# MAGIČNI KVADRAT

Področje:

**MATEMATIKA**

**RAZISKOVALNA NALOGA**


Avtorica:

**Ema Anko, 9. razred**

Mentor:

**Katarina Urbančič**

Somentor:

**Eva Pleško**


Ljubljana, marec 2023


OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana

# MAGIČNI KVADRAT

Področje:

**MATEMATIKA**

**RAZISKOVALNA NALOGA**

Avtorica:

**Ema Anko, 9. razred**

Ljubljana, marec 2023

OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana

**POVZETEK**

V raziskovalni nalogi smo preučili magični kvadrat ter ga povezali z latinskim kvadratom. Nato smo se osredotočili na odkrivanje, ali obstaja magični kvadrat dimenzije n x n za vsa naravna števila. Ugotovili smo, da tak kvadrat ne obstaja za dimenzijo 2 x 2. Razmislili smo tudi, koliko možnosti je za rešitev magičnega kvadrata z izpolnjenim sredinskim poljem s številom 1 in ugotovili, da za tak magični kvadrat ne obstaja rešitev. Nato smo si pogledali še prazen magični kvadrat dimenzije 3 x 3 in ugotovili, da takih magičnih kvadratov lahko sestavimo natanko 8. Nazadnje pa smo preverili igro SODUKU, ki vsebuje elemente magičnega kvadrata, vendar ni normalen magični kvadrat.

**KLJUČNE BESEDE Magični kvadrat, magično število, SODUKU**

# Vsebina

# UVOD

Osnova lastnost magičnih kvadratov je zelo presenetljiva. Tabela, kjer se vsota vrstic, stolpcev in diagonal sešteje do istega števila. To število imenujemo magično število, ali magična konstanta. Med reševanjem tabele sem si večkrat zastavljala vprašanje na koliko načinov bi lahko sestavila tovrstno tabelo. Prav tako me je zanimalo, ali se s spreminjanjem velikosti spreminja tudi magično število, ali lahko število izberemo sami.

Če si ogledamo pravila za sestavljanje magičnih kvadratov lahko opazimo, da magični kvadrat lahko rešimo po postopku seštevanja. Zanimivo vprašanje, katerega si lahko pri tem postavimo je naslednje: Ali bi lahko pravila za reševanje spremenili in modra uporabili druge matematične operacije, ki bi vodile do enakega rezultata? Odgovor na to vprašanje je potrebno premisliti. Pa se najprej spomnimo, kaj so magični kvadrati. Magični kvadrati so matematične strukture, ki jih sestavljajo števila, razporejena v kvadratno mrežo. Vsako število se pojavi natanko enkrat v mreži in vsota števil v vsaki vrstici, stolpcu in diagonalah je enaka. Magični kvadrati so že stoletja zanimivi za matematike in druge raziskovalce, saj predstavljajo izziv pri sestavljanju in raziskovanju njihovih lastnosti.

V tej raziskovalni nalogi bomo raziskali različne vidike magičnih kvadratov, vključno s pristopi za njihovo sestavljanje, njihovimi lastnostmi in različnimi metodami za njihovo analizo. Naš cilj je bolje razumeti matematične lastnosti magičnih kvadratov, ter razviti nove pristope in tehnike za sestavljanje magičnih kvadratov.

# Raziskovalni problem

Magični kvadrati so matematične strukture, ki jih sestavljajo številke razporejene v kvadratno matriko, ki imajo posebne lastnosti. Raziskovalni problem te raziskovalne naloge je raziskati lastnosti magičnih kvadratov, pravila za njihovo reševanje in možne spremembe pravil, ki bi vplivale na rešljivost in število možnih rešitev.

**Kaj je magični kvadrat?**

V prvem delu raziskave bomo opredelili pojem magični kvadrat in opisali kakšne so njegove osnovne lastnosti. Na to vprašanje bomo odgovorili z zbiranjem informacij o magičnih kvadratih iz različnih virov, kot so strokovne knjige, znanstveni članki in spletni viri. Poleg zgornjega omenjenega vprašanja, si bomo zastavili še nekaj drugih vprašanj povezanih s temo, ki jo bomo preučevali. Vprašanja so:

**Kakšne so lastnosti magičnih kvadratov?**

Obravnavali bomo lastnosti, kot so velikost kvadrata, število možnih kvadratov, simetrija in edinstvenost rešitve. Z analizo različnih dimenzij magičnih kvadratov bomo preverili, ali se te lastnosti razlikujejo. Naša hipoteza je, da je Magični kvadrat  lahko n x n dimenzije, kjer je n naravno število.

