Osnovna šola Škofljica

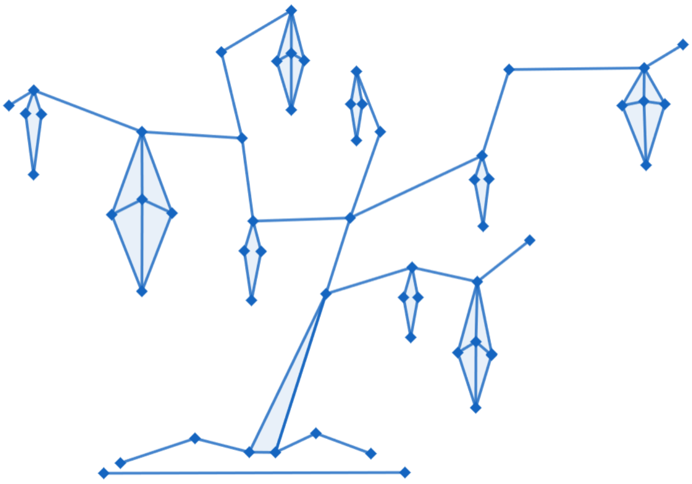
Klanec 5

1291 Škofljica

EULERJEVA KARAKTERISTIKA

Raziskovalna naloga

Področje: Matematika



Avtorica: Polona Larisa Perman, 9. B

Mentorica: Meta Hrast, prof.

Škofljica 2023

ZAHVALE

Iskreno se zahvaljujem mentorici Meti Hrast za vso pomoč in nasvete pri sestavljanju raziskovalne naloge ter ravnatelju Romanu Brunšku za lektoriranje naloge.

Posebej bi se rada zahvalila mami za vso podporo in pomoč pri pisanju naloge ter sestrama, ki sta mi pomagali s programoma Geogebra in Word. Z njuno pomočjo sem lahko napisala bolj estetsko in na pogled bolj prijetno raziskovalno nalogo.

KAZALO VSEBINE

KAZALO SLIK

KAZALO TABEL

POVZETEK

Eulerjeva karakteristika mi je bila prvič predstavljena kot formula za izračun neznanega števila oglišč, robov ali ploskev poliedrov. Če si poznal dve od naštetih količin, si lahko izračunal tretjo neznano. Formula se glasi:

$$Ploskve\ +\ Oglišča\ =\ Robovi\ +\ 2$$

Predstavljeno formulo natančneje imenujemo Eulerjeva poliedrska formula, ki je osnova za Eulerjevo karakteristiko. Slednja je običajno označena z grško črko χ:

$$\chi =\ \ Oglišča - Robovi\ +\ Ploskve$$

Primeri, pri katerih smo jo uporabljali, so bili vedno konveksni poliedri. Zanimalo me je, kaj se zgodi, če gledamo objekt, ki ni konveksen polieder. Eulerjevo karakteristiko sem izbrala, ker ni omejena samo na poliedre.

Začela sem z najbolj osnovnim geometrijskim objektom - točko. Nato sem nadaljevala z robovi, ploskvami in na koncu še s telesi. Raziskovala sem, kaj se zgodi z Eulerjevo karakteristiko, če jih medsebojno povezujemo, lepimo in razrežemo. Natančno sem obravnavala enostavne mnogokotnike in pokazala, da njihova Eulerjeva karakteristika ni odvisna od tega, kako so razrezani na trikotnike. Spraševala sem se, kaj vpliva na Eulerjevo karakteristiko in kaj ne. Pokazala sem, kako z Eulerjevo karakteristiko lahko dokažemo, da res obstaja samo pet platonskih teles.

Svoje ugotovitve bom na koncu prikazala s pomočjo tabele. Primerjala bom objekte, ki imajo isto Eulerjevo karakteristiko, in ugotovila, kako so medsebojno povezani.

Objekte sem si za lažjo predstavo risala v programu Geogebra in si tako omogočila globlje razumevanje.

Ključne besede: Eulerjeva karakteristika, enostavni mnogokotnik, enostavni polieder.

SUMMARY

When I first encountered Euler's characteristic, it was introduced to me as a formula to calculate the unknown number of vertices, edges or faces. If you knew two of the mentioned, you could calculate the third. The formula reads as follows:

$$Vertices + Faces =\ Edges + 2$$

The formula is more formally known as Euler's polyhedron formula, which is the foundation for the Euler's characteristic. The latter is usually denoted by the Greek letter χ:

$$\chi =\ \ Vertices -\ Edges +\ Faces$$

All the examples we looked at were convex polyhedra. So I wondered, what if the object we looked at wasn't a convex polyhedron? I chose Euler's characteristic because it's not limited to polyhedra.

I started with the most basic geometric object: the vertex. Then I continued with the edges, the faces, and finally the bodies. I've been researching what happens to Euler's characteristic if we cut, connect and glue them together. I have carefully addressed simple polygons and shown that their the Euler's

characteristics does not depend on how they are cut into triangles. I wondered what affected Euler's characteristic and what didn't. With Euler's characteristic, we can prove that there really are only five Platonic bodies.

In the end I will present my findings in the table. I'm going to compare objects that have the same Euler characteristics and find out how they're interconnected.

I drew objects in the Geogebra program to facilitate the performance, thus allowing me a deeper understanding.

Key words: Euler's characteristic, simple polygons, simple polyhedron.

UVOD

Z Eulerjevo poliedrsko formulo sem se prvič srečala na tekmovanju Matemček, ki ga organizira Mathema. Naloga je zahtevala, da izračunamo število točk in oglišč konveksnega poliedra, katerega slika je bila priložena. Mentorica nam je razložila, da velja naslednja Eulerjeva poliedrska formula:

$$Ploskve + Oglišča = Robovi + 2$$

Zanimalo me je, ali se s pomočjo te formule da obravnavati še kakšno drugo matematično vprašanje in kakšna je formula za objekte, ki niso konveksni poliedri. Zanimiv dokaz Eulerjeve poliedrske formule je predstavila Marija Vencelj (1991).

Pokazala bom, kako se s pomočjo Eulerjeve poliedrske formule dokaže, da imamo samo pet platonskih teles. Literature o platonskih telesih je na spletu veliko, med drugimi jih obravnava tudi Vilko Domajnko (1991).

Izračunala bom izraz:

$$\chi(M) = Oglišča - Robovi + Ploskve$$

za razne množice M, ki so sestavljene iz končne množice točk, daljic in konveksnih mnogokotnikov, ne nujno iz vseh treh skupin. Posebej se bom ukvarjala s ploskvami, ki so površine teles.

Ta izraz ima tudi posplošitev za telesa.

$$\chi_T(M) = Oglišča - Robovi + Ploskve - Telesa$$

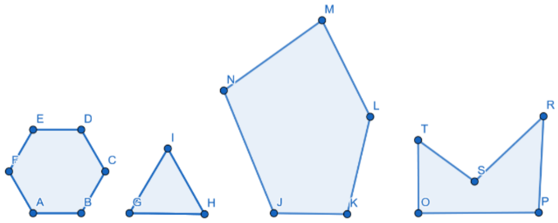
za razne množice M, ki so sestavljene iz končne množice točk, daljic, konveksnih mnogokotnikov in konveksnih teles, ne nujno iz vseh štirih skupin.

Glavno vprašanje pa je, ali je kakšna povezava med tistimi množicami, ki ti dajo enak rezultat.

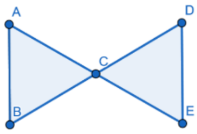
OSNOVNI POJMI

- **Enostavna sklenjena lomljenka** je sklenjena pot, sestavljena iz daljic, ki so paroma povezane in se sekajo samo v krajiščih. Če bi bila primerno prožna, bi jo z raztegovanjem lahko preoblikovali v krožnico, ne da bi se pri tem na katerem koli mestu pretrgala. V vsaki točki se stikata natanko dve daljici. To pomeni, da so paroma povezane.

- **Preprosti (enostaven) mnogokotnik** je v ravninski geometriji mnogokotnik, katerega stranice (oz. robovi) se ne sekajo in so paroma povezane, tako da tvorijo sklenjeno pot**. Če se stranice sekajo, mnogokotnik ni preprost**. Navadno se pridevniška beseda »preprost« opušča in se z zgornjo definicijo definira mnogokotnik v splošnem. Če bi bil primerno prožen, bi ga z raztegovanjem lahko preoblikovali v krog, ne da bi se pri tem na katerem koli mestu pretrgal. Stranice enostavnega mnogokotnika tvorijo enostavno sklenjeno lomljenko.
(https://sl.wikipedia.org/wiki/Preprosti_mnogokotnik)



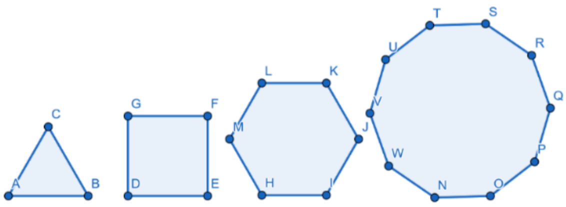
Slika 2: Preprosti mnogokotniki.



Slika 3: Mnogokotnik, ki ni preprost.

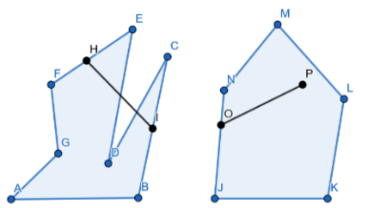
Lik ni preprost zato, ker se v enem oglišču stikajo štiri daljice.

- **Pravilni mnogokotnik** ali pravilni večkotnik je mnogokotnik, ki ima vse stranice enako dolge in vse kote med seboj skladne. (https://sl.wikipedia.org/wiki/Pravilni_mnogokotnik)



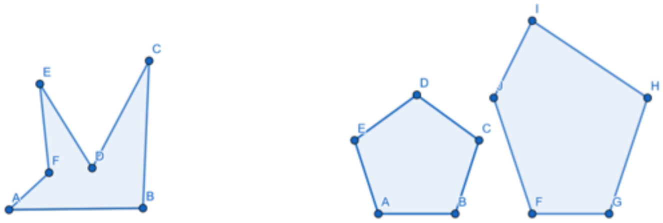
Slika 4: Pravilni mnogokotniki.

- **Konveksna množica** je v geometriji množica točk, za katero velja, da pri poljubni izbiri točk X in Y iz te množice, daljica XY v celoti leži v tej množici. (https://sl.wikipedia.org/wiki/Konveksna_mno%C5%BEica)



Slika 5: Levo - konkavna množica, desno - konveksna množica.

- Enostavne mnogokotnike delimo na izbočene in vbočene. **Izbočeni ali konveksni mnogokotnik** je tak mnogokotnik, katerega notranjost je konveksna množica. Enostaven mnogokotnik, ki ni izbočen, je **vbočen ali konkaven.** Vbočen mnogokotnik ima vedno notranji kot, ki je večji od 180°. (https://sl.wikipedia.org/wiki/Konveksni_in_konkavni_mnogokotnik)



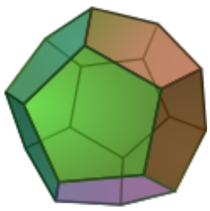
Slika 6 : Levo - vbočen mnogokotnik, desno - izbočena mnogokotnika.

- Polieder je trirazsežno geometrijsko telo, ki je omejeno z mnogokotniki. Ploskev, ki je unija teh mnogokotnikov, bomo imenovali **površina poliedra**. (https://sl.wikipedia.org/wiki/Polieder)

Slika 7: Polieder.

- Platonsko telo (ali pravilno telo) je konveksni polieder, katerega stranske ploskve so med sabo skladni pravilni mnogokotniki, ki imajo to značilnost, da se v vsakem oglišču stika isto število stranskih ploskev. (https://sl.wikipedia.org/wiki/Platonsko_telo)

- Konveksni polieder ima za stranske ploskve konveksne mnogokotnike.

