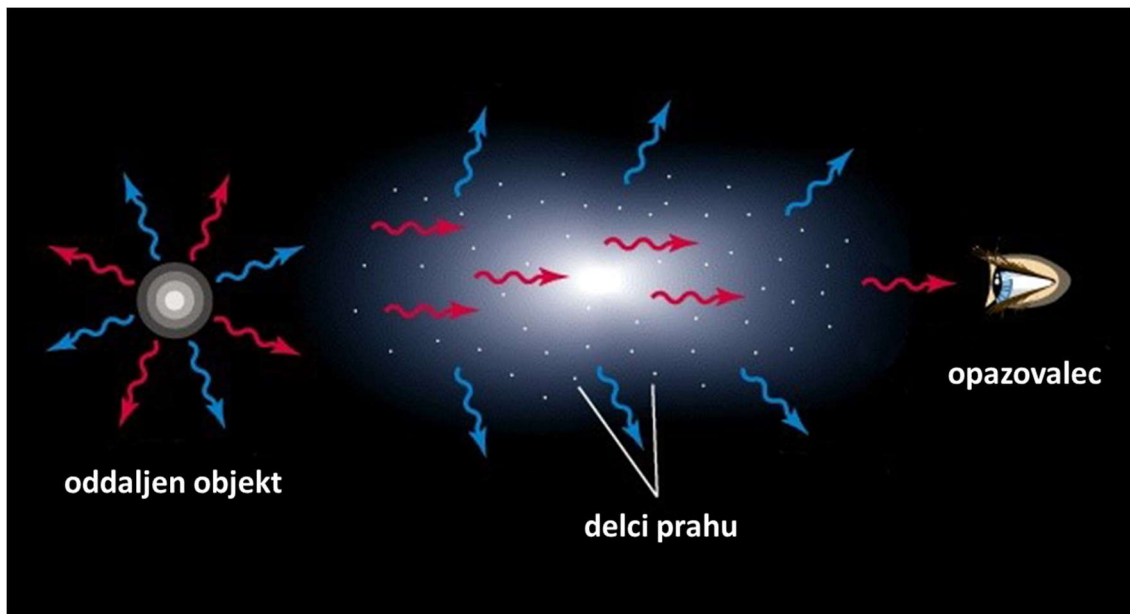
$$\Delta m_{15} = m_{11} - m_{-4} = (16,27 \pm 0,05) - (15,25 \pm 0,05) = 1,02 \pm 0,07$$

Tako kot prej sem lahko s pomočjo Phillipsove relacije izračunal absolutno magnitudo supernove ob njenem teoretičnem najvišjem siju.

$$M_{max}(B) = -21,72 + 2,698 \cdot (1,02 \pm 0,07) = -19,0 \pm 0,2$$

Na tej točki pa se je pojavil problem. Ker je bilo med supernovo in Zemljo veliko medzvezdnega plina in prahu, se svetloba, ki potuje od supernove do Zemlje, na njih delno absorbira in sipa. Posledično se del svetlobe na poti do Zemlje izgubi. Temu pojavu pravimo ekstinkcija. Ekstinkcija se meri v magnitudah in je odvisna tako od količine prahu med supernovo in Zemljo, kot tudi od valovne dolžine svetlobe, saj se svetloba krajših valovnih dolžin sipa bolj kot svetloba daljših valovnih dolžin (slika 10), torej bo drugačna v vsakem filtru. Zaradi ekstinkcije se zato spremeni tudi barva supernove, ki jo vidimo na Zemlji, saj do Zemlje prispe več rdeče svetlobe, ki ima daljšo valovno dolžino, pa tudi sij oziroma magnituda same supernove. Navidezna magnituda supernove, ki sem jo izmeril s teleskopom, zato ni bila povsem točna, zaradi česar sem moral ekstinkcijo, če sem hotel pravilno izračunati njeno oddaljenost, tudi upoštevati.

Podatek o vrednosti ekstinkcije sem dobil s pomočjo spletnega kataloga NASA/IPAC Extragalactic Database na spletnem naslovu http://ned.ipac.caltech.edu/cgi-bin/nph-calc?in_csys=Equatorial&in_equinox=J2000.0&obs_epoch=2000.0&lon=71.61675462d&lat=-4.7899332133333333&pa=0.0&out_csys=Equatorial&out_equinox=J2000.0.