**Kakšna so pravila magičnega kvadrata in na koliko načinov ga lahkol rešimo?**

V tretjem delu raziskave se bomo osredotočili na pravila magičnega kvadrata. Preverili bomo, kako je kvadrat sestavljen, kaj so osnovna pravila za njegovo reševanje in kakšne so posledice, če se ta pravila kršijo. Preverili bomo tudi na koliko različnih načinov lahko rešimo magični kvadrat 3 x 3 dimenzije z izpolnjenimi prostorčki in brez.

## Hipoteze:

H1: Magični kvadrat je lahko n x n dimenzije, kjer je n naravno število.

H2: Magični kvadrat dimenzije 3 x 3 z izpolnjenim sredinskim poljem s številko 1, se ne da rešiti na več načinov.

H3: Magičnih kvadratov dimenzije 3 x 3 obstaja več.

H4: Igra SODUKU je normalen magični kvadrat.

# Teoretične osnove:

## Kombinatorično drevo

Kombinatorično drevo je diagram, ki se uporablja za prikazovanje kombinatoričnih problemov, pri katerih je potrebno izbirati med več možnostmi in jih združevati na določene načine. Kombinatorično drevo je sestavljeno iz vej, ki se odcepijo od vozlišča, ki predstavlja začetno stanje problema. Vsaka veja predstavlja eno od možnih izbir, ki jo lahko naredimo, in vodi do novega vozlišča, ki predstavlja nadaljnje možnosti izbire.

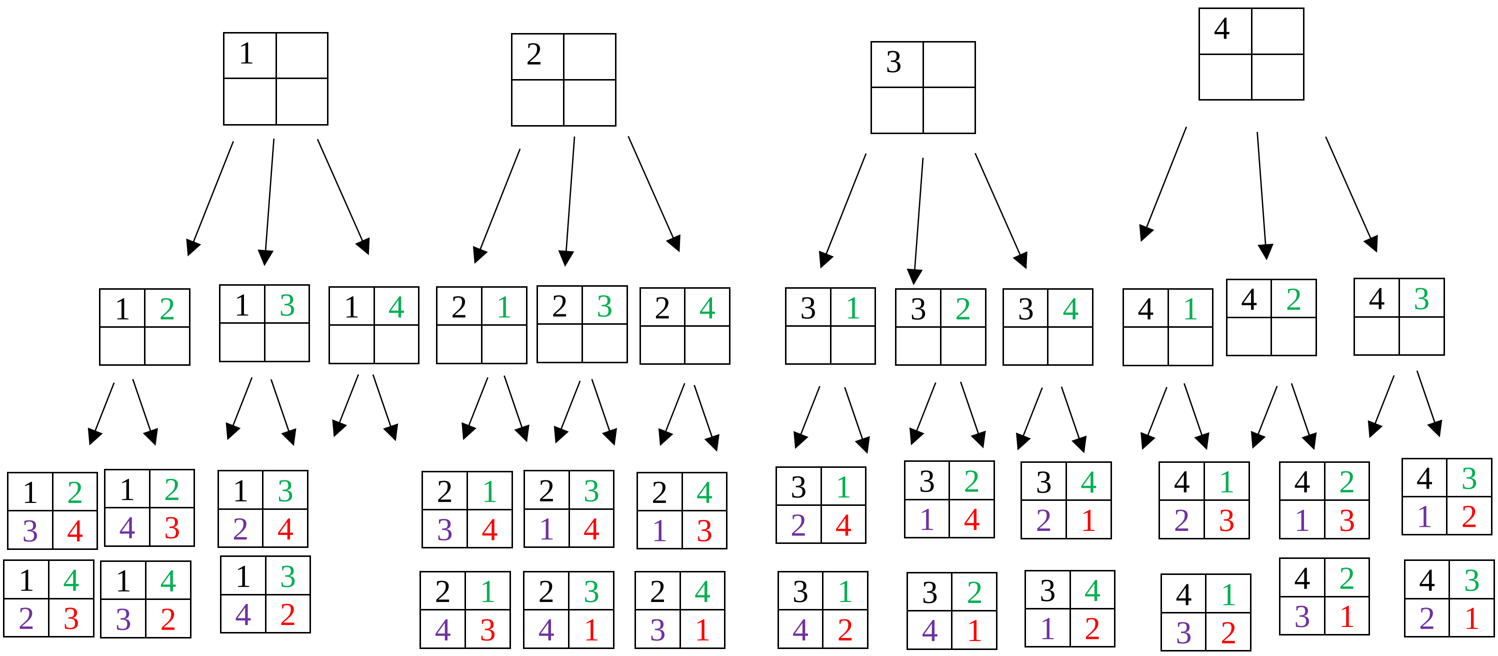
Kombinatorično drevo se nadaljuje, dokler ne dosežemo končnega stanja problema. Končna stanja so običajno predstavljena z zaključnim vozliščem, ki kaže na rešitev problema. Vsako vozlišče na kombinatoričnem drevesu ima lahko tudi vrednost ali oznako, ki predstavlja določene lastnosti, povezane z izbrano možnostjo.