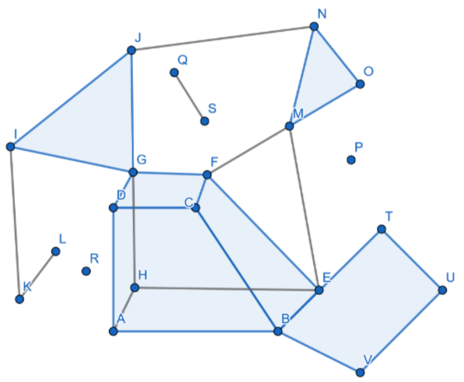


Slika 8: Konveksen polieder.

- Enostaven polieder je vsak tisti polieder, ki bi ga bilo mogoče, če bi bil primerno prožen, z raztegovanjem preoblikovati oz. napihniti v kroglo, ne da bi se pri tem na katerem koli mestu pretrgal. Potemtakem zagotovo niso enostavni tisti poliedri, ki imajo, denimo, kakšno "luknjo" ali pa poliedri, ki so sestavljeni iz dveh ali več manjših poliedrov, ki se stikajo zgolj vzdolž enega samega roba ipd. (http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2002/di/bajramovic/ena/Euler.html)

- Poliedrska množica je taka množica M, ki je sestavljena iz končne množice točk, daljic, konveksnih mnogokotnikov in konveksnih teles, ne nujno iz vseh štirih skupin.

- **Poliedrski razrez** poliedrske množice M je unija točk O, robov R, konveksnih mnogokotnikov P in konveksnih poliedrov T, $U = O \cup R \cup P \cup T$, kjer velja naslednje: če je konveksni polieder v množici T, so v množici P tudi vse njegove ploskve; če je konveksni mnogokotnik v množici P, so v množici robov R vsi robovi te ploskve. Za vsak rob v množici R sta v množici točk O njeni krajišči.



Slika 9: Primer množice M.

Dva robova iz množice R se lahko stikata samo v krajišču. Dve ploskvi se lahko stikata samo vzdolž skupnega roba. Dve telesi se lahko stikata samo vzdolž skupne ploskve. Točka iz množice O je lahko sama ali pa nujno krajišče roba. Rob je lahko sam, lahko se stika z drugim robom v krajišču, lahko pa je rob konveksnega poliedra. Konveksna mnogokotnika se lahko stikata v oglišču iz O ali v skupnem robu iz R. Konveksni mnogokotnik in konveksni polieder se lahko stikata v oglišču iz O, robu iz R ali pa je konveksni mnogokotnik robna ploskev konveksnega poliedra.

Opomba. Mnogokotnik $BVUTE$ obravnavamo kot petkotnik.

EULER IN EULERJEVA POLIEDERSKA FORMULA

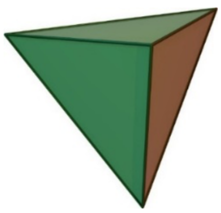
Leonhard Euler, rojen leta 1707, je bil švicarski matematik, fizik, astronom, logik in inženir, eden od očetov čiste matematike. Čista matematika je znanost matematičnih konceptov, ki so neodvisni od česarkoli izven matematike. Velja za enega najpomembnejših matematikov vseh časov. Njegova odkritja sežejo na različna področja matematike, na primer v infinitezimalni račun, teorijo števil in teorijo grafov. Poleg tega je uvedel veliko sodobnih matematičnih pojmov in oznak, še posebej v matematični analizi (na primer pojem funkcije).

Zelo pomembna pa je njegova **Eulerjeva poliedrska formula**. V meni je zbudila zanimanje za raziskovalno nalogo. V šoli sem jo namreč srečala na tekmovanju Matemček, kjer nam je bilo razloženo, da za vse **enostavne poliedre** velja formula:

$$O + P - R = 2,$$

kjer je O število oglišč, P število ploskev in R število robov poliedra. Opisana formula je znana kot **Eulerjev izrek o poliedrih** ali **Eulerjeva poliedrska formula.** To je geometrijski izrek, ki povezuje število oglišč, robov in stranskih ploskev konveksnih poliedrov.

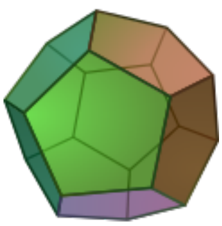
Primer 1: Četverec (tetraeder)



$$O + P - R = 2$$
$$4 + 4 - 6 = 2$$

Slika 10: Četverec (tetraeder).

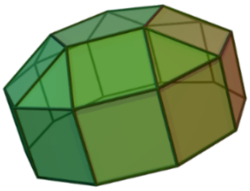
Primer 2: Dvanajsterec (dodekaeder)



$$O + P - R = 2$$
$$20 + 12 - 30 = 2$$

Slika 11: Dvanajsterec (dodekaeder).

Primer 3: Podaljšana petstrana kupola (konveksna enakorobna)

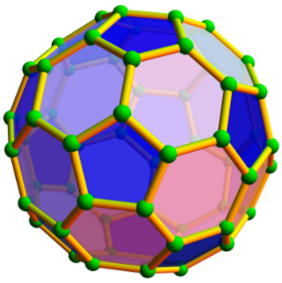


$$O + P - R = 2$$
$$25 + 22 - 45 = 2$$

Slika 12: Podaljšana petstrana kupola.

Dober primer poliedrov so fulereni, o katerih govori Zachery Abel (2012) v svojem spletnem članku »Bucky's dozen«. Fulereni so sintetična kristalna tvorba z grafitu podobno strukturo, toda namesto ploskih šesterokotnih celic so nekatere celice, iz katerih nastajajo fulereni, lahko petkotniki, neravninski šestkotniki ali celo sedemkotniki ogljikovih atomov. Listi se tako zvijejo v krogle, elipse ali valje. Z Eulerjevo formulo lahko dokažemo, da imajo fulereni s petkotniki in šestkotniki vedno 12 petkotnikov.

Mi si bomo ogledali takega, ki je zvit v kroglo, natančneje fuleren s 60 atomi ogljika, ki jih predstavljajo zelena oglišča.



$$O + P - R = 60 + 32 - 90 = 2$$

Slika 13: Fuleren (C 60).

Če fuleren predstavimo samo z atomi in vezmi, je njegova Eulerjeva karakteristika:

$$O - R = 60 - 90 = -30$$

PLATONSKA TELESA

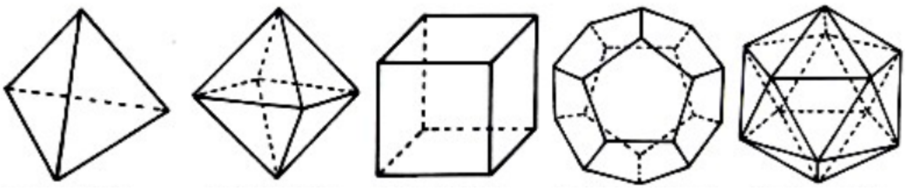
Slika 14: Platonska telesa v povezavi s klasičnimi elementi.

V svojih dialogih je Platon povezal osnovne klasične elemente (zemlja, zrak, voda in ogenj) s pravilnimi telesi (kocka, osmerec, dvajseterec, četverec) na osnovi njihove pravilne oblike. Peto pravilno telo dvanajsterec je Platon povezal z elementom, ki je osnova nebes. Po njem ta telesa imenujemo platonska telesa.

Bog je prestavljen kot popolno bitje, s popolnim geometrijskim telesom. Boga lahko dojame samo um, saj je popoln – kot krogla med telesi.

Če je v krogli mogoče prepoznati bistvo božanskega, potem je to geometrijsko telo merilo tistim telesom, ki so manj popolna. Krogli se najbolj približajo t. i. platonska telesa ali »kozmične figure«.

Poznamo pet platonskih teles, ki so bila znana že starim Grkom: tetraeder (četverec), oktaeder (osmerec) heksaeder (kocka), dodekaeder (dvanajsterec) in ikozaeder (dvajseterec).



Slika 15: Platonska telesa.

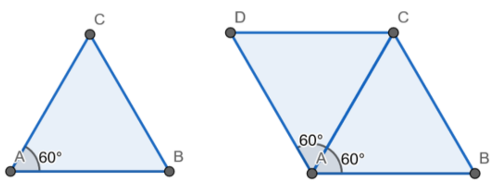
Telesa so omejena z enakimi ploskvami, katerih koti in robovi so med seboj enaki. Na nek način so podobni krogli; če bi bile robne ploskve gibljive, bi telesa lahko »napihnili« do krogle.

Izrek 1. Obstaja natanko pet platonskih teles.

Dokaz. Da res obstaja samo teh pet platonskih teles, dokažemo z Eulerjevo poliedrsko formulo.

1. Prvo vprašanje, ki ga postavimo, je, koliko pravilnih mnogokotnikov se lahko stika v enem oglišču. Razlaga na primeru enakostraničnega trikotnika.

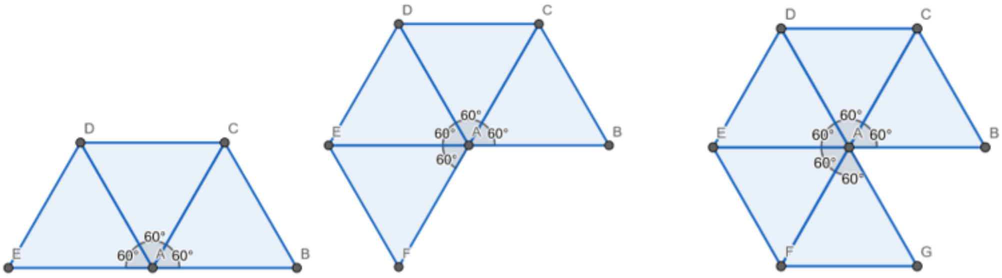
Naj bo l število ploskev, ki se stikajo v enem oglišču. Števili 1 in 2 lahko opustimo, saj če se stakneta dva ali pa stoji en sam, ne moremo narediti izbočene ploskve, kot kaže slika 16.



Slika 16: Različni kombinaciji trikotnikov.

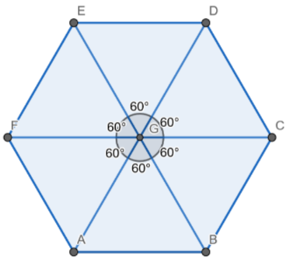
Pri več ploskvah potrebujemo med prvo in zadnjo ploskvijo vrzel (špranjo), ki omogoča nastanek izbočenega lika. Naslednja možna števila po vrsti pa so števila 3, 4 in 5.

a) Najprej si oglejmo trikotnike.



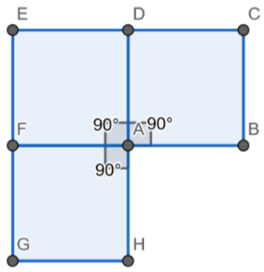
Slika 17: Različne kombinacije trikotnikov.

Pri vseh lahko opazimo, da seštevek kotov v središču ne presega $360°$. To pomeni, da lahko lik prepognemo, ne da nastanejo gube. Ko pridemo do števila šest, vidimo, da se trikotniki sklenejo. Vsota kotov je $360°$ (slika 18). S tem dokažemo, da se lahko v eno oglišče povežejo trije, štirje ali pet trikotnikov.



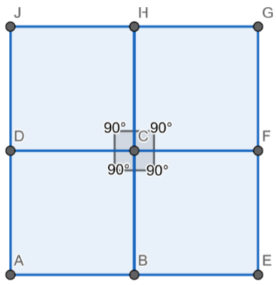
Slika 18: Kombinacija trikotnikov.

b) Ista pravila veljajo tudi za kvadrat. V eno oglišče se ne moreta vezati en ali dva kvadrata, zato pričnemo s številko 3.