Slika 10: Ekstinkcija (prirejeno po <https://scienceatyourdoorstep.com/2018/07/15/extinction-and-reddening-of-starlight/>)

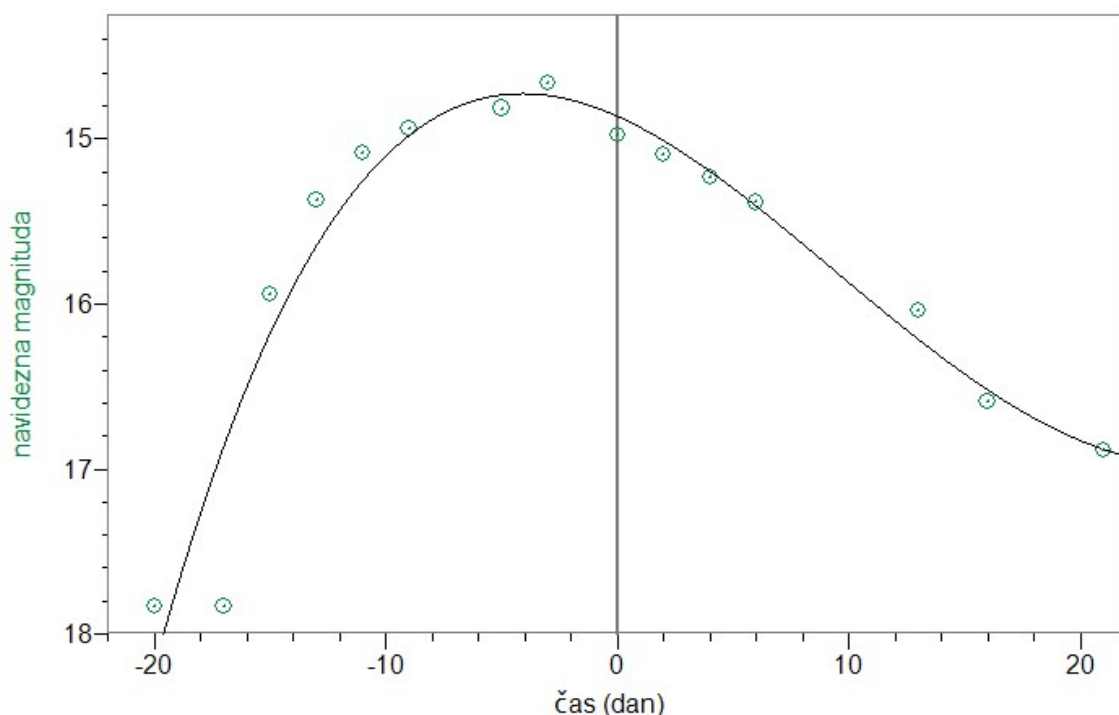
Iz prej omenjenega kataloga sem nato odčital ekstinkcijo v modrem filtru, katere vrednost je 0,13. Ta podatek sem za točno določitev razdalje upošteval v naslednjem izračunu oddaljenosti.

$$d = 10^{\frac{M_{max} - m_{-4} + m_e - 5}{5}} \cdot 1 \text{ pc} = 10^{\frac{(-19,0 \pm 0,2) - (15,25 \pm 0,05) + 0,13 - 5}{5}} \cdot 1 \text{ pc} = 65,8 \pm 7,3 \text{ Mpc}$$

$$= 214 \pm 24 \text{ milijonov svetlobnih let}$$

Ker sem pri tem izračunu upošteval dejanski čas najvišje svetlosti supernove, je tudi rezultat bližje njeni pravi oddaljenosti, izmerjeni s pomočjo rdečega premika, ki znaša 213 milijonov svetlobnih let, s tem pa rezultat na podlagi mojih meritev in upoštevane ekstinkcije od prave vrednosti odstopa za manj kot 1 %.

Še en dokaz za to, da je bil čas najvišje svetlosti supernove približno 4 dni pred pričetkom mojih opazovanj, so tudi podatki, ki sem jih dobil s spletnega kataloga Lasair (<https://lasair-ztf.lsst.ac.uk/object/ZTF22abkpgpa/>). V tem spletnem katalogu so na voljo podatki o navideznih magnitudah opazovane supernove na posamezen dan za rdeč in zelen filter. Glede na podatke iz kataloga sem izrisal svetlobno krivuljo v zelenem filtru, kjer sem čas, ko sem začel z opazovanji, označil z 0. Čeprav supernova najvišjega sija v različnih filterih ne dosega ob točno enakih časih, so bili ti časi kljub temu približno enaki, zaradi česar sem na podlagi grafa 3 lahko približno ocenil točnost svojega izračuna datuma najvišjega sija supernove. Kot je razvidno iz grafa, je supernova v zelenem filtru svoj najvišji sij dosegla od 3 do 5 dni pred pričetkom mojih opazovanj, kar nakazuje pravilnost mojega izračuna tega datuma preko odvoda funkcije, ki sem jo dobil glede na vrednost magnitud, ki sem jih izmeril.