Kombinatorično drevo je uporabno pri reševanju različnih kombinatoričnih problemov, kot so na primer problemi s permutacijami, kombinacijami, variacijami in drugimi. S pomočjo kombinatoričnega drevesa lahko na pregleden in sistematičen način preučimo vse možnosti izbire ter izberemo najboljšo rešitev.

Zgled 1:

Poglejmo si na koliko možnih načinov bi lahko izpolnili kvadrat dimenzije 3 x 3 s števili 1 do 4 brez ponavljanja.

Začnemo z izpolnjevanjem polja v prvi vrstici in prvem stolpcu. Imamo 4 različne možnosti. Nato izpolnimo preostale kvadratke in preverimo koliko možnosti imamo.



Tako lahko opazimo, da lahko sestavimo 24 različnih kvadratov dimenzije 3x3 s števili 1 do 4.

# Magični kvadrat

## Zgodovina

Magični kvadrati so matematične strukture, ki so zanimive tudi zaradi svoje zgodovine. Zgodovina magičnih kvadratov sega več tisoč let nazaj in ima korenine v različnih kulturah, vključno z indijsko, kitajsko, arabsko in evropsko.

Ena izmed najstarejših znanih omemb magičnih kvadratov sega v Indijo, kjer so jih uporabljali že v 6. stoletju. V indijski matematiki so bili magični kvadrati uporabljeni kot sredstvo za napovedovanje prihodnosti in za astrologijo. Prvi indijski znanstvenik, ki je pisal o magičnih kvadratih, je bil Matrčhata v 7. stoletju.

V 9. stoletju so magične kvadrate začeli uporabljati tudi v islamski matematiki. Arabci so jih uporabljali za različne namene, vključno z astrologijo in numerologijo. V njihovi kulturi so bile magične kvadrate zelo cenjene, saj so jih uporabljali tudi kot okras na stenah in v drugih umetniških delih.

Kitajska legenda o Lo Šu, ki si jo že omenila, je ena izmed najbolj znanih zgodb o magičnih kvadratih. Po tej legendi naj bi magični kvadrat odkrili na oklepu želve v reki Lo. Kitajci so magične kvadrate uporabljali za astrologijo in numerologijo, vendar pa so jih uporabljali tudi za okrasitev keramike in drugih umetniških del.

Magični kvadrati so bili znani tudi v evropski matematiki. Ena izmed najbolj znanih osebnosti, ki se je ukvarjala z magičnimi kvadrati, je bil matematik Leonhard Euler. V 18. stoletju je Euler razvil metodo za sestavljanje magičnih kvadratov, ki je bila zelo vplivna in se uporablja še danes.

V zgodovini magičnih kvadratov so se razvili različni pristopi in metode za sestavljanje in analiziranje magičnih kvadratov, ki so še danes zanimivi za matematike in druge raziskovalce.

## Definicija MAGIČNEGA KVADRATA

Magični kvadrat je Latinski kvadrat, obratno ne velja, saj za Latinske kvadrate velja, da se v vsakem polju in vrstici lahko pojavi številka le enkrat pri normalnem magičnem kvadratu pa se lahko pojavi večkrat.

Primer Latinskega kvadrata dimenzije 3x3.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

Vsota vsake vrstice in stolpca je enaka 6.