Slika 20

Na sliki 19 lahko opazimo vrzel (špranjo), kjer se stikata daljici AB in AH ter sestavita del telesa. Vidimo pa tudi, da je seštevek kotov še vedno manjši od $360°$.



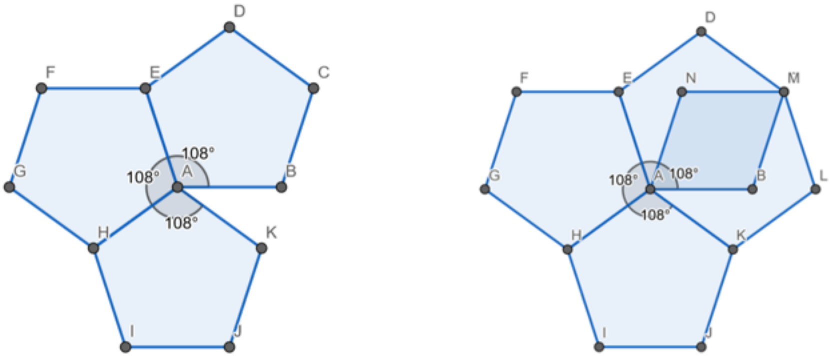
Slika 19

Ko v isto oglišče povežemo 4 kvadrate, pridemo do iste težave kakor s 6 trikotniki. Lik se poveže. Izgubimo špranjo in iz njega ne more več nastati platonsko telo (slika 20).

S tem smo dokazali, da se lahko v eno oglišče povežejo samo trije kvadrati (štirikotniki).

c) Nadaljujmo z naslednjim pravilnim mnogokotnikom, pravilnim petkotnikom.

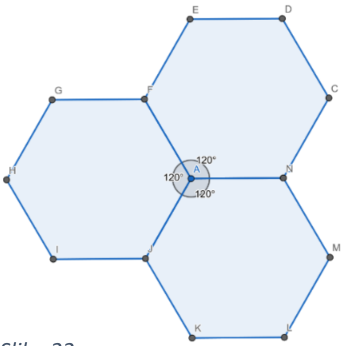
Začnemo s tremi petkotniki. Vidimo, da se vsota bliža 360°, ampak lik lahko še vedno zlepimo skupaj.



Slika 21: Dve različni kombinaciji petkotnikov.

Ko izrišemo primer, kjer se v eno oglišče povežejo štirje petkotniki, lahko takoj opazimo, da zadnji petkotnik prekriva prvega. Ploskev iz tega ne more biti sestavljena. Zato se v enem oglišču lahko povežejo samo trije petkotniki.

d) Po petkotniku preidemo na šestkotnik.

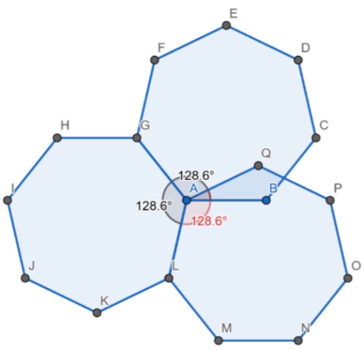


Slika 22

Ko v eno oglišče povežemo tri šestkotnike, dobimo isti rezultat, kot če bi povezali v eno oglišče šest trikotnikov. Vsota kotov doseže 360° in iz lika ne moremo več sestaviti dela platonskega telesa.

S tem dokažemo, da ne obstaja platonsko telo, sestavljeno iz šestkotnikov. Poleg tega dokažemo tudi to, da ne obstaja platonsko telo iz mnogokotnikov z več kot šestimi oglišči.

e) Kot primer vzemimo sedemkotnik. Vemo, da če v eno oglišče povežemo tri šestkotnike, je vsota kotov 360°. Spodnja slika prikazuje povezavo za sedemkotnik.



Slika 23

Vidimo, da se dve ploskvi prekrivata. Vsota kotov presega 360°.

2. Sedaj bomo sestavili enačbo za izračun števila ploskev, ki sestavljajo Platonska telesa. Označimo:

n = število pravilnih k-kotnikov.

l = število k-kotnikov, ki se stikajo v enem oglišču.

Iz zgornjega sledi, da je število oglišč poliedra enako $\frac{k \cdot n}{l}$.

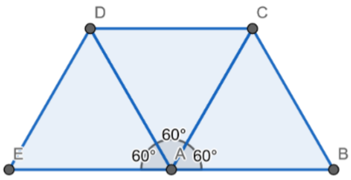
Razlaga formule: če je n število nezlepljenih k-kotnikov, je vseh oglišč $k \cdot n$ in če se zlepi po l oglišč skupaj, jih je pa l-krat manj.

Število robov pri številu n nezlepljenih k-kotnikov je enako $k \cdot n$. Vemo, da se vedno skupaj zlepita dva roba. Skupaj imamo torej $\frac{k \cdot n}{2}$ robov.

Eulerjeva formula nam da naslednjo zvezo $\frac{k \cdot n}{l} + n - \frac{k \cdot n}{2} = 2$.

Preverila bom rešljivost enačbe za vse pare (l, k), kjer je l število ploskev, ki se stikajo v oglišču, in k število oglišč mnogokotnika. Izračunala bom število vseh ploskev n.

a) Trikotniki:

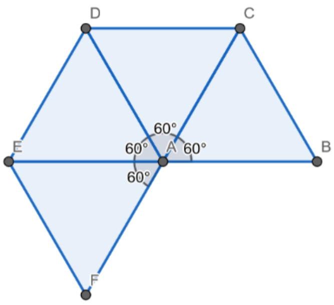


Slika 24: (l, k) = (3,3).

$$\frac{3n}{3} + n - \frac{3n}{2} = 2$$

$$n = 4$$

Iz štirih trikotnikov nastane tetraeder (četverec).

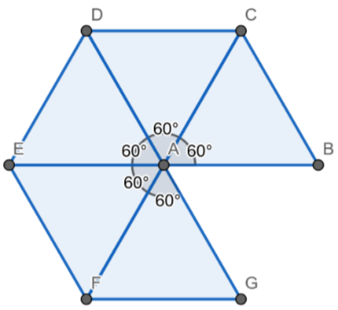


Slika 25: (l, k) = (4,3).

$$\frac{3n}{4} + n - \frac{3n}{2} = 2$$

$$n = 8$$

Iz osmih trikotnikov nastane oktaeder (osmerec).



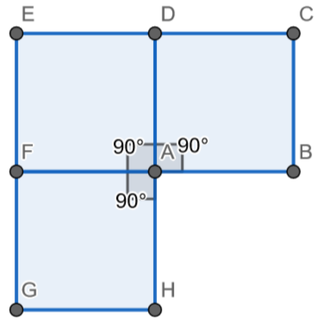
Slika 26: (l, k) = (5,3).

$$\frac{3n}{5} + n - \frac{3n}{2} = 2$$

$$n = 20$$

Iz 20 trikotnikov nastane ikozaeder (dvajseterec).

b) Kvadrati



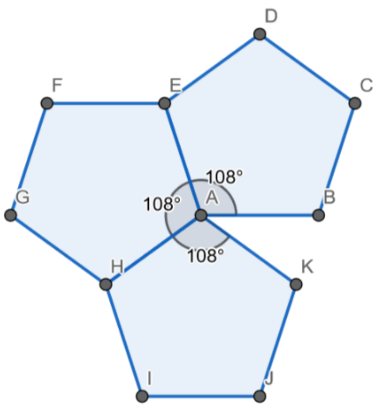
Slika 27: (l, k) = (3,4).

$$\frac{4n}{3} + n - \frac{4n}{2} = 2$$

$$n = 6$$

Iz šestih kvadratov nastane heksaeder (kocka).

c) Petkotniki



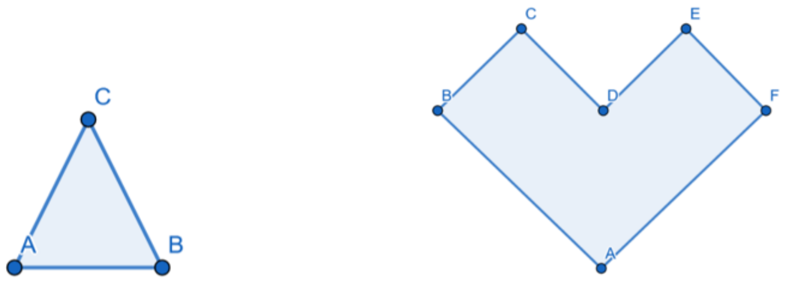
Slika 28: (l, k) = (3,5).

$$\frac{5n}{3} + n - \frac{5n}{2} = 2$$

$$n = 12$$

Iz 12 petkotnikov nastane dodekaeder (dvanajsterec).

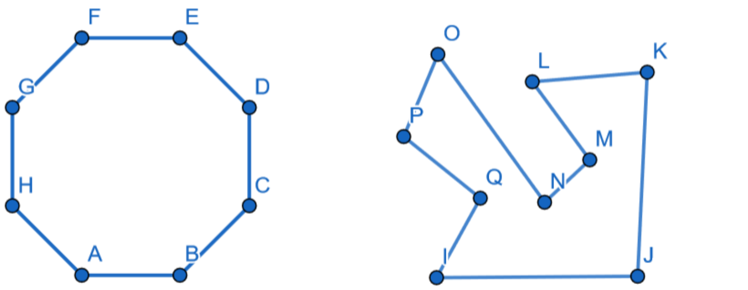
Izrek 1. Za enostavni mnogokotnik M je Eulerjeva karakteristika $\chi(M)$ enaka 1. Eulerjeva karakteristika ni odvisna od poliedrskega razreza množice M.



$3 + 1 - 3 = 1$ $\qquad$ $6 + 1 - 6 = 1$

Slika 29: Dva enostavna mnogokotnika.

Trditev 2. Enostavna sklenjena lomljenka ima Eulerjevo karakteristiko 0, zato ker ima enako število robov in oglišč.



$O + P - R = 8 + 0 - 8 = 0$ $\qquad$ $O + P - R = 9 + 0 - 9 = 0$

Slika 30: Enostavni sklenjeni lomljenki.

Trditev 3. Vsak konveksen mnogokotnik lahko razrežemo na trikotnike tako, da se število točk in Eulerjeva karakteristika ne spremenita.

Dokaz trditve 3. Naj bo M konveksen k-kotnik. Izberemo glavno oglišče in narišemo diagonale, ki se vse stikajo v tem oglišču. Teh diagonal je $k - 3$. Vsakič, ko narišemo diagonalo, razrežemo mnogokotnik na trikotnik in nov mnogokotnik. Zato razrez z eno diagonalo poveča število ploskev za ena. Ko postopek končamo, je število vseh ploskev P enako $1 + D$, kjer je D število diagonal. Število oglišč ostane nespremenjeno in ker je $P - D = 0$, se Eulerjeva karakteristika ne spremeni in je enaka 1.

Primer: Šestkotnik

Slika 31: Levo - šestkotnik, desno - razrezan šestkotnik.

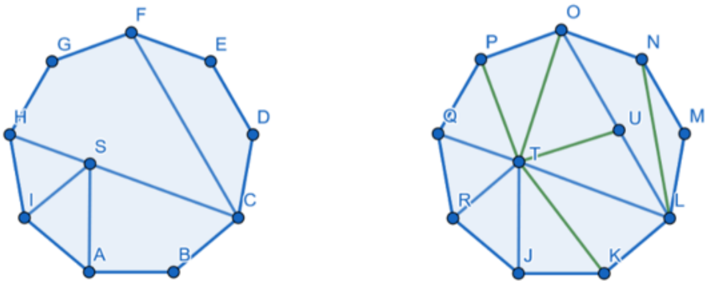
Število točk: 6 Število točk: 6

$O + P - R = 6 + 1 - 6 = 1$ $O + P - R = 6 + 4 - 9 = 1$

Trditev 4. Dan poliedrski razrez enostavnega mnogokotnika lahko dodatno razrežemo na trikotnike tako, da se Eulerjeva karakteristika ne spremeni.

