

**Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2023,
57. srečanje**

Analitični približki pri obravnavi poševnega meta krogle z upoštevanjem zračnega upora

**ASTRONOMIJA ALI FIZIKA
RAZISKOVALNA NALOGA**

Področje: ASTRONOMIJA ALI FIZIKA

Avtor: EMANUEL HORVAT

Mentorja: dr. PETER CRNJAC

mag. TADEJ CRNJAC

Šola: II. GIMNAZIJA MARIBOR

Maribor, 2023

**Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2023,
57. srečanje**

Analitični približki pri obravnavi poševnega meta krogle z upoštevanjem zračnega upora

**ASTRONOMIJA ALI FIZIKA
RAZISKOVALNA NALOGA**

Področje: ASTRONOMIJA ALI FIZIKA

Avtor: EMANUEL HORVAT

Mentorja: dr. PETER CRNJAC

mag. TADEJ CRNJAC

Šola: II. GIMNAZIJA MARIBOR

Maribor, 2023

KAZALO VSEBINE

| | |
|---|-----|
| KAZALO PREGLEDNIC..... | II |
| KAZALO GRAFOV | III |
| KAZALO SLIK..... | III |
| POVZETEK..... | IV |
| ZAHVALA | V |
| 1 UVOD..... | 1 |
| 1.1 Opredelitev problema | 1 |
| 1.2 Namen in cilji raziskovalne naloge..... | 1 |
| 1.3 Metode raziskovanja | 2 |
| 2 SILA UPORA..... | 3 |
| 2.1 Kvadratni zakon upora..... | 3 |
| 2.2 Linearni zakon upora | 4 |
| 2.3 Reynoldsovo število..... | 4 |
| 3 IZPELJAVA ENAČB GIBANJA | 7 |
| 3.1 Poševni met krogle v vakuumu | 7 |
| 3.2 Poševni met z upoštevanjem upora zraka..... | 9 |
| 3.3 Delo zračnega upora pri poševnem metu..... | 11 |
| 4 MATEMATIČNA FORMULACIJA PROBLEMA | 13 |
| 4.1 Numerično reševanje diferencialnih enačb..... | 13 |
| 4.2 Numerična integracija..... | 14 |
| 4.3 Diskretizacija vodilnih enačb..... | 14 |
| 4.4 Interpolacija | 15 |
| 5 PROGRAM SCILAB..... | 16 |
| 5.1 Numerični algoritem | 16 |
| 5.2 Preverjanje pravilnosti numeričnega algoritma | 16 |
| 6 EKSPERIMENTALNI DEL..... | 21 |
| 6.1 Uporabljena eksperimentalna oprema | 21 |
| 6.2 Potek meritev..... | 21 |
| 6.3 Merjenje začetne hitrosti kroglice..... | 22 |
| 7 OBDELAVA REZULTATOV MERITEV | 23 |
| 7.1 Analiza eksperimentalno in numerično dobljenih tirnic | 23 |
| 7.2 Določanje optimalnega kota na osnovi eksperimentalnih rezultatov..... | 26 |
| 7.3 Določanje optimalnega kota z računalniško simulacijo | 27 |

| | | |
|-----|---|----|
| 8 | ANALITIČNI PRIBLIŽKI | 33 |
| 8.1 | Uporaba verižnega pravila za odvode | 33 |
| 8.2 | Aproksimacija v limiti majhnih kotov | 35 |
| 8.3 | Aproksimativna rešitev z uporabo verižnega pravila | 35 |
| 8.4 | Analitični približki za koordinati x in y ter čas | 36 |
| 8.5 | Analitični približki za čas gibanja krogle ter metno višino in metno razdaljo | 38 |
| 8.6 | Primerjava analitičnih približkov in numeričnih vrednosti | 40 |
| 9 | INOVACIJSKI PREDLOG RAZISKOVALNE NALOGE | 43 |
| 10 | IDEJNA IZHODIŠČA ZA NADALJNJE RAZISKOVALNO DELO | 45 |
| 11 | UGOTOVITVE | 47 |
| 12 | ZAKLJUČEK..... | 48 |
| 13 | VIRI IN LITERATURA..... | 49 |
| | UPORABLJENI SIMBOLI IN OZNAKE | 50 |
| | PRILOGA | 52 |

KAZALO PREGLEDNIC

| | |
|---|-----------|
| <i>Preglednica 1: Čas leta in domet kroglic v brezračnem prostoru, $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 15,0$ m/s</i> | <i>17</i> |
| <i>Preglednica 2: Koefficient upora za modela 1 in 2 v odvisnosti od Reynoldsovega števila ...</i> | <i>18</i> |
| <i>Preglednica 3: Primerjava časa leta in metne razdalje kroglic z modeloma 1 in 2.....</i> | <i>19</i> |
| <i>Preglednica 4: Čas leta in metna razdalja kroglic z upoštevanjem zračnega upora, $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 15,0$ m/s</i> | <i>20</i> |
| <i>Preglednica 5: Določanje optimalnega kota z eksperimentalnimi podatki</i> | <i>26</i> |
| <i>Preglednica 6: Določanje optimalnega kota z računalniško simulacijo.....</i> | <i>28</i> |
| <i>Preglednica 7: Analitične formule za glavne spremenljivke poševnega meta.....</i> | <i>39</i> |
| <i>Preglednica 8: Primerjava rezultatov numerične analize in analitičnih približkov</i> | <i>40</i> |
| <i>Preglednica 9: Izračun spremenljivk leta bejzbolske žogice, $\alpha = 40^\circ$, $v_0 = 45,0$ m/s.....</i> | <i>43</i> |

KAZALO GRAFOV

| | |
|--|-----------|
| <i>Graf 1: Koeficient upora kroglic različnih polmerov v odvisnosti od hitrosti (vir: Munson, 2014, str. 167).....</i> | <i>6</i> |
| <i>Graf 2: Rešitev diferencialne enačbe z Eulerjevo metodo (vir: Vidav, 1976, str. 498).....</i> | <i>13</i> |
| <i>Graf 3: Let kroglic brez upoštevanja zračnega upora, $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 15,0$ m/s.....</i> | <i>17</i> |
| <i>Graf 4: Primerjava tirnic kroglic z danima masama in začetnima hitrostma z modeloma 1 in 2: a) $m_1 = 2,9$ g, $v_0 = 5,0$ m/s, b) $m_1 = 2,9$ g, $v_0 = 15,0$ m/s, c) $m_2 = 9,2$ g, $v_0 = 5,0$ m/s, d) $m_2 = 9,2$ g, $v_0 = 15,0$ m/s.....</i> | <i>19</i> |
| <i>Graf 5: Let kroglic z upoštevanjem zračnega upora, $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 15,0$ m/s.....</i> | <i>20</i> |
| <i>Graf 6: $m = 2,9$ g, $\alpha = 10,0^\circ$, $v_0 = 5,68$ m/s, $y_0 = 0,93$ m.....</i> | <i>23</i> |
| <i>Graf 7: $m = 2,9$ g, $\alpha = 30,0^\circ$, $v_0 = 7,80$ m/s, $y_0 = 0,93$ m.....</i> | <i>23</i> |
| <i>Graf 8: $m = 7,2$ g, $\alpha = 10,0^\circ$, $v_0 = 3,72$ m/s, $y_0 = 0,93$ m.....</i> | <i>24</i> |
| <i>Graf 9: $m = 7,2$ g, $\alpha = 50,0^\circ$, $v_0 = 7,24$ m/s, $y_0 = 1,08$ m.....</i> | <i>24</i> |
| <i>Graf 10: $m = 9,2$ g, $\alpha = 30,0^\circ$, $v_0 = 3,44$ m/s, $y_0 = 0,93$ m.....</i> | <i>25</i> |
| <i>Graf 11: $m = 9,2$ g, $\alpha = 50,0^\circ$, $v_0 = 7,07$ m/s, $y_0 = 0,93$ m.....</i> | <i>25</i> |
| <i>Graf 12: Graf funkcije $y = y(Ry)$ (povzeto po viru: Chudinov, 2010, str. 30).....</i> | <i>38</i> |

KAZALO SLIK

| | |
|--|-----------|
| <i>Slika 1: Trenutna slika tokovnic v toku okoli prečno postavljene ovire (vir: Acheson, 2003, str. 35).....</i> | <i>3</i> |
| <i>Slika 2: Sila upora viskozne tekočine na kroglo (vir: Acheson, 2003, str. 38).....</i> | <i>4</i> |
| <i>Slika 3: Koeficient upora v odvisnosti od Reynoldsovega števila za kroglasto telo (vir: Hemmati, 2009, str. 3).....</i> | <i>5</i> |
| <i>Slika 4: Geometrija problema z začetno višino y_0.....</i> | <i>7</i> |
| <i>Slika 5: Sile na kroglo pri poševnem metu z upoštevanjem zračnega upora.....</i> | <i>9</i> |
| <i>Slika 6: Plastične kroglice in vzmetni top.....</i> | <i>21</i> |
| <i>Slika 7: Snemanje leta kroglice.....</i> | <i>21</i> |
| <i>Slika 8: Merjenje začetne hitrosti kroglice.....</i> | <i>22</i> |
| <i>Slika 9: Geometrija problema z začetno višino $y_0 = 0$.....</i> | <i>33</i> |
| <i>Slika 10: Geometrična slika osnovnih spremenljivk poševnega meta.....</i> | <i>44</i> |
| <i>Slika 11: Optimizacija problema poševnega meta z upoštevanjem upora.....</i> | <i>45</i> |

POVZETEK

V nalogi smo raziskovali poševni met gladke krogle pod vplivom zračnega upora z upoštevanjem kvadratnega zakona upora, ki je eden od problemov klasične fizike in zahteva posebno obravnavo. Let krogle smo obravnavali v vektorski obliki in zapisali vodilne enačbe za hitrost in položaj krogle ob poljubnem času v komponenti obliki. Ugotovili smo, da problem določitve tirnice leta krogle z upoštevanjem zračnega upora analitično ni rešljiv, saj sta vodilni diferencialni enačbi za komponenti hitrosti v ravnini leta sklopljeni in nelinearni. Zato smo problem reševali z numeričnim računanjem tako, da smo zapisali računalniški program, ki iterativno rešuje diferencialne enačbe poševnega meta. Z analitično metodo smo analizirali rezultate modeliranja in jih primerjali z eksperimentalnimi rezultati, ki smo jih posneli s pomočjo hitre kamere.

V nadaljevanju smo izpeljali aproksimativne izraze za glavne kinematične spremenljivke, ki opisujejo poševni met krogle z upoštevanjem kvadratnega zakona upora, in jih izrazili v podobni obliki, kot to storimo pri obravnavanju poševnega meta v vakuumu. Sledila je obsežna raziskava, pri kateri smo primerjali analitične približke z rezultati numeričnih izračunov. Primerjava kaže odlično ujemanje, saj napaka aproksimacije nikjer ne preseže 1,7 odstotka. Po posvetu z učitelji fizike bi se lahko rezultati raziskovalne naloge izvajali kot demonstracijski poskus v sklopu učnega načrta na izbranih stopnjah srednješolskega programa fizike.

Ključne besede: poševni met, kvadratni zakon upora, analitični približki

ABSTRACT

The research paper deals with the throw of a smooth sphere at an angle under the influence of air resistance taking into account the square law of resistance, which is one of the problems of classical physics and requires special consideration. We considered the flight of the sphere in vector form and recorded the governing equations for sphere velocity and position at a random time in component form. We established that the problem of determining the sphere flight trajectory taking into account air resistance cannot be solved analytically, since the governing differential equations for velocity components in the plane of the flight are coupled and non-linear. Therefore, we were solving the problem with numerical calculation by writing a computer programme that iteratively solves differential equations of the throw at an angle. We analysed the modelling results by analytical method and compared them with experimental results recorded with the help of a high-speed camera.

We continued with deriving approximate expressions for main kinematic variables that describe the throw of a smooth sphere at an angle taking into account the square law of resistance and expressed them in a similar form as we do when considering a throw at an angle in vacuum. This was followed by extensive research in which analytical approximations were compared with the results of numerical calculations. The comparison shows perfect matching, since the approximation error never exceeds 1.7 percent. After consulting physics teachers, the results of the research paper could be implemented as a demonstration experiment within the curriculum at selected levels of the secondary school physics programme.

Keywords: projectile motion, square law of resistance, analytical formulae

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorju dr. Petru Crnjacu za pomoč in podporo pri raziskovanju in pisanju naloge, mag. Tadeju Crnjacu za pomoč pri programiranju in dr. Marku Jagodiču za pomoč pri izvedbi eksperimenta.

1 UVOD

Gibanje izstrelka je priljubljen zgled v učbenikih fizike, ki se največkrat ukvarjajo z zelo splošnimi mehničnimi osnovami poševnega meta. Pogosto se z njim ukvarjajo tudi fizikalne poučevalske revije, ki si pri računanju največkrat izposodijo zglede pri metu krogle, diska in kladiva. Da bi metalec vrgel orodje čim dlje, ga pospeši do čim večje hitrosti in usmeri pod najugodnejšim kotom proti vodoravnici. Tako ločimo pri metu prvi del, pospeševanje telesa, in drugi del, njegov let. Zanimive, a tudi težje postanejo zadeve, ko poskuša fizik pripomoči vrhunskemu metalcu do daljšega meta. Tedaj natanko opazuje gibanje metalca, pri čemer si pomaga s hitro filmsko kamero, s precej bolj zapletenimi enačbami in z računalnikom.

1.1 Opredelitev problema

V nalogi smo raziskovali poševni met gladke krogle z upoštevanjem upora zraka. Ko se telo giblje skozi tekočino ali če teče tekočina mimo telesa, razstavimo celotno silo tekočine na statični vzgon in dinamično silo, ki je neposredno odvisna od hitrosti telesa oziroma tekočine. V realni (viskozni) tekočini se prilepi vzdolž površine telesa mejna plast tekočine, ki skupaj s telesom miruje. Zaustavljena plast zavira gibanje sosednjih plasti, oddaljene plasti pa z viskozni silami vlečejo plasti ob telesu s seboj in tako zmanjšujejo tlak tekočine na nizvodni strani telesa. Razen tega nastajajo za telesom vrtinci, ki se odlepljajo od njega in potujejo v smeri toka. Kinetična energija vrtincev se spotoma izgublja, zato je hitrost tekočine za telesom manjša kot pred njo. Zmanjšanje hitrosti tekočine povzroča sila, s katero se telo upira mimo tekoči tekočini, ta pa je nasprotno enaka sili, s katero tekočina pritiska na telo v smeri toka in ga vleče s seboj. Tej sili pravimo upor tekočine (Kladnik, 1985, str. 172).

Pri velikih hitrostih, ki jih dosega telo, in malo viskoznih tekočinah je za upor tekočine bolj kot vpliv viskoznosti odločilen dinamični učinek, da telo moti potek tokovnic, da tokovnice zakrivlja in da spreminja hitrost tekočine. Pri dani obliki telesa je odločilna predvsem zadnja stran, kjer nastajajo vrtinci. Izkušnje kažejo, da je dinamični upor sorazmeren z gostoto kinetične energije nemotenega gibanja tekočine. Sorazmernostni faktor se imenuje koeficient upora, ki je odvisen od oblike in velikosti telesa, v splošnem pa tudi od hitrosti in viskoznosti tekočine (Strnad, 1973, str. 188).

1.2 Namen in cilji raziskovalne naloge

Računanje tirnice gibanja krogle z upoštevanjem zračnega upora je težavna naloga. Let krogle smo obravnavali v vektorski obliki in zapisali vodilne enačbe za hitrost in položaj krogle ob poljubnem času v komponenti obliki. Vodilni diferencialni enačbi sta sklopljeni, vendar nelinearni, zato nista analitično rešljivi. Enačbi pa lahko vseeno rešimo z numerično metodo. Pri izračunu leta krogle smo upoštevali odvisnost koeficienta upora od vrednosti Reynoldsovega števila oziroma hitrosti. Kljub vsemu smo realne razmere še vedno poenostavili, saj v fazi leta nismo upoštevali rotacije, ki jo dobi krogla pri izstrelitvi. Če se krogla med gibanjem skozi zrak še vrti okrog osi, pravokotne na smer gibanja, se nesimetričnost obtekanja tokovnic dodatno ojača (Magnusov efekt) (Kladnik, 1985, str. 175).

Kot izziv smo v nalogi poskušali poiskati odgovor na vprašanje, ali je z razpoložljivim srednješolskim znanjem fizike, matematike in računalništva moč izpeljati enačbe, ki bi predstavljale vsaj smiselne približke za vrednosti, ki jih da numerična simulacija.

Na kratko povzemimo namen in cilje raziskovalne naloge:

- obravnavati let krogle v vektorski obliki in zapisati vodilne enačbe za hitrost in položaj krogle ob poljubnem času t v komponenti obliki;
- zapisati izpeljane vodilne diferencialne enačbe v diskretni obliki z uporabo metode končnih razlik 1. reda in trapezne integracije;
- upoštevati odvisnost koeficienta upora od vrednosti Reynoldsovega števila oziroma hitrosti. Za tabelarične vrednosti uporabiti linearno Lagrangeovo interpolacijo;
- izdelati numerični algoritem za izračun leta krogle s programskim paketom Scilab;
- preveriti pravilnost numeričnega algoritma pri testiranju leta krogle brez upoštevanja zračnega upora;
- analizirati rezultate simulacije v odvisnosti od časovnega koraka;
- s hitro kamero posneti tirnico gibanja krogle in jo grafično primerjati s krivuljo, ki jo da računalniška simulacija;
- z analitično metodo določiti optimalni kot, pri katerem doseže krogla pri dani začetni hitrosti maksimalno metno razdaljo. Raziskati optimalni kot in domet pri tem kotu;
- ugotoviti odvisnost optimalnega kota od začetne hitrosti in jo testirati pri različnih hitrostih;
- izpeljati analitične aproksimativne rezultate za glavne kinematične spremenljivke pri poševnem metu krogle;
- spoznati družbenokoristni vidik izpeljanih formul pri kvalitativni in kvantitativni analizi poševnega meta.

1.3 Metode raziskovanja

V teoretičnem delu naloge (poglavja 2–5) smo se opirali na teoretična spoznanja kinematike, ki smo jih pridobili pri študiju tuje in domače literature, torej z analitično-metodološkim pristopom. V empiričnem delu (poglavji 6–7) smo pridobljeno teoretično znanje uporabili pri numeričnem modeliranju, kjer smo za numerično rešitev problema uporabili računalniški program Scilab. Z analitično metodo smo analizirali rezultate modeliranja in jih primerjali z eksperimentalnimi rezultati, ki smo jih posneli s pomočjo hitre kamere.

V poglavju 8 smo z raziskovalnim pristopom izpeljali analitične aproksimativne enačbe za glavne kinematične spremenljivke, ki dovolj natančno opišejo gibanje krogle in jih izrazili v podobni obliki, kot to storimo pri obravnavanju poševnega meta v vakuumu. V poglavjih 9 in 10 spoznavamo družbeno koristni vidik izpeljanih formul pri kvalitativni in kvantitativni analizi poševnega meta ter podamo idejna izhodišča za nadaljnje raziskovalno delo.

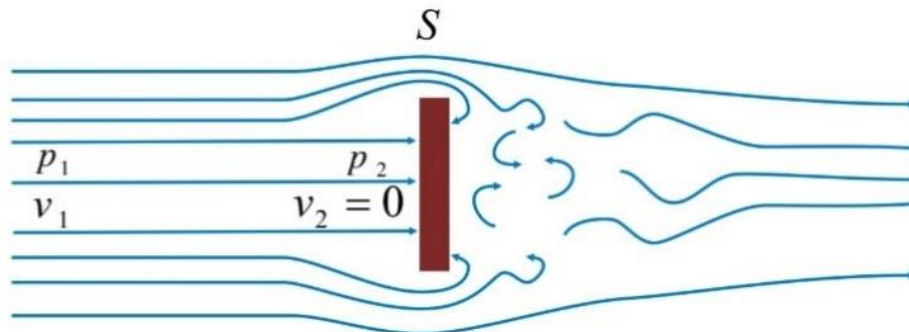
2 SILA UPORA

Zanima nas celotna sila, s katero tekočina z vseh strani pritiska na potopljeno telo. Če tekočina in telo v njej mirujeta, je ta sila statični vzgon. Brž, ko se telo giblje skozi tekočino ali če tekočina teče mimo telesa, se porazdelitev tekočinskih tlakov vzdolž površine telesa spremeni. Celotno silo tekočine razstavimo na statični vzgon, ki je neodvisen od tega, ali tekočina oziroma telo mirujeta, in na dinamično silo, ki je neposredno odvisna od hitrosti telesa oziroma tekočine.