Magični kvadrat je kvadratna tabela, dimenzije n x n kjer je n naravno število. Kvadrat ima izpolnjene številke tako, da je vsota vseh elementov v vsaki vrstici, stolpcu in diagonali enaka isti vrednosti, številke pa so si med seboj različne.

Primer magičnega kvadrata dimenzije 3x3.

| | | |
|---|---|---|
| **a** | **b** | **c** |
| **d** | **e** | **f** |
| **g** | **h** | **i** |

Kjer mora veljati, da je

$a + b + c = d + e + f = g + h + i = a + e + i = a + d + g = b + e + h = g + h + i$ **,** kjer so a, b, c, d, e, f, g, h, i različna naravna števila.

**Magično število** ali **magična konstanta** je torej seštevek, ki je v vsakem stolpcu, glavni diagonali, ali vrstici enak.

## Normalen magični kvadrat

Magični kvadrat dimenzije n x n je normalen, če vsebuje števila med 1 in $n^2$.

Pri normalnih magičnih kvadratih lahko magično število izračunamo na naslednji način in ga označimo z M.

$$M = \frac{n\,(n^2 + 1)}{2}$$

*Zgled :*

Magični kvadrat dimenzije 3x3 ima magično konstanto enako M = $\frac{3(9+1)}{2}$ = 15.

| | | |
|---|---|---|
| **4** | **9** | **2** |
| **3** | **5** | **7** |
| **8** | **1** | **6** |

4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1+ 6 = 4 + 5 + 6 = 4 + 3 + 8 =

= 9 + 5 + 1 = 2 + 7 + 6 = 15

## Magični kvadrat je lahko n x n dimenzije, kjer je n naravno število.

### Konstrukcija magičnega kvadrata dimenzije 1 x 1.

| |
|---|
| 1 |

Magični kvadrat reda 1, obstaja le en in to je kvadrat, ki vsebuje število 1.

## Konstrukcija magičnega kvadrata dimenzije 2 x 2.

| | |
|---|---|
| 1 | |
| | |

| | |
|---|---|
| | 1 |
| | |

| | |
|---|---|
| | |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| | |
| | 1 |

Magično število mora biti enako
$M = \frac{2\,(4+1)}{2}$ = 5. Kar pomeni, da bi morali v vse ostale prostorčke zapisati število 4, da bi bila vsota enaka 5. Kar pa je nemogoče zato magičnega kvadrata dimenzije 2 x 2 ne obstaja. To  lahko prav tako preverimo iz zgleda kjer smo sestavili 24 možnosti in ni bila nobena pravilna.

## Število rešitev pri reševanju magičnih kvadratov

Sedaj si bomo ogledali koliko rešitev ima normalen magični kvadrat dimenzije 3 x 3, kjer je izpolnjeno sredinsko polje s številom 1.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 1 | |
| | | |

Ker po formuli vemo, da mora biti magična konstanta enaka
$M = \frac{3(9+1)}{2}$ = 15, lahko izračunamo kateri dve števili morata biti poleg 1, da bo vsota 15.

To se da storiti na 2 načina. in 14 = 6 + 8

1. 14 = 5 + 9

Števili lahko vpišemo po diagonalah, vertikalno oz. v stolpcu. To nam da 4 različne možnosti, če te dve števili obrnemo še dodatne 4 kar predstavlja 8 možnih rešitev.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| 9 | 1 | 5 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | | |
| 9 | 1 | 5 |
| 4 | | |

| | | |
|---|---|---|
| | | 3 |
| 9 | 1 | 5 |
| | | 7 |

| | | |
|---|---|---|
| | | 4 |
| 9 | 1 | 5 |
| | | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | | 10 |
| 9 | 1 | 5 |
| 4 | | |

| | | |
|---|---|---|
| | | 3 |
| 9 | 1 | 5 |
| 11 | | 7 |

| | | |
|---|---|---|
| | | 4 |
| 9 | 1 | 5 |
| 10 | | 6 |

V naslednjem koraku, želimo izpolniti prvi stolpec, kjer imamo število 9. Da bomo imeli vsoto 15 potrebujemo števili 2 in 4. Ko izpolnimo ti dve polji imamo pri diagonali samo eno možnost in to je število 10. Števila 10 pa ne smemo uporabiti, saj ima normalen kvadrat samo števila od 1 do 9 in ta možnost odpade.

Enako bi se zgodilo če bi števili obrnili, zato odpadejo tudi vse te možnosti. Enako bi se nam zgodilo tudi če števili zapišemo vodoravno.

Preverimo še kaj se zgodi, če števili vpišemo po diagonali.

| | | |
|---|---|---|
| 9 | | |
| | 1 | |
| | | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 6 | |
| | 1 | |
| | 8 | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | | 4 |
| | 1 | 6 |
| | | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 6 | 0 |
| | 1 | |
| | 8 | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | | 4 |
| | 1 | 6 |
| 10 | | 5 |

Lahko opazim, d se nam ponovno ustavi, saj če želimo izpolniti pri številu ena lahko sedaj uporabimo le še števili 6 in 8. Vstavimo ju lahko le na en način, saj 9 + 8 je več kot 15. Ko pa vstavimo na to mesto število 6 pa imamo vsoto 15 in bi dopisali lahko le število 0, ki pa ga ne smemo.

2. 14 = 6 + 8

Edini način, ki nam še preostane je, da vstavimo števili 6 in 8.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| 8 | 1 | 6 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | |
| 8 | 1 | 6 |
| 2 | | |

| | | |
|---|---|---|
| | | 5 |
| 8 | 1 | 6 |
| | | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | 12 |
| 8 | 1 | 6 |
| 2 | | |

| | | |
|---|---|---|
| -2 | | 5 |
| 8 | 1 | 6 |
| 9 | | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | |
| | 1 | |
| | | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | |
| 2 | 1 | |
| 4 | | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | 5 |
| | 1 | 4 |
| | | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | 10 |
| 2 | 1 | |
| 4 | | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | 5 |
| | 1 | 4 |
| 9 | 0 | 6 |

Ponovno vidimo, da se nam ustavi, saj bi morali vstavljati števila, ki jih ne smemo.

Zato je število rešitev za ta magični kvadrat enaka 0.

To lahko razmislimo še na drug način, če je sredinsko polje izpolnjeno s številom 1, moramo kreirati 4 različnih vsot s številom 1, $a + b + 1 = 15$ , kjer morata biti a in b nujno različna.

V primeru, ko je $a + b = 14$ imamo na voljo le dve različni vsoti.

Sedaj pa si bomo ogledali še koliko rešitev ima magični kvadrat dimenzije 3 x 3.

Enico lahko zapišemo samo na 4 različna mesta kot prikazuje spodnji kvadrat, saj vsoto 15 lahko dobimo samo na 2 načina. To sta 15 = 1 + 6 + 9 = 1 + 5 +8. Če bi število 1 vsisali na sredo bi potrebovali 4 različne vsote, če pa vstavimo število 1 v kote pa bi potrebovali tri take vsote.

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | |
| 1 | | 1 |
| | 1 | |

## SODUKU

Sudoku je logična igra pri kateri vpisujemo števila v večjo mrežo običajno velikosti 9x9 v kateri najdemo še 9 manjših kvadratov pri katerih je njihova vsota povsod enaka saj v vsakega izmed njih vpisujemo števila 1-9, kjer se lahko število pojavi le enkrat v manjšem kvadratu 3x3, enkrat v vrstici in enkrat v stolpcu. Eno število se skupno v mreži pojavi 9x. Ob začetku reševanja so določena števila že podana. Za reševanje je potrebno logično razmišljanje ter poskušanje raznih možnosti, pri težjih kvadratih pa je potrebna tudi uporaba kombinatorike.

V Sloveniji se sudoku pod imenom »devet« že od leta 1999 pojavlja v reviji *Modro razvedrilo*

ter pod imenom »Magični kvadrat« v reviji *Logika in razvedrilna matematika*.