Dokaz trditve 4. Naj bo M že razrezan na konveksne mnogokotnike. Za vsak mnogokotnik uporabimo trditev 3.

Primer:



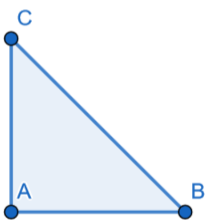
Slika 32: Levo - razrezan mnogokotnik, desno - dodatno razrezan mnogokotnik.

$O + P - R = 10 + 5 - 14 = 1$ $O + P - R = 11 + 10 - 20 = 1$

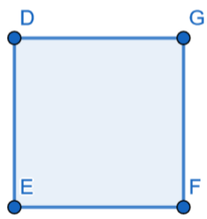
Izrek 6. Če je $M = A \cup B$, potem je $\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

Dokaz izreka 6. Če dva lika združimo, moramo odšteti od enega točke in daljice, po katerih se stikata.

Lik A:

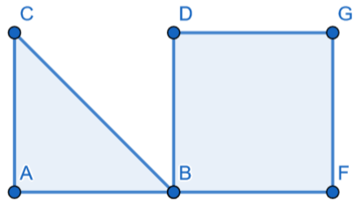


Lik B:



$\chi(A) = O + P - R = 3 + 1 - 3 = 1$ $\chi(B) = O + P - R = 4 + 1 - 4 = 1$

Slika 33: Levo - lik A, desno - lik B.



Slika 34: Lik M.

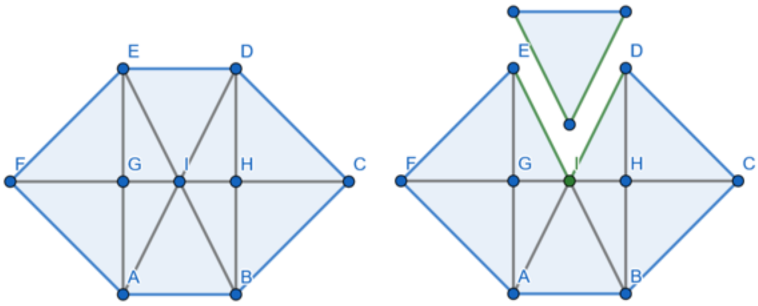
$$\chi(M) = O + P - R = 6 + 2 - 7 = 1$$

$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 1$$

Trditev 7. Če je enostaven mnogokotnik razrezan na vsaj dva trikotnika, potem obstaja rob ali lomljen rob L, ki se začne in konča v zunanjih ogliščih mnogokotnika M, ostale njene daljice in točke pa so v notranjosti M. Ta lomljenka L razdeli M na dva enostavna mnogokotnika $M1\ in\ M2$, torej velja $M = M1 \cup M2$ in $M1 \cap M2 = L$.

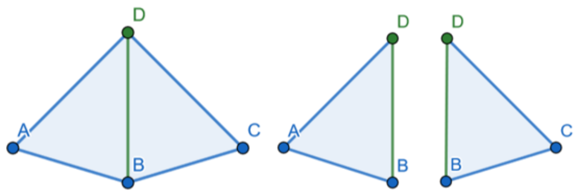
Dokaz trditve 7. Da najdemo L, $M1$ in $M2$, najprej izberimo (zunanjo) stranico mnogokotnika. Ta stranica je stranica enega trikotnika. Vprašamo se, ali je nasprotno oglišče tega trikotnika notranja točka.

- DA: Potem ima ta trikotnik drugi dve stranici in nasprotno oglišče v notranjosti. Ti dve notranji daljici in točka sestavljajo lomljenko L.



Slika 35: Mnogokotnik z notranjo daljico.

- NE: Če to nasprotno oglišče ne obstaja v notranjosti, potem je na robu. Tako so vsa oglišča trikotnika na robu in eno izmed njih je oglišče, iz katerega izhajajo najmanj tri daljice, ker imamo vsaj dva trikotnika. Lik razrežemo po sredinski daljici. Sredinska daljica je L.

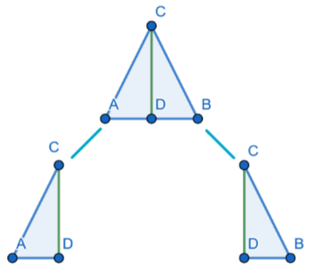


Slika 36: Mnogokotniki, ki nima notranje točke.

Trditev 7.1. Rob ali lomljen rob L ima vedno Eulerjevo karakteristiko, $\chi(L) = 1$.

Dokaz trditve 7.1. Poglavje Daljice na strani 27: ugotovitev 1, slika 49.

Primer razreza trikotnika:



$$\chi(M) = \chi(M1) + \chi(M2) - \chi(L) = \chi(ADC) + \chi(BCD) - \chi(L) =$$
$$1 + 1 - 1 = 1$$

Slika 37: Delitev/razcep trikotnika.

V trditvi 6 smo dokazali, da če skupaj prilepimo dva lika, velja formula:

$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

Podobno velja tudi za trditev 7:

$$\chi(M) = \chi(M1) + \chi(M2) - \chi(L)$$

Dokaz izreka 1. S pomočjo trditve 7, 7.1 in 5 lahko sedaj dokažemo izrek 1. Naj bo M dan enostaven mnogokotnik s poliedrskim razrezom. S trditvijo 5 ga lahko dodatno razrežemo na trikotnike, nato ga lahko po trditvi 7 z enostavno sklenjeno lomljenko L razdelimo na dva enostavna mnogokotnika $M1 - leva$ in $M2 - desna$. Velja formula:

$$\chi(M) = \chi(leva) + \chi(desna) - 1$$

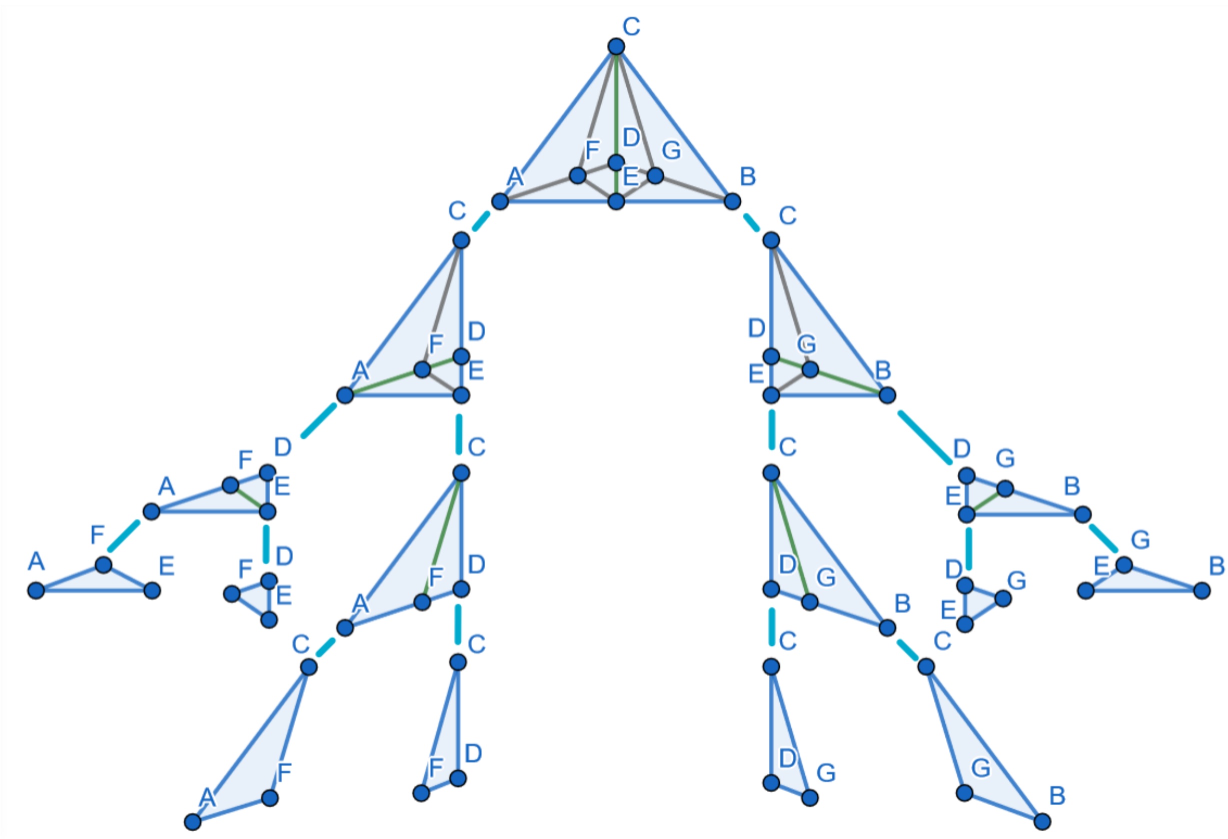
$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\chi(leva) \qquad\qquad \chi(desna)$$

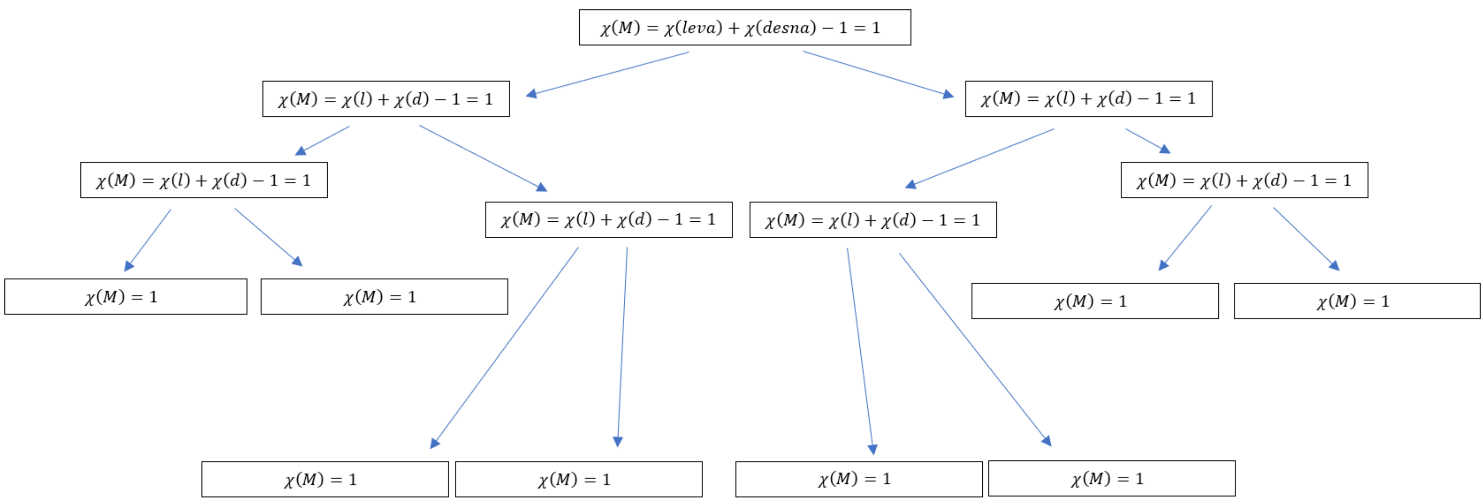
Če je lik razrezan na več kot dva trikotnika, postopek samo nadaljujemo na $M1$ in $M2$, dokler ne ostanejo samo trikotniki. To rezanje predstavimo z drevesom (glej sliko 38). Na sliki 39 je z drevesom prikazan isti razrez, samo da je zapisan s formulami.