V realni (viskozni) tekočini se prilepi vzdolž površine ovire mejna plast tekočine, ki skupaj z oviro miruje. Zaustavljena plast zavira gibanje sosednjih plasti, oddaljene plasti pa z viskozni silami vlečejo plasti ob oviri s seboj in tako zmanjšujejo tlak tekočine na nizvodni strani ovire. Razen tega nastajajo za oviro vrtinci, ki se odlepljajo od nje in potujejo v smeri toka. Kinetična energija vrtincev se spotoma izgublja, zato je hitrost tekočine za oviro manjša kot pred njo. Zmanjšanje hitrosti tekočine povzroča sila, s katero se ovira upira mimo tekoči tekočini, ta pa je nasprotno enaka sili, s katero tekočina pritiska na oviro v smeri toka in ga vleče s seboj. Tej sili pravimo upor tekočine (Kladnik, 1985, str. 172).

2.1 Kvadratni zakon upora

Pri velikih hitrostih in malo viskozni tekočinah je za upor tekočine bolj kot vpliv viskoznosti odločilen dinamični učinek, da telo moti potek tokovnic, da tokovnice zakrivlja in da spreminja hitrost tekočine. Če bi se tekočina pred ploščatim telesom ustavila, mimo njega bi tekla nemoteno naprej (slika 1), bi se tlak tekočine ob telesu povečal za dinamični tlak in tekočina bi odpravila telo s silo $S\rho v^2/2$, pri čemer sta S prečni prerez telesa in ρ gostota tekočine.



Slika 1: Trenutna slika tokovnic v toku okoli prečno postavljene ovire (vir: Acheson, 2003, str. 35)

Telo dejansko ni ploščato in tekočina se ob njem ne ustavi povsem, temveč ga tokovnice obidejo in na zadnji strani nastajajo vrtinci, kot je razvidno iz slike 1. Izkušnje kažejo, da lahko za dinamični upor kljub temu uporabljamo približen izraz $S\rho v^2/2$, le da moramo enačbo opremiti s koeficientom upora C_u , ki ga določimo z merjenjem, da dobimo kvadratni zakon upora (Strnad, 1973, str. 188)

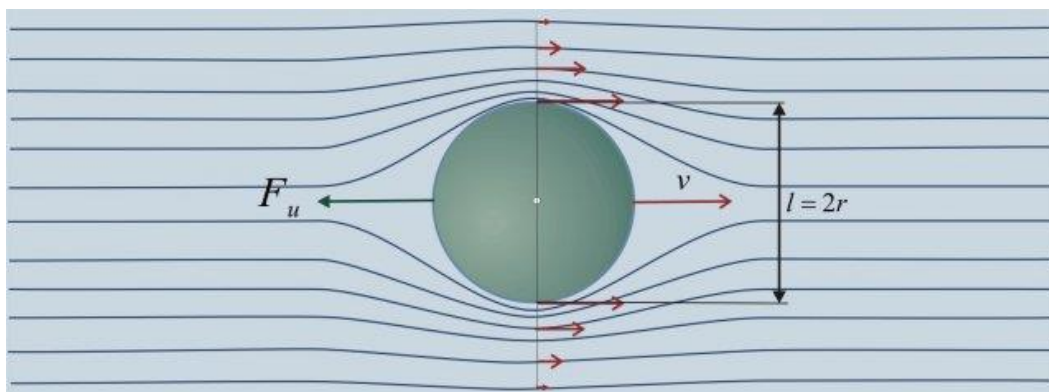
$$F_u = C_u S \rho \frac{v^2}{2}. \quad (2.1)$$

Tu je v hitrost tekočine v nemotenem toku merjena glede na telo. Vseeno je, ali se giblje tekočina in miruje telo ali se giblje telo in miruje tekočina – odločilna je relativna hitrost. Koeficient upora C_u je odvisen od oblike telesa in od njegove lege proti smeri relativne hitrosti. Za S vstavimo vselej čelni presek, to je največji prečni presek telesa. Z merjenjem so ugotovili

te vrednosti koeficienta upora: za simetrično postavljeno ploščo 1,1, za kroglo (čelni presek je ploščina glavnega kroga πR^2) približno 0,4, za simetrično postavljeno polkroglo z odprtino v smeri toka okoli 1,3 in z odprtino v nasprotni smeri okoli 0,4. Pri danem čelnem preseku je upor najmanjši za telo s tako imenovano hidrodinamično obliko (koeficient je približno 0,04).

2.2 Linearni zakon upora

Pri počasnem gibanju teles v viskozni tekočini oziroma pri počasnem toku viskozne tekočine mimo teles je upor tekočine odvisen predvsem od viskoznosti tekočine. Mejna plast tekočine ob površini telesa skupaj s telesom miruje in z viskozni silami zadržuje sosednje plasti, kot je prikazano na sliki 2. Te tečejo tem hitreje, čim bolj so oddaljene od telesa. Hitro tekoče oddaljene plasti prek vmesnih učinkujejo na telo in ga vlečejo s seboj. Rezultanta teh sil v smeri tekočine je odvisna od tega, kako se hitrost spreminja s krajem v neposredni bližini telesa. Strižna hitrost je različna od nič in z njo zvezana strižna sila na telo ima komponento v smeri relativne hitrosti.



Slika 2: Sila upora viskozne tekočine na kroglo (vir: Acheson, 2003, str. 38)

Upor dobimo, ko seštejemo prispevke komponente strižne sile v smeri toka po vsej površini telesa. Račun je zelo zapleten, celo za kroglo, zato se zadovoljimo z oceno. V zakonu o viskoznosti $F/S = \eta dv_x/dz$, kjer je η viskoznost tekočine, ocenimo S kar s površino krogle $4\pi r^2$ in strižno hitrost kar z v/r . Tako dobimo za upor oceno $F_u = 4\pi r\eta v$. Z zapletenim računom pa pridemo do Stokesovega zakona (Strnad, 1973, str. 190)

$$F_u = 6\pi r\eta v. \quad (2.2)$$

Za upor drugih teles velja podobna enačba

$$F_u = konst. l\eta v, \quad (2.3)$$

v kateri je koeficient odvisen od oblike in lege telesa ter je l izbrana linearna razsežnost v čelnem preseku telesa. To je linearni zakon, ker v njem nastopa hitrost v prvi potenci.

2.3 Reynoldsovo število

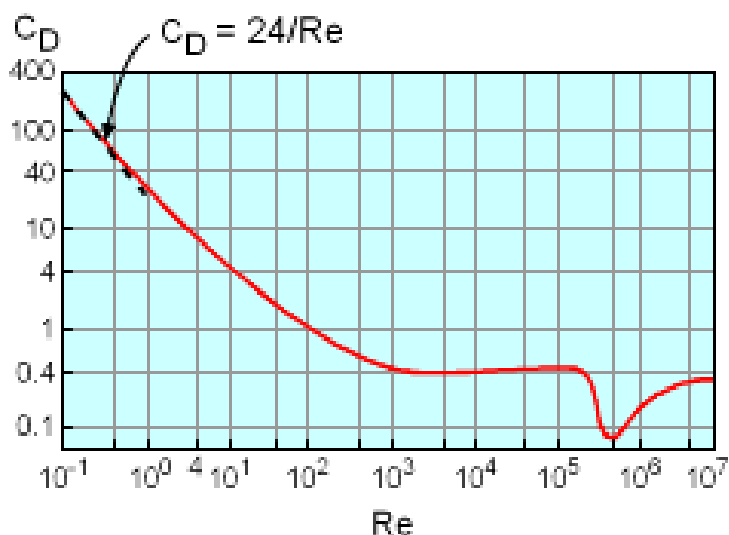
Ne vemo pa še, kdaj uporabiti linearni in kdaj kvadratni zakon upora. Do odgovora na to vprašanje pridemo, če predpostavimo, da sta linearni in kvadratni zakon člena v potenčni vrsti za upor v odvisnosti od relativne hitrosti. Računamo za kroglo

$$F_u = 6\pi r\eta v + 0,4 \cdot \pi r^2 \rho \frac{v^2}{2}. \quad (2.4)$$

Pri majhnih hitrostih prevlada prvi člen in obvelja linearni zakon, pri velikih hitrostih prevlada drugi člen in obvelja kvadratni zakon. Številski koeficient ni bistven, zato ga ne vključimo v definicijo Reynoldsovega števila (Strnad, 1973, str. 190)

$$Re = \frac{2r\rho v}{\eta}. \quad (2.5)$$

Za majhna Reynoldsova števila velja za kroglo z relativno natančnostjo nekaj odstotkov linearni zakon, če je $Re < 0,5$ in kvadratni zakon, če je $Re > 10^3$. V vmesnem območju si ne moremo pomagati z nobenim od obeh zakonov, niti z njuno vsoto, ampak smo vezani na uporabo tabel. Vendar kvadratni zakon ne velja pri poljubno velikih hitrostih. Njegova veljavnost je omejena s hitrostjo zvoka v tekočini. Pri relativnih hitrostih, ki merijo del hitrosti zvoka – pri naši natančnosti nekako polovico – kvadratni zakon preneha veljati (Kladnik, 1985, str. 176).



Slika 3: Koeficient upora v odvisnosti od Reynoldsovega števila za kroglasto telo (vir: Hemmati, 2009, str. 3)

Merjenje upora zraka (na modelu telesa v vetrovniku) pokaže, da je koeficient upora odvisen neposredno od Reynoldsovega števila. Eksperimentalni podatki za kroglasto telo so prikazani na sliki 3; $C_u = C_D$ in Re sta nanesa na logaritemski skali. Za $Re < 0,5$ je viskoznost pomembna v področju okoli krogle, kot tudi v okolici. Tokovnice se ne ločijo in se tekočina »lepi« na kroglo. V tem režimu je koeficient upora približno obratno sorazmeren z Reynoldsovim številom

$$C_u = \frac{24}{Re}, \quad (2.6)$$

kar pomeni, da je upor tekočine dan z viskoznim uporom.

Pri srednjih Reynoldsovih številih je mejna plast blizu krogle. Viskoznost je pomembna v območju znotraj mejne plasti. Na sliki 3 vidimo, da se koeficient upora zmanjšuje z naraščanjem Reynoldsovega števila in je skoraj konstanten za $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$, torej lahko uporabimo

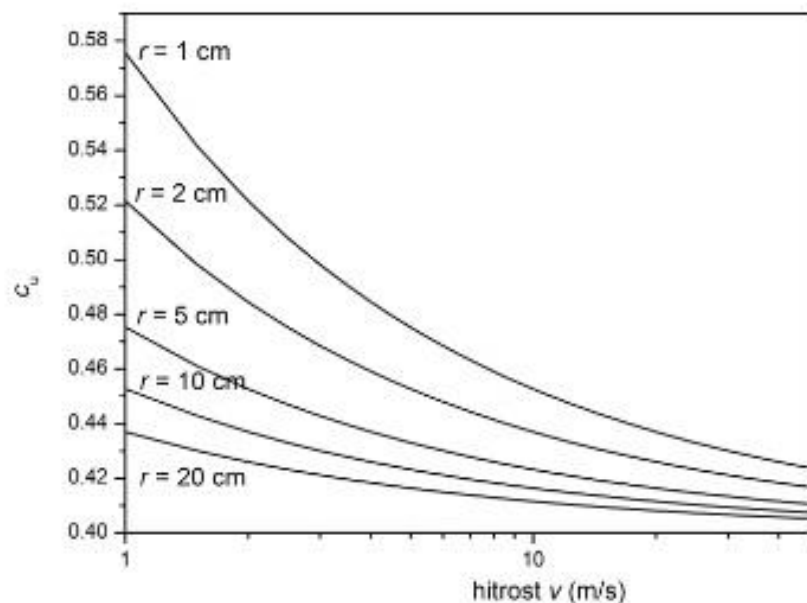
dinamični upor. V tem prehodnem območju iz laminarnega v turbulentni režim najdemo v strokovni literaturi različne modele. Za koeficient upora krogle velja z natančnostjo približno 10 odstotkov enačba (Dobeš in ostali, 2014, str. 7)

$$C_u = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt{Re}} + 0,4, \quad (2.7)$$

medtem ko Munson in ostali (2014, str. 165) predlagajo naslednjo odvisnost

$$C_u = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4. \quad (2.8)$$

Kako se v tem modelu spreminja koeficient upora krogle C_u različnih polmerov s hitrostjo v zraku pri temperaturi 20 °C, kaže spodnji graf. Izračunajmo Re pri hitrosti $v = 1,0$ m/s za kroglico s premerom $2r = 20,0$ mm. Iz znanih parametrov za zrak ($\rho = 1,205$ kg/m³, $\eta = 1,802 \cdot 10^{-5}$ kg/ms) izračunamo $Re = 2r\rho v/\eta = 1,1 \cdot 10^3$, s čimer upravičimo izbiro kvadratnega zakona upora.



Graf 1: Koeficient upora krogljic različnih polmerov v odvisnosti od hitrosti (vir: Munson, 2014, str. 167)

Če povzamemo: Reynoldsovo število se izkaže kot zelo koristen pripomoček, ki pomaga presoditi, ali je pri danem gibanju tekočine odločilen viskozni ali dinamični učinek. Pri počasnem gibanju majhnih teles v močno viskozni tekočini je Re majhen (npr. manjši od 1). Velik Re pa dobimo pri hitrem gibanju velikih teles v malo viskozni tekočini. Velik Re (npr. več kot 1000) torej pomeni, da lahko viskozni učinek zanemarimo, pomembni so dinamični učinki. Ko merimo upor tekočine na modelu telesa v vetrovniku, moramo paziti, da je Re za model enak kot pri pravem telesu.

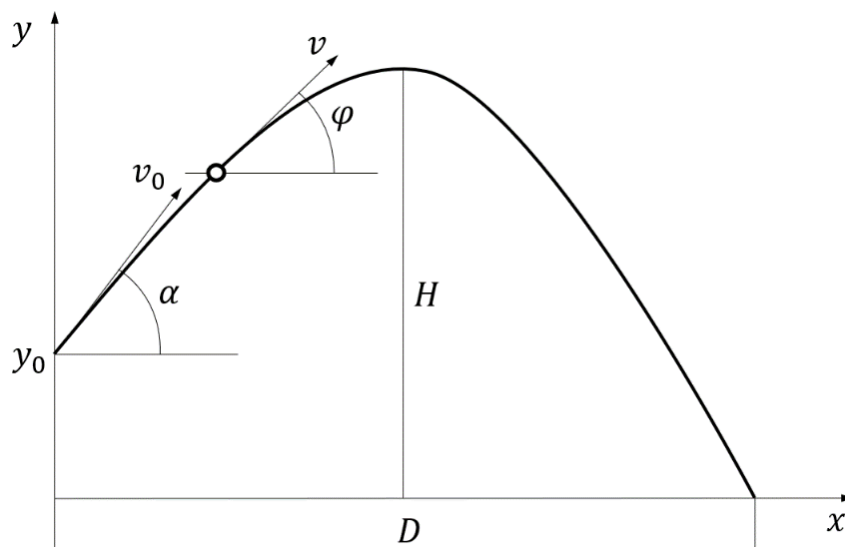
3 IZPELJAVA ENAČB GIBANJA

Računanje tirnice gibanja krogle je težavna naloga, saj bi morali poleg začetne hitrosti, naklonskega kota, teže, zračnega upora, temperature in vrtenja krogle pri natančnem računu upoštevati še spreminjanje težnega pospeška z višino, vrtenje Zemlje itd. Napraviti moramo precejšnjo poenostavitev, saj želimo pri poševnem metu analizirati tirnico gibanja krogle le z upoštevanjem upora. V vseh primerih opazujemo gibanje težišča krogle.

3.1 Poševni met krogle v vakuumu

Ponovimo najprej mehanične osnove poševnega meta brez upoštevanja zračnega upora. Opazujemo gibanje krogle, ko jo na primer top izstreli ali metalec sune. Tedaj ima krogla začetno hitrost v_0 pod začetnim kotom α proti vodoravnici in začetno višino y_0 nad tlemi, kot vidimo na sliki 4. Krogla nato pada s pospeškom prostega padanja g navpično navzdol. Vodoravna komponenta hitrosti se ne spreminja $v_x = v_0 \cos \alpha$, navpična pa se zmanjšuje $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$, če začnemo meriti čas v trenutku, ko krogla zapusti cev topa ali metalčevo roko. Tirnico (krivuljo gibanja) dobimo, ko iz enačbe $x = v_0 t \cos \alpha$ izrazimo čas in ga vstavimo v enačbo $y = y_0 + v_0 t \sin \alpha - gt^2/2$

$$y = y_0 + x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (3.1)$$



Slika 4: Geometrija problema z začetno višino y_0

V enačbo (3.1) je pripravno vpeljati brezdimenzijski koordinati $\xi = gx/v_0^2$ in $\eta = gy/v_0^2$ ter $\eta_0 = gy_0/v_0^2$

$$\eta = \eta_0 + \xi \tan \alpha - \frac{\xi^2}{2 \cos^2 \alpha}. \quad (3.2)$$

Z enačbo (3.2) izračunamo metno razdaljo, to je razdaljo $x_0 = D = v_0^2 \xi_0/g$, v kateri krogla zadene tla pri $y = \eta = 0$

$$\frac{1}{2} \xi_0^2 - \frac{1}{2} \xi_0 \sin 2\alpha - \eta_0 \cos^2 \alpha = 0. \quad (3.3)$$

Metna razdalja, ki jo dobimo kot rešitev zgornje kvadratne enačbe

$$\xi_0 = \frac{\sin 2\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\sin^2 2\alpha}{4} + 2\eta_0 \cos^2 \alpha}, \quad (3.4)$$

je odvisna od začetnega kota α . V splošnem doseže kroglja tla po dveh tirnicah pri večjem in manjšem kotu α . Le pri dometu $D = x_{0m}$, ki mu ustreza ξ_{0m} , to je največji metni razdalji, je kot en sam α_m . Nadomestimo v (3.2) $1/\cos^2 \alpha$ z $1 + \tan^2 \alpha$ in dobimo kvadratno enačbo za $\tan \alpha_m$

$$\tan^2 \alpha_m - 2 \frac{\tan \alpha_m}{\xi_{0m}} - \frac{2\eta_0}{\xi_{0m}^2} + 1 = 0. \quad (3.5)$$

Pri dometu je diskriminanta enaka nič, torej $(2/\xi_{0m})^2 = 4(1 - 2\eta_0/\xi_{0m}^2)$, tako da je

$$\tan \alpha_m = \frac{1}{\xi_{0m}}, \quad \tan^2 \alpha_m = \frac{1}{(1 + 2\eta_0)}, \quad \xi_{0m}^2 = 1 + 2\eta_0. \quad (3.6)$$

Enak rezultat bi dobili, če bi izračunali odvod $d\xi/d\alpha$, ga izenačili z 0 in rešili enačbo. Po enačbah (3.6) se zaradi začetne višine η_0 domet poveča.

Izpeljimo enačbo parabolčnega gibanja težišča krogle (3.1) še z drugačnim pristopom. Enak formalizem bomo ponovno uporabili pri izpeljavi aproksimativnih enačb gibanja krogle z upoštevanjem upora. Kot je razvidno s slike 4, obravnavamo gibanje krogle poševno navzgor z začetno hitrostjo v_0 pod kotom α glede na vodoravna tla. Zapišimo komponenti pospeška \vec{a} v smeri koordinatnih osi

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = 0, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = -g. \quad (3.7)$$

Običajno rešujemo sistem (3.7) z dvakratno integracijo po času in dobimo enačbo tirnice v parametrični obliki $x = x(t)$ in $y = y(t)$. Potem na primer iz prve enačbe izračunamo čas in vstavimo izraz v drugo enačbo, da dobimo enačbo tirnice v eksplisitni obliki $y = y(x)$.

Integraciji po času se lahko izognemo z uporabo Leibnizevega verižnega pravila za odvode. Zapišimo komponenti hitrosti v_x in v_y s časovnima odvodoma koordinat $v_x = dx/dt$ in $v_y = dy/dt$, enačbi delimo in izrazimo odvod funkcije $y(x)$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \tan \varphi, \quad (3.8)$$

ki predstavlja v izbrani točki smerni koeficient tangente na tirnico. Iz enačbe (3.8) razberemo, da lahko odvod po koordinati x izrazimo z odvodom po času kot

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{v_x} \frac{d}{dt}. \quad (3.9)$$

Uporabimo operacijo (3.9) na $y'(x)$ in dobimo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v_x} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \frac{\dot{v}_y v_x - \dot{v}_x v_y}{v_x^3}. \quad (3.10)$$

Uporabimo (3.7) in upoštevajmo, da je hitrost v vodoravni smeri stalna $v_x = v_{0x}$, da dobimo

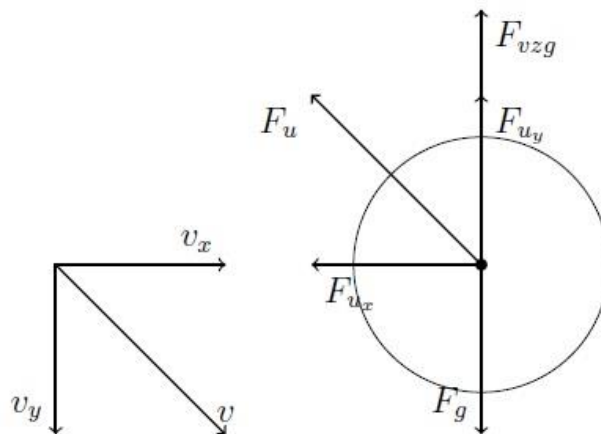
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v_x^2} = -\frac{g}{v_{0x}^2}. \quad (3.11)$$

Diferencialno enačbo (3.11) dvakrat integriramo po x ob upoštevanju robnih pogojev $y(0) = y_0$ in $y'(0) = \tan \alpha$ ter dobimo enačbo tirnice v eksplicitni obliki

$$y = y_0 + x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2}. \quad (3.12)$$

3.2 Poševni met z upoštevanjem upora zraka

Opišimo poševni met krogle skozi zrak. Koordinatni sistem postavimo s standardno orientacijo v težišče krogle. Krogla se premika hkrati v smereh x in y , kar pomeni, da kroglo pri gibanju zavira sila upora F_u , ki ima vodoravno komponento F_{ux} in navpično komponento F_{uy} , kot je prikazano na sliki 5.