Najpogostejši način reševanja je vpisovanje manjših števil na robove kvadratkov, ki naj bi označevala možna števila, ki se tam lahko pojavijo. Pri težjih ugankah pa je treba izbrati eno od možnosti in preveriti ali se pride do rešitve, tako da preverimo nekaj korakov naprej sicer pa se vrne nekaj korakov nazaj in izbere drugo možnost.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | | | 7 | | | | |
| 6 | | | 1 | 9 | 5 | | | |
| | 9 | 8 | | | | | 6 | |
| 8 | | | | 6 | | | | 3 |
| 4 | | | 8 | | 3 | | | 1 |
| 7 | | | | 2 | | | | 6 |
| | 6 | | | | | 2 | 8 | |
| | | | 4 | 1 | 9 | | | 5 |
| | | | | 8 | | | 7 | 9 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 |
| 6 | 7 | 2 | 1 | 9 | 5 | 3 | 4 | 8 |
| 1 | 9 | 8 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 5 | 9 | 7 | 6 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 4 | 2 | 6 | 8 | 5 | 3 | 7 | 9 | 1 |
| 7 | 1 | 3 | 9 | 2 | 4 | 8 | 5 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 5 | 3 | 7 | 2 | 8 | 4 |
| 2 | 8 | 7 | 4 | 1 | 9 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 2 | 8 | 6 | 1 | 7 | 9 |

Vprašala sem se tudi, če bi bilo mogoče narediti še več magičnih kvadratov 3x3 brez pravila o številih, ki so lahko v kvadratu in večjim magičnim številom. Ugotovila sem, da če vsem številom v tabeli prištejem isto število bo vsota v vseh vrsticah, stolpcih in glavnih diagonalah enaka.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

Prvotni magični kvadrat, ki je normalen saj vsebuje števila med n in $n^2$.

**+ 10**

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 17 | 12 |
| 11 | 15 | 19 |
| 18 | 13 | 14 |

Prvotnemu magičnemu kvadratu smo prišteli 10 vsakemu od števil v njem. Vsota v vseh stolpcih, vrsticah in glavnih diagonalah je enaka 45.

**+ 4**

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 11 | 6 |
| 5 | 9 | 13 |
| 12 | 7 | 8 |

Prvotnemu magičnemu kvadratu smo prišteli 4 vsakemu od števil v njem. Vsota v vseh stolpcih, vrsticah in glavnih diagonalah je enaka 27.

**$\div 2$**

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 3,5 | 1 |
| 0,5 | 2,5 | 4,5 |
| 4 | 1,5 | 2 |

Pri prvotnemu magičnemu kvadratu smo vsa števila delili z 2, ugotovila sem, da je tudi tovrstna operacija mogoča, da se kvadrat obdrži z enakimi vsotami v vrsticah, stolpcih in glavnih diagonalah.

**$\times 2$**

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 14 | 4 |
| 2 | 10 | 18 |
| 16 | 6 | 8 |

Pri prvotnemu magičnemu kvadratu smo vsa števila množili z 2, ugotovila sem, da lahko vsa števila tudi množim z istim številom in je vsota v vseh vrsticah, stolpcih in glavnih diagonalah enaka – v tem primeru 30

# ZAKLJUČEK

Na temo megičnih kvadratov seveda obstaja še vrsto drugih možnih raziskav, kot na primer raziskovanje večjih kvadratov 5x5 ali 10x10 pri katerih je tudi možnih rešitev mnnogo več.

V raziskovalni nalogi smo prišli do zaključka, da magični kvadrat nxn dimenzije za n naravno število ni mogoče saj že magični kvadrat 2x2 ni izvedljiv, kar sem dokazala s kombinatoričnim drevesom.

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | |
| 1 | | 1 |
| | 1 | |

Ugotovila sem tudi ,da je magičnih kvadratov 3x3 natanko 8, kar prikazuje slika. Na vseh 8 kvadratih pa gre le za vrtenje istega kvadrata saj so kombinacije števil v vseh stolpcih in vrsticah, ki dajejo isto vsoto, vedno enake.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

Ugotovila sem tudi, da sudoku NI magični kvadrat vendar še zmeraj sodi v skupino latinskih kvadratov saj je vsota stolpcev, diagonal in vrstic enaka števila pa se ponavljajo kar je ključnega pomena za razlikovanje od magičnega kvadrata.

# VIRI


1. Weisstein, E. W. (n.d.). Magic Square. Wolfram MathWorld. Pridobljeno, s spletne strani: https://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html

2. Wikipedia contributors. (2023). Magic square. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Pridobljeno, s spletne strani: https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square

3. Wikipedija. (2022). Magični kvadrat. V Wikipedija, prosta enciklopedija. Pridobljeno, s spletne strani: https://sl.wikipedia.org/wiki/Magični_kvadrat

4. Wikipedija. (2023). Sudoku. Pridobljeno s spletne strani https://sl.wikipedia.org/wiki/Sudoku