Drevo beremo oz. formule računamo od dna proti vrhu. Listi so trikotniki, ki imajo Eulerjevo karakteristiko 1. Z vstavljanjem v prejšnje formule ugotovimo, da imajo končen lik in vsi vmesni Eulerjevo karakteristiko 1.

Postopek bomo razložili na danem primeru:



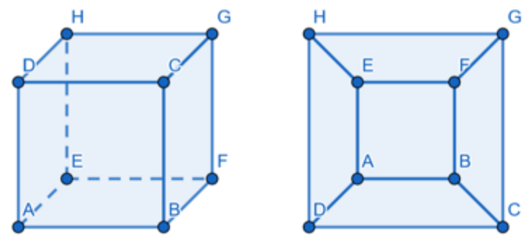
Slika 38: Delitev/razcep trikotnika.



Slika 39: Izračun Eulerjeve karakteristike.

Izrek 8 (Eulerjeva poliedrska formula). Za konveksni polieder velja $P + O - R\ = 2$.

Dokaz izreka 8. Naj bo Eulerjeva karakteristika enaka n. Če od površine konveksnega poliedra odstranimo en mnogokotnik, ki ima k oglišč in je njegova stranska ploskev, se Eulerjeva karakteristika zmanjša za 1. Če ta lik »razgrnemo« na ravnino, ne da ga pretrgamo, dobimo mrežo lika brez ene ploskve, ki predstavlja poliedrski razrez k kotnika, zato vemo, da ima Eulerjevo karakteristiko 1. Če mu dodamo še eno ploskev, bo imel polieder zaradi tega Eulerjevo karakteristiko 2.



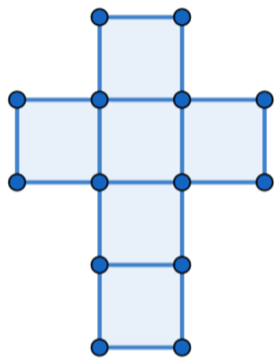
$$\chi(levo) = O + P - R = 8 + 13 - 12 = 1$$

$$\chi(desno) = \chi(levo) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Slika 40: Levo - površina mnogokotnika brez ene ploskve, desno - poliedrski razrez k-kotnika.

Drugi dokaz izreka 8.

Mreža nekega poliedra je enostaven mnogokotnik s poliedrskim razrezom. Njegova Eulerjeva karakteristika je 1. Zakaj je potem Eulerjeva karakteristika poliedra enaka 2? Za razlago bom uporabila mrežo kocke (glej sliko 41). Ta postopek velja za vse poliedrske mreže. Vrstni red lepljenja je naslednji.

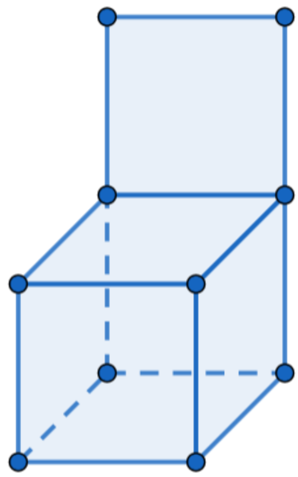


Slika 41: Mreža kocke. Število robov: 20, število oglišč: 14, število ploskev: 6.

1. Najprej mrežo zlepimo po robovih, ki imajo eno skupno oglišče. Ko to naredimo, zlepimo skupaj dva roba in dve oglišči, zato imamo eno oglišče in en rob manj. Eulerjeva karakteristika se ne spremeni.

2. To ponavljamo, dokler je možno.

3. Tako skupaj zlepimo vsa oglišča. Ostaneta le še dva nezlepljena robova, ki se stikata v obeh ogliščih. Ko ju zlepimo, se število robov zmanjša za ena, zato se Eulerjeva karakteristika zveča za ena, torej je Eulerjeva karakteristika enaka 2.



Slika 42: Mreža kocke v postopku lepljenja. Število robov: 15, število oglišč: 10, število ploskev: 6.

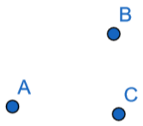
V primeru kocke: $O + P - R = 8 + 6 - 12 = 2$

PRIMERI EULERJEVE KARAKTERISTIKE

1. Točke

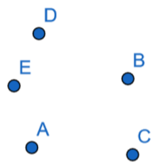
$$O + P - R = 1 + 0 - 0 = 1$$

Slika 43: Točka A.



$$O + P - R = 3 + 0 - 0 = 3$$

Slika 44: Točke A, B in C.



$$O + P - R = 5 + 0 - 0 = 5$$

Slika 45: Točke A, B, C, D in E.

Ugotovitev: Eulerjeva karakteristika množice M je odvisna od števila točk, ki jo sestavljajo. Če imamo 1 točko, je karakteristika 1, pri dveh točkah je karakteristika 2 itd.

2. Daljice

$$O + P - R = 2 + 0 - 1 = 1$$

Slika 46: Daljica AB.

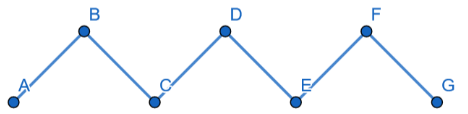
$$O + P - R = 3 + 0 - 2 = 1$$

Slika 47: Deljena daljica AC.

$$O + P - R = 5 + 0 - 4 = 1$$

Slika 48: Deljena daljica AE.

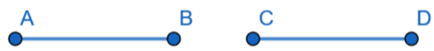
Ugotovitev 1: Eulerjeva karakteristika za daljico M je enaka 1 in ni odvisna od delitve daljice. Enako velja za lomljeno daljico.



$$O + P - R = 7 + 0 - 6 = 1$$

Slika 49: Lomljena daljica.

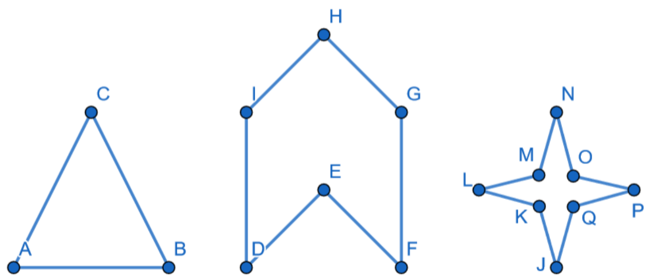
Dve daljici, ki se ne stikata, sta množica M. Vemo, da je Eulerjeva karakteristika za eno daljico enaka 1, torej, če imamo dve, je $\chi(M) = 2$.



$$O + P - R = 4 + 0 - 2 = 2$$

Slika 50: Daljici AB in CD.

Kaj se zgodi, ko več daljic povežemo v enostavno sklenjeno lomljenko?



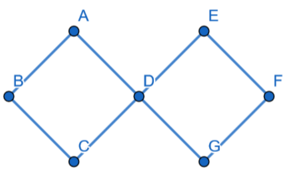
Slika 51: Enostavne sklenjene lomljenke.

$3 + 0 - 3 = 0$ $\qquad$ $6 + 0 - 6 = 0$ $\qquad$ $8 + 0 - 8 = 0$

Ugotovitev 2: Eulerjeva karakteristika je v vsakem primeru 0. Število oglišč in robov se vedno izenači.

Kaj se zgodi, če med seboj povežemo dve enostavni sklenjeni lomljenki?

Vemo, da jih lahko povežemo v enem oglišču ali vzdolž roba.

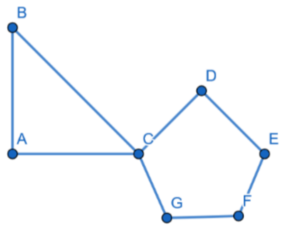


$$O + P - R = 7 + 0 - 8 = -1$$

Slika 52: V oglišču povezani enostavni sklenjeni lomljenki.

Ugotovitev 3: Ko v enem oglišču prilepimo skupaj dve enostavni sklenjeni lomljenki A in B, si to oglišče delita, oglišče je torej $A \cap B$. Število oglišč je tako za 1 manjše od števila robov. Recimo, da je število robov enako n, število oglišč pa m. Iz tega lahko sestavimo formulo: $n - 1 = m$, zato je $\chi(M) = (n-1) - n = -1$. Isto lahko izračunamo po formuli iz izreka 6: $\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 0 + 0 - 1 = -1$.

Primer:



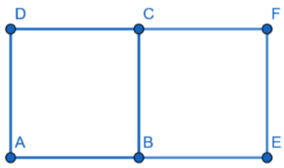
Št. robov = 8

Št. oglišč = $n - 1 = 8 - 1 = 7$

$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 0 + 0 - 1 = -1$

Slika 53: V oglišču povezani enostavni sklenjeni lomljenki.

Poglejmo, kaj se zgodi, ko enostavni sklenjeni lomljenki povežemo preko roba.



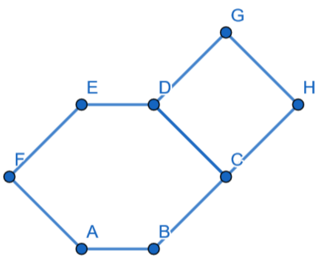
$O + P - R = 6 + 0 - 7 = -1$

Slika 54: Preko roba povezani enostavni sklenjeni lomljenki.

Ugotovitev 4: Ko po enem robu prilepimo skupaj dve enostavni sklenjeni lomljenki A in B, si delita dve oglišči in en rob; oglišči in rob sta torej $A \cap B$. Število oglišč je tako za 1 manjše od števila robov. Recimo, da je število robov enako n, število oglišč pa m.

Iz tega lahko sestavimo formulo: $n - 1 = m$, zato je $\chi(M) = (n-1) - n = -1$. Isto lahko izračunamo po formuli iz izreka 6: $\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 0 + 0 - 1 = -1$.

Primer:



Št. robov: 9.

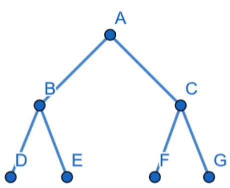
Št. oglišč : $n - 1 = 9 - 1 = 8$.

$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 0 + 0 - 1 = -1$

Slika 55: Preko roba povezani enostavni sklenjeni lomljenki.

3. Drevo

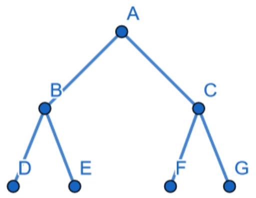
Drevo je v matematiki (teoriji grafov) graf, v katerem sta dve poljubni točki povezani s točno eno lomljeno daljico. Po enakovredni opredelitvi je drevo vsak povezan graf brez ciklov. Gozd je nepovezana unija dreves.



Slika 56: Dvojiško drevo.

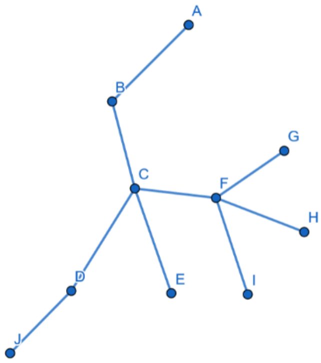
Njegova Eulerjeva karakteristika je vedno 1.

Primer 1 :



$$O + P - R = 7 + 0 - 6 = 1$$

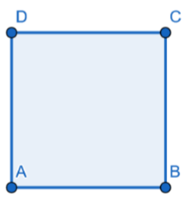
Slika 57: Dvojiško drevo.



$$0 + P - R = 10 + 0 - 9 = 1$$

Slika 58: Drevo.

4. Ploskve v ravnini

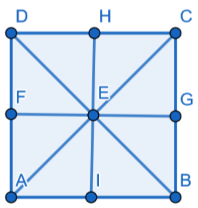


$$O + P - R = 4 + 1 - 4 = 1$$

Slika 59: Kvadrat.