Slika 5: Sile na kroglo pri poševnem metu z upoštevanjem zračnega upora

Sila, ki jo gibajoča se tekočina izvaja na telo, ima smer relativne hitrosti, če ima telo simetrijsko os v smeri te hitrosti. Če telo nima osi v navedeni legi, pa sila nima enake smeri. V tem primeru razstavimo silo F_u na komponento v smeri relativne hitrosti F_{ux} in na komponento v navpični smeri F_{uy} , ki ji pravimo tudi dinamični vzgon. Ker ima sila upora smer negativne hitrosti \vec{v} , lahko pišemo

$$\vec{F}_u = -\frac{1}{2} C_u \rho S v^2 \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{1}{2} C_u \rho S v \vec{v}, \quad (3.13)$$

s komponentama

$$F_{ux} = -\frac{1}{2} C_u \rho S v v_x, \quad F_{uy} = -\frac{1}{2} C_u \rho S v v_y, \quad (3.14)$$

kjer je absolutna hitrost

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (3.15)$$

Kinematiko oziroma gibanje krogle lahko dovolj natančno opišemo z drugim Newtonovim zakonom, in sicer kot

$$\sum_i \vec{F}_i = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (3.16)$$

pri čemer leva stran predstavlja vsoto vseh sil, ki deluje na kroglo, m maso krogle in $d\vec{v}/dt$ njen pospešek. Zapišimo drugi Newtonov zakon za obe smeri

$$ma_x = F_{ux}, \quad (3.17)$$

$$ma_y = -F_g + F_{vzg} + F_{uy}. \quad (3.18)$$

kjer je F_{vzg} sila vzgona, ki jo smemo pri krogli v zraku zanemariti. Dobimo dve sklopljeni navadni diferencialni enačbi (Crosseli, 2014, str. 13)

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2} C_u \rho S v v_x, \quad (3.19)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \frac{1}{2} C_u \rho S v v_y, \quad (3.20)$$

ki pa nista linearni, zato nista analitično rešljivi. Enačbi pa lahko vseeno rešimo z ustrezno numerično metodo.

Položaj krogle je določen z diferencialno enačbo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (3.21)$$

pri čemer sta \vec{r} krajevni vektor in \vec{v} vektor hitrosti. Brž ko poznamo vektor hitrosti za celotno gibanje (to je kot funkcijo časa), lahko določimo tudi lego točke (njen krajevni vektor \vec{r}) za poljubni trenutek. Enačba (3.21) podaja spremembo krajevnega vektorja $d\vec{r}$ v časovnem intervalu dt . Celotna sprememba vektorja $\Delta\vec{r}$ je vsota (integral) posameznih diferencialnih sprememb $\Delta\vec{r} = \int d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{v} dt$. Vektor \vec{r}_0 določa začetno lego točke, to je lego točke v začetnem trenutku $t = 0$. Vektorsko enačbo za $\Delta\vec{r}$ lahko zapišemo še v komponentni obliki (Strnad, 1973, str. 22)

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt, \quad y = y_0 + \int_0^t v_y dt. \quad (3.22)$$

3.3 Delo zračnega upora pri poševnem metu

V tem poglavju izračunamo delo zračnega upora in ocenimo zmanjšanje dometa zaradi njega. Kot smo zapisali v podpoglavju 2.3, je na tem mestu treba izbrati, ali gre za linearni ali kvadratni zakon upora. Izbiro kvadratnega zakona upraviči Reynoldsovo število (2.5), ki ga izračunamo za eno od kroglic, ki smo jih uporabili v laboratoriju pri eksperimentu (str. 13), s čimer upravičimo izbiro kvadratnega zakona upora

Delo zračnega upora med letom je $A_u = \int \vec{F}_u \cdot d\vec{s} = - \int F_u ds$. Pri tem je $ds = v dt$ kratek odsek tirnice in ima upor nasprotno smer hitrosti. Kvadrat velikosti hitrosti se med metom le malo spremeni. Zanj vstavimo izraz (3.15) in za odsek tirnice $ds = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt$. Dobljena izraza sestavimo v

$$A_u = - \int F_u ds = - \frac{1}{2} C_u \rho S \int (v_x^2 + v_y^2) \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt. \quad (3.23)$$

Izračunamo kvadrat velikosti hitrosti

$$\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 &= (v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2 = v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2 = \\ &= v_0^2 \left(1 - 2\xi \tan \alpha + \frac{\xi^2}{\cos^2 \alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nazadnje smo t nadomestili z x in tega s ξ . To naredimo tudi z $dt = dx / v_0 \cos \alpha = (v_0/g)d\xi / \cos \alpha$ in dobimo

$$A_u = - \frac{C_u \rho S v_0^4}{2g \cos \alpha} \int_0^{\sqrt{1+2\eta_0}} \left(1 - 2\xi \tan \alpha + \frac{\xi^2}{\cos^2 \alpha} \right)^{\frac{3}{2}} d\xi = - \frac{C_u \rho S v_0^4}{2g \cos \alpha} I(\eta_0). \quad (3.25)$$

Koeficient pred integralom in z njim absolutna vrednost dela zračnega upora izrazito naraščata z začetno hitrostjo. Integrala $I(\eta_0)$ in odvoda $\partial I / \partial \eta_0$ ne moremo izračunati analitično, zato si pomagamo numerično, na primer s programskim paketom za simbolično računanje *Mathematica*, ne da bi uporabili kak približek. Pri začetni višini 0 dobimo $I(\eta_0) = 0,5544$ in $(\partial I / \partial \eta_0)_{\eta_0=0} = 0,3859$. Z integralom si pomagamo, ko računamo delo zračnega upora pri začetni višini 0, odvod pa pove, kako se to delo spreminja z začetno višino (Strnad, 2013, str. 105).

Najprej si ustvarimo pregled v prvem približku, v katerem ne upoštevamo začetne višine krogle $\eta_0 = 0$ in zračnega upora ter je $\xi_{0m} = 1$ in $\alpha_m = 45^\circ$. V tem približku je začetna hitrost $v_0^{(1)} = \sqrt{gx_0}$, torej je domet sorazmeren s kinetično energijo krogle. Začetna višina metno razdaljo poveča in metni kot zmanjša

$$\xi_{0m} = \sqrt{1 + 2\eta_0} \approx 1 + \eta_0, \quad \tan \alpha_m = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\eta_0}} \approx 1 - \eta_0, \quad \alpha_m = \frac{\pi}{4} - \frac{\eta_0}{2}. \quad (3.26)$$

Prvo zvezo za ξ_{0m} preprosto pojasnimo. V prvem približku krogla zapusti cev topa ali metalčevo roko pod kotom $\pi/4$ in približno pod enakim kotom pade na tla. Tako si lahko na mestu padca krogle zamislimo pravokotni trikotnik, katerega navpična kateta y_0 je enaka vodoravni kateti x_0 , za katero se podaljša metna razdalja. Pomnožimo enačbo $x_0 = v_0^2/g + y_0$ z mg in dobimo

$$mgx_0 = mv_0^2 + mgy_0 = 2W_k + W_p. \quad (3.27)$$

Zveza (3.27) kaže, da je v prvem približku v tem pogledu dvakrat ugodneje, da se delo naloži v kinetično energijo krogle kot v potencialno.

Pri uporabi smo integral $I(\eta_0)$ izračunali, ne da bi se zatekli k približku. Pojavijo pa se druge negotovosti. Navadno vzamemo, da je koeficient upora konstanten in za kroglo meri nekaj več kot 0,4. Odvisnost koeficienta upora od Reynoldsovega števila Re z viskoznostjo zraka η pokaže, da je tako pri Reynoldsovih številih med $2 \cdot 10^3$ in $2 \cdot 10^5$, kot razberemo iz slike 3. Pri nekoliko večjem Reynoldsovem številu kot $2,3 \cdot 10^5$ pa koeficient precej strmo pade na 0,1. Koeficient upora je odvisen še od hrapavosti, a pri metih lahko vzamemo kroglo za gladko (Strnad, 2013, str. 106).

Izračunajmo še razmerje med absolutno vrednostjo dela upora in začetno kinetično energijo $|A_u|/W_k$ za eno izmed plastičnih kroglic ($m = 9,2$ g, $d = 24,81$ mm), ki smo jo uporabili v eksperimentalnem delu naloge: $|A_u|/W_k = C_u \rho \pi d^2 v_0^2 / 4mg \cos \alpha \cdot I(\eta_0)$. Napravimo oceno pri dveh začetnih hitrostih $v_0 = 5,0$ m/s in $v_0 = 15,0$ m/s, s katerima smo izstrelili kroglico s tal ($y_0 = 0$) pod kotom $\alpha = 45^\circ$. Pri hitrosti $v_0 = 5,0$ m/s znaša razmerje $|A_u|/W_k \approx 0,05$, medtem ko pri hitrosti $v_0 = 15,0$ m/s naraste razmerje $|A_u|/W_k \approx 0,45$ zaradi izrazite odvisnosti upora od hitrosti.

4 MATEMATIČNA FORMULACIJA PROBLEMA

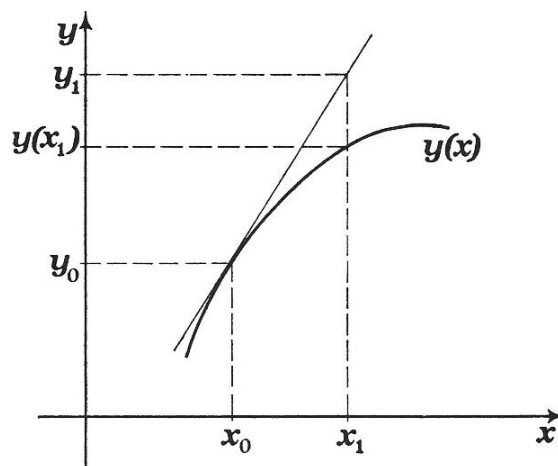
4.1 Numerično reševanje diferencialnih enačb

Problem določitve komponent hitrosti v_x in v_y iz sklopljenih diferencialnih enačb (3.19) in (3.20) analitično ni možen, ker sta enačbi nelinearni, zato ga obravnavamo z numeričnim algoritmom na osnovi metode končnih razlik, ki služi reševanju diferencialnih enačb. Diferencialno enačbo iskane funkcije v danem prostoru rešujemo numerično tako, da odvod(e) funkcije aproksimiramo s kvocientom razlik.

Navadna diferencialna enačba

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4.1)$$

ima na intervalu, na primer $[x_0, x_n]$, neskončno rešitev za y , od katerih izberemo tisto, ki ustreza začetnemu pogoju $y(x_0) = y_0$. Najpreprostejša od vseh metod reševanja je Eulerjeva metoda, pri kateri aproksimiramo krivuljo s tangento v začetni točki. Naklon tangente dobimo iz diferencialne enačbe. Na grafu 2 je prikazan postopek, kako izračunamo vrednost rešitve enačbe (4.1) v točki x_1 , če poznamo vrednost v točki x_0 (Vidav, 1976, str. 498).



Graf 2: Rešitev diferencialne enačbe z Eulerjevo metodo (vir: Vidav, 1976, str. 498)

Zapišimo diferenčno formulo za izračun odvoda funkcije $y(x)$ v začetni točki x_0

$$\frac{dy(x)}{dx} \doteq \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad (4.2)$$

kjer je $y_1 \doteq y(x_1)$ približno izračunana vrednost rešitve v točki x_1 , kar imenujemo tudi metoda končnih razlik 1. reda. Z aproksimacijo prvega odvoda po (4.2) zapišemo diferencialni enačbi (3.19) in (3.20) v časovnem intervalu med t in $t + \Delta t$ v diferenčni obliki (Golli, 2004, str. 72)

$$m \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{2} C_u \rho S v v_x, \quad (4.3)$$

$$m \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} = -mg - \frac{1}{2} C_u \rho S v v_y. \quad (4.4)$$

4.2 Numerična integracija

Numerična integracija obravnava numerično rešitev določenega integrala funkcije ene spremenljivke $f(x)$

$$I = \int_a^b f(x)dx + C, \quad (4.5)$$

kjer je funkcija $f(x)$ lahko podana analitično ali v obliki tabelaričnih vrednosti. Geometrično gledano je integral I enak ploščini lika pod krivuljo f , in sicer na območju med a in b . Oglejmo si algoritem za izračun določenega integrala s trapezno shemo, ki jo bomo uporabili v raziskovalni nalogi. Trapezna shema temelji na izračunu integrala kot površine trapeza med dvema točkama. Območje integracije razdelimo na N podobmočij in seštejemo ploščine trapezov pod njimi. Shema se zapiše takole (Vidav, 1976, str. 477)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f\left(a + j \frac{b-a}{N}\right) \right] \quad (4.6)$$

in se v primeru $N = 1$ poenostavi v

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right]. \quad (4.7)$$

Z uporabo (4.7) zapišemo enačbi (3.22) v časovnem intervalu med t in $t + \Delta t$ v naslednji diferenčni obliki

$$x = x_0 + \frac{v_x(t) + v_x(t + \Delta t)}{2} \Delta t, \quad (4.8)$$

$$y = y_0 + \frac{v_y(t) + v_y(t + \Delta t)}{2} \Delta t. \quad (4.9)$$

Na tem mestu je treba določiti še začetne pogoje; določiti moramo začetne vrednosti x , y , v_x in v_y . Pri poševnem metu postavimo izhodišče koordinatnega sistema v težišče opazovane krogle, torej bosta začetni koordinati $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ali $y_0 > 0$ in začetni hitrosti $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$ in $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$, kjer je α dvižni kot krogle.

4.3 Diskretizacija vodilnih enačb

Z iteriranjem lahko izračunamo lego in hitrost krogle na koncu vsakega časovnega intervala z začetnimi vrednostmi, in to storimo za veliko število intervalov. Že za 100 intervalov postane računanje z žepnim kalkulatorjem dolgo in zahtevno, tu pa je ključen računalnik, ki računa zelo hitro in seveda bolj natančno. Razdelimo časovni interval na N enakih delov s časovnim korakom Δt . Z uporabo diferenčne aproksimacije dobimo za vsako od notranjih točk mreže eno neznanko in eno enačbo. Dobljeni sistem enačb zapišemo v matrični obliki, kjer ima matrika navadno posebno strukturo kot bloktridiagonalna ali vsaj kot pasovna (Škerget, 1994, str. 285).

Odvoda, ki nastopata v enačbah (3.19) in (3.20), aproksimirajmo z izrazi, ki vsebujejo samo funkcijske vrednosti v izbranih točkah. Tako zapišemo enačbi v naslednji diskretni obliki

$$m \frac{(v_x^{i+1} - v_x^i)}{\Delta t} = -\frac{1}{2} C_u(Re^i) \rho S v^i v_x^i, \quad (4.10)$$

$$m \frac{(v_y^{i+1} - v_y^i)}{\Delta t} = -\frac{1}{2} C_u(Re^i) \rho S v^i v_y^i - mg, \quad (4.11)$$

iz česar sledita po preureditvi izraza za komponenti hitrosti v vsakem vozlišču

$$v_x^{i+1} = v_x^i - \frac{\Delta t}{2m} C_u(Re^i) \rho S v^i v_x^i, \quad (4.12)$$

$$v_y^{i+1} = v_y^i - \frac{\Delta t}{2m} C_u(Re^i) \rho S v^i v_y^i - g \Delta t, \quad (4.13)$$

kjer je

$$v^i = \sqrt{(v_x^i)^2 + (v_y^i)^2}. \quad (4.14)$$

Položaj krogle je določen s trapezno integracijo

$$x^{i+1} = x^i + \frac{(v_x^i + v_x^{i+1})}{2} \Delta t, \quad y^{i+1} = y^i + \frac{(v_y^i + v_y^{i+1})}{2} \Delta t. \quad (4.15)$$

4.4 Interpolacija

Temeljna ideja interpolacije kot numerične metode je konstrukcija interpolacijske funkcije, ki bo omogočila izračun funkcije za vrednosti parametrov, ki v zbirki podatkov niso zajeti. Zaradi preprostosti je zelo priljubljena Lagrangeeva interpolacija, ki temelji na ideji, da vrednost funkcije v vsaki točki $f(x_j)$ pomnožimo s polinomom, ki ima v x_j vrednost 1, v vseh drugih N vozliščih pa vrednost 0. Na koncu je tako dobljenih $N + 1$ polinomov, ki jih seštejemo in dobimo interpolacijski polinom.

Pri linearni interpolaciji moramo imeti dve znani vrednosti: $(x_0, f(x_0))$ in $(x_1, f(x_1))$. Interpolacijski polinom bo torej vsota dveh polinomov (Vidav, 1976, str. 471)

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1). \quad (4.16)$$

Za oba lokalna polinoma mora veljati $L_0(x_0) = 1$ in $L_0(x_1) = 0$, prav tako $L_1(x_0) = 0$ in $L_1(x_1) = 1$. Pogojeva zadostimo z naslednjo obliko funkcij

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (4.17)$$

Linearni Lagrangeev polinom se tako glasi

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1). \quad (4.18)$$

5 PROGRAM SCILAB

Numerična metoda predvideva uporabo računalniškega programa, ki nam omogoča hitro reševanje kompleksnih izračunov. V raziskovalni nalogi smo za programsko osnovo izbrali programski paket Scilab različice 6.1.1., ki ga poleg odprtosti odlikuje tudi preprostost uporabe. Narejen je iz prevajalnika in knjižnic funkcij v programskih jezikih Fortran in C. S Scilabom lahko analiziramo linearne in nelinearne dinamične sisteme, je pa tudi pripomoček za numerično optimizacijo (Makarovič, 2005, str. 1–3). Program smo dobili na strani svetovnega spleta <https://www.scilab.org/> in ga brezplačno namestili na računalnik.

5.1 Numerični algoritem

Zaradi kompleksnosti iteracijskega reševanja diferenčnih enačb (4.12), (4.13) za komponenti hitrosti v vsakem vozlišču in komponenti položaja kroglice (4.15) smo v programskem paketu Scilab zapisali ustrezen numerični algoritem. V algoritmu so zapisani masa kroglice, njen premer, gostota zraka, kinematična viskoznost zraka pri temperaturi 20 °C in težni pospešek. Pred zagonom programa moramo izbrati časovni interval Δt . Pri izbiri časovnega intervala je treba poiskati kompromis med dolžino intervala Δt in številom iteracij. Krajši kot je interval, natančnejša je metoda, a postane nestabilna po določenem številu iteracij. Zato intervala ne smemo zmanjševati v nedogled, ker gre hkrati število iteracij čez vse meje.

V programu vtipkamo tudi komponenti začetne hitrosti v_x in v_y . Koordinatni sistem je že določen v samem programu; izhodišče koordinatnega sistema je ob času $t = 0$ postavljeno v težišče opazovanega telesa. Podatke vnesemo v program s pomočjo matrik oziroma vektorjev. Prednost vektorskega oziroma matričnega vnosa je v tem, da program z njim enostavno operira, dolžina algoritma je krajša in zasede manj spominskega prostora. Poleg matričnega zapisa podatkov je bilo treba pripraviti še prostor za skladiščenje dobljenih rezultatov. Takšen prostor v obliki prazne matrike zagotovimo z ukazom »zeros«.

Pri iterativnem reševanju enačb z numeričnim algoritmom uporabimo različne zanke, v katerih z izbranimi programskimi funkcijami računamo enačbe po segmentih in na koncu združimo rezultate v iskani približek. Zaustavitveni kriterij nastavimo tako, da se računanje zaustavi, ko pade razlika med novim in starim približkom pod predpisano vrednost konvergenčnega kriterija ali ko število računskih operacij preseže mejno vrednost števca iteracijskih korakov, ki jo predpišemo v zanki »while«. Izračunane podatke, na primer čas t , lego x in y , komponenti hitrosti v_x in v_y ter absolutno hitrost v izpiše program v določeno datoteko, ki jo uporabimo za risanje grafov s podprogramom »disp«. Program, ki smo ga uporabljali med raziskavami, je podan kot priloga k raziskovalni nalogi.

