OSNOVNA ŠOLA FRAM

RAZISKOVALNA NALOGA ZA 57. SREČANJE MLADIH RAZISKOVALCEV OSNOVNIH IN SREDNJIH ŠOL ZGORNJEGA PODRAVJA

ZNAMENITE TOČKE ŠTIRIKOTNIKA

RAZISKOVALNA NALOGA
PODROČJE: MATEMATIKA

Avtorja: Bine Gojkovič, 8. razred
Jure Božič, 8. razred

Mentorica: Polona Čuk Kozoderc

Lektorica: Simona Napast

Fram, marec 2023

Kazalo vsebine

Kazalo slik

POVZETEK

V raziskovalni nalogi sva ugotavljala, ali so znamenite točke, ki smo jih spoznali pri trikotnikih – višinska točka, središče očrtane krožnice, središče očrtane krožnice in težišče – prisotne tudi v štirikotnikih. Pri raziskovanju sva uporabila znanje o znamenitih točkah trikotnika, ki smo ga pridobili pri pouku matematike v 7. razredu, in ga poskušala uporabiti pri določanju znamenitih točk štirikotnika. Pri preverjanju najinih domnev sva si pomagala s spletnim programom za dinamično geometrijo, Geogebro.
Ugotovila sva, da se višinske točke pri štirikotnikih ne da definirati na enak način kot pri trikotnikih in da obstajajo določeni štirikotniki, ki jim lahko očrtamo ali včrtamo krožnico in imajo nekatere posebne lastnosti. Razmišljala sva o možnostih, kako bi določila težišče štirikotnika, vendar sva na koncu ugotovila, da se najine domneve s teoretično pravilno določenim težiščem skladajo samo v nekaterih primerih.

KLJUČNE BESEDE: štirikotniki, trikotniki, znamenite točke, Geogebra

UVOD

Pri pouku smo v 7. razredu spoznavali trikotnike in načrtali njihove štiri znamenite točke: višinsko točko, središče očrtane krožnice, središče včrtane krožnice in težišče. Zanimale so naju še ostale znamenite točke pri trikotnikih, pobliže pa sva želela spoznati znamenite točke štirikotnikov, zato sva se odločila, da v raziskovalni nalogi preučiva, ali tudi v štirikotnikih le-te obstajajo in ali zanje veljajo podobne lastnosti kot pri trikotnikih.

Sama sva poskušala določiti načine, s katerimi bi narisali znamenite točke štirikotnikov. Osredotočila sva se na višinsko točko, središče štirikotniku očrtane krožnice, središče štirikotniku včrtane krožnice in težišče štirikotnika. Preverila sva teoretično pravilne metode iskanja znamenitih točk. Najino metodo sva nato primerjala s pravilnimi postopki. Za načrtovanje točk in primerjavo najinih predpostavk z ustrezno matematično metodo sva uporabljala spletno aplikacijo Geogebra, ki nama je omogočila dinamično spremljanje naših postopkov.

HIPOTEZE

H1: V trikotniku je bilo odkritih veliko znamenitih točk. Seznam znamenitih točk v trikotniku se v zadnjih letih ne spreminja.
H2: V štirikotnikih, ki jim lahko narišemo višino, obstaja tudi višinska točka.
H3: V nekaterih štirikotnikih lahko določimo središče očrtane krožnice.
H4: V nekaterih štirikotnikih lahko določimo središče včrtane krožnice.
H5: V vseh štirikotnikih lahko načrtamo težišče.
H6: Konstrukcija težišča štirikotnika izhaja iz simetral stranic ali presečišča diagonal.

RAZISKOVALNE METODE

Izhajala sva iz znanja, ki sva ga pridobila pri pouku matematike v 7. razredu, pri obravnavi znamenitih točk trikotnika. Predpostavke sva oblikovala na podlagi tega znanja in jih preverjala s programom dinamične geometrije, Geogebro. V raziskovalno nalogo sva vključila statične slike, ki prikazujejo postopek raziskovanja in povezavo do dinamičnih geometrijskih konstrukcij.