Ugotovitev 1: Eulerjeva karakteristika je enaka 1. Vemo, da ima enostavna sklenjena lomljenka Eulerjevo karakteristiko 0, torej - če ji dodamo eno ploskev, Eulerjevo karakteristiko povečamo za ena.

Vemo tudi, da Eulerjeva karakteristika ni odvisna od razreza enostavnega mnogokotnika.

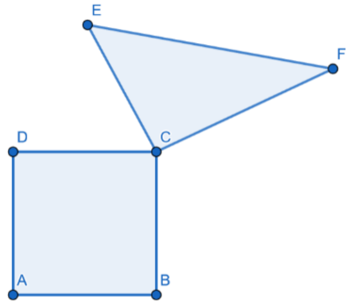


$$O + P - R = 9 + 8 - 16 = 1$$

Slika 60: Kvadrat s poliedrskih razrezom.

Kaj se zgodi, če mnogokotnike povežemo med sabo?

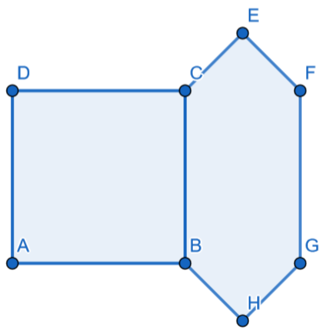
Povežemo jih lahko v enem oglišču ali preko enega roba.



$$O + P - R = 6 + 2 - 7 = 1$$

Slika 61: Dva mnogokotnika, povezana v oglišču.

Ugotovitev 2: Ko v enem oglišču prilepimo skupaj dva enostavna mnogokotnika A in B, si to oglišče delita, oglišče je torej $A \cap B$. Število oglišč je tako za 1 manjše od števila robov. Isto lahko izračunamo po formuli iz izreka 6: $\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 1$.



$$O + P - R = 8 + 2 - 9 = 1$$

Slika 62: Dva mnogokotnika, povezana preko skupnega roba.

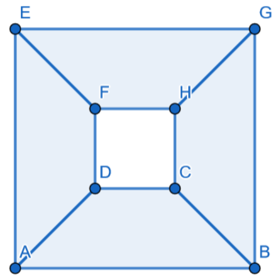
Ugotovitev 3: Ko vzdolž roba prilepimo skupaj dva enostavna mnogokotnika A in B, si ta rob delita; rob je torej $A \cap B$. Število oglišč je tako za 1 manjše od števila robov. Isto lahko izračunamo po formuli iz izreka 6: $\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Kaj se zgodi, ko v enostaven mnogokotnik vrežemo luknjo?

Lik, ki nastane, ni konveksen, zato ga moramo dodatno razrezati. Vemo, da se z razrezom Eulerjeva karakteristika ne spremeni. Enako velja tudi za like z luknjami. To dokažemo tako, da v luknje dodamo ploskve in tako postane Eulerjeva karakteristika enaka 1. Razrezi so lahko različni, a sama sem izbrala najbolj preprostega.

Eulerjeva karakteristika prvotnega nerazrezanega lika: $O + P - R = 8 + 1 - 8 = 1$

Razrezan lik:

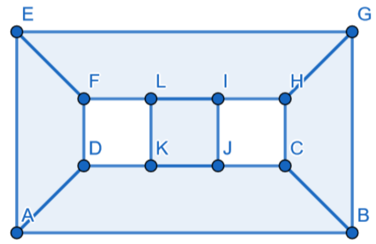


$$O + P - R = 8 + 4 - 12 = 0$$

Slika 63: Pravilno razrezan lik z luknjo.

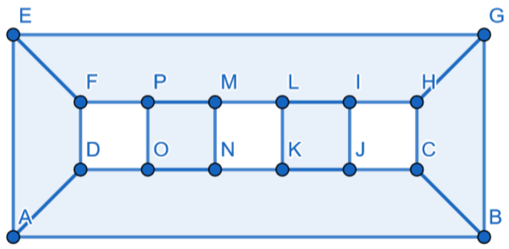
Število ploskev se poveča za tri, število robov pa za štiri. Imamo en rob več kot oglišč in ta rob zmanjša Eulerjevo karakteristiko za ena. Tako dobimo 0.

Kaj pa se zgodi, če vrežemo več lukenj?



$$O + P - R = 12 + 5 - 18 = -1$$

Slika 64: Pravilno razrezan lik z dvema luknjama.

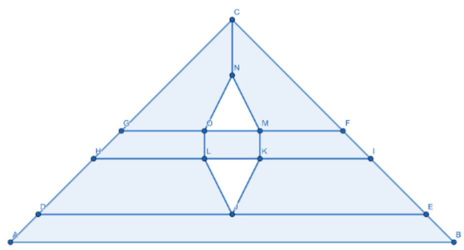


$$O + P - R = 16 + 6 - 24 = -2$$

Slika 65: Pravilno razrezan lik s tremi luknjami.

Ugotovitev 4: Eulerjeva karakteristika je odvisna od števila lukenj v liku. Če bi liku M, ki ima luknje, dodali ploskve, ki jih pogreša, bi dobili razrezan enostaven mnogokotnik, za katerega vemo, da ima Eulerjevo karakteristiko 1. Poimenujmo ga F. Vidimo, da se Eulerjeva karakteristika zmanjša za število lukenj. Iz tega lahko sestavimo formulo: $\chi(M) = \chi(F) - št.\ lukenj$, ki velja za vse enostavne mnogokotnike, ki so pravilno razrezani, in z luknjami, ki so enostavni mnogokotniki.

Primer:



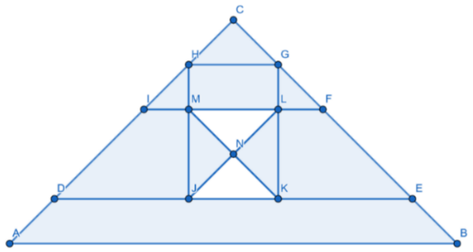
$$O + P - R = 14 + 7 - 22 = -1$$

$$\chi(M) = \chi(F) - št. lukenj = 1 - 2 = -1$$

Slika 66: Pravilno razrezan lik z dvema luknjama.

V tem primeru na sliki 66 (stran 31) se trikotnika ne stikata. Kaj se zgodi, ko se stikata v oglišču ali v skupnem robu?

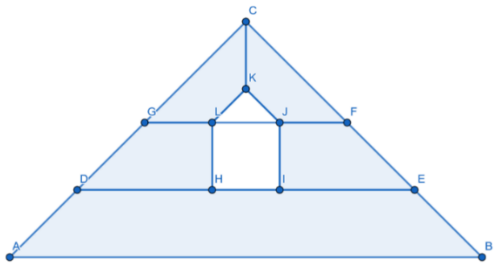
- V oglišču



$\chi(M) = O + P - R = 14 + 9 - 24 = -1$

Slika 67: Pravilno razrezan lik z dvema luknjama, ki se stikata v oglišču.

- V skupnem robu

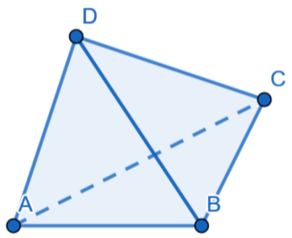


$\chi(M) = O + P - R = 11 + 5 - 17 = -1$

Slika 68: Pravilno razrezan lik z dvema luknjama, ki se stikata preko skupnega roba.

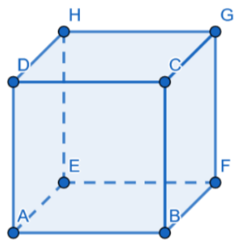
6. Ploskve v prostoru

V tem poglavju se bomo v glavnem ukvarjali z votlimi poliedri oz. s površinami poliedrov.



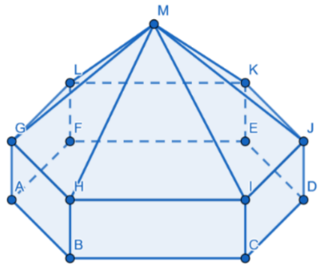
$\chi(M) = O + P - R = 4 + 3 - 6 = 2$

Slika 69: Piramida.



$\chi(M) = O + P - R = 8 + 6 - 12 = 2$

Slika 70: Kocka.



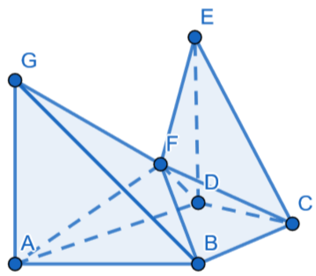
$$\chi(M) = 0 + P - R = 13 + 13 - 24 = 2$$

Slika 71: Konveksen polieder.

Ugotovitev 1: Eulerjeva karakteristika za poliedre je enaka 2.

V poglavju Euler in Eulerjeva poliedrska formula smo dokazali, da imajo vsi konveksni poliedri $\chi(M) = 2$. To velja tudi za konkavne enostavne poliedre. Slednjih ne bom obravnavala.

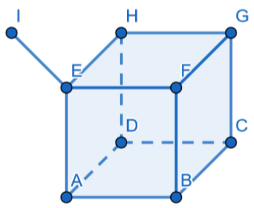
Primer:



$$\chi(M) = O + P - R = 7 + 9 - 14 = 2$$

Slika 72: Konkaven polieder.

POVRŠINA POLIEDRA + DALJICA

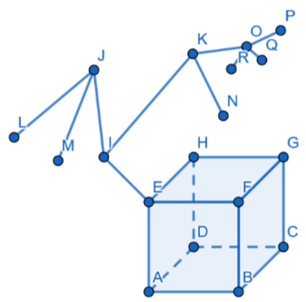


$$O + P - R = 9 + 6 - 13 = 2$$

Slika 73: Površina poliedra + daljica.

Ugotovitev 2: Objekt A naj bo rob, lik B pa kocka. Če ju zlepimo skupaj, si delita oglišče E. Velja formula $\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$. Kot smo že prej pokazali pri drevesu, Eulerjeva karakteristika ni odvisna od razvejanosti drevesa.

Primer:



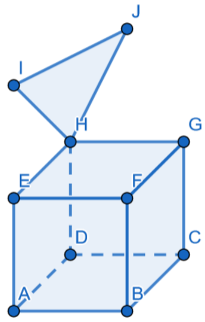
$$O + P - R = 18 + 6 - 22 = 2$$

$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 1 + 2 - 1 = 2$$

Slika 74: Površina poliedra + razvejana daljica.

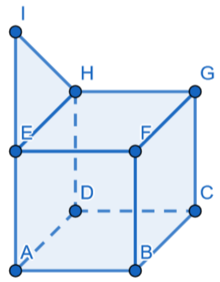
POVRŠINA POLIEDRA + MNOGOKOTNIK (PLOSKEV)

Lahko jih združimo v skupnem oglišču ali skupni daljici.



$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 1 + 2 - 1 = 2$$

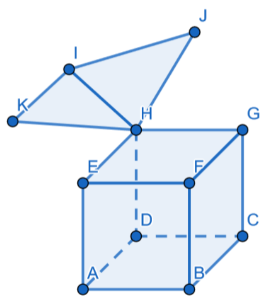
Slika 75: Površina poliedra in mnogokotnik, ki se stikata v oglišču.



$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 1 + 2 - 1 = 2$$

Slika 76: Površina poliedra in mnogokotnik, ki se stikata preko skupnega roba.

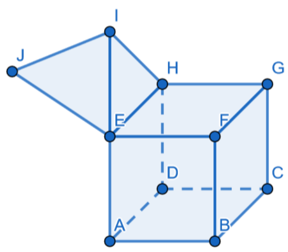
Ugotovitev 3: Eulerjeva karakteristika ni odvisna od v oglišču ali preko daljice prilepljenega mnogokotnika. Kaj se zgodi, če na prilepljen mnogokotnik dodamo še enega?