5.2 Preverjanje pravilnosti numeričnega algoritma

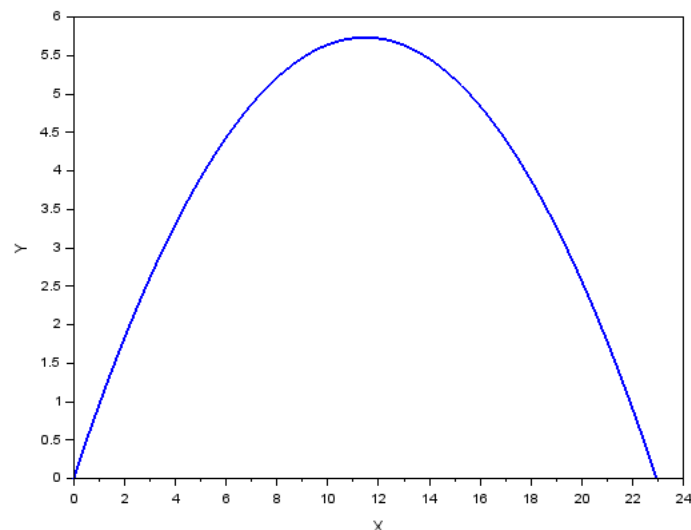
Da zagotovimo konsistentnost numerične sheme, je rezultate računalniškega modeliranja treba primerjati še z rezultati preprostih izračunavanj ali z dostopnimi rezultati, ki so objavljeni v strokovni literaturi. Za preverjanje pravilnosti numeričnega algoritma oziroma napisanega programa smo obravnavali poševni met dveh kroglic z masama $m_1 = 2,9$ g in $m_2 = 9,2$ g ter z enakima premeroma $d = 24,81$ mm, vendar brez upoštevanja zračnega upora. Začetni hitrosti sta znašali $v_0 = 15,0$ m/s in dvižni kot $\alpha = 45^\circ$. Po enačbah poševnega meta brez upoštevanja sile zračnega upora izračunamo za metno razdaljo D in celotni čas gibanja t_1

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 22,9357798 \text{ m}, \quad t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2,1624061 \text{ s}, \quad (5.1)$$

kjer smo namenoma navedli večje število decimalnih mest zaradi lažje primerjave z rezultatom numeričnega preračuna. Na grafu 3 je prikazana pričakovana tirnica leta, ki mora biti seveda enaka za obe kroglici. V preglednici 1 so izpisani rezultati numeričnega preračuna metne razdalje in časa leta kroglic za dva časovna intervala $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ in $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Primerjava z izračunanimi vrednostma (5.1) pomeni odlično ujemanje na pet oziroma šest mest natančno. Iz grafa prav tako razberemo, da je padajoči del parabole simetričen z dvigajočim se delom. Na tla pade kroglica z enako hitrostjo v_0 in pod enakim kotom α , kot smo jo odvrgli. Po teh začetnih preračunavanjih in primerjavah izračunanih in numerično dobljenih rezultatov seveda ne dvomimo o pravilnosti napisanega programa.

Let kroglice z maso m_1 pod dvižnim kotom 45° : ■

Let kroglice z maso m_2 pod dvižnim kotom 45° : ■



Graf 3: Let kroglic brez upoštevanja zračnega upora, $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 15,0 \text{ m/s}$

Preglednica 1: Čas leta in domet kroglic v brezračnem prostoru, $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 15,0 \text{ m/s}$

| Časovni interval Δt [s] | Čas leta kroglice z maso m_1 [s] | Čas leta kroglice z maso m_2 [s] | Domet kroglice z maso m_1 [m] | Domet kroglice z maso m_2 [m] |
|------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| $1 \cdot 10^{-2}$ | 2,162398 | 2,162398 | 22,935690 | 22,935690 |
| $5 \cdot 10^{-3}$ | 2,162403 | 2,162403 | 22,935749 | 22,935749 |

V programskem jeziku Scilab smo zapisali računalniški program, ki iterativno rešuje diferencialne enačbe poševnega meta z upoštevanjem kvadratnega zakona upora. Pri poševnem metu moramo za natančni izračun tirnice gibanja krogle upoštevati odvisnost koeficienta upora od vrednosti Reynoldsovega števila oziroma hitrosti. Kako se spreminja koeficient upora krogle C_u različnih polmerov s hitrostjo v zraku pri temperaturi 20°C , kaže graf 1.

V eksperimentalnem delu naloge smo uporabili plastične kroglice različnih mas z enakim premerom $d = 24,81$ mm. Grafična analiza je pokazala, da so bile največje hitrosti izstreljenih kroglic okoli $v_0 = 15,0$ m/s, zato smo najprej v intervalu hitrosti $[1, 20]$ m/s po enačbi (2.5) izračunali Reynoldsova števila. Pri temperaturi 20 °C smo za zrak uporabili znani vrednosti gostote $\rho = 1,205$ kg/m³ in dinamične viskoznosti $\eta = 1,802 \cdot 10^{-5}$ kg/ms, ki smo ju poiskali v fizikalnem priročniku. Pri izračunu koeficienta upora kroglice za $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$ smo uporabili modela (2.7) in (2.8).

Preglednica 2: Koeficient upora za modela 1 in 2 v odvisnosti od Reynoldsovega števila

| Hitrost v [m/s] | Reynoldsovo število Re | Model 1 $C_u = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt{Re}} + 0,4$ | Model 2 $C_u = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4$ |
|----------------------|-----------------------------|--|--|
| 1 | 1659,1 | 0,513 | 0,558 |
| 2 | 3318,2 | 0,477 | 0,510 |
| 3 | 4977,3 | 0,462 | 0,489 |
| 4 | 6636,4 | 0,453 | 0,476 |
| 5 | 8295,4 | 0,447 | 0,468 |
| 6 | 9954,5 | 0,443 | 0,462 |
| 7 | 11613,6 | 0,439 | 0,457 |
| 8 | 13272,7 | 0,437 | 0,453 |
| 9 | 14931,8 | 0,434 | 0,450 |
| 10 | 16590,9 | 0,433 | 0,448 |
| 11 | 18245,0 | 0,431 | 0,445 |
| 12 | 19909,1 | 0,430 | 0,443 |
| 13 | 21568,1 | 0,428 | 0,442 |
| 14 | 23227,2 | 0,427 | 0,440 |
| 15 | 24886,3 | 0,426 | 0,439 |
| 16 | 26545,4 | 0,425 | 0,438 |
| 17 | 28204,5 | 0,425 | 0,436 |
| 18 | 29863,6 | 0,424 | 0,435 |
| 19 | 31522,7 | 0,423 | 0,434 |
| 20 | 33181,8 | 0,423 | 0,433 |

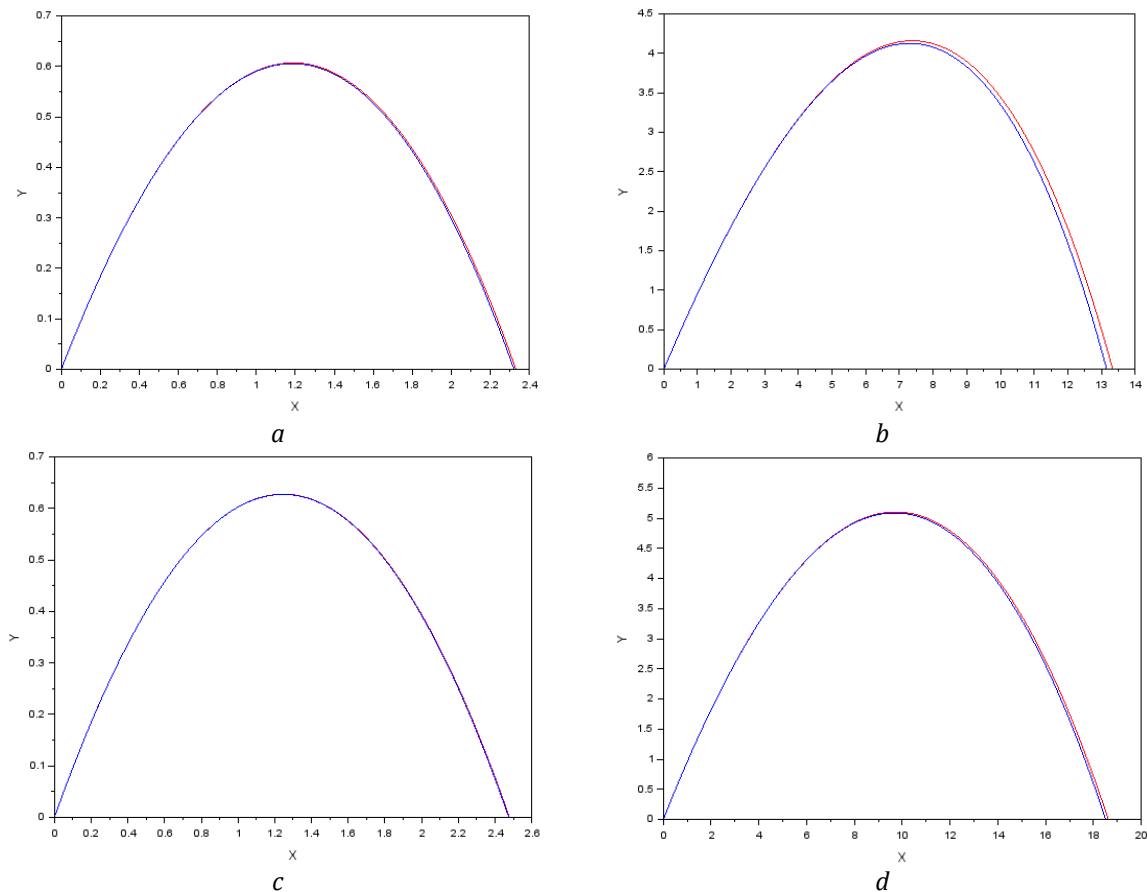
V preglednici 2 so zbrane vrednosti koeficienta upora kroglice po modelih 1 in 2 v odvisnosti od vrednosti Reynoldsovega števila oziroma od hitrosti. Rezultati opravljenih izračunov predstavljajo množico diskretnih podatkov, ki jo želimo opisati s preprosto izračunljivim matematičnim modelom. Naloga modela je, da nam poleg že znanih vrednosti omogoča enostaven izračun vrednosti funkcij za vrednosti parametrov, ki niso zajeti v diskretnih podatkih. Pri računanju tabelarnih podatkov si pomagamo z linearno Lagrangeovo interpolacijo. Vrednosti koeficienta upora pri vmesnih vrednostih Reynoldsovega števila, ki niso tabelarično podane, tako računamo v numeričnem algoritmu po (4.18) z naslednjo enačbo

$$C_u(Re) = \frac{Re - Re_1}{Re_0 - Re_1} C_u(Re_0) + \frac{Re - Re_0}{Re_1 - Re_0} C_u(Re_1). \quad (5.2)$$

Primerjajmo pri temperaturi 20 °C za oba modela rezultate numeričnega preračuna metne razdalje in časa leta za kroglici z najmanjšo maso $m_1 = 2,9$ g in tisto z največjo $m_2 = 9,2$ g, ki smo ju uporabili pri eksperimentu. Pri časovnem koraku $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ s smo primerjali čas leta in metno razdaljo pri začetnih hitrostih $v_0 = 5,0$ m/s in $v_0 = 15,0$ m/s ter dvižnem kotu $\alpha = 45^\circ$. Tirnice leta so prikazane na grafu 4.

Let kroglice z dano maso po modelu 1: ■

Let kroglice z dano maso po modelu 2: ■



Graf 4: Primerjava tirnic kroglic z danima masama in začetnima hitrostma z modeloma 1 in 2: a) $m_1 = 2,9$ g, $v_0 = 5,0$ m/s, b) $m_1 = 2,9$ g, $v_0 = 15,0$ m/s, c) $m_2 = 9,2$ g, $v_0 = 5,0$ m/s, d) $m_2 = 9,2$ g, $v_0 = 15,0$ m/s

Preglednica 3: Primerjava časa leta in metne razdalje kroglic z modeloma 1 in 2

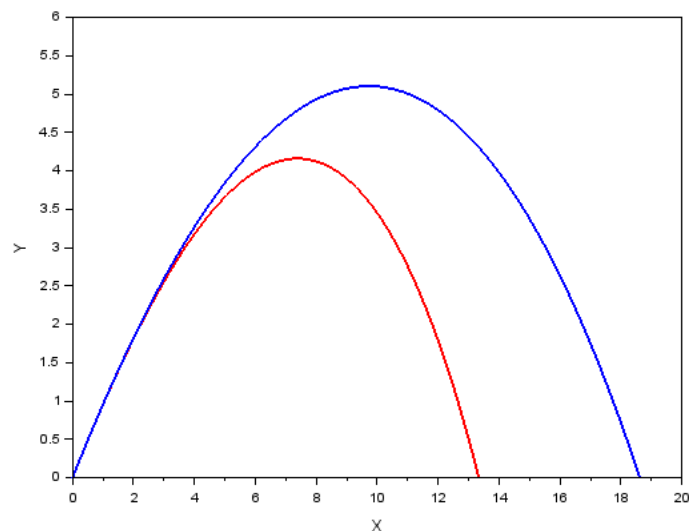
| Masa kroglice [g] | Začetna hitrost v_0 [m/s] | Čas leta kroglice po modelu 1 [s] | Čas leta kroglice po modelu 2 [s] | Metna razdalja po modelu 1 [m] | Metna razdalja po modelu 2 [m] |
|-------------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 2,9 | 5,0 | 0,703 | 0,702 | 2,331 | 2,321 |
| 2,9 | 15,0 | 1,834 | 1,827 | 13,330 | 13,155 |
| 9,2 | 5,0 | 0,715 | 0,715 | 2,478 | 2,475 |
| 9,2 | 15,0 | 2,037 | 2,034 | 18,603 | 18,493 |

Iz preglednice 3 je razvidno, da so relativna odstopanja med vrednostmi, izračunanimi z modeloma 1 in 2, zelo majhna. Še največje je v izračunu metne razdalje kroglice z maso $m_1 = 2,9$ g pri začetni hitrosti $v_0 = 15,0$ m/s in znaša 1,3 %. S simulacijo se da pokazati, da nastanejo večje razlike v rezultatih modelov pri znatno večjih hitrostih kroglic od tistih, ki smo jih uporabljali pri eksperimentu. Tako bi dal na primer model 1 pri kroglici z maso $m_1 = 9,2$ g, ki bi jo izstrelili z začetno hitrostjo $v_0 = 50,0$ m/s in dvižnim kotom $\alpha = 45^\circ$, za približno 7 % večjo metno razdaljo. Menimo pa, da je za nadaljnjo grafično analizo povsem dopustno uporabljati le model 1, saj največje vrednosti začetnih hitrosti kroglic pri našem eksperimentu niso presegle 15,0 m/s.

Analizirajmo še rezultat simulacije, če kroglici z masama $m_1 = 2,9$ g in $m_2 = 9,2$ g izstrelimo z začetno hitrostjo $v_0 = 15,0$ m/s in dvižnim kotom $\alpha = 45^\circ$. Vpliv zračnega upora upoštevamo z modelom 1. Tirnici gibanja kroglic sta prikazani na grafu 5, rezultati numerične simulacije so zbrani v preglednici 4. Na grafu 5 so opazne lastnosti balistične krivulje: vpadni kot obeh kroglic je večji od dvižnega, dvigajoči se krak je daljši od padajočega, čas, ki ga kroglica potrebuje do temena, je krajši od časa, ki ga kroglica potrebuje za pot od temena do tal, hitrost kroglice v točki na dvigajočem se kraku je večja od hitrosti v točki iste višine na padajočem kraku, točka najmanjše hitrosti kroglice leži na padajočem kraku takoj za temenom. Ugotovitev, da so čas leta, metna višina in domet manjši za lažjo kroglico, bomo natančno fizikalno interpretirali v poglavju 7.

Let kroglice z maso m_1 : ■

Let kroglice z maso m_2 : ■



Graf 5: Let kroglic z upoštevanjem zračnega upora, $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 15,0$ m/s

Preglednica 4: Čas leta in metna razdalja kroglic z upoštevanjem zračnega upora, $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 15,0$ m/s

| Časovni interval Δt [s] | Čas leta kroglice z maso m_1 [s] | Čas leta kroglice z maso m_2 [s] | Metna razdalja kroglice z maso m_1 [m] | Metna razdalja kroglice z maso m_2 [m] |
|------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--|--|
| $5 \cdot 10^{-3}$ | 1,83 | 2,04 | 13,33 | 18,61 |

6 EKSPERIMENTALNI DEL

V eksperimentalnem delu naloge smo želeli posneti in analizirati tirnico, ki jo opiše krogla pri poševnem metu z upoštevanjem sile upora, ter jo primerjati s tisto, ki jo da numerična metoda. Prav tako smo z eksperimentom in numerično analizo želeli potrditi hipotezo, da je optimalni kot, pri katerem doseže kroglica maksimalno horizontalno razdaljo, odvisen od začetne hitrosti.

6.1 Uporabljena eksperimentalna oprema

Za izstrelitev izbranih kroglic z enakim premerom $d = 24,81$ mm, a z različnimi masami $m_1 = 2,9$ g, $m_2 = 7,2$ g in $m_3 = 9,2$ g smo uporabili majhen top na vzmet (Ball Launcher) s štirimi hitrostnimi stopnjami. Kot je razvidno iz slike 6, smo dvižni kot nastavili s pomočjo kotomera. Poševni met kroglic smo posneli s hitro kamero (Olympus Tough TG-6), ki smo jo nastavili na 120 posnetkov na sekundo.



Slika 6: Plastične kroglice in vzmetni top

6.2 Potek meritev

Top s stojalom smo pričvrstili na mizo, ki smo jo obrnili tako, da je kroglica ob izstrelitvi prosto padla na tla. Po nekaj ponovitvah poskusa smo prišli do zaključka, da je bolje čim več temnejših površin zakriti z belimi tablam, da je bila kroglica med letom dobro vidna. Za vse kroglice smo posneli tirnice pri treh hitrostnih stopnjah in dveh višinah topa glede na tla $h_1 = 0,93$ m in $h_2 = 1,08$ m. Meritve smo opravili pri dvižnih kotih med 0° in 55° glede na vodoravnico s korakom 5° , kolikor so dopuščale konstrukcijske značilnosti topa in stojala za top. Hitro kamero smo postavili na oddaljeno mesto od vzmetnega topiča, da smo se izognili napakam zaradi aberacije, kot se vidi na sliki 7.



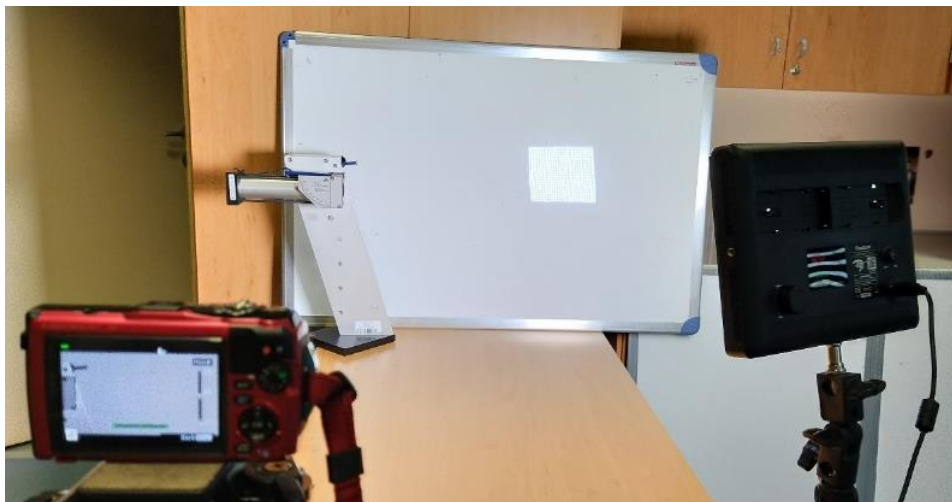
Slika 7: Snemanje leta kroglice

Videoposnetke smo analizirali s programom Logger Pro. Na vsaki sliki smo označili položaj kroglice in iz zbranih točk je program narisal graf za višino kroglice y v odvisnosti od razdalje x . Pri tem je bilo treba določiti še merilo za velikost razdalj na videoposnetku. Izhodišče koordinatnega sistema z vodoravno abscisno osjo smo postavili v odprtino na koncu topa, od koder smo izstreljevali kroglice. Na koncu smo y -koordinatam posnetih točk prišteli še višino, na kateri se je nahajala odprtina topa. Položaje smo označili na vsaki drugi sliki, saj je bila hitrost kroglice tako majhna, da je zadoščala obdelava 60 slik na sekundo.

6.3 Merjenje začetne hitrosti kroglice

Pri izstrelitvi kroglice pod izbranim kotom se nekaj prožnostne energije pretvori v potencialno, in sicer tem več, čim večji je kot. Zaradi tega ima z naraščanjem kota izstreljena kroglica vse manjšo kinetično energijo, ki se odraža v manjši začetni hitrosti. Da smo lahko posneto tirnico kroglice primerjali s tisto, ki jo da numerična metoda, smo pri vsakem metu morali določiti še začetno hitrost kroglice. Pri tem smo nastavili hitro kamero tako, da je posnela 480 slik na sekundo in od blizu posneli le krajšo pot kroglice takoj po izstrelitvi. Hitra kamera ima pri velikem številu slik v kratkem časovnem intervalu kratek čas osvetlitve, zato smo zaradi boljše vidljivosti kroglice na posnetku ozadje dodatno osvetlili z reflektorjem.