TEORETIČNO-EMPIRIČNI DEL

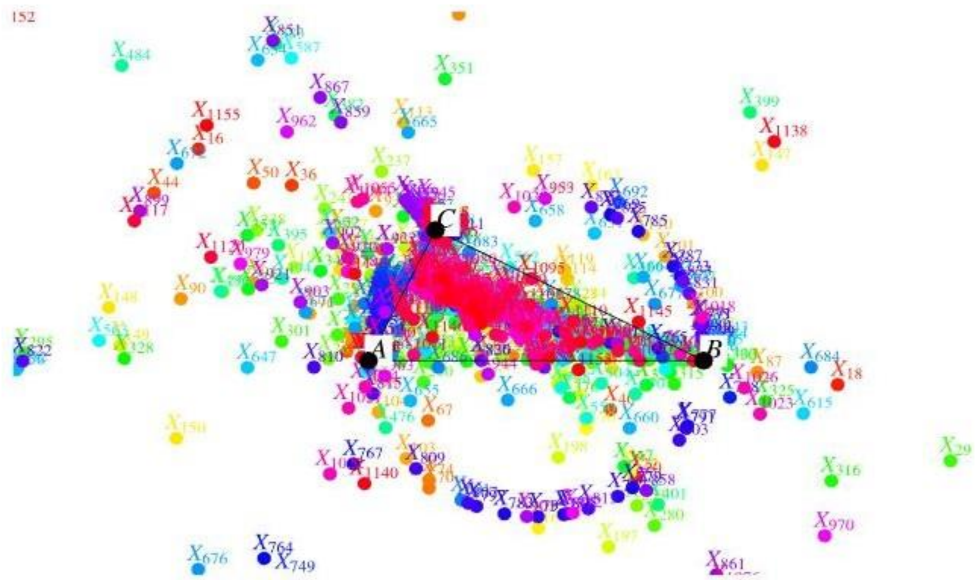
TRIKOTNIKI

Znamenite točke trikotnika

Znamenita točka trikotnika je točka na ravnini, kjer se sekajo posebne premice ali krožnice. Te točke imajo posebne ali zanimive geometrijske lastnosti.
Znamenite točke trikotnika so začeli odkrivati že v antiki, do 26. maja 2010 jih je bilo zabeleženih 3587. Vse točke so zbrane v Enciklopediji znamenitih točk trikotnika oz. Encyclopedia of Triangle Centers (ETC), ki ga vzdržuje ameriški matematik, glasbenik in skladatelj Clark Kimberling. Vsaka od teh točk ima določeno ime in oznako, ki jo sestavljata X in zaporedna številka iz Enciklopedije. Nosijo zgodovinska ali geometrijska imena, včasih pa so za poimenovanje uporabili tudi imena zvezd.

Vsako od teh središč (točk) je dobilo svoje enolično ime in oznako, ki jo sestavljata X in zaporedna številka iz Enciklopedije kot indeks. Kadar točki niso mogli dodeliti zgodovinskega ali geometrijskega imena, so zanjo uporabili tudi imena zvezd. (Wikipedija, 2022)

Število znamenitih točk tudi danes strmo narašča. Na spletni strani univerze, kjer so zbrani opisi znamenitih točk, je zadnje zabeleženo zaporedno število 53 066. (Kimberling, 2023)

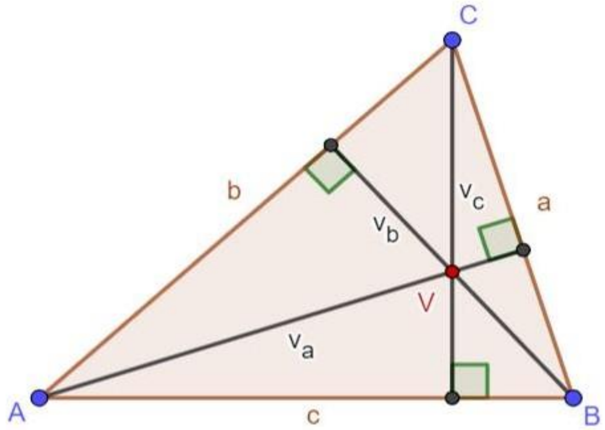


Slika 1: Kimberlingova zbirka znamenitih točk trikotnika. Na sliki jih je 3053, ki so bile zbrane do decembra 2004. (Vir: https://mathworld.wolfram.com/KimberlingCenter.html)

Višinska točka

V spletnem učbeniku za 7. razred najdemo naslednjo razlago višin in višinske točke: »Višina trikotnika je daljica, ki poteka od oglišča trikotnika do nosilke nasprotne stranice in je na to nosilko pravokotna. Označimo jo z V.

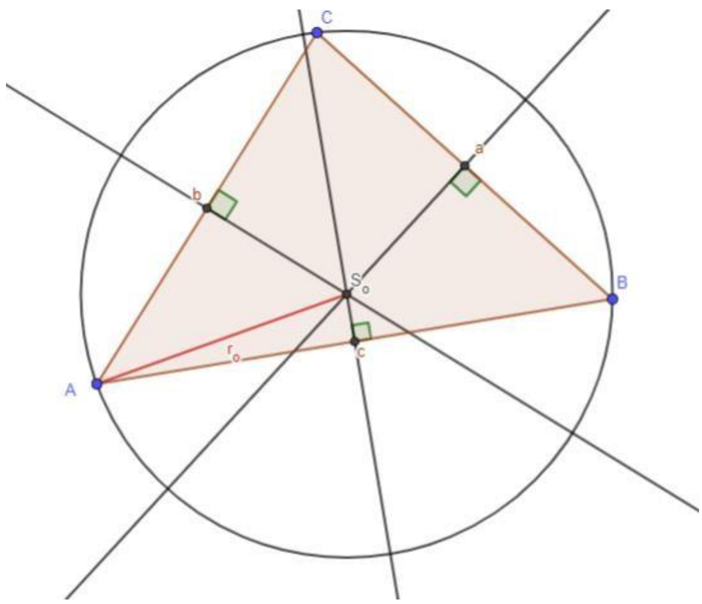
Višinska točka je presečišče nosilk višin v trikotniku.« (Tratar idr., 2016)



Slika 2: Višine in višinska točka trikotnika.