Mnogokotnik A: $HJIK$ Polieder B: kocka

$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 1 + 2 - 1 = 2$$

Slika 77: Površina poliedra in razrezan mnogokotnik, ki se stikata v oglišču.



Mnogokotnik A: $HIJE$ Polieder B: kocka

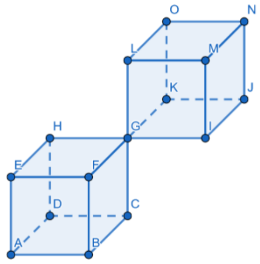
$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 1 + 2 - 1 = 2$$

Slika 78: Površina poliedra in razrezan mnogokotnik, ki se stikata preko skupnega roba.

Ugotovitev 4: Novi lik, ki nastane, je mnogokotnik s poliedrskim razrezom, zato vemo, da ima Eulerjevo karakteristiko enako 1. Potem ko notranjo daljico odstranimo, dobimo le mnogokotnik, ki je prilepljen na kocko. Za tega pa smo Eulerjevo karakteristiko že izračunali.

POVRŠINA POLIEDRA + POVRŠINA POLIEDRA

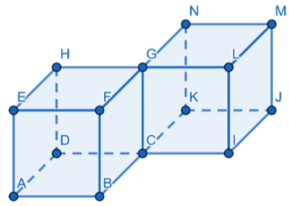
Dve površini poliedra se lahko povežeta preko oglišča, daljice in ploskve.



$O + P - R = 15 + 12 - 24 = 3$

$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 2 + 2 - 1 = 3$

Slika 79: Dve površini poliedra, ki se stikata v oglišču.



$O + P - R = 14 + 12 - 23 = 3$

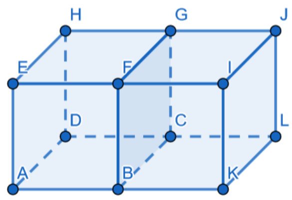
$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 2 + 2 - 1 = 3$

Slika 80: Dve površini poliedra, ki se stikata preko skupnega roba.

Ugotovitev 5: Eulerjeva karakteristika je enaka 3, če dve površini poliedra zlepimo preko oglišča ali roba.

Dve površini poliedra lahko povežemo tudi preko skupne ploskve. Nastane enostaven polieder s poliedrskim razrezom.

Ko se ploskvi dveh poliedrov zlepita skupaj, dobimo eno ploskev manj. Vemo, da je Eulerjeva karakteristika enega mnogokotnika enaka 1, torej če imamo dva, je $\chi(A \cap B) = 1$.



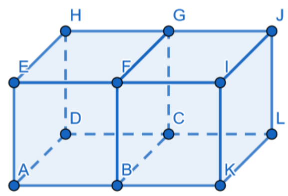
$O + P - R = 12 + 11 - 20 = 3$

$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 2 + 2 - 1 = 3$

Slika 81: Dve zlepljeni »škatli«.

Če bi na desno nalepili še eno tako kocko, bi se Eulerjeva karakteristika povečala še za ena. Eulerjeva karakteristika je enaka $1 + št.\ votlinic$.

Ko v prejšnjem primeru izbrišemo vmesno ploskev, nastane enotna ploskev, ki ima poliedrski razrez. Eulerjeva karakteristika je tako za ena manjša.



$O + P - R = 12 + 10 - 20 = 2$

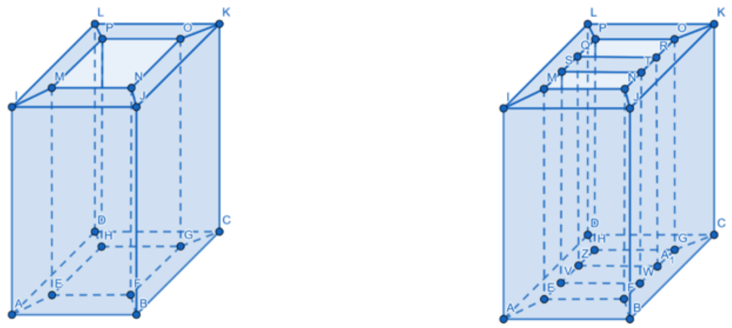
$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 1 + 1 - 0 = 2$

Slika 82: Dve zlepljeni »škatli brez pokrova«.

Poliedrski množici A in B sta tako kot škatli brez pokrova, ki ju zlepimo preko enostavne sklenjene lomljenke $BCGF$.

Kaj se zgodi, ko v polieder zarežemo eno ali več lukenj?

Sedaj bomo obravnavali površine poliedrov, ki jih dobimo tako, da v enostavne poliedre zarežemo luknje. Moramo biti pozorni na to, da gre luknja od ene do druge ploskve, ker sicer lahko nastane samo enostaven polieder in se Eulerjeva karakteristika ne spremeni. Pozorni moramo biti tudi na to, da imajo vse ploskve pravilen poliedrski razrez.



Slika 83: Leva: površina poliedra z luknja, desna: površina poliedra z dvema luknjama.

$$O + P - R = 16 + 16 - 32 = 0 \qquad O + P - R = 24 + 22 - 48 = -2$$

Ugotovitev 6: Eulerjeva karakteristika se od 2 zmanjša za dvakratno število lukenj. Recimo, da je F ploskev, ki jo dobimo tako, da odstranimo pokončne tulce (npr. $EFGH + MNOP$) in zalepimo luknje. Dobimo površino kvadra, ki ima na nekaterih ploskvah poliedrski razrez. Ta ploskev ima Eulerjevo karakteristiko, ki je še vedno enaka 2.

Kako odstranimo tulce?

Tulci imajo Eulerjevo karakteristiko enako 0 (slika 63). Zalepljeni so vzdolž dveh enostavnih sklenjenih lomljenk, ki imata Eulerjevo karakteristiko tudi enako 0, zato se ta ne spremeni, če tulec odstranimo. Ostanejo le še luknje na ploskvah telesa. Od vsakega tulca ostaneta dve.

Tako lahko sestavimo formulo:

$$\chi(M) = \chi(F) - 2 \cdot št.lukenj = 2 - 2 \cdot št.lukenj$$

7. Telesa

Eulerjeva karakteristika za poliedrske množice, ki vsebujejo tudi telesa, se glasi:

$$\chi_T(M) = Oglišča - Robovi + Ploskve - Telesa.$$

Tudi ta karakteristika je neodvisna od poliedrskega razreza (čeprav tega ne bomo dokazali). Za konveksne poliedre M dobimo s pomočjo Eulerjeve poliedrske formule $\chi(M) = 2$, zato je

$$\chi_T(M) = O - R + P - T = \chi(M) - T = 2 - 1 = 1.$$

To velja, ker konveksen polieder predstavlja poliedrski razrez z enim samim telesom. Če v vseh primerih, ki so upodobljeni na slikah od 69 do 78 in 82, upoštevamo še telo, se Eulerjeva karakteristika zmanjša za ena, saj imamo v možici teles samo en konveksen polieder: $\chi_T(M) = \chi(M) - 1 = 1$. Eulerjeva karakteristika je tako enaka 1.

V primerih 79, 80 in 81 imamo v množici teles dva konveksna poliedra. Eulerjeva poliedrska formula je v teh primerih enaka 3, tako da če upoštevamo še telesa, je na koncu enaka 1:

$$\chi_T(M) = \chi(M) - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Tudi pri telesih velja formula:

$$\chi_T(M) = \chi_T(A) + \chi_T(B) - \chi_T(A \cap B).$$

Na sliki 83 je prikazan polieder z luknjo, ki je sestavljen iz štirih štiristranih prizem. To je eno telo s poliedrskim razrezom. Njegova Eulerjeva karakteristika je 0.

To dokažemo na dva načina:

1. Posamezna prizma ima $\chi_T(M) = 1$. Če skupaj zlepimo dve prizmi, se ti ploskvi, preko katerih smo jih prilepili, združita v eno. Rezultat lepljenja predstavlja poliedrski razrez telesa. Eulerjeva karakteristika novega telesa je 1.

$$\chi_T(M) = \chi_T(A) + \chi_T(B) - \chi_T(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 1$$

To lahko še enkrat ponovimo, tako da dobimo telo v obliki črke U, sestavljeno iz treh prizem, ki ima še vedno isto Eulerjeva karakteristiko: $\chi_T(M) = 1$.

Ko mu dodamo še poslednjo prizmo, moramo biti pozorni, da se telesi združita po dveh ploskvah in ne po eni.

$$\chi_T(M) = \chi_T(A) + \chi_T(B) - \chi_T(A \cap B) = 1 + 1 - 2 = 0$$

2. Ko smo računali Eulerjevo karakteristiko (slika 83), smo gledali njegove zunanje ploskve, ki dajo rezultat 0. Če bi torej hoteli uporabiti formulo $\chi_T(M) = \chi(M) - št.teles$, moramo telo, ki ni konveksno, poliedrsko razrezati.

S tem nastanejo štiri ploskve v notranjosti, ki jih moramo prišteti k $\chi(M)$, in štiri telesa, ki so konveksna. Eulerjeva karakteristika tega telesa je tako tudi enaka 0.

$$\chi_T(M) = \chi(M) - št.\ teles = 4 - 4 = 0$$

Telo z dvema luknjama je videti zelo podobo tistemu z eno (sliki 83 in 84). Je enako, kot da bi v luknjo tistega, ki ima eno luknjo, dodali kvader pravilne velikosti. Ta kvader bi luknjo razdelil na dve.

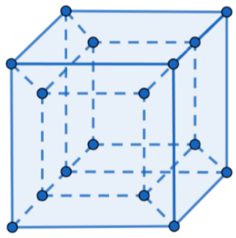
Telo z eno luknjo (A) in kvader (B) se stikata preko dveh ploskev. Dve notranji nasprotni ploskvi telesa A moramo poliedrsko razrezati, a vemo, da Eulerjeva karakteristika ni odvisna od razreza. To naredimo zato, da sta ploskvi, ki se stikata, popolnoma skladni, saj nam to olajša delo. Eulerjeva karakteristika telesa z dvema luknjama pa je:

$$\chi_T(M) = \chi_T(A) + \chi_T(B) - \chi_T(A \cap B) = 0 + 1 - 2 = -1.$$

Ugotovimo, da je Eulerjeva karakteristika ($\chi_T(M)$) odvisna od števila lukenj, saj moramo dodati novo telo, ki luknjo deli. Vidimo, da se zmanjša za število lukenj:

$$\chi_T(M) = 1 - št.\ lukenj$$

Kot zadnji primer vzemimo telo (npr. kocko), ki ima luknjo v notranjosti oz. je votla. Za lažjo predstavo si zamislite mrežo kocke, samo da so njene ploskve odebeljene. Telo poimenujmo A.



Slika 84: Votla kocka.

Kaj se zgodi, ko hočemo notranjost kocke zapolniti tako, da kocka ne bo votla?

Eulerjevo karakteristiko votle kocke lahko izračunamo po 1. ali 2. postopku, ki sta razložena zgoraj. Ugotovimo, da je Eulerjeva karakteristika telesa enaka 2.

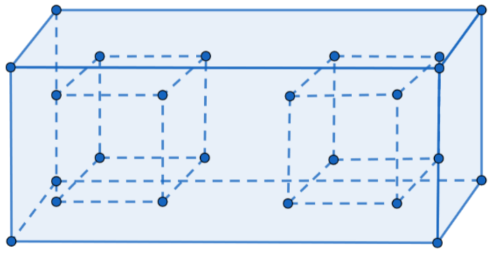
Telo, ki ga bomo dodali, bo manjša kocka primerne velikosti, ki bo zapolnila notranjost. Poimenujmo jo B. Njena Eulerjeva karakteristika je enaka 1, Eulerjeva karakteristika polne kocke pa je tudi enaka 1. Zapišemo $M = A \cup B$. Tako dobimo kocko s poliedrskim razrezom telesa.