Tudi pri računanju hitrosti smo si pomagali s programom Logger Pro, le da smo tokrat označili položaj kroglice na vseh slikah. Koordinatni sistem smo postavili tako, da je bila abscisna os vzporedna s smerjo izstrelitve. S tem smo se izognili dodatnemu računanju, saj je hitrost v smeri abscisne osi, ki jo je izračunal program, že predstavljala komponento hitrosti, ki smo jo iskali. Po izrisu grafa hitrosti v smeri abscisne osi v odvisnosti od razdalje smo ugotovili, da je hitrost po nekaj centimetrih (do največ 5 cm) strmo upadla, potem pa ostala skoraj konstantna. Domnevamo, da je strmi padec posledica podtlaka zaradi večanja prostornine med kroglico in cevjo, zato smo začetno hitrost računali iz prvih petih izmerkov hitrosti takoj po izstrelitvi.



Slika 8: Merjenje začetne hitrosti kroglice

Ocenili smo tudi napako meritve. Najprej smo izračunali napake začetnih hitrosti kot standardno deviacijo hitrosti za posamezne mete. Napake so odvisne predvsem od natančnosti označevanja položajev kroglic, torej napake razdalj med dvema oznakama na zaporednih slikah, ki jih kroglica opravi v enakih časovnih intervalih. Pri vseh meritvah smo dobili podobno sistemsko napako, ki smo jo ocenili na približno $\pm 0,05$ m/s.

7 OBDELAVA REZULTATOV MERITEV

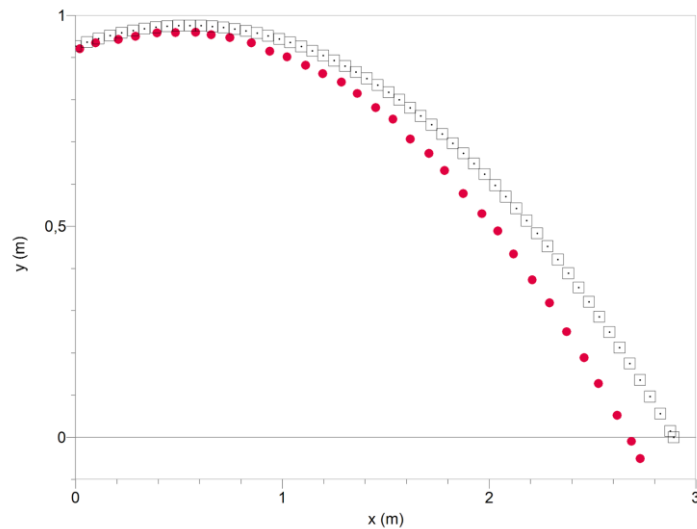
V tem poglavju želimo teoretične rezultate, ki smo jih dobili numerično z uporabo računalniškega programa Scilab, primerjati z eksperimentalno dobljenimi rezultati.

7.1 Analiza eksperimentalno in numerično dobljenih tirnic

Na spodnjih grafih je prikazanih nekaj primerjav tirnic kroglic z različnimi masami, pri izbranih dvižnih kotih in začetnih hitrostih.

Računalniška simulacija:

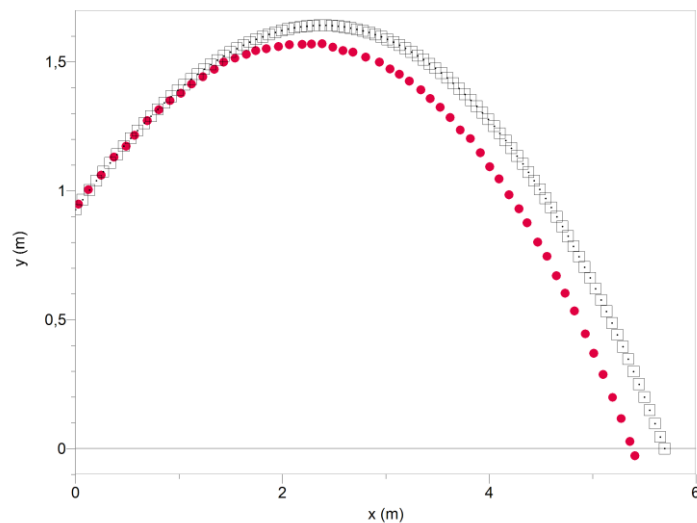
Videoanaliza:



Graf 6: $m = 2,9 \text{ g}$, $\alpha = 10,0^\circ$, $v_0 = 5,68 \text{ m/s}$, $y_0 = 0,93 \text{ m}$

Računalniška simulacija:

Videoanaliza:

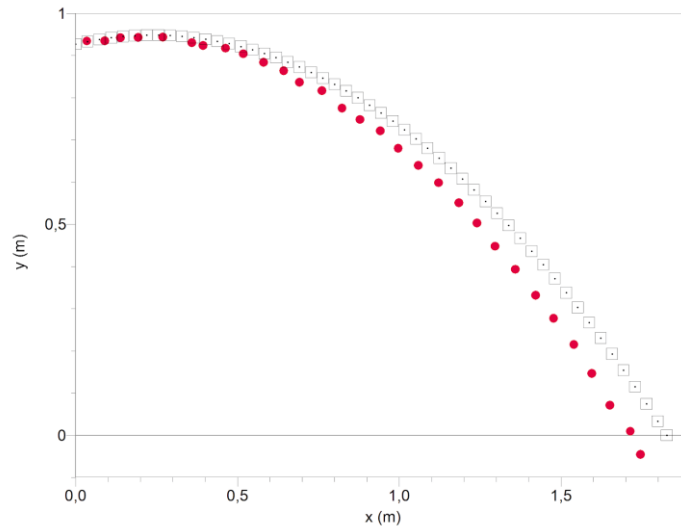


Graf 7: $m = 2,9 \text{ g}$, $\alpha = 30,0^\circ$, $v_0 = 7,80 \text{ m/s}$, $y_0 = 0,93 \text{ m}$

Točke, pridobljene z eksperimentalno metodo, se dobro prilegajo teoretični krivulji, čeprav smo pri numerični metodi vzeli dokaj velik časovni interval $5 \cdot 10^{-3}$ s, kar seveda nekoliko zmanjša natančnost računanja. Največja odstopanja opazamo pri manjši masi in pri majhnih hitrostih, pri katerih kroglica doseže manjšo metno višino in krajšo metno razdaljo. Na to je najverjetneje vplival zorni kot hitre kamere, saj so krivulje pri majhnih hitrostih zajemale le manjši levi predel videoposnetkov.

Računalniška simulacija:

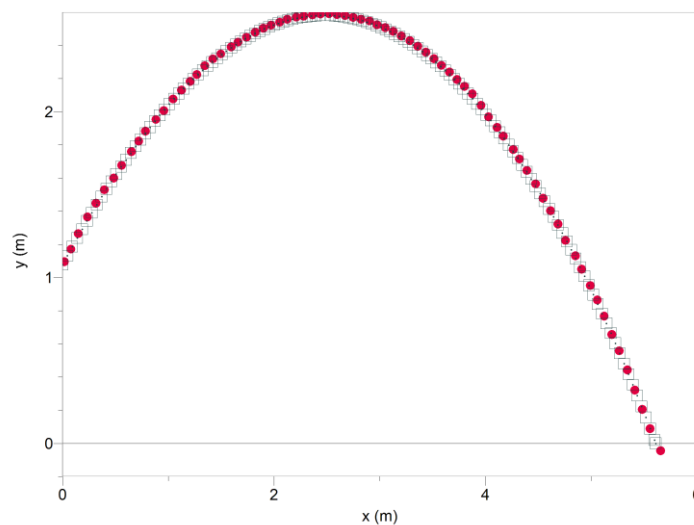
Videoanaliza:



Graf 8: $m = 7,2$ g, $\alpha = 10,0^\circ$, $v_0 = 3,72$ m/s, $y_0 = 0,93$ m

Računalniška simulacija:

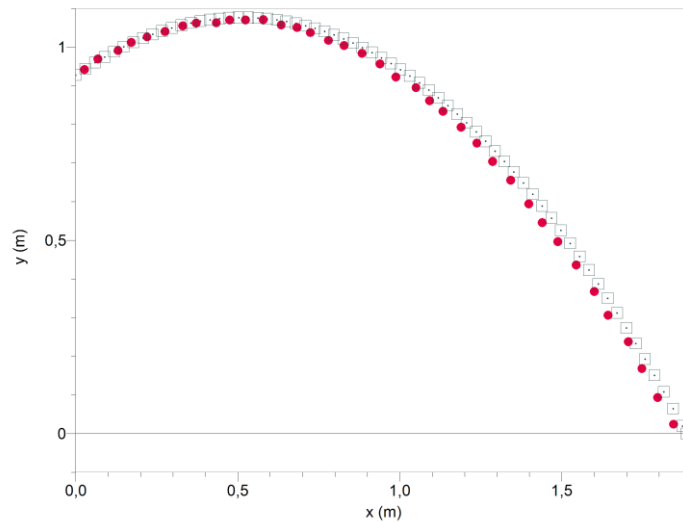
Videoanaliza:



Graf 9: $m = 7,2$ g, $\alpha = 50,0^\circ$, $v_0 = 7,24$ m/s, $y_0 = 1,08$ m

Računalniška simulacija:

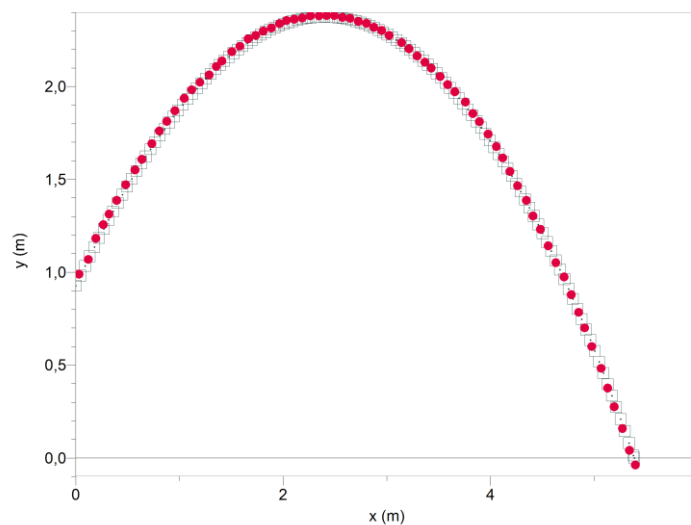
Videoanaliza:



Graf 10: $m = 9,2 \text{ g}$, $\alpha = 30,0^\circ$, $v_0 = 3,44 \text{ m/s}$, $y_0 = 0,93 \text{ m}$

Računalniška simulacija:

Videoanaliza:



Graf 11: $m = 9,2 \text{ g}$, $\alpha = 50,0^\circ$, $v_0 = 7,07 \text{ m/s}$, $y_0 = 0,93 \text{ m}$

Skušajmo sedaj navesti še glavne razloge za odstopanje eksperimentalno dobljenih točk od numeričnih. Teoretična krivulja kaže, da opravi krogla daljšo pot kot jo dejansko. Predstavljeni grafi kažejo na dejstvo, da deluje v smeri osi x še dodatna sila, ki jo povzroča okolica ali celo rotacija kroglice in je pri teoretični izpeljavi nismo upoštevali. Pri zgoraj omenjenih poskusih je seveda pomembno poudariti, da se giblje kroglica skozi zrak, ki ima dosti manjšo gostoto od snovi, iz katere je kroglica izdelana. So pa mase plastičnih kroglic, ki smo jih uporabili v eksperimentu, dovolj majhne, da utegnejo tudi zračni tokovi v učilnici nekoliko vplivati in naključno spreminjati smer gibanja kroglice.

Pri izpeljavi kvadratnega zakona tudi ne upoštevamo, da je opazovano telo postavljeno v končni prostor, temveč privzamemo, da je prostor neskončen. V neskončnem prostoru potiska gibajoče se telo del sredstva, ki je odvisen od prečne površine telesa in od same oblike telesa, v smeri gibanja. V neskončnem prostoru potiska telo del sredstva brez ovir, v končnem prostoru pa predmeti oziroma stene potiskanje zaustavijo. Lahko bi si predstavljali gibanje telesa, ki pred sabo potiska dolgo vzmet. Vzmet nudi upor pri gibanju, vendar ob dotiku s steno in zaradi svoje elastičnosti dodatno zavira gibanje, saj kaže elastična sila v nasprotni smeri gibanja telesa.

Dodaten vpliv na gibanje telesa lahko povzroča tudi udarni val. Ta je še posebej prisoten pri poskusu poševnega meta kroglice pri večjih začetnih hitrostih: kroglo izstrelimo s topom, ki povzroči udarni val, ta se od stene odbije in se premika v nasprotni smeri kot krogla. Seveda deluje udarni val najprej zaviralno, in ko se po določenem času odbije na drugi strani prostora, še pospeševalno. Hitrost in intenziteto udarnega vala bi težko izmerili. Vsekakor gre za silo, ki izvira iz okolice, saj se njeno delovanje spreminja s časom, ne pa s hitrostjo.

Na koncu omenimo še možnost, da ima kroglica v fazi leta nekaj rotacije, ki jo je dobila pri izstrelitvi. Vrteče se telo zaradi viskoznih sil vrtilni okolišne tekočinske plasti. Hitrost tekočinskih plasti v okolici telesa je zato sestavljena iz hitrosti zaradi gibanja težišča in iz hitrosti zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče. Hitrosti se na eni strani telesa seštevata in na drugi odštevata. Po Bernoullijevi enačbi se tako tlak na eni strani zmanjša in na drugi poveča. Nastane prečna sila, ki zavije tirnico v smeri proti manjšemu tlaku. Govorimo o Magnusovem učinku (Kladnik, 1985, str. 175). Tako bi bilo treba v fazi leta, poleg sile teže in sile upora, upoštevati tudi vpliv Magnusove sile, zaradi česar postane gibanje kroglice tridimenzionalno in zelo zahtevno tudi za numerično matematično obdelavo.

7.2 Določanje optimalnega kota na osnovi eksperimentalnih rezultatov

Pri določanju optimalnega kota z eksperimentalnimi podatki smo kot metno razdaljo pri posameznem metu upoštevali x -koordinato zadnjega položaja kroglice, preden se je odbila od tal. V spodnji preglednici so prikazani rezultati meritev za kroglici z masama $m_1 = 7,2$ g in $m_2 = 9,2$ g, ki smo ju izstrelili z višine $y_0 = 1,08$ m nad tlemi.

Preglednica 5: Določanje optimalnega kota z eksperimentalnimi podatki

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 25 | 3,60 | 7,2 | 1,08 | 2,046 |
| 30 | 3,55 | 7,2 | 1,08 | 2,067 |
| 35 | 3,52 | 7,2 | 1,08 | 2,049 |
| 40 | 3,49 | 7,2 | 1,08 | 2,021 |
| 45 | 3,48 | 7,2 | 1,08 | 1,943 |

2. hitrostna stopnja topa

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 25 | 5,26 | 7,2 | 1,08 | 3,357 |
| 30 | 5,25 | 7,2 | 1,08 | 3,452 |
| 35 | 5,17 | 7,2 | 1,08 | 3,473 |
| 40 | 5,14 | 7,2 | 1,08 | 3,437 |
| 45 | 5,13 | 7,2 | 1,08 | 3,339 |

3. hitrostna stopnja topa

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 25 | 7,48 | 7,2 | 1,08 | 5,486 |
| 30 | 7,42 | 7,2 | 1,08 | 5,770 |
| 35 | 7,34 | 7,2 | 1,08 | 5,934 |
| 40 | 7,33 | 7,2 | 1,08 | 5,986 |
| 45 | 7,28 | 7,2 | 1,08 | 5,845 |

4. hitrostna stopnja topa

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 25 | 3,53 | 9,2 | 1,08 | 2,013 |
| 30 | 3,44 | 9,2 | 1,08 | 2,038 |
| 35 | 3,43 | 9,2 | 1,08 | 1,970 |
| 40 | 3,42 | 9,2 | 1,08 | 1,945 |
| 45 | 3,39 | 9,2 | 1,08 | 1,812 |

2. hitrostna stopnja topa

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 25 | 5,14 | 9,2 | 1,08 | 3,263 |
| 30 | 5,12 | 9,2 | 1,08 | 3,280 |
| 35 | 5,05 | 9,2 | 1,08 | 3,322 |
| 40 | 5,01 | 9,2 | 1,08 | 3,284 |
| 45 | 4,98 | 9,2 | 1,08 | 3,255 |

3. hitrostna stopnja topa

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 25 | 7,33 | 9,2 | 1,08 | 5,340 |
| 30 | 7,30 | 9,2 | 1,08 | 5,687 |
| 35 | 7,21 | 9,2 | 1,08 | 5,832 |
| 40 | 7,16 | 9,2 | 1,08 | 5,848 |
| 45 | 7,15 | 9,2 | 1,08 | 5,732 |

4. hitrostna stopnja topa

V drugem stolpcu preglednic vidimo, da pri izbrani hitrostni stopnji topa izmerjena začetna hitrost kroglice z naraščanjem kota nekoliko upada, o čemer smo razpravljali v podpoglavju 6.3. Hkrati pri obeh masah kroglic opazamo, da se optimalni kot za doseganje maksimalne metne razdalje povečuje z začetno hitrostjo.

7.3 Določanje optimalnega kota z računalniško simulacijo

Sledila je obsežna raziskava, pri kateri smo še z računalniško simulacijo želeli potrditi odvisnost optimalnega kota od začetne hitrosti kroglice. S pomočjo programa smo za kroglici z masama $m_1 = 7,2$ g in $m_2 = 9,2$ g, ki smo ju izstrelili z višine $y_0 = 1,08$ m nad tlemi, določali maksimalno metno razdaljo pri začetnih hitrostih 3,00 m/s, 4,00 m/s, 5,00 m/s, 6,00 m/s, 7,00 m/s in 8,00 m/s. Kot je razvidno iz preglednice 6, dosežemo maksimalno metno razdaljo za obe kroglici pri vrednostih, ki so obarvane rdeče. Torej se rezultati računalniške simulacije presenetljivo dobro ujemajo z rezultati iz preglednice 5 in potrjujejo ugotovitve, do katerih smo prišli na podlagi eksperimentalnih podatkov.

Preglednica 6: Določanje optimalnega kota z računalniško simulacijo

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|-----------|-----------------------|------------|--------------------|--------------------|
| 26 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,65137 |
| 27 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,65295 |
| 28 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,65361 |
| 29 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,65353 |
| 30 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,65256 |
| 31 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,65072 |
| 32 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,64807 |
| 33 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,64443 |
| 34 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,63996 |
| 35 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,63452 |
| 36 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,62817 |
| 37 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,62092 |
| 38 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,61265 |
| 39 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,60350 |
| 40 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,59330 |
| 41 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,58218 |
| 42 | 3,00 | 7,2 | 1,08 | 1,57006 |

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|-----------|-----------------------|------------|--------------------|--------------------|
| 26 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,39353 |
| 27 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,40231 |
| 28 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,40976 |
| 29 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,41586 |
| 30 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,42062 |
| 31 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,42400 |
| 32 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,42598 |
| 33 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,42652 |
| 34 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,42559 |
| 35 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,42308 |
| 36 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,41904 |
| 37 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,41347 |
| 38 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,40633 |
| 39 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,39761 |
| 40 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,38726 |
| 41 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,37523 |
| 42 | 4,00 | 7,2 | 1,08 | 2,36156 |

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 26 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,23814 |
| 27 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,25773 |
| 28 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,27546 |
| 29 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,29126 |
| 30 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,30508 |
| 31 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,31684 |
| 32 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,32642 |

| | | | | |
|----|------|-----|------|---------|
| 33 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,33384 |
| 34 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,33905 |
| 35 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,34201 |
| 36 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,34266 |
| 37 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,34097 |
| 38 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,33690 |
| 39 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,33040 |
| 40 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,32145 |
| 41 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,31002 |
| 42 | 5,00 | 7,2 | 1,08 | 3,29608 |

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 26 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,18573 |
| 27 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,21971 |
| 28 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,25105 |
| 29 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,27982 |
| 30 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,30560 |
| 31 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,32863 |
| 32 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,34866 |
| 33 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,36568 |
| 34 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,37955 |
| 35 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,39015 |
| 36 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,39757 |
| 37 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,40174 |
| 38 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,40239 |
| 39 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,39971 |
| 40 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,39362 |
| 41 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,38387 |
| 42 | 6,00 | 7,2 | 1,08 | 4,37064 |

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 26 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,23436 |
| 27 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,28601 |
| 28 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,33408 |
| 29 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,37850 |
| 30 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,41927 |
| 31 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,45614 |
| 32 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,48895 |
| 33 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,51778 |
| 34 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,54238 |
| 35 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,56264 |
| 36 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,57864 |
| 37 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,59008 |
| 38 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,59702 |
| 39 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,59944 |
| 40 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,59707 |
| 41 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,59014 |

| | | | | |
|----|------|-----|------|---------|
| 42 | 7,00 | 7,2 | 1,08 | 5,57830 |
|----|------|-----|------|---------|

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 26 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,38037 |
| 27 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,45236 |
| 28 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,51983 |
| 29 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,58261 |
| 30 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,64052 |
| 31 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,69342 |
| 32 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,74117 |
| 33 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,78360 |
| 34 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,82058 |
| 35 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,85201 |
| 36 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,87780 |
| 37 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,89784 |
| 38 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,91205 |
| 39 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,92035 |
| 40 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,92266 |
| 41 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,91891 |
| 42 | 8,00 | 7,2 | 1,08 | 6,90895 |

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 26 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,65658 |
| 27 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,65820 |
| 28 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,65893 |
| 29 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,65891 |
| 30 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,65798 |
| 31 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,65619 |
| 32 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,65357 |
| 33 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,64996 |
| 34 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,64553 |
| 35 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,64011 |
| 36 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,63378 |
| 37 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,62653 |
| 38 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,61827 |
| 39 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,60913 |
| 40 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,59891 |
| 41 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,58779 |
| 42 | 3,00 | 9,2 | 1,08 | 1,57564 |

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 26 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,40465 |
| 27 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,41364 |
| 28 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,42127 |
| 29 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,42756 |
| 30 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,43250 |
| 31 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,43605 |

| | | | | |
|----|------|-----|------|---------|
| 32 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,43819 |
| 33 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,43887 |
| 34 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,43807 |
| 35 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,43567 |
| 36 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,43174 |
| 37 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,42625 |
| 38 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,41919 |
| 39 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,41054 |
| 40 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,40023 |
| 41 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,38822 |
| 42 | 4,00 | 9,2 | 1,08 | 2,37457 |

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 26 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,25905 |
| 27 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,27914 |
| 28 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,29736 |
| 29 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,31363 |
| 30 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,32789 |
| 31 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,34009 |
| 32 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,35008 |
| 33 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,35788 |
| 34 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,36344 |
| 35 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,36673 |
| 36 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,36769 |
| 37 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,36627 |
| 38 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,36249 |
| 39 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,35615 |
| 40 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,34738 |
| 41 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,33610 |
| 42 | 5,00 | 9,2 | 1,08 | 3,32227 |

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 26 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,22165 |
| 27 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,25665 |
| 28 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,28899 |
| 29 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,31872 |
| 30 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,34544 |
| 31 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,36938 |
| 32 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,39025 |
| 33 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,40802 |
| 34 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,42275 |
| 35 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,43404 |
| 36 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,44214 |
| 37 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,44689 |
| 38 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,44811 |
| 39 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,44593 |
| 40 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,44022 |

| | | | | |
|----|------|-----|------|---------|
| 41 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,43086 |
| 42 | 6,00 | 9,2 | 1,08 | 4,41795 |

| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 26 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,29196 |
| 27 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,34544 |
| 28 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,39535 |
| 29 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,44151 |
| 30 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,48395 |
| 31 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,52252 |
| 32 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,55687 |
| 33 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,58715 |
| 34 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,61324 |
| 35 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,63479 |
| 36 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,65198 |
| 37 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,66465 |
| 38 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,67258 |
| 39 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,67595 |
| 40 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,67444 |
| 41 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,66817 |
| 42 | 7,00 | 9,2 | 1,08 | 5,65703 |

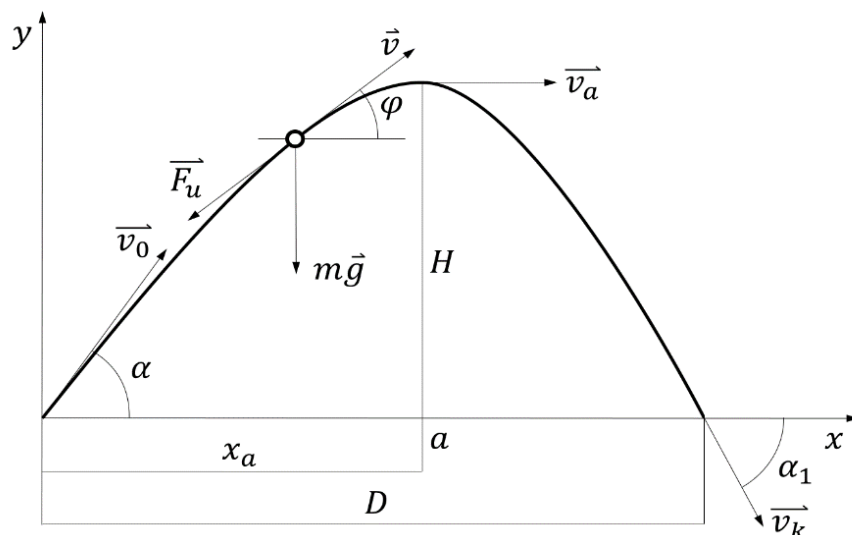
| Kot [°] | Začetna hitrost [m/s] | Masa [g] | Začetna višina [m] | Metna razdalja [m] |
|---------|-----------------------|----------|--------------------|--------------------|
| 26 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,46781 |
| 27 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,54283 |
| 28 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,61326 |
| 29 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,67891 |
| 30 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,73962 |
| 31 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,79521 |
| 32 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,84554 |
| 33 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,89045 |
| 34 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,92983 |
| 35 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,96353 |
| 36 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 6,99143 |
| 37 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 7,01338 |
| 38 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 7,02933 |
| 39 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 7,03920 |
| 40 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 7,04291 |
| 41 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 7,04040 |
| 42 | 8,00 | 9,2 | 1,08 | 7,03162 |

8 ANALITIČNI PRIBLIŽKI

Poševni met krogle z upoštevanjem kvadratnega zakona upora je eden od problemov klasične fizike, zato zahteva posebno obravnavo. Ugotovili smo, da problem določitve tirnice leta krogle z upoštevanjem zračnega upora analitično ni rešljiv, saj sta vodilni diferencialni enačbi za komponenti hitrosti v ravnini leta sklopljeni in nelinearni, zato smo reševali problem z numerično metodo. Na koncu smo se povsem upravičeno vprašali, ali bi bilo možno izpeljati aproksimativne enačbe poševnega meta krogle v zraku, ki bi dovolj natančno nadomestile ves ta zahtevni matematični postopek.

8.1 Uporaba verižnega pravila za odvode

Gibanje krogle pri poševnem metu je priljubljen zgled v učbenikih fizike. Poskusimo izpeljati aproksimativne analitične izraze za metno razdaljo D , metno višino H in celotni čas gibanja t_1 gladke krogle v zraku, kot je prikazano na sliki 9. Kot je razvidno iz slike, problem poenostavimo in obravnavamo gibanje težišča krogle z začetno višino $y_0 = 0$ poševno navzgor pod kotom α glede na vodoravna tla. Od zunanjih sil upoštevamo vpliv sile teže $m\vec{g}$ in upor zraka \vec{F}_u .



Slika 9: Geometrija problema z začetno višino $y_0 = 0$

Zapišimo drugi Newtonov zakon v vektorski obliki

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_u, \quad (8.1)$$

kjer silo upora $\vec{F}_u = -1/2 C_u \rho S v \vec{v} = -(m/l)v \vec{v}$ izrazimo s parametrom $l = 2m/C_u \rho S$ z dimenzijo dolžine. Pri izpeljavi aproksimativnih enačb uporabimo enak matematični postopek kot pri izpeljavi tirnice gibanja krogle v brezračnem prostoru. Pri izpeljavi formalno izločimo spremenljivko t in se izognemo integraciji po času z uporabo verižnega pravila za odvode.

Izpeljavo si nekoliko olajšamo z vpeljavo brezdimenzijskih količin: časa T , hitrosti $\vec{V} = (V_x, V_y)$ in trenutne lege $\vec{R} = (X, Y)$

$$T = t \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (V_x, V_y) = \frac{1}{\sqrt{gl}} (v_x, v_y), \quad (X, Y) = \frac{1}{l} (x, y), \quad (8.2)$$

kjer so t čas, v_x, v_y komponenti hitrosti v smeri koordinatnih osi ter x in y komponenti trenutne lege težišča krogle. Upoštevajmo (8.2) in zapišimo po (8.1) komponenti brezdimenzijskega pospeška

$$A_x = \dot{V}_x = -VV_x, \quad A_y = \dot{V}_y = -1 - VV_y, \quad (8.3)$$

kjer smo velikost brezdimenzijske hitrosti definirali kot

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}. \quad (8.4)$$

Zapišimo v brezdimenzijski obliki še enačbo (3.10)

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{V_x} \frac{d}{dT} \left(\frac{V_y}{V_x} \right) = \frac{\dot{V}_y V_x - \dot{V}_x V_y}{V_x^3} \quad (8.5)$$

in vanjo vstavimo (8.3). Po krajšem računu dobimo diferencialno enačbo

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{(-1 - V_y)V_x + V_x V_y}{V_x^3} = -\frac{1}{V_x^2}, \quad (8.6)$$

ki določa tirnico gibanja krogle in je formalno identična z enačbo (3.11). Vendar sedaj x komponenta hitrosti ni več konstantna in je treba poiskati odvisnost V_x od spremenljivke X . To storimo najlažje s pomočjo verižnega pravila in uporabo izraza za \dot{V}_x v (8.3)

$$\frac{dV_x}{dT} = V_x \frac{dV_x}{dX} = -VV_x = -V_x \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad (8.7)$$

tako, da sledi

$$\frac{dV_x}{dX} = -\sqrt{V_x^2 + V_y^2}. \quad (8.8)$$

Odvajajmo obe strani enačbe (8.6) po X in dobimo

$$\frac{d^3Y}{dX^3} = \frac{2}{V_x^3} \frac{dV_x}{dX} = -\frac{2}{V_x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{V_y}{V_x}\right)^2} = -\frac{2}{V_x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} \quad (8.9)$$

in še z uporabo (8.6) dokončno

$$\frac{d^3Y}{dX^3} = 2 \frac{d^2Y}{dX^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2}. \quad (8.10)$$

Navadno diferencialno enačbo tretjega reda (8.10) rešujemo z upoštevanjem robnih pogojev

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = \tan \alpha, \quad Y''(0) = -\frac{1}{V_{0x}^2}, \quad (8.11)$$

vendar analitične rešitve ne obstajajo, zato rešujemo enačbo aproksimativno ali z uporabo primerne numerične metode (Vidav, 1976, str. 174).

8.2 Aproksimacija v limiti majhnih kotov

V limiti majhnih kotov zanemarimo v izrazu pod korenem (8.9) odvod $dY/dX = dy/dx$ in se diferencialna enačba občutno poenostavi v

$$\frac{d^3 Y}{dX^3} \approx 2 \frac{d^2 Y}{dX^2}, \quad (8.12)$$

ki da po dvakratni integraciji ob upoštevanju robnih pogojev (8.11) naslednjo rešitev

$$Y = \frac{1 - e^{2X}}{4 V_{0x}^2} + X \left(\frac{1}{2 V_{0x}^2} + \tan \alpha \right). \quad (8.13)$$

8.3 Aproksimativna rešitev z uporabo verižnega pravila

Skušajmo rešiti enačbo (8.10) z vpeljavo spremenljivke $\mu = Y'$, ki predstavlja v grafu $Y(X)$ smerni koeficient tangente

$$\frac{d^2 \mu}{dX^2} = 2 \frac{d\mu}{dX} \sqrt{1 + \mu^2}. \quad (8.14)$$

Upoštevajmo še $d\mu/dX = \mu'$ in zapišimo (8.14) v naslednji obliki

$$\frac{d\mu'}{dX} = 2\mu' \sqrt{1 + \mu^2}. \quad (8.15)$$

Diferencialne enačbe (8.15) sicer ne moremo rešiti analitično, lahko pa s pomočjo verižnega pravila poiščemo eksplicitno funkcijsko odvisnost $\mu'(\mu)$. Pomagajmo si z operacijo

$$\frac{d}{dX} = \frac{d\mu}{dX} \frac{d}{d\mu} = \mu' \frac{d}{d\mu} \quad (8.16)$$

in jo uporabimo na izrazu (8.15)

$$\frac{d\mu'}{d\mu} = 2\sqrt{1 + \mu^2}. \quad (8.17)$$

Po separaciji spremenljivk poiščemo rešitev enačbe (8.17) v matematičnem priročniku

$$\mu' = \mu \sqrt{1 + \mu^2} + \ln \left(\mu + \sqrt{1 + \mu^2} \right) + C, \quad (8.18)$$

kjer je integracijska konstanta določena z robnima pogojeva na začetku tirnice, kjer znaša, v skladu z (8.11), njena strmina $\mu_0 = \tan \alpha$ in odvod $\mu_0' = -1/V_{0x}^2 = -1/(V_0^2 \cos^2 \alpha)$. Od tod dobimo za integracijsko konstanto

$$C = -\frac{1}{V_0^2 \cos^2 \alpha} - f(\alpha), \quad (8.19)$$

kjer smo funkcijo $f(\cdot)$ definirali s

$$f(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + \ln \left(\frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right). \quad (8.20)$$

Ko uvrstimo (8.19) in (8.20) v (8.18) dobimo naslednjo diferencialno enačbo za funkcijo $\mu(X)$

$$\frac{d\mu}{dX} = -\frac{1}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + \mu \sqrt{1 + \mu^2} + \ln \left(\mu + \sqrt{1 + \mu^2} \right) - f(\alpha). \quad (8.21)$$

Upoštevajmo, da je $\mu = \tan \varphi$, in dejstvo, da je leva stran (8.21) enaka $Y''(X)$, da dobimo po krajšem računu

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = -\frac{1}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + f(\varphi) - f(\alpha). \quad (8.22)$$

Upoštevajmo še zvezo (8.6), da dobimo za velikost brezdimenzijske hitrosti

$$V = \frac{V_0 \cos \alpha}{\cos \varphi \sqrt{1 + V_0^2 \cos^2 \alpha (f(\alpha) - f(\varphi))}}. \quad (8.23)$$

Z upoštevanjem (8.2) dobimo dokončno velikost hitrosti gibanja težišča krogle v odvisnosti od kota φ

$$v(\varphi) = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \varphi \sqrt{1 + kv_0^2 \cos^2 \alpha (f(\alpha) - f(\varphi))}}, \quad (8.24)$$

kjer smo vpeljali parameter

$$k = \frac{1}{gl} = \frac{C_u \rho S}{2mg} = \frac{1}{v_k^2} = \text{konst.} \quad (8.25)$$

8.4 Analitični približki za koordinati x in y ter čas

V tem poglavju bomo izpeljali analitične aproksimativne izraze, ki so posebej uporabni pri kvalitativni in kvantitativni analizi poševnega meta. Enačbe, ki naj dovolj natančno opišejo gibanje krogle, bomo izrazili v podobni obliki, kot to storimo pri obravnavanju poševnega meta v vakuumu. Pri izpeljavi se omejimo na vrednosti Reynoldsovega števila $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$, kar približno ustreza hitrostim med 0,25 m/s in 53 m/s.

V izbrani točki tirnice (slika 9) razstavimo pospešek na tangentno komponento

$$a_t = -g \sin \varphi - gkv^2 \quad (8.26)$$

in na komponento v smeri glavne normale

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = g \cos \varphi = -\frac{v}{dt} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (8.27)$$

kjer je $v = v(\varphi)$ določen z enačbo (8.24). V enačbi (8.27) smo z ρ označili lokalni polmer ukrivljenosti krivulje v dani točki in ga izrazili s φ : $v = ds/dt \Rightarrow v/\rho = ds/\rho dt =$

– $\rho d\varphi/\rho dt = -d\varphi/dt$, kjer je $ds = vdt$ kratek odsek tirnice (Vidav, 1975, str. 348). V izbrani točki tirnice zapišimo še komponenti vektorja hitrosti v smeri koordinatnih osi

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos \varphi, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v \sin \varphi. \quad (8.28)$$

Iz sistema diferencialnih enačb (8.27) in (8.28) izrazimo spremenljivke t , x in y kot funkcije kota φ

$$t = t_0 - \frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\varphi} \frac{v}{\cos \varphi} d\varphi, \quad x = x_0 - \frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\varphi} v^2 d\varphi, \quad y = y_0 - \frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\varphi} v^2 \tan \varphi d\varphi, \quad (8.29)$$

kjer so vrednosti τ , x_0 in y_0 določene z začetnimi pogoji (običajno je $t_0 = x_0 = y_0 = 0$). Integralov v (8.29) ne moremo izračunati z elementarnimi funkcijami, zato si v znanstvenih publikacijah največkrat pomagajo z numerično integracijo.

Integracije diferencialnih enačb se lotimo z vpeljavo nove spremenljivke $u = v \cos \varphi$. Tako lahko zapišemo prvo enačbo v (8.29) v naslednji obliki

$$t = t_0 - \frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\varphi} \frac{v}{\cos \varphi} d\varphi = t_0 - \frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\varphi} \frac{u}{\cos^2 \varphi} d\varphi \quad (8.30)$$

in jo integriramo po delih

$$t = t_0 - \frac{u \tan \varphi}{g} \Big|_{\alpha}^{\varphi} + \frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\varphi} \tan \varphi du = t_0 - \frac{v \sin \varphi}{g} \Big|_{\alpha}^{\varphi} + \frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\varphi} \tan \varphi du, \quad (8.31)$$

kjer upoštevamo, da je

$$\frac{v \sin \varphi}{g} \Big|_{\alpha}^{\varphi} = \frac{v \sin \varphi}{g} - \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (8.32)$$

Z vpeljavo nove spremenljivke velja med u in φ zveza

$$\frac{du}{u^3} = k \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi}, \quad (8.33)$$

s pomočjo katere lahko integral v (8.31) izrazimo v naslednji obliki

$$\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\varphi} \tan \varphi du = \frac{k}{g} \int_{\alpha}^{\varphi} v^3 \tan \varphi d\varphi = -k \int_{\alpha}^{\varphi} v^2 \sin \varphi dt, \quad (8.34)$$

kjer smo uporabili $dt = -v d\varphi/(g \cos \varphi)$. S ponovno integracijo (8.34) po delih dobimo

$$-k \int_{\alpha}^{\varphi} v^2 \sin \varphi dt = -ktv^2 \sin \varphi \Big|_{\alpha}^{\varphi} + k \int_{\alpha}^{\varphi} t d(v^2 \sin \varphi). \quad (8.35)$$

Pri določenem integralu na desni strani (8.35) si moramo pomagati s približkom, pri katerem izračunamo integral kot ploščino trapeza z osnovnicama t_0 in t ter višino $h = v^2 \sin \varphi - v_0^2 \sin \alpha$

$$k \int_{\alpha}^{\varphi} t d(v^2 \sin \varphi) \approx \frac{k(t_0 + t)}{2} \int_{\alpha}^{\varphi} d(v^2 \sin \varphi) = \frac{k(t_0 + t)}{2} (v^2 \sin \varphi - v_0^2 \sin \alpha). \quad (8.36)$$

Tako lahko (8.30) zapišemo kot

$$t \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) = t_0 \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{(v_0 \sin \alpha - v \sin \varphi)}{g}, \quad (8.37)$$

kjer smo spremenljivko ϵ definirali z

$$\epsilon = k(v_0^2 \sin \alpha - v^2 \sin \varphi). \quad (8.38)$$

Tako lahko zapišemo (8.30) v dokončni obliki

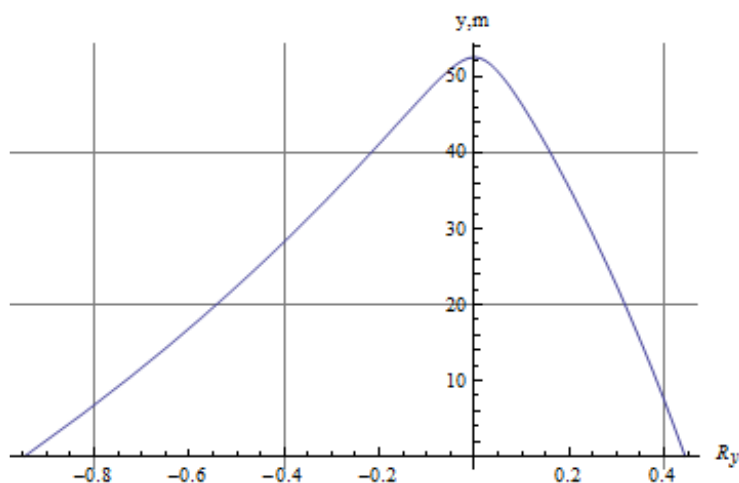
$$t = t_0 + \frac{2(v_0 \sin \alpha - v \sin \varphi)}{g(2 + \epsilon)}. \quad (8.39)$$

S podobnim postopkom lahko izpeljemo še analitična približka za x in y kot funkciji kota φ

$$x = x_0 + \frac{(v_0^2 \sin 2\alpha - v^2 \sin 2\varphi)}{2g(1 + \epsilon)}, \quad y = y_0 + \frac{(v_0^2 \sin^2 \alpha - v^2 \sin^2 \varphi)}{g(2 + \epsilon)}. \quad (8.40)$$

8.5 Analitični približki za čas gibanja krogle ter metno višino in metno razdaljo

Na osnovi izpeljanih analitičnih približkov za čas t (8.39) ter koordinati x in y (8.40) želimo v tem poglavju poiskati še enostavne analitične formule za glavne kinematične spremenljivke pri poševnem metu krogle. V viru (Chudinov, 2010, str. 30) najdemo graf $y = y(R_y)$ za y -koordinato bejzbolske žogice, kjer predstavlja $R_y = -kv^2 \sin \varphi$ brezdimenzijsko komponento sile upora v smeri koordinatne osi y . Avtor je napravil analizo gibanja žogice pri začetni hitrosti $v_0 = 44,7$ m/s, dvižnem kotu $\alpha = 60^\circ$ in vrednosti parametra $k = 5,48 \times 10^{-4}$ s²/m².