Graf 3: Svetlobna krivulja v zelenem filtru, kjer je razvidna maksimalna svetlost

5 ZAKLJUČEK

Namen moje raziskave je bil preveriti zanesljivost supernov tipa Ia pri merjenju velikih razdalj v vesolju s tem, da uspešno izmerimo oddaljenost ene od supernov. Na začetku raziskave sem s pomočjo spletnih katalogov zvezd uspel najti na novo eksplodirano supernovo, katere sij sem nato meril še nekaj mesecev po eksploziji. S pomočjo kalibracije sem uspešno odpravil šum z nastalih posnetkov, nato pa sem z računalniškimi programi za obdelavo fotografij in fotometrijo izmeril signal supernove, ki ga je zaznal teleskop in ga nato s pomočjo enačbe za izračun instrumentalne magnitude z upoštevanjem ničelne točke pretvoril v navidezno magnitudo. S pomočjo programa Logger Pro mi je uspelo izrisati svetlobno krivuljo supernove v modrem filtru in s pomočjo prilagoditvene krivulje izmeriti potrebne podatke, da sem lahko s Phillipsovo relacijo izračunal absolutno magnitudo oziroma moč eksplozije supernove pri njeni najvišji svetlosti s predpostavko, da je bila maksimalna svetlost supernove na začetku opazovanja. Ker sem poznal navidezno in absolutno magnitudo supernove pri njeni najvišji svetlosti, sem lahko izračunal njeno oddaljenost. Izračunano oddaljenost sem primerjal s tisto, ki so jo preko rdečega premika izmerili profesionalni astronomi (213 milijonov svetlobnih let), odstopanje od te vrednosti pa je bilo približno 24 %. Odstopanje je bilo relativno veliko, kar je posledica tega, da pravzaprav nisem uspel posneti sija supernove pri najvišji svetlosti. S pomočjo ene od ničel odvoda funkcije prilagoditvene krivulje mi je uspelo ugotoviti, da je bil maksimum sija v bistvu štiri dni pred pričetkom mojih opazovanj. S pomočjo tega podatka, predpisa za svetlobno krivuljo ter vrednostjo ekstinkcije, dobljene s spleta, mi je uspelo izračunati potrebne podatke za določitev točnejše razdalje. Ta znaša 214 milijonov svetlobnih let, kar od vrednosti, dobljene iz rdečega premika, odstopa za manj kot 1 %. Čeprav nisem uspel zaznati maksimuma sija, sem na podlagi svojih meritev lahko izračunal njegov približni datum in na podlagi teh podatkov zelo natančno izračunal razdaljo do supernove, s čimer dokazujem, da lahko vsak amaterski astronom z dovolj dobro opremo in astronomskim znanjem s pomočjo eksplozij supernov tipa Ia meri zelo velike razdalje v vesolju, ki lahko znašajo tudi do več sto milijonov svetlobnih let.

S tem ko sem izmeril oddaljenost, sem neposredno lahko določil tudi čas eksplozije supernove. Ker je svetlobna hitrost omejena, je svetloba supernove do nas potovala toliko let, kot je njena oddaljenost v svetlobnih letih. Glede na moje meritev oddaljenosti je supernova eksplodirala pred 214 milijoni let v geološkem obdobju poznega triasa, le nekaj milijonov let za tem, ko so se na Zemlji pojavili prvi dinosavri.

Moje raziskovanje vesolja se na tej točki še ni končalo. Čeprav sem v srednji šoli raziskal že tri metode merjenja razdalj v vesolju, jih je ostalo še mnogo, kot sta na primer merjenje oddaljenosti zvezdnih kopic s pomočjo prilagajanja glavni veji H-R diagrama ter merjenje razdalje preko rdečega premika.

6 VIRI IN LITERATURA

- Dinwiddie P. et al. Universe: The Definitive Visual Guide. London: Dorling Kindersley, 2005.
- Avsec F., Prosen M. Astronomija. Ljubljana: DMFA - založništvo, 2006.
- Rosswog, S., Bruggen M. Introduction to High-Energy Astrophysics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- Schwartz, Matthew. Lecture 15: Stars. Spring: Statistical Mechanics, 2019. Dostopno na spletnem naslovu <https://scholar.harvard.edu/files/schwartz/files/15-stars.pdf>.
- Cappellaro, E., Turatto, M. Supernova types and rates. Padova: Osservatorio Astronomico di Padova vicolo dell'Osservatorio, 2000. Dostopno na spletnem naslovu <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0012455.pdf>.
- Weyant, Anja. Employing modern statistics to explore the universe with type Ia supernovae. Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 2008. Dostopno na spletnem naslovu http://d-scholarship.pitt.edu/22622/1/Weyant_thesis.pdf.