Središče očrtane krožnice

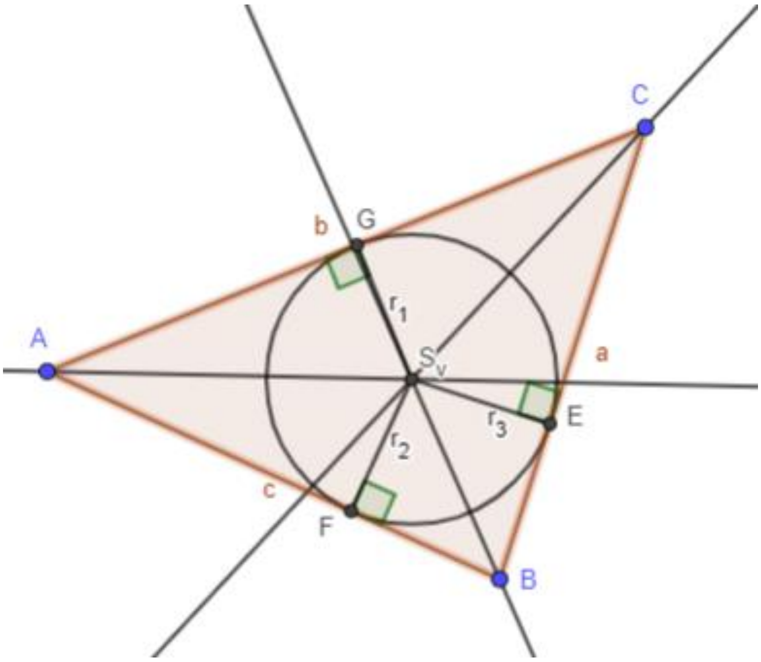
V spletnem učbeniku za srednje šole, Vega 2, so simetrale stranic in središče očrtane krožnice podane tako: »Simetrale vseh treh stranic trikotnika se sekajo v točki, ki je enako oddaljena od vseh treh ogliščtrikotnika, zato je središče trikotniku očrtane krožnice S_o Razdalja med poljubnim ogliščem trikotnika in S_o je polmer očrtane krožnice r_o.« (Ivanec idr., 2016)



Slika 3: Središče trikotniku očrtane krožnice S_o in trikotniku očrtana krožnica.

Središče včrtane krožnice

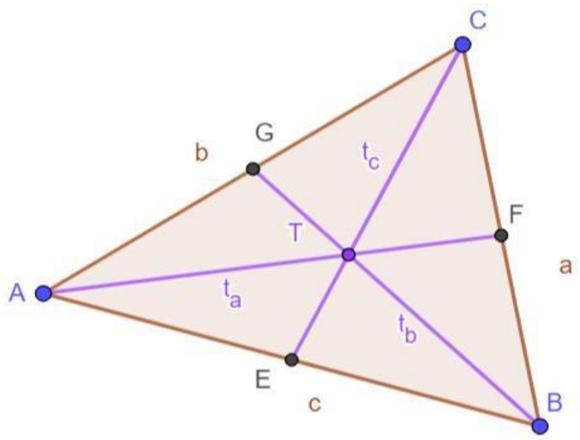
V spletnem učbeniku za srednje šole, Vega 2, so simetrale kotov in središče včrtane krožnice opisane tako: »Simetrale vseh treh notranjih kotov trikotnika se sekajo v točki, ki je enako oddaljena od vseh treh stranic trikotnika, zato je središče trikotniku včrtane krožnice S_v. Razdalja med S_v in poljubno stranico je polmer krožnice r_v.« (Ivanec idr., 2016)



Slika 4: Središče včrtane krožnice in trikotniku včrtana krožnica. Polmeri včrtane krožnice so označeni z r_1, r_2 in r_3.

Težišče

V spletnem učbeniku za srednje šole, Vega 2, sva našla sledečo definicijo težiščnice in težišča:
»Težiščnica trikotnika je daljica, ki povezuje oglišče trikotnika s središčem nasprotne stranice.
Vse tri težiščnice trikotnika se sekajo v isti točki, ki jo imenujemo težišče trikotnika T.« (Ivanec idr., 2016)

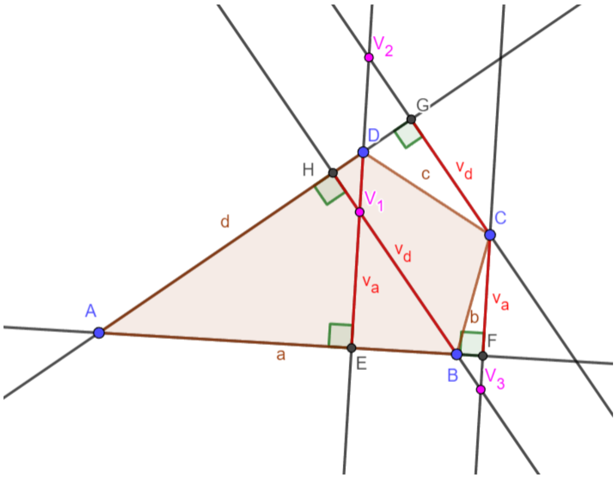


Slika 5: Težiščnice in težišče trikotnika.

ŠTIRIKOTNIKI

Višinska točka

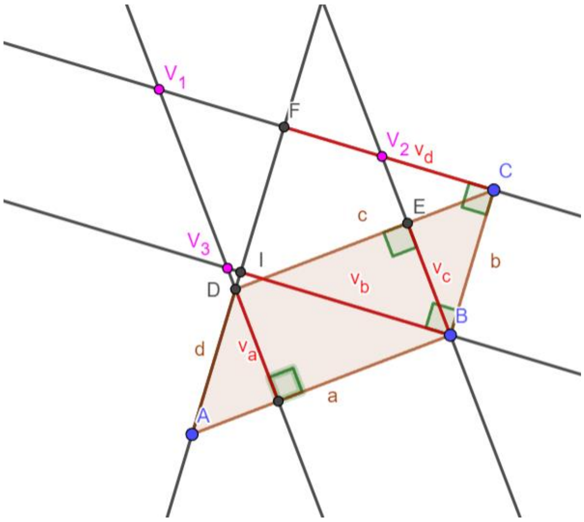
Če višino v štirikotniku določimo kot daljico, ki je pravokotna na stranico in ima krajišče v nasprotnem oglišču, lahko na vsako stranico narišemo dve višini. V tem primeru je tudi višinskih točk več.



Slika 6: Narisani sta dve višini na stranico a in dve višini na stranico d. V tem primeru se višine oziroma nosilke sekajo v več točkah. Označene so V1, V2 in V3. Teh točk je več.

V primeru, ko imamo v štirikotniku vsaj en par vzporednih stranic, kot je v primeru pravokotnika, paralelograma, romba, kvadrata in trapeza, je situacija podobna.

Narisala sva višine v paralelogramu in ugotovila, da jih lahko nariševa iz vseh njegovih oglišč. Zato je tudi presečišč višin oz. nosilk višin več. V našem primeru bi tako imeli 16 "višinskih točk".



Slika 7: Presečišča višin oz. nosilk višin v paralelogramu. V našem primeru smo označili tri presečišča: V_1, V_2 in V_3.

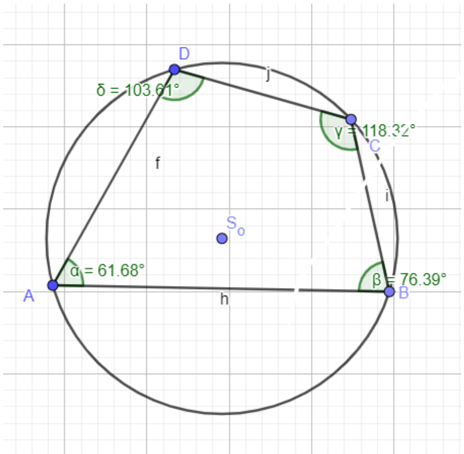
Ugotovila sva, da višinska točka, ki bi bila definirana enako kot pri trikotnikih, v štirikotnikih ne obstaja.

Središče očrtane krožnice

Želela sva odkriti lastnosti, ki jih imajo štirikotniki, katerim lahko očrtaš krožnico, zato sva s pomočjo Geogebre načrtala krožnico in na njej poljubno označila štiri oglišča. S premikanjem točk in merjenjem velikosti kotov ter stranic smo odkrivali lastnosti takšnih štirikotnikov.

Ugotovila sva, da ima tovrsten štirikotnik dva ostra notranja kota in dva topa. Ne drži pa, da lahko vsakemu štirikotniku, ki ima dva ostra in dva topa kota, očrtamo krožnico.

Z Geogebro sva izmerila notranje kote. Ko sva premikala oglišča štirikotnika, sva ugotovila, da je vsota nasprotnih notranjih kotov 180 stopinj. Torej sta nasprotna kota v štirikotniku, kateremu lahko očrtamo krožnico, suplementarna.



Slika 8: Prikaz odkrivanja lastnosti štirikotnikov, ki jim lahko očrtamo krožnico.

Dinamični prikaz: https://www.geogebra.org/classic/dezw75ak

S pomočjo Wikipedije (2002) smo odkrili še druge lastnosti, ki veljajo za štirikotnike, katerim lahko očrtamo krožnico:

»Tetivni štírikótnik ali tetivni četverokótnik je v ravninski geometriji štirikotnik, katerega vsa oglišča ležijo na isti krožnici oziroma ki ima očrtano krožnico.

V tetivnem štirikotniku sta nasprotna notranja kota suplementarna oziroma je štirikotnik tetiven, če je vsota nasprotnih kotov enaka 180°:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ , \quad \beta + \delta = 180^\circ$$

To dejstvo izhaja iz izreka o obodnem kotu. Izrek o obodnem kotu z Wikipedije (2020) pravi:

»Izrek o središčnem in obodnem kotu v ravninski geometriji zagotavlja:

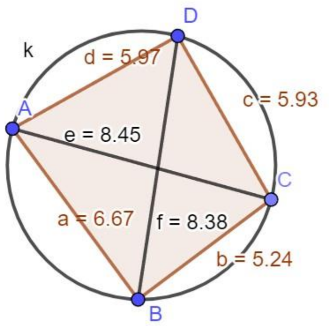
- da so vsi obodni koti nad istim lokom med sabo skladni in
- da je središčni kot dvakrat večji od obodnega kota nad istim lokom.

Velja enako, da je vsak zunanji kot enak nasprotnemu notranjemu kotu.

Za tetivne štirikotnike velja Ptolemajev izrek: produkt dolžin njegovih diagonal je enak vsoti produktov dveh nasprotnih stranic:

$$ef = ac + bd$$ «

Pravilnost Ptolemajevega izreka sva želela predstaviti s pomočjo Geogebre, zato sva načrtala tetivni štirikotnik in mu dodala preglednico, ki je vsebovala dolžine stranic ter levo in desno stran formule, ki je predstavljala Ptolemajev izrek. S premikanjem oglišč so se v preglednici spreminjale vrednosti dolžin stranic, leva in desna stran formule za Ptolemajev izrek pa sta bili ves čas enaki.



	A	B	C	D
1	stranica a	stranica b	stranica c	stranica d
2	6.67	5.24	5.93	5.97
3				
4	ac+bd	ef		
5	70.84	70.84		
6				
7				
8				
9				
10				

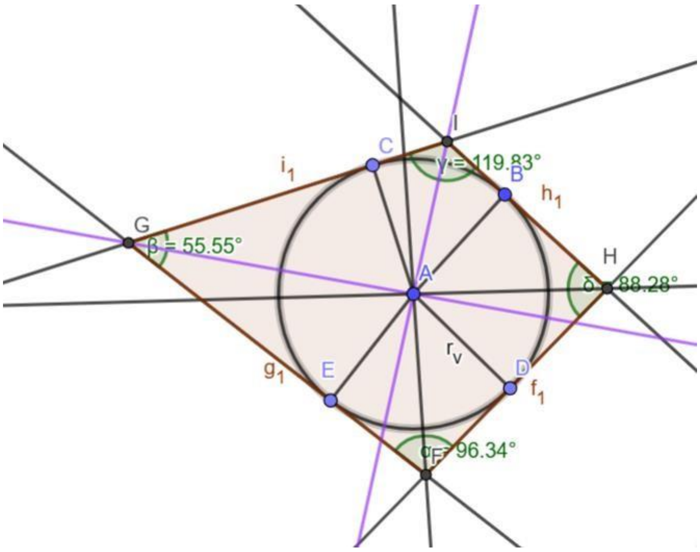
Slika 9: Prikaz Ptolemajevega izreka v Geogebri.

Dinamični prikaz: https://www.geogebra.org/classic/havr5e5v

Iz Wikipedije (2002) sva razbrala tudi, da so tetivni štirikotniki kvadrat, pravokotnik, enakokraki trapez, splošni paralelogram pa ni.

Središče včrtane krožnice

V Geogebri sva najprej načrtala krožnico, nato izbrala štiri poljubne točke na krožnici in v njih načrtala tangente na krožnico. Kjer so se tangente sekale, sva dobila oglišča štirikotnika.
Preverila sva tudi, če se simetrale kotov sekajo v točki, ki je središče včrtane krožnice.



Slika 10: Prikaz načrtovanja štirikotnika, kateremu lahko včrtamo krožnico.

Dinamični prikaz: https://www.geogebra.org/classic/xaextywf

Pri odkrivanju posebnih lastnosti štirikotnika, kateremu lahko včrtamo krožnico, nisva bila uspešna, zato sva preverila, kaj o tem piše na Wikipediji (2016): »Tangéntni štirikótnik je v ravninski geometriji konveksni štirikotnik, za katerega obstaja krožnica, ki se dotika vseh njegovih stranic oziroma ki ima včrtano krožnico. Ime tangentni izhaja iz značilnosti, da je vsaka njegova stranica tangentna na eno včrtano krožnico.«

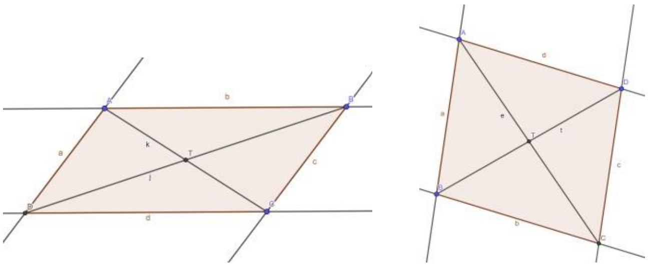
Iz istega vira sva ugotovila tudi, da sta vsoti nasprotnih stranic enaki. Torej velja:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|.$$

Posebni primeri tangentnih štirikotnikov so vsi deltoidi, rombi in kvadrati. (Wikipedija, 2016)

Težišče

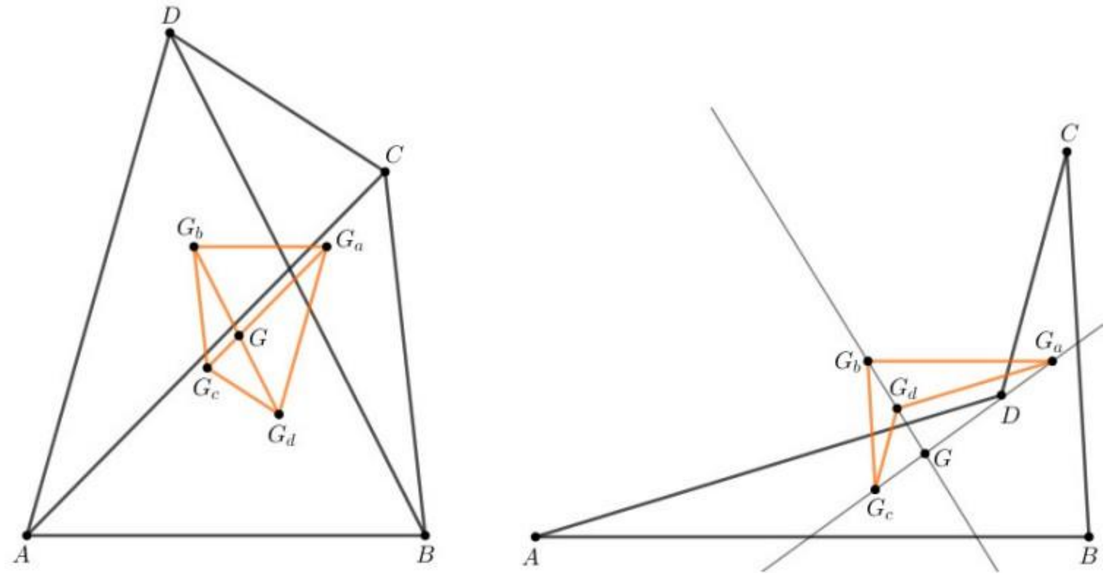
Pri odkrivanju težišča štirikotnika sva najprej pregledala osno in središčno somerne štirikotnike. Osno somerni štirikotniki so tisti, pri katerih obstaja premica (somernica), preko katere se lik prezrcali sam vase. Središčno somerni štirikotniki so tisti, pri katerih obstaja točka, preko katere se lik prezrcali sam vase. Spoznala sva, da pri osno ali središčno somernih ter osno in središčno somernih štirikotnikih težišče štirikotnika dobimo tako, da poiščemo presečišče diagonal.



Slika 11: Prikaz osno in središčno somernih štirikotnikov, ki imajo težišče v presečišču diagonal.

Pri štirikotnikih, ki niso osno ali središčno somerni, sva razmišljala, kako bi poiskala težišče. Naše ideje sva narisala v programu Geogebra, nato pa sva poiskala postopek za določanje težišča iz strokovnih virov. Vir (Kuralt, 2019) težišče v štirikotniku določa tako:

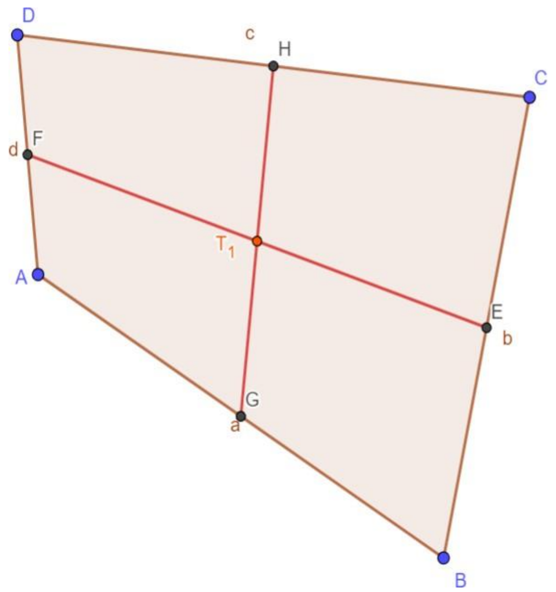
»Naj bo ABCD štirikotnik in naj bodo G_a, G_b, G_c in G_d težišča trikotnikov BCD, ACD, ABD in ABC v tem vrstnem redu. Presečišče nosilk daljic G_aG_c in G_bG_d imenujemo težišče G štirikotnika ABCD.«



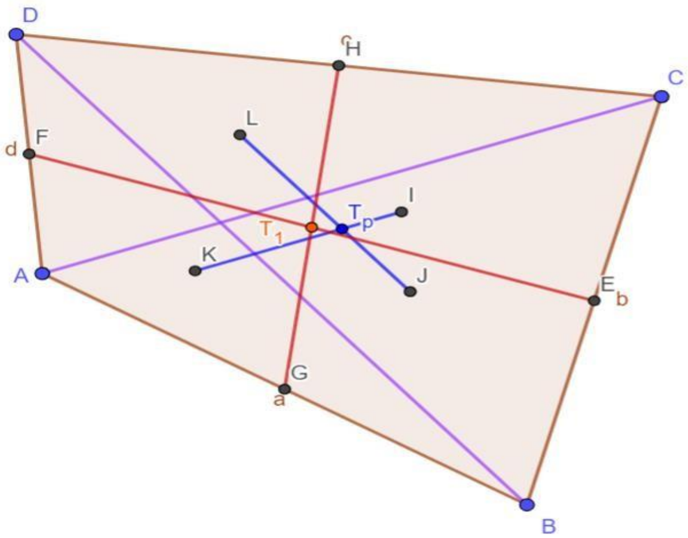
Slika 12: Prikaz konstrukcije težišča štirikotnika. (Vir: https://repozitorij.uni-lj.si/Dokument.php?id=119563&lang=slv)

V Geogebri sva načrtala še teoretično pravilno določeno težišče (označeno s T_p) in njegovo lego primerjala z najinimi predpostavkami za težišče (označeno s T_1, T_2 in T_3).

Prva predpostavka za težišče: Težišče je presečišče daljic, ki povezujejo razpolovišča stranic.



Slika 13: Primer težišča štirikotnika T_1.

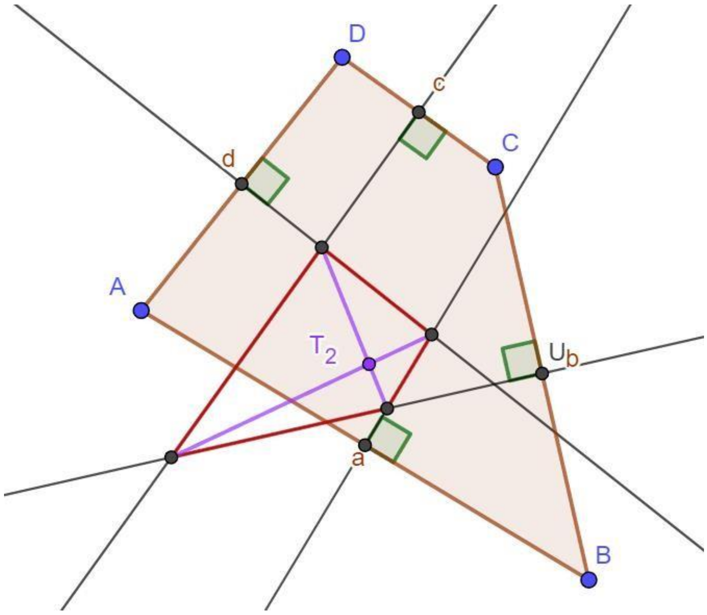


Slika 14: Prikaz medsebojne lege točk T_1 in T_p. T_1 je težišče, ki smo ga narisali po naših predpostavkah, T_p pa je težišče, ki je teoretično pravilno.

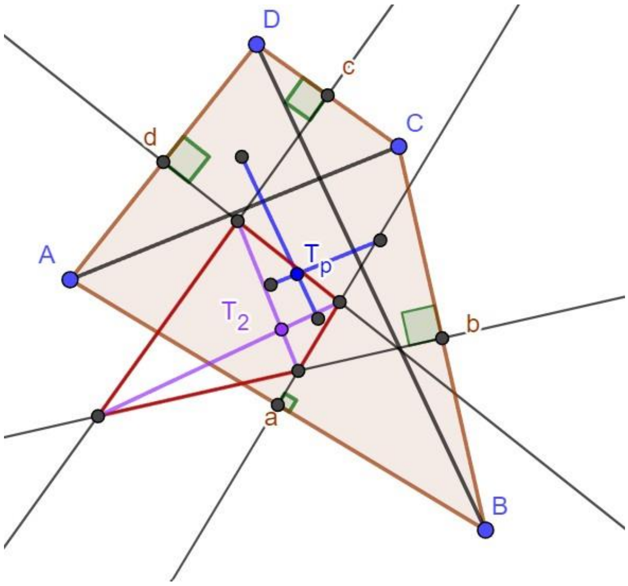
Dinamični prikaz ustreznosti naše predpostavke: https://www.geogebra.org/classic/frkmasut

Ugotovitev: Točki T_1 in T_p sovpadata samo v primeru, ko je štirikotnik paralelogram.

Druga predpostavka za težišče: Težišče je presečišče diagonal lika, ki ga pridobimo, če narišemo simetrale daljic in njihova presečišča zaporedoma povežemo med seboj.



Slika 15: Načrtano težišče štirikotnika po naši drugi predpostavki.

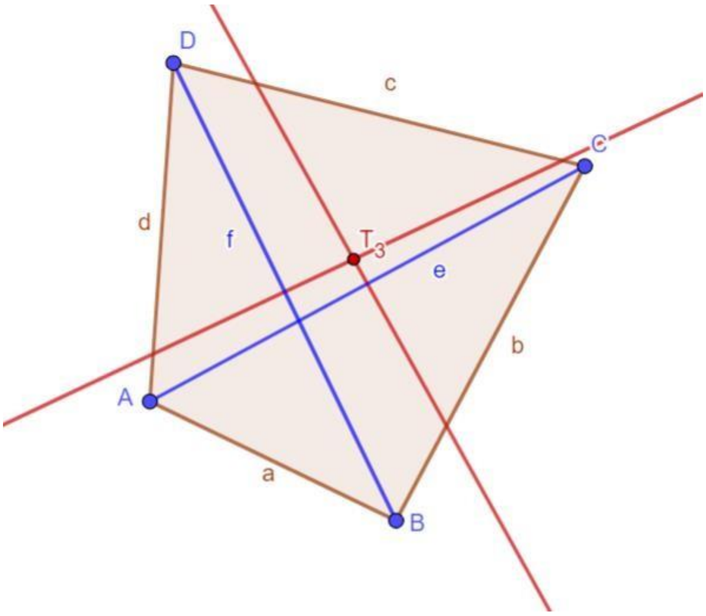


Slika 16: Primerjava težišča T_2 s teoretično pravilno določenim težiščem T_p.

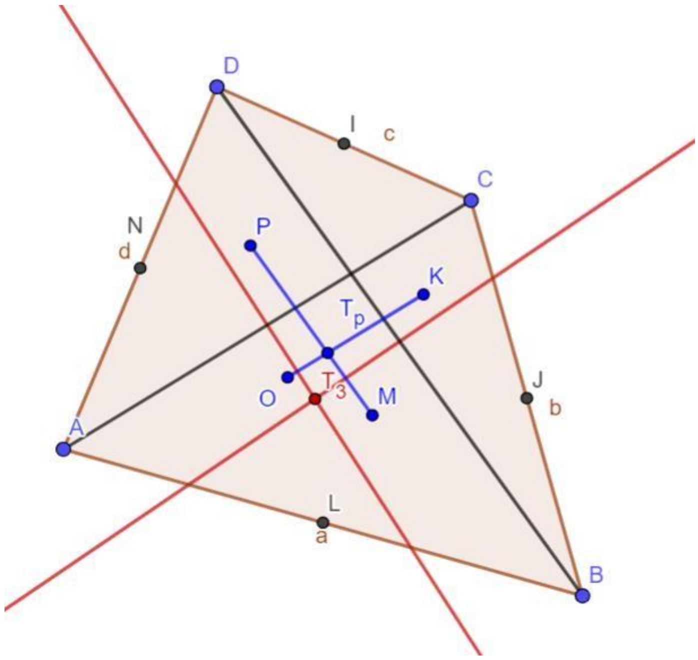
Dinamični prikaz ustreznosti naše predpostavke: https://www.geogebra.org/classic/gwudhz3b

Ugotovitev: Točki T_p in T_2 sovpadata le, kadar je lik paralelogram.

Tretja predpostavka za težišče: Načrtala sva diagonali štirikotnika in poiskala presečišče simetral obeh diagonal.



Slika 17: Slika prikazuje konstrukcijo težišča T_3.



Slika 18: Slika prikazuje primerjavo med težiščem T_3 in T_p.

Dinamični prikaz: https://www.geogebra.org/classic/zjvfjyw6

Ugotovitev: Točki T_p in T_3 sovpadata samo v primeru, ko je štirikotnik pravokotnik.

RAZPRAVA

Na začetku našega dela sva si postavila šest hipotez za obravnavo po zaključku najine raziskave.

H1: V trikotniku je bilo odkritih veliko znamenitih točk. Seznam znamenitih točk v trikotniku se v zadnjih letih ne spreminja.
Presenečena sva bila nad številom opisanih znamenitih točk trikotnika v Enciklopediji znamenitih točk trikotnika, ki jo ureja Clark Kimberling. V zbirki, ki je dostopna tudi na spletu, je zadnja zabeležena točka pod številko 53 066. Ugotovila sva tudi, da število odkritih znamenitih točk v zadnjem času strmo narašča, saj se je število v zadnjih nekaj letih povečalo za več deset tisoč.

H2: V štirikotnikih, ki jim lahko narišemo višino, obstaja tudi višinska točka.
Ugotovila sva, da v štirikotniku višinske točke ne moremo določiti na enak način kot v trikotniku. V literaturi sva opazila, da obstaja 'kvazi višinska točka' štirikotnika, katere pa nismo uspeli podrobno raziskati in bi lahko bila predmet nadaljnje raziskave.

H3: V nekaterih štirikotnikih lahko določimo središče očrtane krožnice.
To hipotezo smo potrdili in tudi odkrili nekatere lastnosti štirikotnikov, ki jim lahko očrtamo krožnico.

H4: V nekaterih štirikotnikih lahko določimo središče včrtane krožnice.
Tudi to hipotezo smo potrdili in zapisali lastnosti štirikotnikov, ki jim lahko določimo središče včrtane krožnice.

H5: V vseh štirikotnikih lahko načrtamo težišče.
Hipotezo smo potrdili. Ugotovili smo, da lahko težišče določimo vsem štirikotnikom.

H6: Konstrukcija težišča štirikotnika izhaja iz simetral stranic ali presečišča diagonal.
Oblikovala sva tri predloge za težišče, ki so temeljili na simetralah stranic in diagonal ter njihovih presečišč. Vsi najini predlogi so bili v bližini teoretično pravilno določenega težišča.
Najini predlogi za težišča so s teoretično pravilnim težiščem sovpadali samo v primeru pravokotnika oziroma paralelograma.

ZAKLJUČEK

Delo s programom za dinamično geometrijo, Geogebro, je bilo zanimivo in naju je spodbujalo k novim iskanjem rešitev, saj so rezultati domnev takoj vidni. Poleg tega je v sodobnih tehnoloških poklicih veliko načrtovanja s pomočjo raznovrstnih računalniških programov, zato sva zadovoljna, da sva preko raziskovalne naloge pridobila dodatno koristno znanje.

Pri predpostavkah, da je znamenite točke trikotnika možno določiti tudi v štirikotniku, nas je presenetilo, da so v štirikotniku točke težje določljive in da je veliko dodatnih lastnosti, ki vplivajo na to, ali določena točka v štirikotniku obstaja ali ne.

Posebej nas je presenetilo število določenih znamenitih točk trikotnika, kar nam je odprlo nove raziskovalne možnosti. S pomočjo slike, kjer je prikazanih 3053 znamenitih točk trikotnika, smo ugotovili, da nekatere od teh celo ležijo na skupni krožnici. Prikaz točk s pomočjo Geogebre se nam je pokazal kot zanimiv izziv za dodatno raziskovanje.

VIRI IN LITERATURA

[1] Znamenite točke trikotnika. Wikipedija. (2022). Pridobljeno 10. januarja 2023 s strani https://sl.wikipedia.org/wiki/Znamenite_to%C4%8Dke_trikotnika

[2] Kibmerling, Clark. Encyclopedia of triangle centers. Pridobljeno 12. februarja 2023 s strani https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[3] Tratar, idr. (2016). Matematika 7. Pridobljeno 8. januarja 2023 s strani https://eucbeniki.sio.si/matematika7/764/index1.html

[4] Ivanec, idr. (2016). Vega 2. Pridobljeno 8. januarja 2023 s spletne strani https://eucbeniki.sio.si/vega2/234/index1.html

[5] Ivanec, idr. (2016). Vega 2. Pridobljeno 10. januarja 2023 s spletne strani https://eucbeniki.sio.si/vega2/234/index2.html

[6] Ivanec, idr. (2016). Vega 2. Pridobljeno 10. januarja 2023 s spletne strani https://eucbeniki.sio.si/vega2/234/index3.html

[7] Wikipedija, (2022). Tetivni štirikotniki. Pridobljeno 14. januarja 2023 s strani https://sl.wikipedia.org/wiki/Tetivni_%C5%A1tirikotnik

[8] Wikipedija, (2016). Tangentni štirikotniki, Pridobljeno 14. januarja 2023 s strani https://sl.wikipedia.org/wiki/Tangentni_%C5%A1tirikotnik

[9] Kuralt, Diana (2019). Elementarna geometrija štirikotnika. Magistrsko delo, str. 23 (https://repozitorij.uni-lj.si/Dokument.php?id=119563&lang=slv)

[10] Wikipedija, (2020). Izrek o središčnem in obodnem kotu. Pridobljeno 7. aprila 2023 s strani https://sl.wikipedia.org/wiki/Izrek_o_sredi%C5%A1%C4%8Dnem_in_obodnem_kotu