Graf 12: Graf funkcije $y = y(R_y)$ (povzeto po viru: Chudinov, 2010, str. 30)

Iz grafa 12 razberemo približni linearni potek v dvigajočem se in padajočem kraku ter maksimum pri vrednosti $R_y = 0$. Na osnovi tega zaključimo, da smemo aproksimirati metno višino H pri kotih $[\alpha, 0]$ tako, da v enačbo za y (8.40) vstavimo $\varphi = 0$. Izberimo začetne pogoje $t_0 = x_0 = y_0 = 0$. Pomagajmo si s sliko 9 in zapišimo v temenski točki a metno višino H

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g(2 + kv_0^2 \sin \alpha)}. \quad (8.41)$$

Takoj se prepričamo, da preide enačba v primeru, ko ne upoštevamo zračnega upora $k = 0$, v obliko, ki jo dobro poznamo za metno višino v vakuumu. Po zgornjem premisleku dobimo iz (8.24) še izraz za hitrost v temenski točki

$$v_a = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{1 + kv_0^2 \left(\sin \alpha + \cos^2 \alpha \ln \left(\tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \right)}}, \quad (8.42)$$

ki se prav tako ujema z izrazom za vodoravno komponento hitrosti v primeru, ko zračni upor zanemarimo. S pomočjo enačb (8.41) in (8.42) zapišimo po podobnosti z enačbami za poševni met v vakuumu še enačbi za čas leta t_1 in metno razdaljo D , kot je prikazano v preglednici 7. Glede na sliko 9 zapišimo po analogiji z enačbami poševnega meta brez upoštevanja zračnega upora še zvezi za x_a in kot α_1 , pod katerim prileti krogle na tla.

Preglednica 7: Analitične formule za glavne spremenljivke poševnega meta

| Enačbe brez upoštevanja upora ($k = 0$) | Enačbe z upoštevanjem upora ($k = \frac{c_u \rho S}{2mg}$) |
|---|---|
| $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ | $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g(2 + kv_0^2 \sin \alpha)}$ |
| $t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2 \sqrt{\frac{2H}{g}}$ | $t_1 = 2 \sqrt{\frac{2H}{g}}$ |
| $v_a = v_0 \cos \alpha$ | $v_a = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{1 + kv_0^2 \left(\sin \alpha + \cos^2 \alpha \ln \left(\tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \right)}}$ |
| $D = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g} = v_a t_1$ | $D = v_a t_1$ |
| $x_a = \frac{D}{2} = \sqrt{DH \cot \alpha}$ | $x_a = \sqrt{DH \cot \alpha}$ |
| $\alpha_1 = -\alpha = -\arctan \left(\frac{DH}{(D - x_a)^2} \right)$ | $\alpha_1 = -\arctan \left(\frac{DH}{(D - x_a)^2} \right)$ |
| $v_1 = v_0$ | $v_1 = v(\alpha_1)$ |

8.6 Primerjava analitičnih približkov in numeričnih vrednosti

Sledila je obsežna raziskava, pri kateri smo primerjali analitične približke z rezultati numeričnih izračunov. Obravnavali smo poševni met dveh kroglic z masama $m_1 = 2,9$ g in $m_2 = 9,2$ g ter enakim premerom $d = 24,81$ mm. Z računalniško simulacijo smo določili osnovne kinematične spremenljivke pri danih vrednostih začetnih hitrosti in jih primerjali z rezultati, ki smo jih po formulah iz preglednice 7 izračunali v Excelu. Kot je razvidno iz spodnjih preglednic, smo opravili primerjavo pri izbranih vrednostih dvižnih kotov. Pri računanju parametra k si pomagamo z vrednostmi koeficienta C_u po modelu 1 iz preglednice 2.

Preglednica 8: Primerjava rezultatov numerične analize in analitičnih približkov

$$m_1 = 2,9 \text{ g}, \alpha = 15^\circ, v_0 = 5,0 \text{ m/s}, k = 4,738 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| Spremenljivka | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|---------------|--------------------|----------------------|------------|
| H [m] | 0,0838 | 0,0841 | +0,31 |
| t_1 [s] | 0,2611 | 0,2618 | +0,30 |
| D [m] | 1,2247 | 1,2283 | +0,29 |

$$m_2 = 9,2 \text{ g}, \alpha = 15^\circ, v_0 = 5,0 \text{ m/s}, k = 1,427 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| Spremenljivka | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|---------------|--------------------|----------------------|------------|
| H [m] | 0,08488 | 0,08497 | +0,10 |
| t_1 [s] | 0,26297 | 0,26322 | +0,10 |
| D [m] | 1,25872 | 1,25996 | +0,10 |

$$m_1 = 2,9 \text{ g}, \alpha = 30^\circ, v_0 = 5,0 \text{ m/s}, k = 4,738 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| Spremenljivka | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|---------------|--------------------|----------------------|------------|
| H [m] | 0,3082 | 0,3094 | +0,40 |
| t_1 [s] | 0,5002 | 0,5023 | +0,42 |
| D [m] | 2,0574 | 2,0663 | +0,43 |

$$m_2 = 9,2 \text{ g}, \alpha = 30^\circ, v_0 = 5,0 \text{ m/s}, k = 1,427 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| Spremenljivka | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|---------------|--------------------|----------------------|------------|
| H [m] | 0,3153 | 0,3157 | +0,13 |
| t_1 [s] | 0,5067 | 0,5074 | +0,14 |
| D [m] | 2,1592 | 2,1623 | +0,14 |

$$m_1 = 2,9 \text{ g}, \alpha = 45^\circ, v_0 = 5,0 \text{ m/s}, k = 4,738 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| Spremenljivka | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|---------------|--------------------|----------------------|------------|
| H [m] | 0,6088 | 0,6115 | +0,45 |
| t_1 [s] | 0,7032 | 0,7062 | +0,42 |
| D [m] | 2,3315 | 2,3425 | +0,47 |

$$m_2 = 9,2 \text{ g}, \alpha = 45^\circ, v_0 = 5,0 \text{ m/s}, k = 1,427 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| <i>Spremenljivka</i> | <i>Numerična vrednost</i> | <i>Analitični približek</i> | <i>Napaka [%]</i> |
|----------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------|
| $H[\text{m}]$ | 0,6284 | 0,6292 | +0,12 |
| $t_1[\text{s}]$ | 0,7153 | 0,7163 | +0,14 |
| $D[\text{m}]$ | 2,4782 | 2,4822 | +0,16 |

$$m_1 = 2,9 \text{ g}, \alpha = 60^\circ, v_0 = 5,0 \text{ m/s}, k = 4,738 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| <i>Spremenljivka</i> | <i>Numerična vrednost</i> | <i>Analitični približek</i> | <i>Napaka [%]</i> |
|----------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------|
| $H[\text{m}]$ | 0,9058 | 0,9090 | +0,36 |
| $t_1[\text{s}]$ | 0,8585 | 0,8601 | +0,29 |
| $D[\text{m}]$ | 2,0058 | 2,0146 | +0,43 |

$$m_2 = 9,2 \text{ g}, \alpha = 60^\circ, v_0 = 5,0 \text{ m/s}, k = 1,427 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| <i>Spremenljivka</i> | <i>Numerična vrednost</i> | <i>Analitični približek</i> | <i>Napaka [%]</i> |
|----------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------|
| $H[\text{m}]$ | 0,9398 | 0,9411 | +0,14 |
| $t_1[\text{s}]$ | 0,8752 | 0,8761 | +0,10 |
| $D[\text{m}]$ | 2,1417 | 2,1449 | +0,15 |

$$m_1 = 2,9 \text{ g}, \alpha = 15^\circ, v_0 = 15,0 \text{ m/s}, k = 4,521 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| <i>Spremenljivka</i> | <i>Numerična vrednost</i> | <i>Analitični približek</i> | <i>Napaka [%]</i> |
|----------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------|
| $H[\text{m}]$ | 0,6699 | 0,6788 | +1,34 |
| $t_1[\text{s}]$ | 0,7319 | 0,7440 | +1,66 |
| $D[\text{m}]$ | 8,6588 | 8,7595 | +1,16 |

$$m_2 = 9,2 \text{ g}, \alpha = 15^\circ, v_0 = 15,0 \text{ m/s}, k = 1,361 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| <i>Spremenljivka</i> | <i>Numerična vrednost</i> | <i>Analitični približek</i> | <i>Napaka [%]</i> |
|----------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------|
| $H[\text{m}]$ | 0,7356 | 0,7389 | +0,45 |
| $t_1[\text{s}]$ | 0,7715 | 0,7763 | +0,62 |
| $D[\text{m}]$ | 10,4077 | 10,4656 | +0,56 |

$$m_1 = 2,9 \text{ g}, \alpha = 30^\circ, v_0 = 15,0 \text{ m/s}, k = 4,521 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| <i>Spremenljivka</i> | <i>Numerična vrednost</i> | <i>Analitični približek</i> | <i>Napaka [%]</i> |
|----------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------|
| $H[\text{m}]$ | 2,2631 | 2,2857 | +1,00 |
| $t_1[\text{s}]$ | 1,3403 | 1,3653 | +1,86 |
| $D[\text{m}]$ | 12,6641 | 12,7742 | +0,87 |

$$m_2 = 9,2 \text{ g}, \alpha = 30^\circ, v_0 = 15,0 \text{ m/s}, k = 1,361 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| <i>Spremenljivka</i> | <i>Numerična vrednost</i> | <i>Analitični približek</i> | <i>Napaka [%]</i> |
|----------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------|
| $H[\text{m}]$ | 2,2456 | 2,6631 | +0,78 |
| $t_1[\text{s}]$ | 1,4609 | 1,4737 | +0,88 |
| $D[\text{m}]$ | 16,8010 | 16,9255 | +0,74 |

$$m_1 = 2,9 \text{ g}, \alpha = 45^\circ, v_0 = 15,0 \text{ m/s}, k = 4,521 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| Spremenljivka | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|-----------------|--------------------|----------------------|------------|
| $H[\text{m}]$ | 4,1855 | 4,2173 | +0,76 |
| $t_1[\text{s}]$ | 1,8341 | 1,8545 | +1,11 |
| $D[\text{m}]$ | 13,3302 | 13,3606 | +0,23 |

$$m_2 = 9,2 \text{ g}, \alpha = 45^\circ, v_0 = 15,0 \text{ m/s}, k = 1,361 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| Spremenljivka | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|-----------------|--------------------|----------------------|------------|
| $H[\text{m}]$ | 5,1342 | 5,1738 | +0,77 |
| $t_1[\text{s}]$ | 2,0382 | 2,0541 | +0,78 |
| $D[\text{m}]$ | 18,6143 | 18,7405 | +0,68 |

$$m_1 = 2,9 \text{ g}, \alpha = 60^\circ, v_0 = 15,0 \text{ m/s}, k = 4,521 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| Spremenljivka | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|-----------------|--------------------|----------------------|------------|
| $H[\text{m}]$ | 5,9860 | 5,9710 | -0,25 |
| $t_1[\text{s}]$ | 2,2094 | 2,2067 | -0,12 |
| $D[\text{m}]$ | 11,1586 | 11,1181 | -0,36 |

$$m_2 = 9,2 \text{ g}, \alpha = 60^\circ, v_0 = 15,0 \text{ m/s}, k = 1,361 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| Spremenljivka | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|-----------------|--------------------|----------------------|------------|
| $H[\text{m}]$ | 7,5637 | 7,5939 | +0,40 |
| $t_1[\text{s}]$ | 2,4783 | 2,4885 | +0,41 |
| $D[\text{m}]$ | 15,8933 | 15,9688 | +0,48 |

Primerjava rezultatov numerične simulacije in analitičnih približkov v preglednici 8 kaže odlično ujemanje, saj napaka aproksimacije nikjer ne preseže 1,7 odstotka. Rezultate smo primerjali le za hitrosti do 15,0 m/s in masi kroglic, ki smo jih uporabljali v eksperimentalnem delu naloge. Ponovimo primerjavo še za gladko kroglico z maso 45,93 g in premerom 42,67 mm, kar bi ustrezalo podatkom žogice za golf. Predpostavimo, da udari igralec žogico z začetno hitrostjo 50,0 m/s pod kotom 45°. Iz spodnje preglednice je razvidno, da analitični približki za osnovne spremenljivke poševnega meta za dober odstotek presegajo rezultate numerične simulacije.

$$m = 45,93 \text{ g}, \alpha = 45^\circ, v_0 = 50,0 \text{ m/s}, k = 9,025 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

| Spremenljivka | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|-----------------|--------------------|----------------------|------------|
| $H[\text{m}]$ | 34,83 | 35,24 | +1,18 |
| $t_1[\text{s}]$ | 5,29 | 5,36 | +1,19 |
| $D[\text{m}]$ | 99,01 | 100,32 | +1,32 |

9 INOVACIJSKI PREDLOG RAZISKOVALNE NALOGE

V gimnazijskem programu se pri pouku fizike pogosto srečamo s poševnim metom, vendar vedno s poudarkom na tem, da bomo zračni upor zanemarili. Seveda pri tem dijaki največkrat nimajo predstave, ali je to zgolj nerealna idealizacija in bi z upoštevanjem upora dobili povsem drugačne rezultate. Pri tem se največkrat konča z učiteljevim komentarjem, da z upoštevanjem zračnega upora parabola ni več simetrična in da je:

- v vsakem primeru metna razdalja krajša od metne razdalje pod enakim kotom v brezračnem prostoru,
- metna višina manjša od višine, ki bi jo krogla dosegla v brezračnem prostoru in
- čas, ki ga krogla potrebuje do temena, krajši od časa, ki ga krogla potrebuje za pot od temena do tal.

Kot primer, ki je zanimiv in poučen tudi v gimnazijskem programu, obravnavajmo let bejbolske žogice. Razmere nekoliko poenostavimo in predpostavimo, da vrže igralec žogico s tal pod kotom $\alpha = 40^\circ$ z začetno hitrostjo $v_0 = 45,0$ m/s. Pomagajmo si s preglednico 7 in izračunajmo najprej osnovne kinematične spremenljivke poševnega meta brez upoštevanja zračnega upora, kot je prikazano v drugem stolpcu preglednice 9. Povsem zadošča, če podajamo rezultate na največ štiri mesta natančno.

Preglednica 9: Izračun spremenljivk leta bejbolske žogice, $\alpha = 40^\circ$, $v_0 = 45,0$ m/s

| Spremenljivka | Brez upoštevanja upora | Numerična vrednost | Analitični približek | Napaka [%] |
|----------------|------------------------|--------------------|----------------------|------------|
| H [m] | 42,64 | 30,97 | 31,43 | +1,5 |
| t_1 [s] | 5,90 | 5,00 | 5,06 | +1,2 |
| v_a [m/s] | 34,47 | 23,19 | 23,19 | 0 |
| D [m] | 203,4 | 117,8 | 117,4 | -0,3 |
| x_a [m] | 101,7 | 65,36 | 66,32 | +1,5 |
| α_1 [°] | -40,0 | -53,04 | -54,73 | +3,2 |
| v_1 [m/s] | 45,0 | 27,45 | 27,99 | +2,0 |

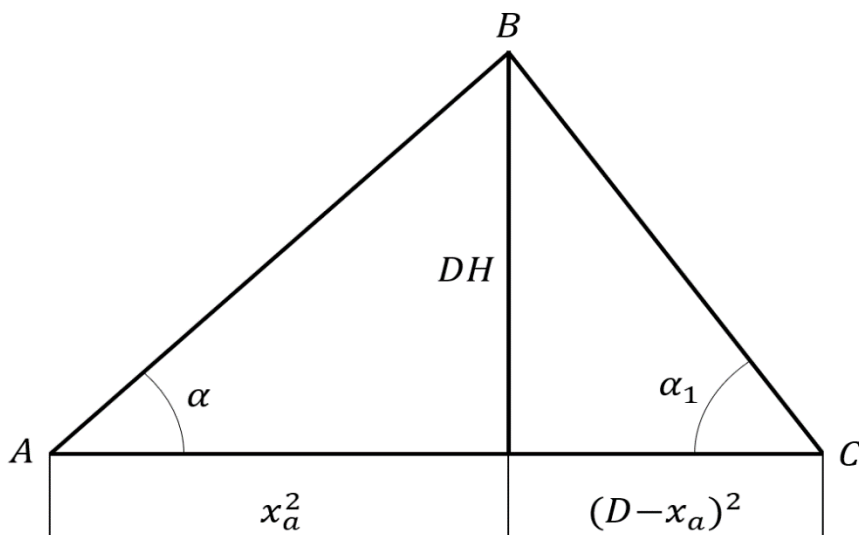
Potem se pojavi pri dijakih tista večna dilema, za koliko ti idealizirani rezultati odstopajo od realnih vrednosti, ki bi jih dobili z upoštevanjem zračnega upora. Ob tem sicer lahko omenimo, da problem določitve krivulje leta žogice z upoštevanjem kvadratnega zakona upora analitično ni rešljiv, saj sta vodilni diferencialni enačbi za komponenti hitrosti v ravnini leta sklopljeni in nelinearni. Zato rešujemo problem s primerno numerično metodo, kjer na podlagi enačb v diferenčni obliki zapišemo ustrezen računalniški program. In četudi učitelj uporabi katerega od programov, ki računa let žogice brez in z upoštevanjem zračnega upora, je to spet nekaj imaginarnega, četudi program izriše krivulji leta in lahko dijaki občutijo znatno razliko v vrednostih kinematičnih spremenljivk.

V tretjem stolpcu preglednice 9 smo zbrali rezultate numeričnega preračuna, ki smo jih dobili s pomočjo računalniškega programa v paketu Scilab. Na tem mestu vidimo odlično možnost, kako lahko učitelj popestri uro z uporabo analitičnih približkov iz preglednice 7, ki, kot smo ugotavljali v prejšnjem podpoglavju, omogočajo celovito kvantitativno in kvalitativno analizo problema ter se odlikujejo po relativni preprostosti in veliki natančnosti dobljenih rezultatov.

Ura postane zanimivejša, če si lahko dijaki bejzbolsko žogico ogledajo. Ugotovijo, da je izdelana iz sintetičnega usnja, ki jo varuje pred vremenskimi vplivi. Učitelj razloži pomen mnogih šivov po površini žogice, ki igrajo podobno vlogo kot vdolbinice pri žogici za golf. Pri obliki telesa je odločilna predvsem zadnja stran, kjer nastajajo vrtinci. Čim močnejši vrtinci nastajajo, tem večji je koeficient upora. Pri danem prečnem prerezu telesa ga zmanjšamo tako, da čim manj zmotimo potek tokovnic; predvsem moramo oslabiti vrtince na zadnji strani telesa. Bolje je, da nastaja več manjših vrtincev po celotni površini telesa kot nekaj večjih na zadnji strani. Zaradi tega je teniška žoga hrapava, golfska žogica pa ima polno vdolbinic.

V naslednjem koraku prepisemo iz preglednice 7 enačbe za analitične približke, pojasnimo pomen posameznih členov in poudarimo podobnost enačb s tistimi za poševni met brez upoštevanja zračnega upora. V enačbah posebej razložimo pomen sorazmernostnega faktorja $k = C_u \rho S / 2mg$, kar pomeni, da moramo poznati ustrezne vrednosti količin. Dijakom damo možnost, da sami žogico stehtajo in določijo njen premer ter dobljeni vrednosti primerjajo s tistimi, ki jih navajajo proizvajalci žogic ($m = 0,145 \text{ kg}$, $r = 0,0366 \text{ m}$). Pri temperaturi 20°C upoštevamo vrednosti gostote zraka $\rho = 1,205 \text{ kg/m}^3$ in viskoznosti $\eta = 1,802 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$ ter pri dani hitrosti po enačbah (2.5) in (2.7) izračunamo koeficient upora žogice $C_u \approx 0,41$. Kot navaja strokovna literatura, je dejanska vrednost koeficienta upora baseball žogice nekoliko manjša $C_u = 0,25$ prav zaradi ne gladke površine.

Pri danih vrednostih izračunamo sorazmernostni koeficient $k = 5,48 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2$ in z njim po vrsti vrednosti kinematičnih spremenljivk, ki so zbrane v četrtem stolpcu preglednice 9. Pri računanju x -koordinate temenske točke a x_a in kota α_1 , pod katerim prileti žogica na tla, si lahko pomagamo s trikotnikom, v katerem α_1 izrazimo z osnovnimi spremenljivkami x_a , D in H . Kot prikazuje slika 10, sestavljata trikotnik dva pravokotna trikotnika z višino DH ter katetama x_a^2 in $(D - x_a)^2$. Če iz preglednice povzamemo numerične vrednosti $H = 30,97 \text{ m}$, $D = 117,8 \text{ m}$ in $x_a = 65,36 \text{ m}$, dobimo za kot $\alpha = 40,5^\circ$ in $\alpha_1 = 53^\circ$, kar pomeni presenetljivo dobro ujemanje z vrednostjo v četrtem stolpcu preglednice. V petem stolpcu preglednice navajamo odstopanje analitičnih približkov od numerično dobljenih rezultatov.



Slika 10: Geometrična slika osnovnih spremenljivk poševnega meta

10 IDEJNA IZHODIŠČA ZA NADALJNJE RAZISKOVALNO DELO

Pomemben vidik problema poševnega meta z upoštevanjem kvadratnega zakona upora je določitev optimalnega kota meta, ki zagotavlja maksimalno metno razdaljo. Poskusimo z idejnimi izhodišči za izpeljavo analitičnih približkov pri določanju optimalnega kota. Spomnimo se, kako zapišemo enačbo tirnice točkastega telesa pri poševnem metu brez upoštevanja zračnega upora. Enačbo zapišimo v eksplisitni obliki

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{Hx(D-x)}{x_a^2}, \quad (10.1)$$

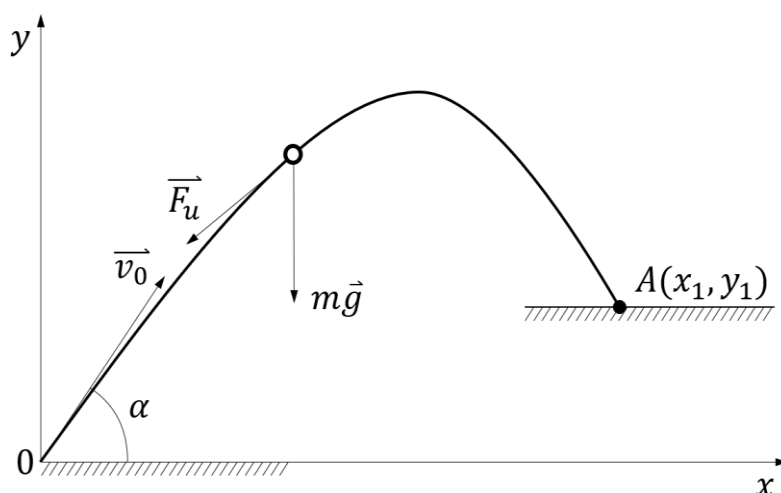
kjer smo z x_a označili razdaljo med izhodiščem koordinatnega sistema in x -koordinato najvišje točke, ki jo telo doseže. Zaradi simetričnosti parabole velja $x_a = D/2$.

Pri gibanju z upoštevanjem zračnega upora postane parabola nesimetrična, kjer se vrh parabole premakne v desno proti točki, kjer pade telo na tla. Z upoštevanjem tega premika zapišimo korigirano enačbo tirnice, s katero lahko aproksimativno opišemo poševni met s parametri H , D in x_a kot

$$y(x) = \frac{Hx(D-x)}{x_a^2 + (D-2x_a)x}. \quad (10.2)$$

Odvisnost $y(x)$ upošteva premik vrha tirnice v desno in ima vertikalno asimptoto. V primeru brez upora velja $D = 2x_a$ in preide enačba (10.2) v (10.1). Ko iz preglednice 9 vstavimo v (10.2) numerične vrednosti H , D in x_a ter primerjamo numerično tirnico z analitično, ki jo izrišemo z uporabo (10.2), ugotovimo, da sta praktično identični.

Predstavljajmo si, da smo telo odvrgli z začetno hitrostjo v_0 in pod kotom α , kot je prikazano na sliki 11. Označimo z A mesto, kjer prileti telo na vodoravno podlago, y_1 nad tlemi. Uporabimo enačbo (10.2), v kateri so H , D in x_a parametri, odvisni od začetnih pogojev v_0 in α , kot je prikazano v preglednici 7.



Slika 11: Optimizacija problema poševnega meta z upoštevanjem upora

Vstavimo y_1 v enačbo (10.2) in jo rešimo po spremenljivki x

$$x(v_0, \alpha, y_1) = \delta + \sqrt{\delta^2 - Dy_1 \cot \alpha}, \quad (10.3)$$

kjer smo označili

$$\delta = \frac{D}{2} + \frac{y_1}{H} \left(x_a - \frac{D}{2} \right). \quad (10.4)$$

Za dane vrednosti parametrov v_0, y_1 , je x funkcija dvižnega kota α . Da poiščemo optimalni kot α_m , pri katerem bo imel x pri danih v_0 in y_1 maksimalno vrednost, funkcijo (10.4) po α odvajamo ali narišemo graf funkcije s poskušanjem.

11 UGOTOVITVE

V raziskovalni nalogi smo uspešno realizirali namen in cilje raziskovalne naloge ter poskušali odgovoriti na zastavljena vprašanja. Nalogo smo konceptualno razdelili v tri sklope:

- v prvem sklopu smo obravnavali let krogle v vektorski obliki in zapisali vodilne enačbe za hitrost in položaj krogle ob poljubnem času v komponenti obliki. Izpeljane vodilne diferencialne enačbe smo zapisali v diskretni obliki z uporabo metode končnih razlik 1. reda in trapezne integracije. Izdelali smo numerični algoritem za izračun leta krogle s programskim paketom Scilab, v katerem smo upoštevali odvisnost koeficienta upora od vrednosti Reynoldsovega števila oziroma hitrosti. Preverili smo pravilnost numeričnega algoritma in analizirali rezultate simulacije v odvisnosti od časovnega koraka;
- v drugem sklopu smo s hitro kamero posneli tirnico gibanja krogle in jo grafično primerjali s krivuljo, ki jo da računalniška simulacija. Skušali smo navesti glavne razloge za odstopanje eksperimentalno dobljenih točk od numeričnih. Z analitično metodo smo določili začetno hitrost izstreljene kroglice in določili optimalni kot, pri katerem doseže kroglja pri dani začetni hitrosti maksimalno metno razdaljo. Sledila je obsežna raziskava, pri kateri smo še z računalniško simulacijo želeli potrditi odvisnost optimalnega kota od začetne hitrosti kroglice;
- v tretjem sklopu smo z raziskovalnim pristopom izpeljali analitične aproksimativne rezultate za glavne kinematične spremenljivke pri poševnem metu krogle in predlagali družbeno koristni vidik izpeljanih formul pri kvalitativni in kvantitativni analizi poševnega meta. Sklop smo zaključili z idejnimi izhodišči za nadaljnje raziskovalno delo.

12 ZAKLJUČEK

V nalogi smo raziskovali poševni met gladke krogle pod vplivom zračnega upora. Let krogle smo v nalogi obravnavali v vektorski obliki in zapisali vodilne enačbe za hitrost in položaj krogle ob poljubnem času v komponenti obliki. Ugotovili smo, da problem določitve tirnice leta krogle z upoštevanjem zračnega upora analitično ni rešljiv, saj sta vodilni diferencialni enačbi za komponenti hitrosti v ravnini leta sklopljeni in nelinearni. Zato smo reševali problem z numeričnim računanjem tako, da smo zapisali računalniški program, ki iterativno rešuje diferencialne enačbe poševnega meta z upoštevanjem kvadratnega zakona upora. Z analitično metodo smo analizirali rezultate modeliranja in jih primerjali z eksperimentalnimi rezultati, ki smo jih posneli s pomočjo hitre kamere.

V nadaljevanju smo izpeljali aproksimativne izraze za glavne kinematične spremenljivke, ki opisujejo poševni met krogle z upoštevanjem kvadratnega zakona upora, in jih izrazili v podobni obliki, kot to storimo pri obravnavanju poševnega meta v vakuumu. Sledila je obsežna raziskava, pri kateri smo primerjali analitične približke z rezultati numeričnih izračunov. Po posvetu z učitelji fizike se bodo rezultati raziskovalne naloge začeli uporabljati kot kompleksnejši primer pri obravnavi tovrstne tematike. Na tem mestu vidimo odlično možnost, kako lahko učitelj popestri uro z uporabo analitičnih približkov, ki omogočajo celovito kvantitativno in kvalitativno analizo poševnega meta z upoštevanjem upora ter se odlikujejo po relativni preprostosti in veliki natančnosti dobljenih rezultatov.

13 VIRI IN LITERATURA

- [1] Acheson, P. J., "Elementary Fluid Dynamics," Oxford University Press, 2003.
- [2] Cengel, Y. A., Cimbala, J. M., "Fluid Mechanics-Fundamentals and Applications," McGraw-Hill, NY, 2006.
- [3] Cimbala, J. M., "Drag on Spheres," Penn State University, 2012.
- [4] Crosseli, D., "Gibanje pod vplivom močnega upora," Diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, 2014.
- [5] Chudinov, P., "Approximate Analytical Description of the Projectile Motion with a Quadratic Drag Force," *Athens Journal of Sciences*, Vol. 1, pp. 97–106, 2014.
- [6] Dobeš, J., Kozubkova, M., "The influence of numerical models on determining the drag coefficient," In EPJ Web of Conferences, Vol. 67, p. 02019, EDP Sciences, 2014.
- [7] Golli, B., "Numerične metode, Osnove numeričnega reševanja," Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2004.
- [8] Hemmati, A., "Drag Measurement of a Sphere in Helium II," Thesis, Florida State University, Department of Mechanical Engineering, 2009.
- [9] Kladnik, R., "Visokošolska fizika 1. del, Mehanski in toplotni pojavi," Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1985.
- [10] Makarovič, M. 2005. Priročnik programskega paketa Scilab za uporabnika začetnika. Pridobljeno s:
<http://dsc.ijs.si/damir.vrancic/fl/Scilab/prirocnik%20za%20uporabnika%20zacetnika%202005.pdf>
- [11] Munson, B. R., Young, D. F., Okiishi, T. H., "Fundamentals of Fluid Mechanics," 5th Edition, Wiley, New York, 2006.
- [12] Strnad, J., "Fizika," I. del, Mehanika, Toplota, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana, 1973.
- [13] Strnad, J., "O metu krogle in metu kladiva," Obzornik za matematiko in fiziko, letnik 60, številka 3, str. 81–129, Ljubljana, 2013.
- [14] Škerget, L., "Mehanika Tekočin," Univerza v Mariboru, 1994.
- [15] Vidav, I., "Višja matematika III," Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1976.

UPORABLJENI SIMBOLI IN OZNAKE

| Latinski simboli | | Enota |
|------------------|---|-----------------------------------|
| A | brezdimenzijski pospešek | [-] |
| A_u | delo zračnega upora | [J] |
| a | pospešek | [m/s ²] |
| C | integracijska konstanta | [-] |
| C_u | koeficient upora | [-] |
| D | metna razdalja | [m] |
| d | premer krogle | [m] |
| d | diferencial | [-] |
| F_u | sila upora | [N] |
| f | poljubna funkcija, funkcija v enačbi (8.20) | [-] |
| g | težni pospešek | 9,81 m/s ² |
| H | metna višina | [m] |
| I | integral funkcije | [-] |
| i | iteracijski korak | [-] |
| j | sumacijski indeks | [-] |
| k | korekcijski parameter v enačbi (8.25) | [s ² /m ²] |
| L | Lagrangeeva funkcija | [-] |
| l | parameter v enačbi (8.2) | [m] |
| m | masa krogle | [kg] |
| N | število podintervalov | [-] |
| P | interpolacijski polinom | [-] |
| Re | Reynoldsovo število | [-] |
| r | polmer krogle | [m] |
| \vec{r} | krajevni vektor | [m] |
| S | prečni prerez telesa | [m ²] |
| s | dolžina poti | [m] |
| T | brezdimenzijski čas | [-] |
| t | čas | [s] |
| u | spremenljivka v enačbi (8.30) | [m/s] |
| V | brezdimenzijska hitrost | [-] |
| v | hitrost telesa oziroma tekočine | [m/s] |
| \vec{v} | vektor hitrosti | [m/s] |
| X | brezdimenzijska koordinata | [-] |
| x | kartezijska koordinata | [m] |
| Y | brezdimenzijska koordinata | [-] |
| y | kartezijska koordinata | [m] |
| W_k | kinetična energija | [J] |
| W_p | potencialna energija | [J] |

Grški simboli

| | | Enota |
|---------------|---|----------------------|
| α | dvižni kot | [°] |
| α_m | optimalni kot | [°] |
| Δ | diferenca | [-] |
| δ | oznaka v enačbi (10.3) | [m] |
| ε | spremenljivka v enačbi (8.38) | [-] |
| η | dinamična viskoznost | [kg/ms] |
| η | brezdimenzijska koordinata | [-] |
| μ | spremenljivka v enačbi (8.14) | [-] |
| ν | kinematična viskoznost | [m ² /s] |
| ξ | brezdimenzijska koordinata | [-] |
| π | število pi, $\pi = 3,14159$ | [-] |
| ρ | masna gostota | [kg/m ³] |
| ρ | polmer ukrivljenosti krivulje | [m] |
| φ | kot med vektorjem hitrosti in vodoravnico | [°] |

Uporabljene kratice kot spodnji indeksi

| | |
|-----|----------------------------|
| a | v temenski točki |
| 0 | začetna vrednost |
| 1 | končna vrednost |
| x | komponenta v smeri osi x |
| y | komponenta v smeri osi y |

PRILOGA

Raziskovalni nalogi je priložena programska koda, s katero smo računali let kroglic. Oznake, uporabljene v programu Scilab:

| | |
|-------|-----------------------------------|
| A | prečni presek kroglice |
| alf0 | kot meta |
| C | izbrani koeficient upora |
| Calfa | kosinus začetnega kota meta |
| Cu | koeficient upora kroglice |
| d | premer kroglice |
| dt | časovni korak |
| g | težni pospešek |
| i | indeks |
| m | masa kroglice |
| ni | kinematična viskoznost |
| q, r | prazni matriki |
| Re | Reynoldsovo število |
| ro | gostota zraka |
| Salfa | sinus začetnega kota |
| v | hitrost kroglice |
| v0 | začetna hitrost |
| vx | komponenta hitrosti v smeri osi x |
| vy | komponenta hitrosti v smeri osi y |

```
/**PODATKI**  
//Začetna hitrost [m/s]  
v0=15;  
//Kot meta [°]  
alfa0=30;  
//Masa kroglice [kg]  
m1=2.8e-3;  
m2=9.3e-3;  
//Premer kroglice [m]  
d=24.81e-3;  
//Gostota [kg/m^3]  
ro1=1.205  
ro2=1.205  
//Kinematična viskoznost [m^2/s]  
ni=14.95e-6;  
//Težni pospešek [m/s^2]
```

```

g=9.81;
//Koefficient upora v odvisnosti od Re števila za prvo kroglico (Re,Cu)
Cu1=[1659.1,0.5127;3318.2,0.4767;4977.3,0.4615;6636.4,0.4527;8295.4,0.4468;9954.5,0.4425;11613.6,0.4392;
13272.7,0.4365;14931.8,0.4343;16590.9,0.4325;18249.9,0.4309;19909.1,0.4296;21568.1,0.4284;23227.2,0.427
3;24886.3,0.4263;26545.4,0.4255;28204.5,0.4247;29863.6,0.4239;31522.7,0.4233;33181.8,0.4227];
//Koefficient upora v odvisnosti od Re števila za drugo kroglico (Re,Cu)
Cu2=[1659.1,0.5127;3318.2,0.4767;4977.3,0.4615;6636.4,0.4527;8295.4,0.4468;9954.5,0.4425;11613.6,0.4392;
13272.7,0.4365;14931.8,0.4343;16590.9,0.4325;18249.9,0.4309;19909.1,0.4296;21568.1,0.4284;23227.2,0.427
3;24886.3,0.4263;26545.4,0.4255;28204.5,0.4247;29863.6,0.4239;31522.7,0.4233;33181.8,0.4227];
//Časovni korak [s]
dt=0.005;
***ALGORITEM***
//Prečni presek kroglice [m^2]
A=%pi*d^2/4;
//Izračun cos in sin začetnega kota meta
Calfa=cos(alfa0/180*%pi);
Salfa=sin(alfa0/180*%pi);
***IZRAČUN LETA PRVE KROGLICE***
//Izbrani koefficienti upora prve kroglice
C=Cu1;
//Ustvari prazno matriko
r=[];
//t=0
r(1,1)=0;
//x=0
r(1,2)=0;
//y=0
r(1,3)=0;
//Hitrosti so v trenutku t=0 enake začetnim pogojem
v=v0;
vx=v0*Calfa;
vy=v0*Salfa;
i=1;
while (r(i,3)>=0)
    i=i+1;
    //Izračunaj Reynolds-ovo število
    Re=v*d/ni;
    a=1;
    while(C(a,1)<Re)
        a=a+1;
    end
    //Izračunaj koefficient upora
    Cu=(Re-C(a-1,1))/(C(a,1)-C(a-1,1))*C(a,2)+(C(a,1)-Re)/(C(a,1)-C(a-1,1))*C(a-1,2);
    //Cu=0;
    //Izračunaj nove hitrosti
    vxNov=vx-dt/(2*m1)*Cu*A*ro1*v*v*vx;
    vyNov=vy-dt/m1*(0.5*Cu*A*ro1*v*v*vy+m1*g);
    v=(vxNov^2+vyNov^2)^0.5;
    //Izračunaj in zapiši čas, koordinato x in koordinato y
    r(i,1)=r(i-1,1)+dt;
    r(i,2)=r(i-1,2)+(vx+vxNov)/2*dt;
    r(i,3)=r(i-1,3)+(vy+vyNov)/2*dt;
    //Prepiši stare hitrosti z novimi
    vx=vxNov;
    vy=vyNov;
end
//Izračunaj čas in domet kroglice, ko se ta dotakne tal
eps=(0-r(i-1,3))/(r(i,3)-r(i-1,3));
r(i,1)=eps*(r(i,1)-r(i-1,1))+r(i-1,1);
r(i,2)=eps*(r(i,2)-r(i-1,2))+r(i-1,2);

```

```

r(i,3)=eps*(r(i,3)-r(i-1,3))+r(i-1,3);
//Zapiši i za potrebe prikaza rezultatov na koncu
n=i;

***IZRAČUN LETA DRUGE KROGLICE***
//Izbrani koeficienti upora druge kroglice
C=Cu2;
//Ustvari prazno matriko
q=[];
//t=0
q(1,1)=0;
//x=0
q(1,2)=0;
//y=0
q(1,3)=0;
//Hitrosti so v trenutku t=0 enake začetnim pogojem
v=v0;
vx=v0*Calfa;
vy=v0*Salfa;
i=1;
while (q(i,3)>=0)
    i=i+1;
    //Izračunaj Reynolds-ovo število
    Re=v*d/ni;
    a=1;
    while(C(a,1)<Re)
        a=a+1;
    end
    //Izračunaj koeficient upora
    Cu=(Re-C(a-1,1))/(C(a,1)-C(a-1,1))*C(a,2)+(C(a,1)-Re)/(C(a,1)-C(a-1,1))*C(a-1,2);
    //Cu=0;
    //Izračunaj nove hitrosti
    vxNov=vx-dt/(2*m2)*Cu*A*ro2*v*v*x;
    vyNov=vy-dt/m2*(0.5*Cu*A*ro2*v*vy+m2*g);
    v=(vxNov^2+vyNov^2)^0.5;
    //Izračunaj in zapiši čas, koordinato x in koordinato y
    q(i,1)=q(i-1,1)+dt;
    q(i,2)=q(i-1,2)+(vx+vxNov)/2*dt;
    q(i,3)=q(i-1,3)+(vy+vyNov)/2*dt;
    //Prepiši stare hitrosti z novimi
    vx=vxNov;
    vy=vyNov;
end
//Izračunaj čas in domet kroglice, ko se ta dotakne tal
eps=(0-q(i-1,3))/(q(i,3)-q(i-1,3));
q(i,1)=eps*(q(i,1)-q(i-1,1))+q(i-1,1);
q(i,2)=eps*(q(i,2)-q(i-1,2))+q(i-1,2);
q(i,3)=eps*(q(i,3)-q(i-1,3))+q(i-1,3);
//Izpiši čas leta prve kroglice
disp(r(n,1),"Čas leta prve kroglice je [s]:")
//Izpiši čas leta druge kroglice
disp(q(i,1),"Čas leta druge kroglice je [s]:")
//Izpiši metno razdaljo prve kroglice
disp(r(n,2),"Metna razdalja prve kroglice je [m]:")
//Izpiši metno razdaljo druge kroglice
disp(q(i,2),"Metna razdalja druge kroglice je [m]:")
//Izriši trajektorijo leta kroglice
plot(r(:,2),r(:,3),'r', q(:,2),q(:,3),'b')

```