Votla kocka A in manjša dodana kocka B se bosta stikali preko zunanjih ploskev. Ploskve, po katerih se bosta zlepili, sestavljajo zunanji oklep kocke, za katerega vemo, da ima Eulerjevo karakteristiko 2.

Izračun s formulo:

$\chi_T(M) = \chi_T(A) + \chi_T(B) - \chi_T(A \cap B) = \chi_T(A) + 1 - 2 = 1$, torej je $\chi_T(A) = 2$.

Če je A kocka z dvema takima votlinicama, bi dobili polno kocko z Eulerjevo karakteristiko 1, če bi ju zapolnili s kockama $B1$ in $B2$.



Slika 85: Kvader z dvema votlinicama.

Telesu, ki je narisano, manjka poliedrski razrez. Nisem ga narisala, ker bo izračun temeljil na formuli iz izreka 6.

$$\chi_T(M) = \chi_T(A) + \big(\chi_T(B1) - \chi_T(A \cap B1)\big) + \big(\chi_T(B2) - \chi_T(A \cap B2)\big).$$

V izrazu lahko vidimo, da z vsako votlinico dobimo enake vrste izraz, npr. za prvo votlinico

$$\chi_T(B1) - \chi_T(A \cap B1) = 1 - 2 = -1.$$

Ker imamo dve votlinici, je

$$\chi_T(A) + 2(-1) = 1, \text{ torej je } \chi_T(A) = 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

Dobimo splošno formulo:

$$\chi_T(A) = 1 + \text{št}.\,votlinic.$$

REZULTATI Z RAZPRAVO

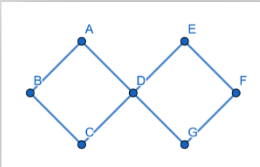
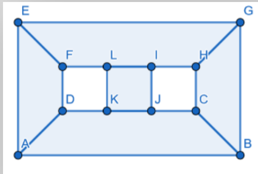
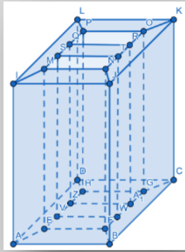
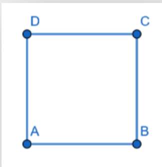
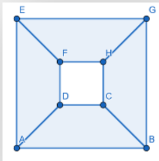
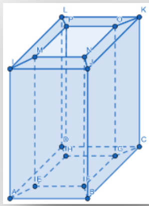
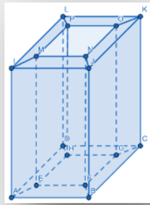
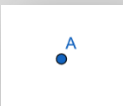
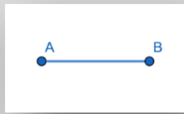
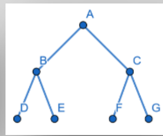
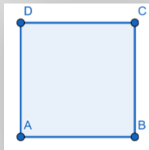
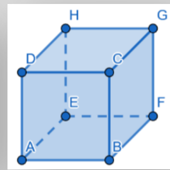
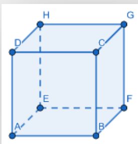
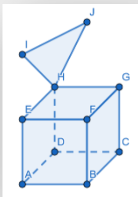
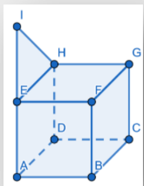
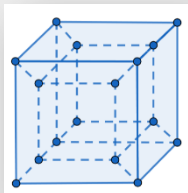
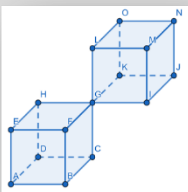
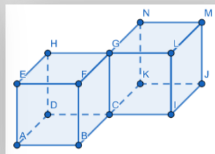
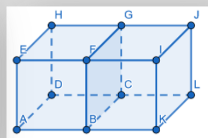
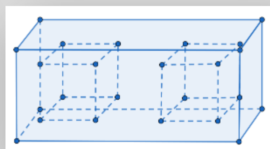
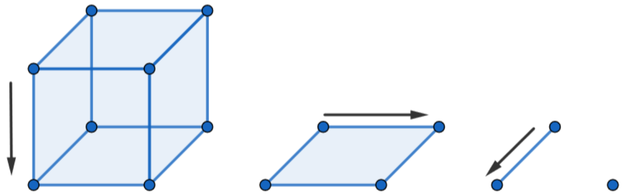
EULERJEVA KARAKTERISTIKA $O - R + P - T$	
-1	   Kot telo.
0	   Kot ploskev.  Kot telo.
1	     Telo kocka.
2	    Votla kocka.
3	   Dve zlepljeni »škatli«.  Kvader z dvema votlinicama.

Tabela 1

Ko pogledamo zgornjo tabelo, lahko opazimo, da imajo vsi objekti v isti skupini določene podobnosti.

Najprej si poglejmo vrstico, ki ima Eulerjevo karakteristiko 1. V njej so točka, daljica, enostavni mnogokotnik (ploskev), telo in drevo. Ti objekti so si podobni v tem, da jih lahko skrčimo (oz. deformiramo, ne da bi jih pretrgali) v točko ali pa točko razširimo v omenjene objekte.

Za primer vzemimo telo. Natančneje kocko. Če kocko dovolj stisnemo, se bo preoblikovala v ploskev. Lahko rečemo, da smo ji odvzeli višino. Če tej novi ploskvi odvzamemo širino, se bo preoblikovala v daljico. Če skupaj približamo obe točki, ki omejujeta daljico, se bosta združili v eno. Odvzamemo ji dolžino. Ta postopek velja tudi za enostavne mnogokotnike.



Slika 86: Krčenje telesa.

Kaj pa se zgodi z drevesom?

Vemo, da Eulerjeva karakteristika ni odvisna od razvejanosti drevesa. Torej ga lahko skrčimo tako, da krčimo daljice, kot sem opisala zgoraj, in nam na koncu ostane samo ena točka.

V tabeli za Eulerjevo karakteristiko 0 velja isti postopek. Mnogokotnik z luknjo in kocko z luknjo (kot telo) lahko s stiskanjem preoblikujemo v enostavno sklenjeno lomljenko oziroma lahko lomljenko odebelimo v mnogokotnik z luknjo in kocko z luknjo. Paziti moramo, da objekte deformiramo tako, da jih krčimo ali raztezamo, ne smemo pa jih lepiti ali pretrgati. Vemo, da z lepljenjem in trganjem spremenimo Eulerjevo karakteristiko.

Pri objektih z Eulerjevo karakteristiko 2 lahko vidimo, da gledamo samo zunanje ploskve, razen pri primeru z votlo kocko. Lahko rečemo, da votla kocka nastane, ko odebelimo površino kocke. Torej lahko telo votle kocke skrčimo nazaj v ploskve, ki imajo Eulerjevo karakteristiko 2.

Podobno opazimo pri objektih z Eulerjevo karakteristiko 3. Vsi objekti imajo dve votlini. V zadnjem primeru (Slika 85) se lepo vidi, da kvader z dvema votlinicama dobimo tako, da odebelimo ploskve dveh zlepljenih škatel (Slika 81).

V tabeli z Eulerjevo karakteristiko -1 je podobno kot v prejšnjih primerih. Prvi primer v tabeli lahko odebelimo in deformiramo, da dobimo mnogokotnik z dvema luknjama, ki ga lahko nato preoblikujemo v telo z dvema luknjama.

Lahko vidimo, da imata največji vpliv na Eulerjevo karakteristiko število lukenj in votlinic.

ZAKLJUČEK

Mnogih stvari se nisem lotila, kot na primer črt in ploskev, ki niso ravne. Lep primer tega sta krožnica in površina krogle. Krožnica bi imela Eulerjevo karakteristiko 0, saj je to samo deformirana enostavna sklenjena lomljenka. Na isti način je površina krogle oz. sfera podobna površini enostavnih poliedrov, zato bi imela sfera Eulerjevo karakteristiko 2. Eulerjevo karakteristiko na grafih, ki niso iz ravnih črt, obravnava Dobovišek (1991).

Lahko bi, kot zanimivost, izračunala Eulerjevo karakteristiko človeka (kar bi bilo -2).

Glede na to, da smo »osnovni« Eulerjevi karakteristiki dodali še minus telesa, me zanima, kaj je še možno dodati. Ali jo lahko gledamo še v višjih dimenzijah? Najbolj verjetno bi izgledala tako:

$$O - R + P - T + 4D\ telesa - 5D\ telesa + \cdots$$

Poglavje o platonskih telesih se mi je zdelo zanimivo. Obžalujem, da se na področju fulerenov nisem mogla poglobiti v dokazovanje tega, da ima vsak fuleren, sestavljen iz petkotnikov in šestkotnikov, natanko 12 petkotnikov.

Moram reči, da se strinjam s Platonovim mnenjem o pomembnosti geometrije. Citiram zapis nad vhodom v Platonovo akademijo:

ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω.
Ageōmétrētos mēdeìs eisítō.
»Kdor ne zna geometrije, naj ne vstopa.«

Slika 87: Rafael: Atenska šola (1509 - 1511).

VIRI IN LITERATURA

Vir (*Sliki 7 in 8*), dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Polieder (pridobljeno 20. 01. 2023)

Vir (*Slike 10, 11 in 12*), dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Platonsko_telo (pridobljeno 25. 01. 2023)

Vir (*Slika 13*), dostopno na: http://blog.zacharyabel.com/tag/fullerenes/ (pridobljeno 26. 01. 2023)

Vir (*Slika 14*), dostopno na: https://cdn.comsol.com/wordpress/sites/1/2019/11/platonic-solids-illustrated.png (pridobljeno 30. 01. 2023)

Vir (*Slika 15*), dostopno na: https://fyzmatik.pise.cz/1005-platonska-telesa.html (pridobljeno 30. 01. 2023)

Vir (*Slika 87*), dostopno na: https://ancienthellasgreece.blogspot.com/2016/09/ageometretos-medeis-eisito.html (pridobljeno 08. 03. 2023)

Vir (*Slike 1-6, 9 in 16-86*): osebni arhiv

Marija Vencelj (1991), Eulerjeva poliedrska formula, *Presek, list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje,* 19 (1) str. 2-6, http://www.presek.si/19/1075-Vencelj-Euler.pdf

Vilko Domajnko (1991), Platonovi poliedri, *Presek, list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje,* 19 (1) str. 40-44, http://www.presek.si/19/1075-Domajnko.pdf

Mirko Dobovišek (1991/1992), Eulerjeva formula za ravninske grafe, *Presek, List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje,* 19 (1) str. 98-100, http://www.presek.si/19/1083-Dobovisek.pdf

Zachary Abel (14. 08. 2012), Bucky's dozen, *Zachary Abel's Math Blog,* http://blog.zacharyabel.com/tag/fullerenes/

Preprost (enostaven) mnogokotnik [online]. 2023. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Citirano 15. 01. 2023]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Preprosti_mnogokotnik

Pravilni mnogokotnik [online]. 2023. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Citirano 15. 01. 2023]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Pravilni_mnogokotnik

Konveksna množica [online]. 2023. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Citirano 15. 01. 2023]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Konveksna_mno%C5%BEica

Konveksni in konkavni mnogokotnik [online]. 2023. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Citirano 15. 01. 2023]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Konveksni_in_konkavni_mnogokotnik

Polieder [online]. 2023. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Citirano 15. 01. 2023]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Polieder

Platonsko telo (ali pravilno telo) [online]. 2023. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Citirano 15. 01. 2023]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Platonsko_telo

Enostavni polieder [online]. 2023. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Citirano 15. 01. 2023]. Dostopno na spletnem naslovu: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2002/di/bajramovic/ena/Euler.html

Leonhard Euler [online]. 2023. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Citirano 15. 01. 2023]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler