

Natančna konstrukcija pravičnega sedemkotnika

MATEMATIKA

raziskovalna naloga

Avtorji: Miha Mikael Verbič, Samo Maček, Teodor Demšar, 9. razred

Mentor: Igor Blažič, dipl. ing.

Somentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Ljubljana, marec 2023

Inštitut montessori, Zasebna osnovna šola montessori, Ljubljana

Zahvala

Zahvaljujemo se vsem učiteljem, ki so se nam razumevajoče prilagajali in so tako poskrbeli, da je raziskovanje nemoteno teklo. Hvaležni smo tudi, Mihaeli Kastelec, učiteljici za slovenščino, ki je našo raziskovalno nalogo lektorirala. Našo največjo zahvalo dolgujemo našima mentorjema Igorju Blažiču, učitelju matematike, ter Alojzu Grahorju, profesorju matematike na vipavski gimnaziji, da sta nas spremljala skozi celotno raziskavo, nas usmerjala in nam bila vedno pripravljena pomagati.

KAZALO

Kazalo vsebine

Zahvala	i
Kazalo vsebine	ii
Seznam slik	iii
Seznam tabel	iv
Seznam prilog	iv
Povzetek	v
1. Uvod	1
1.1 Uvodni izziv	1
1.2 Cilji raziskovalne naloge	1
1.3 Metode dela	1
2. Pravilni n-kotniki	2
2.1 Nekatero splošne lastnosti pravilnih n-kotnikov	2
2.2 Pregled lastnosti pravilnih n-kotnikov ($n \leq 10$)	3
2.3 Načrtovanje pravilnih n-kotnikov ($n = 3, 4, 6, 8$)	6
2.4 Katere pravilne n-kotnike lahko narišemo z ravnilom in šestilom?	9
3. Načrtovanje pravilnega petkotnika	11
4. Približna konstrukcija pravilnega sedemkotnika	13
6. Delitev kota na tri enake dele s prepogibanjem papirja (Abejev način)	16
7. Nov način delitve ostrega kota na tri enake dele	18
7.1 Ideja	18
7.2 Nov način delitve kota na tri enake dele – metoda TSM	20
8. Natančna konstrukcija pravilnega sedemkotnika	24
9. Natančna konstrukcija pravilnega sedemkotnika samo s prepogibanjem papirja	28
9.1. Natančna konstrukcija pravilnega sedemkotnika z enojnimi pregibi	28
9.2. Natančna konstrukcija pravilnega sedemkotnika z vozlom	33
10. Zaključek	34
11. Viri in literatura	37
12. Priloge	1

Seznam slik

Slika 1: Število diagonal in velikosti notranjih kotov pri n -kotnikih, $n \leq 12$	4
Slika 2: Konstrukcija enakostraničnega trikotnika	6
Slika 3: Konstrukcija kvadrata	6
Slika 4: Konstrukcija pravilnega šestkotnika	7
Slika 5: Konstrukcija pravilnega osemkotnika	8
Slika 6: Močnikova skica konstrukcije pravilnega petkotnika (leto 1881)	11
Slika 7: Konstrukcij pravilnega petkotnika	12
Slika 8: Plemljeva konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika	14
Slika 9: Plemljeva konstrukcija pravilnega sedemkotnika s približkom stranice	15
Slika 10: Prvi korak pri tretjinjenju kota	16
Slika 11: Izvedba pregiba, ki tretjini kot	16
Slika 12: K dokazu tretjinjenja kota	17
Slika 13: Iskanje ideje novega tretjinjenja ostrega kota	18
Slika 14: Razvoj ideje novega tretjinjenja	19
Slika 15: Končni korak razvoja ideje iskanja novega postopka tretjinjenja ostrega kota	20
Slika 16: Prikaz novega postopka tretjinjenja kota	21
Slika 17: K dokazu novega postopka tretjinjenja ostrega kota	22
Slika 18: Prvi korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja	24
Slika 19: Drugi korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja	25
Slika 20: Tretji korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja	25
Slika 21: Četrti korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja	26
Slika 22: Peti korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja	26
Slika 23: Šesti korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja	27
Slika 24: Sedmi korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja	27
Slika 25: Prvi korak konstrukcije s prepogibanjem papirja	28
Slika 26: Drugi korak konstrukcije s prepogibanjem papirja	29
Slika 27: Tretji korak konstrukcije s prepogibanjem papirja	29
Slika 28: Četrti korak konstrukcije s prepogibanjem papirja	30
Slika 29: Peti korak konstrukcije s prepogibanjem papirja	30
Slika 30: Šesti korak konstrukcije s prepogibanjem papirja	30
Slika 31: Sedmi korak konstrukcije s prepogibanjem papirja	31
Slika 32: Zaključek konstrukcije s prepogibanjem papirja	31
Slika 33: Fotografija končanega pravilnega sedemkotnika s prepogibanjem papirja	32
Slika 34: Nastanek pravilnega sedemkotnika s pomočjo vozla	33
Slika 35: Fotografija končnega pravilnega sedemkotnika s pomočjo vozla	33
Slika 36: Natančna konstrukcija pravilnega desetkotnika z ravnilom in šestilom	35
Slika 37: Konstrukcija pravilnega 9-kotnika z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja	36

Seznam tabel

Tabela 1: Pregled števila diagonal, notranjih in zunanjih kotov pravičnih n -kotnikov do $n = 15$	5
Tabela 2: Tabela n -kotnikov, ki jih je mogoče narisati z ravnilom in šestilom	10

Seznam prilog

Prikaz konstrukcije pravičnega sedemkotnika s prepogibanjem papirja.....	43
--	----

Povzetek

Dokazano je, da se pravilnega sedemkotnika ne da konstruirati samo z neoznačenim ravnilom in šestilom. Obstaja pa veliko približnih konstrukcij. Med njimi je tudi konstrukcija slovenskega matematika Josipa Plemlja. Vsebuje del, kjer je potrebno razdeliti kot na tri enake dele. To je nemogoče z neoznačenim ravnilom in šestilom. Delitev kota na tri enake dele pa je možna s prepogibanjem papirja. Opisali smo svoj način, kako ostri kot razdelimo na tri enake dele. V nalogi natančno konstruiramo pravilni sedemkotnik z uporabo obeh metod. Poleg tega raziščemo, ali je možno natančno konstruirati pravilni sedemkotnik samo s prepogibanjem papirja. Za načrtovanje in preiskovanje smo uporabljali tudi program za dinamično geometrijo - Geogebro.

Ključne besede: pravilni sedemkotnik, Josip Plemelj, prepogibanje papirja, tretjinjenje kota

1. Uvod

1.1 Uvodni izziv

Pri pouku matematike omenjamo in rišemo z ravnilom in šestilom tudi pravilne večkotnike: enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilni šestkotnik in pravilni osemkotnik. Med materiali montessori so tudi pravilni petkotnik, sedemkotnik, devetkotnik in desetkotnik. Na misel nam je prišlo vprašanje, kako da pri pouku nikoli ne narišemo pravih petkotnikov, sedemkotnikov, devetkotnikov ali desetkotnikov. Pravilni desetkotnik lahko narišemo s pomočjo pravilnega petkotnika, pravilni devetkotnik bi lahko narisali tako, da bi notranje kote enakostraničnega trikotnika razdelili na tri enake dele. Ko smo brskali po internetu, smo v članku (Hladnik, 2013) zasledili informacijo, da s šestilom in ravnilom ni mogoče natančno konstruirati pravilnega sedemkotnika.

Zato smo si zastavili naslednja raziskovalna vprašanja:

- Zakaj z ravnilom in šestilom ne moremo konstruirati pravilnega sedemkotnika?
- Katere pravilne večkotnike sploh lahko konstruiramo z (neoznačenim) ravnilom in šestilom?
- Kako bi natančno narisali pravilni sedemkotnik?

1.2 Cilji raziskovalne naloge

Zastavili smo si tri cilje, in sicer:

- Raziskati, katere pravilne n -kotnike lahko natančno konstruiramo z neoznačenim ravnilom in šestilom?
- Raziskati, zakaj nekaterih pravih n -kotnikov ni mogoče natančno konstruirati z neoznačenim ravnilom in šestilom?
- Poiskati postopek, s katerim lahko natančno konstruiramo pravilni sedemkotnik.

1.3 Metode dela

Pri raziskovalni nalogi smo uporabili naslednje metode:

- delo po matematični literaturi in internetnih virih,
- preiskovanje s programom Geogebra,
- računanje s programom Wolframalfa,
- matematično sklepanje, računanje in dokazovanje.

2. Pravilni n-kotniki

2.1 Nekatere splošne lastnosti pravilnih n-kotnikov

Lik, ki ima n -stranic, je **n-kotnik**. V nalogi pa obravnavamo pravilne n -kotnike.

Definicija. Pravilni n-kotnik (n naravno število, $n > 2$) je n -kotnik s skladnimi stranicami in skladnimi notranjimi koti.

Pravilni n -kotniki imajo zanimive matematične lastnosti. Vsakemu pravilnemu n -kotniku lahko očrtamo in včrtamo krožnico.

Notranji kot v pravilnem n -kotniku je kot med sosednjima stranicama. Izračunamo ga po formuli $\alpha_n = 180 - \frac{360}{n}$.

Daljico, ki poteka med dvema nesosednjima ogliščema, imenujemo *diagonala*. Izpeljali smo postopek, kako določimo število diagonal. Domislili smo si ga sami z opazovanjem, kako se povečuje število diagonal, če jih rišemo postopoma. Drugi način je znana formula za izračun števila diagonal. Dokazali smo, da je tudi naš (prvi) način pravilen.

Prvi način: Vzemimo pravilni n -kotnik. Iz prvega oglišča lahko narišemo $n - 3$ diagonal, iz drugega prav tako $n - 3$ diagonal. Potem pa iz vsakega naslednjega po eno diagonalo manj. Tako je vseh diagonal

$$d_n = (n - 3) + (n - 3) + (n - 4) + (n - 5) + \dots + 3 + 2 + 1 \quad .$$

Drugi način: Iz vsakega oglišča lahko narišemo $n - 3$ diagonal. Iz n oglišč narišemo $n(n - 3)$ diagonal. Ker je vsaka diagonala šteta dvakrat, je vseh diagonal $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

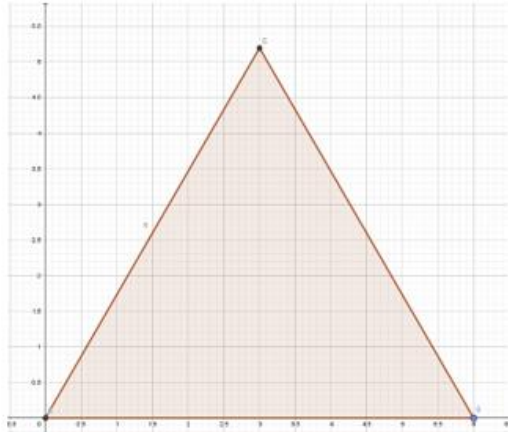
Pokažimo, da sta načina enakovredna. Vemo, da je vsota $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (ker je $\frac{n}{2}$ enakih parov $n + 1$). To formulo uporabimo za vsoto:

$$\begin{aligned} d_n &= (n - 3) + (n - 3) + (n - 4) + (n - 5) + \dots + 3 + 2 + 1 = \\ &= -1 + (n - 2) + (n - 3) + (n - 4) + (n - 5) + \dots + 3 + 2 + 1 = \\ &= -1 + \frac{(n - 2)}{2}(n - 1) = -1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n(n - 3)}{2} \end{aligned}$$

2.2 Pregled lastnosti pravilnih n-kotnikov ($n \leq 10$)

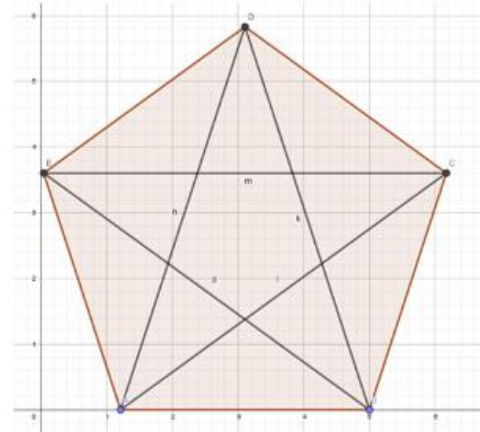
Pri praktičnem raziskovanju števila daljic in notranjih kotov smo si pomagali s programom Geogebra. V nadaljevanju na Sliki 1 tako predstavimo nekaj prvih n-kotnikov.

Enakostranični trikotnik



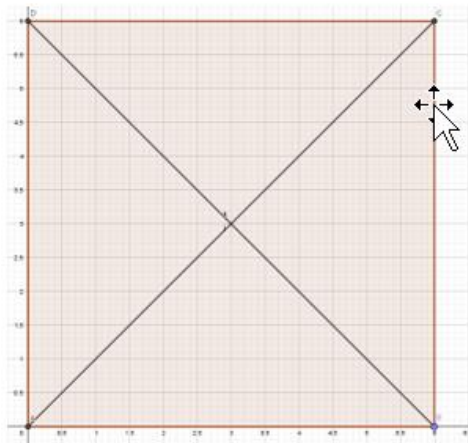
Število diagonal 0, notranji kot 60°

Pravilni petkotnik



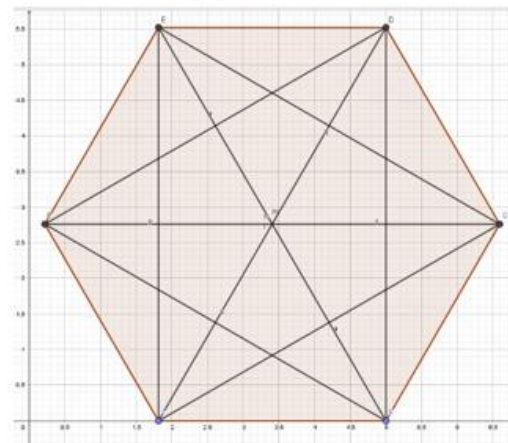
Število diagonal 5, notranji kot 108°

Kvadrat



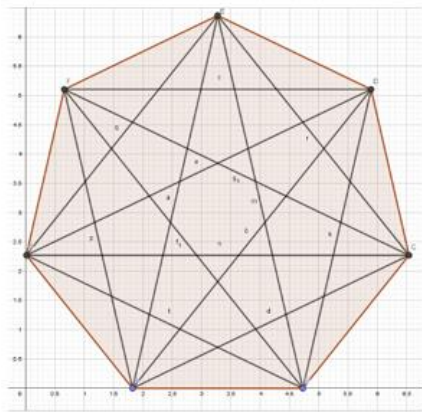
Število diagonal 2, notranji kot 90°

Pravilni šestkotnik



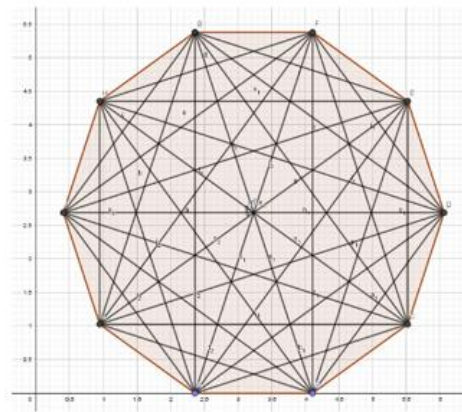
Število diagonal 9, notranji kot 120°

Pravilni sedemkotnik



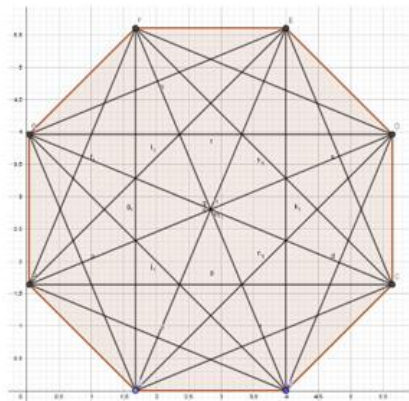
Število diagonal 14, notranji kot $180^\circ - \frac{360}{7}$

Pravilni desetakotnik



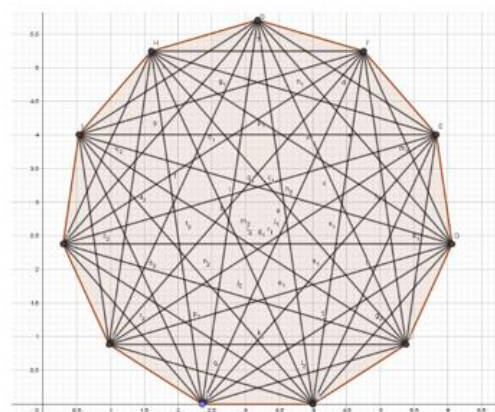
Število diagonal 35, notranji kot 144°

Pravilni osemkotnik



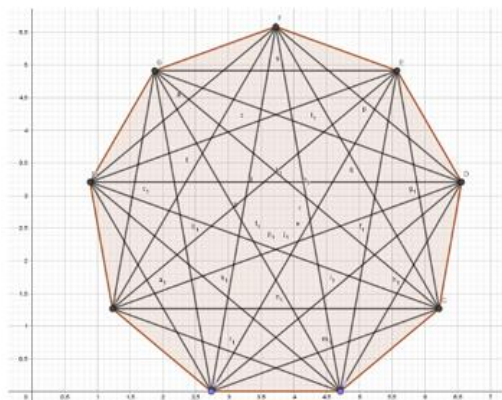
Število diagonal 20, notranji kot 135°

Pravilni enajstkotnik



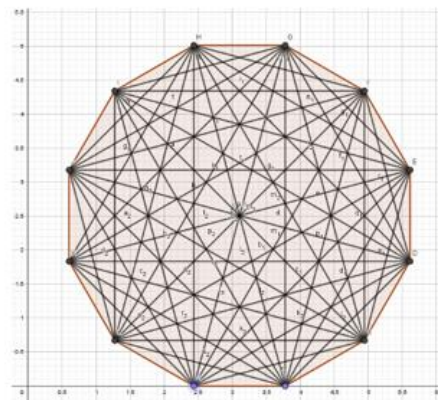
Število diagonal 44, notranji kot $180^\circ - \frac{360}{11}$

Pravilni devetkotnik



Število diagonal 27, notranji kot 140°

Pravilni dvanajstkotnik



Število diagonal 44, notranji kot 150°

Slika 1: Število diagonal in velikosti notranjih kotov pri n -kotnikih, $n \leq 12$

Podatke o pravih n-kotnikih do $n = 15$ smo zbrali v Tabeli 1. Sicer pa smo se v nalogi omejili do pravih desetkotnika.

Tabela 1: Pregled števila diagonal, notranjih in zunanjih kotov pravih n-kotnikov do $n = 15$.

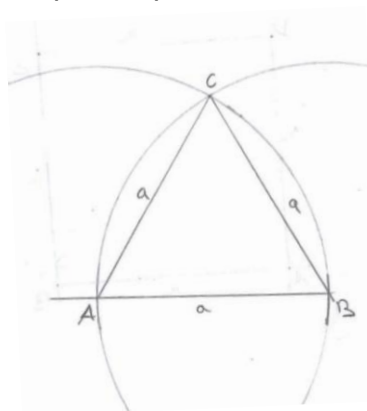
n-kotnik	št. diagonal	notranji kot	zunanj kot
3	0	60	120
4	2	90	90
5	5	108	72
6	9	120	60
7	14	$180 - \frac{360}{7}$	$\frac{360}{7}$
8	20	135	45
9	27	140	40
10	35	144	36
11	44	$180 - \frac{360}{11}$	$\frac{360}{11}$
12	54	150	30
13	65	$180 - \frac{360}{13}$	$\frac{360}{13}$
14	77	$180 - \frac{360}{14}$	$\frac{360}{14}$
15	90	156	24

2.3 Načrtovanje pravih n-kotnikov ($n = 3, 4, 6, 8$)

Z ravnilom in šestilom lahko narišemo kote 60° , tiste, ki jih dobimo z razpolavljanjem, večkratnim razpolavljanjem ali njihovih vsot. Tako hitro vidimo, da bomo enostavno konstruirali enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilni šestkotnik in pravilni osemkotnik.

Enakostranični trikotnik

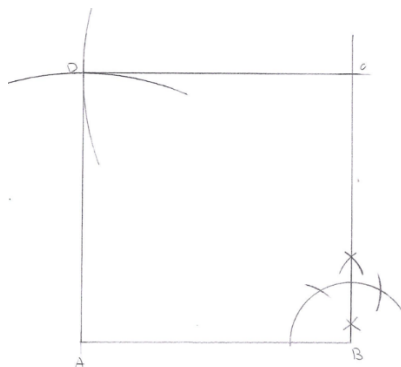
Dana nam je daljica AB. Iz točke A s šestilom narišemo krožni lok s polmerom daljice AB. Iz točke B s šestilom narišemo krožni lok s polmerom daljice AB. Presečišče obeh krožnih lokov predstavlja točko C. Povezava med točkami ABC tvori pravilni trikotnik s stranico, enako dolžini daljice AB (Slika 2).



Slika 2: Konstrukcija enakostraničnega trikotnika

Kvadrat

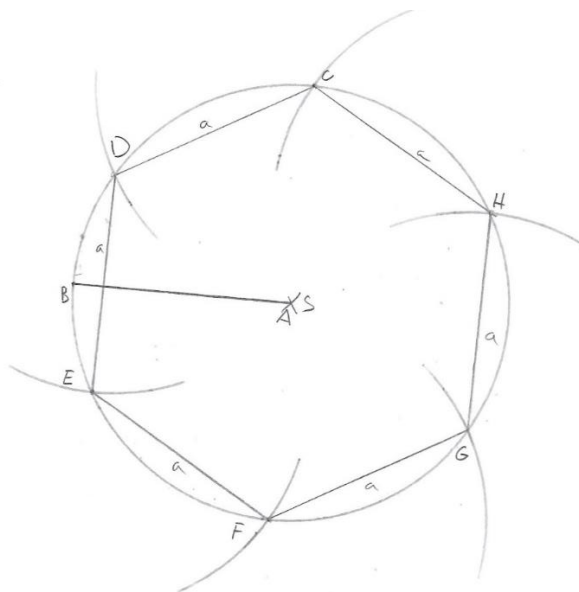
Dana nam je daljica AB. V točki B narišemo pravokotnico. Na pravokotnici označimo točko C, za katero velja, da je dolžina daljice BC enako dolga kot daljica AB. Narišemo krožni lok s polmerom daljice AB iz točke A in iz točke C. Presečišče obeh krožnih lokov predstavlja točko D. Povezava med točkami ABCD tvori pravilni štirikotnik s stranico, enako dolžini daljice AB (glej Sliko 3).



Slika 3: Konstrukcija kvadrata

Pravilni šestkotnik

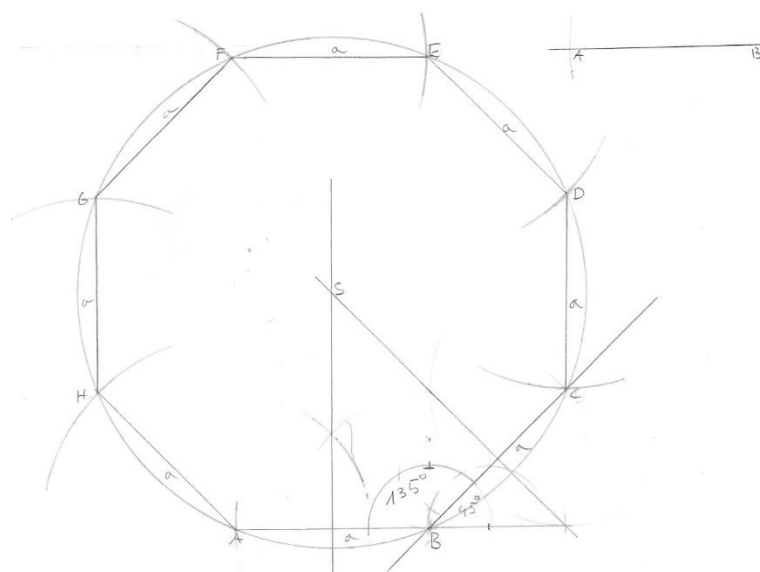
Dana nam je daljica AB. Narišemo krog s polmerom AB in središčem S. Na krožnici izberemo poljubno točko C. Iz točke C s šestilom narišemo krožni lok s polmerom enakim dolžini daljice AB. Presečišče krožnice in krožnega loka tvori točko D. Iz točke D s šestilom narišemo krožni lok z dolžino AB. Presečišče krožnice in krožnega loka tvori točko E. Ta postopek ponavljamo, dokler na krožnici ne določimo še točke F, G in H. Povezava med točkami CDEFGH tvori pravilni šestkotnik s stranico, enako dolžini daljice AB (Slika 4).



Slika 4: Konstrukcija pravilnega šestkotnika

Pravilni osemkotnik

Dana nam je daljica AB. Narišemo kot 135° z vrhom B. Narišemo krožni lok s središčem B in polmerom AB. Kjer se sekata prvi krak kota in krožni lok dobimo točko C. Daljici AB narišemo simetralo. Prav tako narišemo simetralo daljici BC. Sečišče teh dveh simetral označimo s S. Narišemo krožnico s središčem S in polmerom SB. Krožnica nam predstavlja očrtani krog pravilnega osemkotnika. Iz točke C s šestilom narišemo krožni lok z dolžino AB. Presečišče krožnice očrtanega kroga in krožnega loka označimo z D. Iz točke D s šestilom narišemo krožni lok z dolžino AB. Novo sečišče krožnice in krožnega loka označimo z E. Ta postopek ponavljamo, dokler na krožnici ne določimo še točke F, G in H. Povezava med točkami ABCDEFGH tvori pravilni osemkotnik s stranico, enako dolžini daljice AB (Slika 5).



Slika 5: Konstrukcija pravičnega osemkotnika

Domnevamo, da petkotnika, sedemkotnika in devetkotnika na ta način ne moremo konstruirati.

2.4 Katere pravilne n-kotnike lahko narišemo z ravnilom in šestilom?

Matematika Gauss in Wantzel sta raziskovala, katere pravilne n-kotnike lahko narišemo samo z neoznačenim ravnilom in šestilom, to je z evklidskim orodjem. Dokazala sta naslednji izrek »**Pravilni n-kotnik lahko konstruiramo z neoznačenim ravnilom in šestilom (to je z evklidskim orodjem) natanko takrat, ko je naravno število n oblike**

$$n = 2^m p_1 p_2 \dots p_k,$$

kjer je $m, k \geq 0$ (pri $k = 0$ mora biti $m \geq 2$) in so $p_i, i = 1, 2, \dots, k$, različna Fermatova praštevila, to je praštevila, ki so za 1 večja od potence števila 2^{2^l} « (Hladnik, 2013, 163)

Fermatovo število je število oblike $2^{(2^l)} + 1$, kjer je $l \geq 0$. Če je to število praštevilo, ga imenujemo Fermetovo praštevilo.

Izračunajmo nekaj prvih Fermatovih števil in pogledajmo, katera med njimi so praštevila:

$$2^{(2^0)} + 1 = 3 \quad \text{je Fermatovo praštevilo}$$

$$2^{(2^1)} + 1 = 5 \quad \text{je Fermatovo praštevilo}$$

$$2^{(2^2)} + 1 = 17 \quad \text{je Fermatovo praštevilo}$$

$$2^{(2^3)} + 1 = 257 \quad \text{je Fermatovo praštevilo.}$$

$$2^{(2^4)} + 1 = 65537 \quad \text{je Fermatovo praštevilo}$$

$$2^{(2^5)} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417 \quad \text{ni praštevilo}$$

$$2^{(2^6)} + 1 = 18446744073709551617 = 274177 \cdot 67280421310721 \quad \text{ni praštevilo}$$

Fermatovih praštevil je zelo malo. Tudi enciklopedija zaporedij, ki na povezavi <https://oeis.org/A019434> našteva Fermatova praštevila, ne navaja večjih Fermatovih praštevil, ampak samo ta, ki smo jih navedli zgoraj.

Poglejmo, katere pravilne n-kotnike je mogoče konstruirati z evklidskim orodjem. V nalogi bomo obravnavali pravilne n-kotnike do $n = 10$.

- $n = 3$: Ker je $3 = 2^0 \cdot 3$, **lahko konstruiramo** enakostranični trikotnik.
- $n = 4$: $4 = 2^2$ Ustreza pogojema $m \geq 2$ in $i = 0$. Kvadrat **lahko konstruiramo**.
- $n = 5$: $5 = 2^0 \cdot 5$ Ker je 5 Fermatovo praštevilo, pravilni petkotnik **lahko konstruiramo** z evklidskim orodjem.
- $n = 6$: $6 = 2 \cdot 3$ Pravilni šestkotnik **lahko konstruiramo**
- $n = 7$: Število 7 ni Fermatovo praštevilo, ker ni oblike $2^{(2^n)} + 1$. Tako pravilnega sedemkotnika **ni mogoče konstruirati** z evklidskim orodjem.
- $n = 8$: $8 = 2^3$ ustreza pogojema $m \geq 2$ in $i = 0$. Pravilni osemkotnik **lahko konstruiramo**
- $n = 9$: 9 ne ustreza pogojem izreka. Pravilnega devetkotnika **ne moremo konstruirati** z evklidskim orodjem.
- $n = 10$: $n = 2 \cdot 5$. Pravilni desetkotnik **lahko konstruiramo** z evklidskim orodjem.

V Tabeli 2 smo zbrali (na osnovi Gauss–Wantzelovega izreka) tista naravna števila n do 100, pri katerih lahko konstruiramo pravilni n -kotnik

Tabela 2: Tabela n -kotnikov, ki jih je mogoče narisati z ravnilom in šestilom

Fermatova praštevila	x^{2^0}	x^{2^1}	x^{2^2}	x^{2^3}	x^{2^4}	x^{2^5}	x^{2^6}	x^{2^7}	x^{2^8}	x^{2^9}
3 5 17 257	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	3	6	12	24	48	96	192	384	768	1536
5	5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560
3 x5	15	30	60	120	240	480	960	1920	3840	7680
17	17	34	68	136	272	544	1088	2176	4352	8704
3 x17	51	102	204	408	816	1632	3264	6528	13056	26112
5 x17	85	170	340	680	1360	2720	5440	10880	21760	43520
3 x5 x17	255	510	1020	2040	4080	8160	16320	32640	65280	130560
257	257	514	1028	2056	4112	8224	16448	32896	65792	131584
3 x257	771	1542	3084	6168	12336	24672	49344	98688	197376	394752

Večkotniki (to je n -kotniki), ki jih je mogoče narisati z ravnilom in šestilom do $n = 1000$, so:

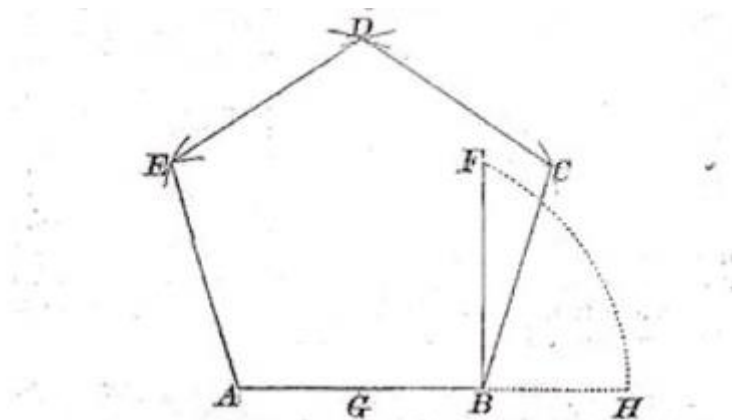
3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272, 320, 340, 384, 408, 480, 510, 512, 514, 544, 640, 680, 768, 771, 816, 960.

Opomba: V Tabeli 2 so z rdečo obarvana števila, ki so manjša od 1000.

Naši rezultati se ujemajo z bazo OEIS na povezavi <https://oeis.org/A003401>. Seveda pa števili 1 in 2 sami izvzamemo.

3. Načrtovanje pravilnega petkotnika

Notranji kot pravilnega petkotnika meri 108° , središčni kot pa 36° . Enakokraki trikotnik, iz katerih je sestavljen pravilni petkotnik, ima kote: 54° , 54° in 72° . Teh kotov pa ne moremo narisati s šestilom, ker jih ne moremo dobiti iz razpolovitve kota 60° ali iz večkratnih razpolovitev in njihovih vsot. Iz Gauss-Wantzelovega izreka sledi, da je konstrukcija mogoča. Eno izmed njih je leta 1881 opisal tudi slovenski matematik Franc Močnik (Hladnik, 2014) (Slika 6). (Iz tega vira se da sklepati, da je Močnik to konstrukcijo povzel po Abul Wafi s konca 10. stoletja.)



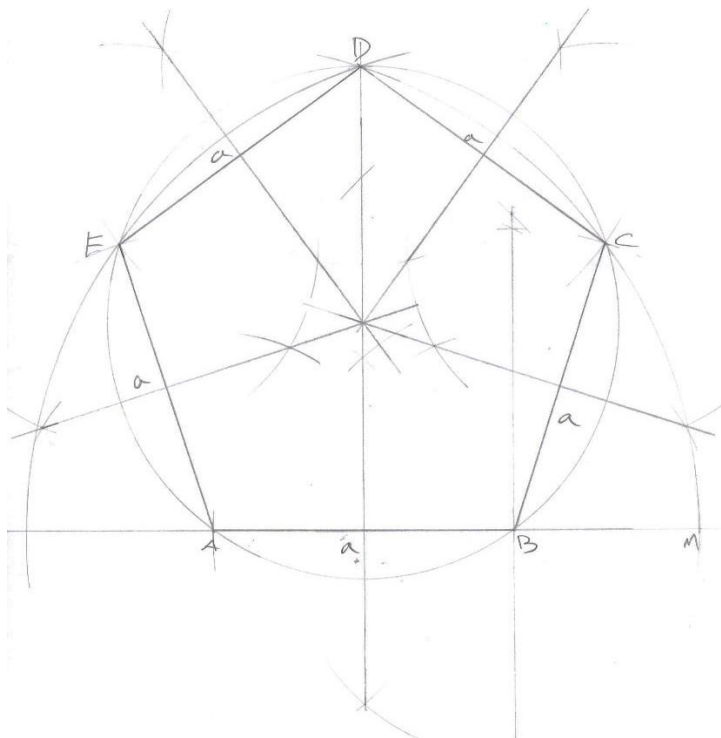
Slika 6: Močnikova skica konstrukcije pravilnega petkotnika (leto 1881)

Vir: (Hladnik, 2014)

Potek konstrukcije (Slika 6)

Dana je dolžina stranice pravilnega petkotnika AB . V točki B narišemo pravokotnico na premico, nosilko daljice AB . Na pravokotnici določimo točko F tako, da je $AB = BF$. Poiščemo točko G , ki je razpolovišče daljice AB . Narišemo krožni lok s središčem G

skozi točko F. Točka H je presečišče tega krožnega loka in premice, nosilke daljice AB kot je prikazano na Sliki 6. Daljica AH je diagonalna petkotnika. Z dvema krožnima lokoma polmera AH s središčema v A in B dobimo točko D. S simetralama daljic BD in AD dobimo še točki C in E (Slika 7).



Slika 7: Konstrukcij pravičnega petkotnika

V viru (Hladnik, 2014) ni dokaza, da gre za natančno konstrukcijo, zato sledi dokaz (Slika 6).

Dolžino daljice GF dobimo iz Pitagorovega izreka v trikotniku GBF :

$$|GF|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Dobimo $|GF| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Dolžina AH je potem enaka: $|AH| = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$

Izračunajmo še diagonalo pravičnega petkotnika. V trikotniku ADE je daljica AD diagonala d_5 , ostali dve stranici sta stranici petkotnika. Uporabimo kosinusni izrek

$$d^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos(108^\circ)$$

S pomočjo programa WolframAlfa smo dobili:

$$d = a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})}$$

Kvadrirajmo dolžino, ki smo jo dobili z našim izračunom:

$$\left(\frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2}\right)^2 = \frac{a^2(5 + 2\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{a^2(3 + \sqrt{5})}{2}$$

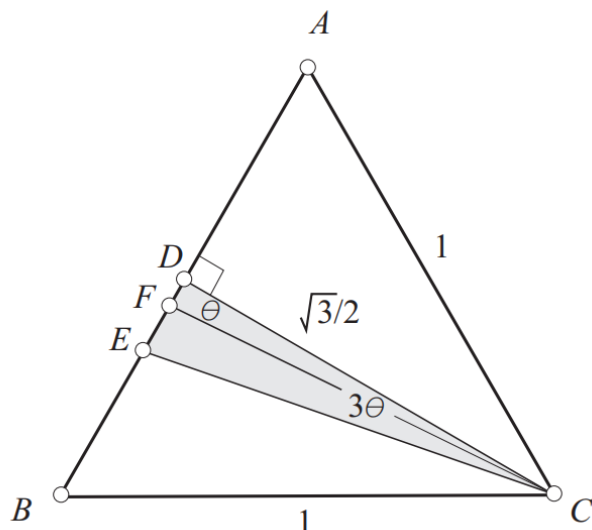
Torej je $|AH| = d_5$. To pomeni, da je gornja Močnikova konstrukcija natančna (ni približna).

4. Približna konstrukcija pravilnega sedemkotnika

Pravilnega sedemkotnika se ne da konstruirati z neoznačenim ravnilom in šestilom. Obstaja veliko približnih konstrukcij. Eno med njimi je prispeval tudi slovenski matematik Josip Plemelj. V viru (Hladnik, 2013,167) je opis njegove konstrukcije z dokazom. Tu povzemamo glavne ugotovitve.

Izrek (Plemelj): **»V enakostraničnem trikotniku ABC (Slika 8) naj točka D razpolavlja, točka E pa tretjini stranico AB. Nadalje naj bo točka F na daljici DE taka, da je kot $\angle DCF$ enak tretjini kota $\angle DCE$. Potem je CF stranica pravilnega sedemkotnika, ki je včrtan enotski krožnici.«** (Hladnik, 2013, 167)

Dokaz je v istem članku.

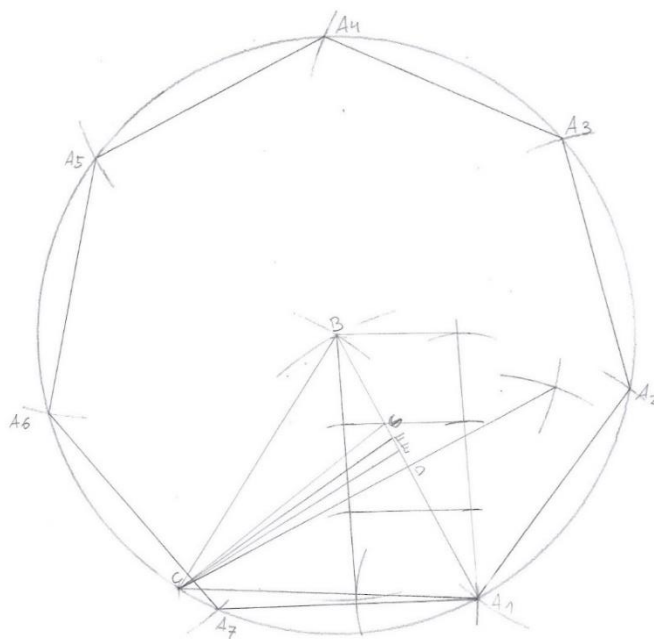


Slika 8: Plempljeva konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika

(vir: Hladnik, 2013, stran 167)

Plempljeva konstrukcija je približna, ker je v enem delu potrebno razdeliti kot na tri enake dele, kar pa z neoznačenim ravnilom in šestilom ni mogoče (glej Sliki 8 in 9). Obstaja veliko približnih metod delitve kota na tri enake dele. Najpreprostejša je, da namesto loka razdelimo pripadajočo tetivo na tri enake dele in podaljšamo krake.

Na Sliki 9 nam daljica CE predstavlja stranico sedemkotnika, dobljeno po Plempljevi konstrukciji. Trisekcijo smo izvedli tako, da smo tretjinili daljico DG.



Slika 9: Plemljeva konstrukcija pravilnega sedemkotnika s približkom stranice

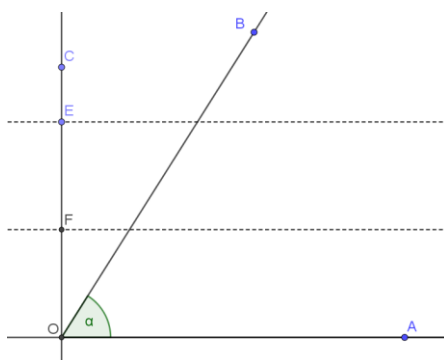
Po (Hull, 2021) povzemamo, da se matematični problem, s katerim bi dobili natančno tretjino kota, zapiše z enačbo tretje stopnje. Z ravnilom in šestilom pa lahko rešimo le tiste probleme, ki jih zapišemo z enačbama premice ali krožnice. Enačba premice vsebuje spremenljivki x in y , enačba krožnice pa x^2 in y^2 (Pitagorov izrek). Dokaz, da z neoznačenim ravnilom in šestilom kota ni mogoče razdeliti na tri enake dele, je objavil francoski matematik Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1848) leta 1837 (Hladnik, 2014).

Kot pa lahko razdelimo na tri enake dele s prepogibanjem papirja. V naslednjem poglavju opišemo to metodo. Metodo povzemamo iz (Hull, 2021), dokaz pa smo naredili sami.

6. Delitev kota na tri enake dele s prepogibanjem papirja (Abejev način)

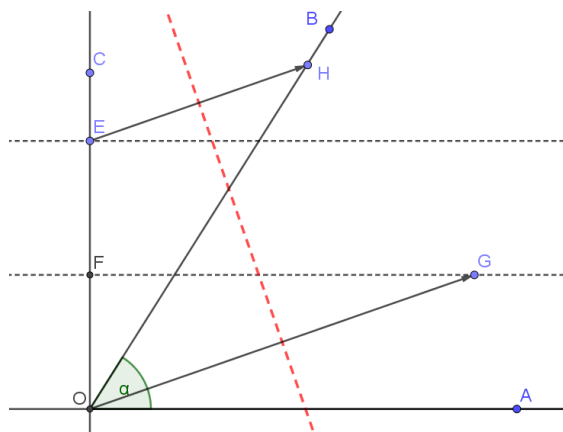
V Hullovi knjigi (Hull, 2021, 16) je opisana metoda razdelitve ostrega kota na tri enake dele avtorja Abeja in metoda razdelitve topega kota na tri enake dele avtorja Justina. V nadaljevanju bomo opisali Abejevo metodo tretjinjenja ostrega kota (Hull, 2021, 16).

V ravnini imamo ostri kot $\alpha = \text{kot } AOB$ (Slika 10). Naredimo pregib vzdolž kraka OA in pravokotnico v točki O na krak OA. Nato izberemo točko E in prepognemo tako, da naredimo vzporedni pregib h kraku OA. Na sredini med tema vzporednicama naredimo še en vzporedni pregib (točka F razpolavlja daljico OE).



Slika 10: Prvi korak pri tretjinjenju kota

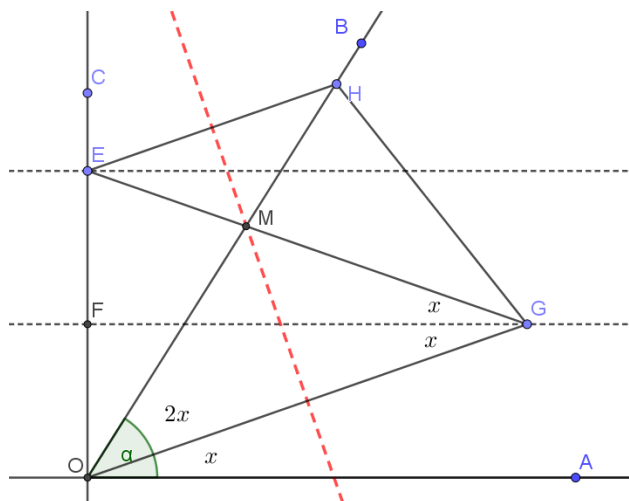
Nato prepognemo papir tako, da točka O sovпада na prvo vzporednico (skozi F), točka E pa na krak kota OB (Slika 11). Odtis točke O na vzporednici skozi F označimo z G. Nato naredimo pregib skozi OG. Kot AOG je ravno tretjina prvotnega kota $\alpha = \text{kot } AOB$.



Slika 11: Izvedba pregiba, ki tretjini kot

Dokažimo, da je to res (Slika 12).

Iz same konstrukcije sledi, da sta daljici OE in GH enako dolgi in da sta stranici OG in EH vzporedni (pregib – črtkana črta – je pravokoten na obe daljici).



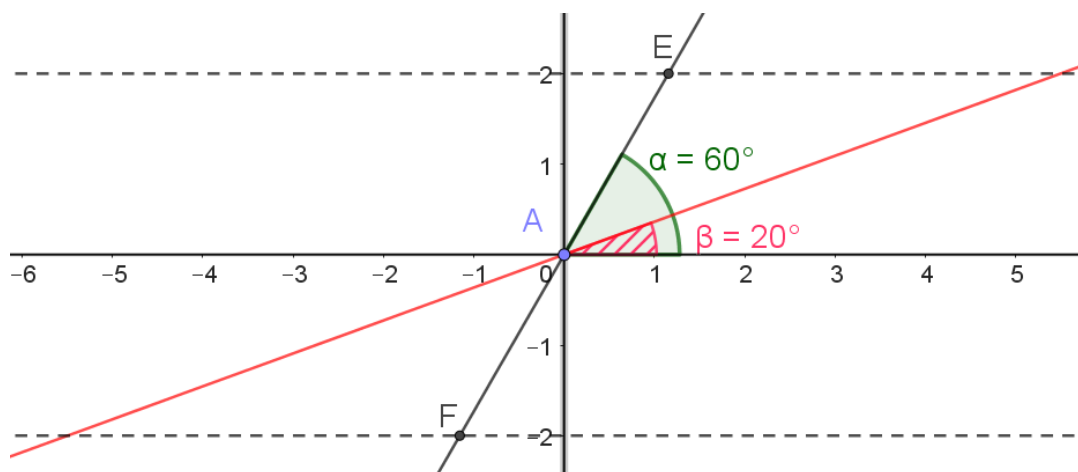
Slika 12: K dokazu tretjinjenja kota

Štirikotnik OGHE je enakokrak trapez, trikotnik EOG pa enakokrak, ker leži točka F na razpolovišču daljice OE in je FG pravokotna na OE. Označimo kot $\angle AOG$ z x : $\angle AOG = x$. Ker sta premici skozi OA in FG vzporedni, je potem tudi kot $\angle OGF = x$. Tako je kot ob vrhu enakokrakega trikotnika EOG enak $2x$. Ker je trikotnik OGM enakokrak (saj je OGHE enakokraki trapez), velja $\angle OGM = \angle GOM = 2x$. Dobili smo, da je kot $\alpha = \angle AOB = 3x$ oziroma je kot x enak natanko tretjini kota α .

7. Nov način delitve ostrega kota na tri enake dele

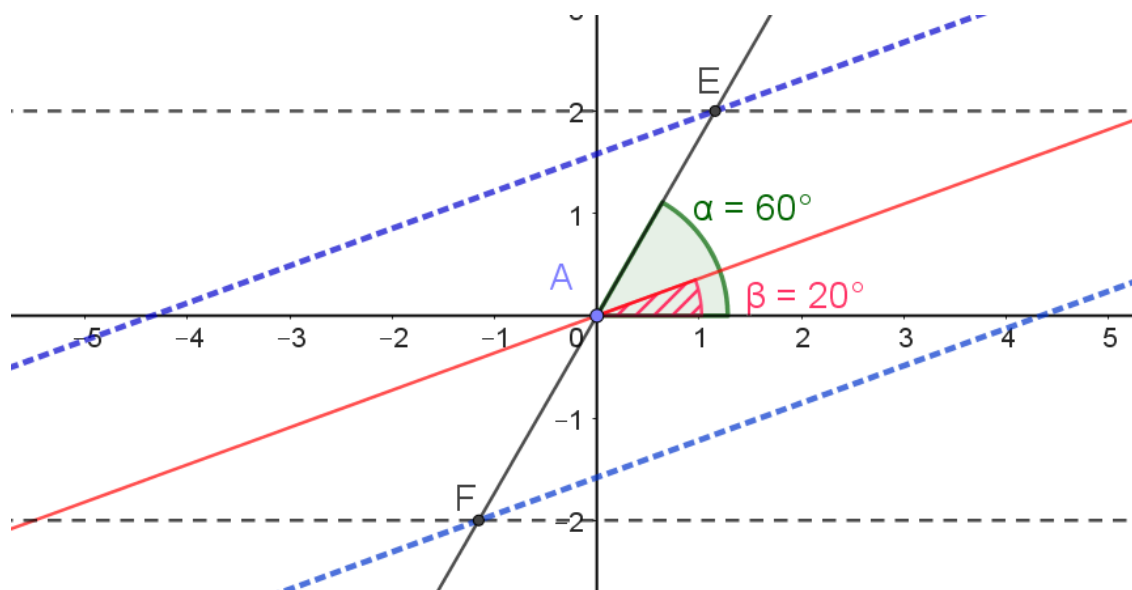
7.1 Ideja

Če si nekoliko podrobneje pogledamo Abejevo metodo (glej Sliko 12), opazimo, da je Abe naredil dve vzporednici k prvemu kraku kota na enakih razdaljah. Namesto tega poskusimo narediti po eno vzporednico prvemu kraku kota na vsaki strani prvega kraka kota. Vsakega izmed krakov podaljšamo v premico. Prav tako kot pri Abejevi metodi naredimo v vrhu kota pravokotnico. Vzporednici naj sekata premico, ki vsebuje drugi krak kota, v točkah E in F (Slika 13). Izhajamo iz končnega rezultata. Zato narišemo dva kota na primer kot 60° in kot 20° . Premica, nosilka drugega kraka kota 20° , je na Sliki 13 obarvana rdeče.



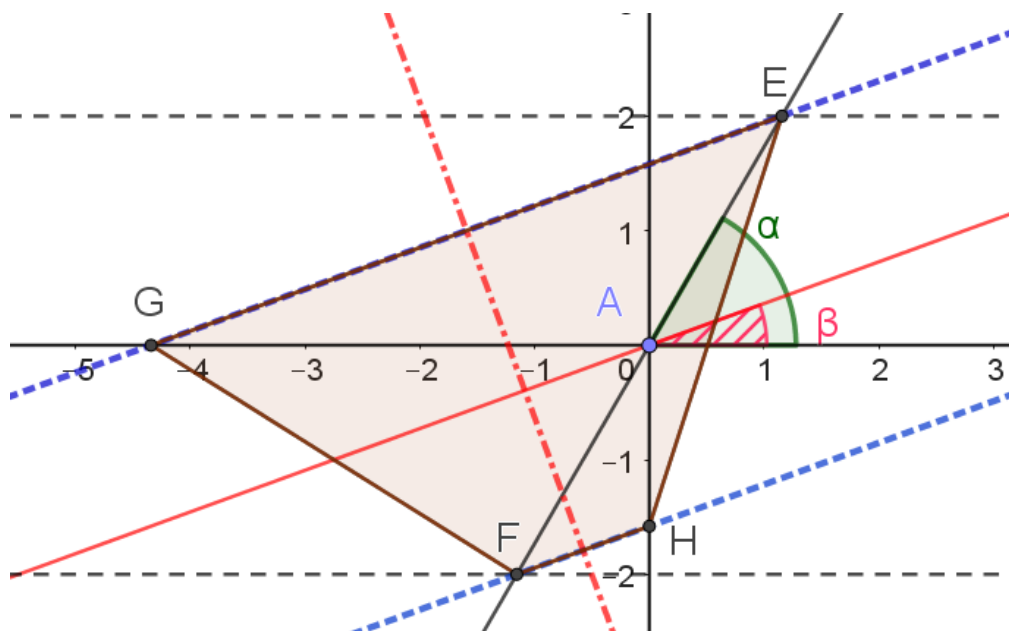
Slika 13: Iskanje ideje novega tretjinjenja ostrega kota

Pri Abejevi konstrukciji (Slika 12) je pregib narejen v smeri pravokotno na krak kota OG . Pri pregibu sta upoštevani točki E in F. Naredimo tudi mi tako in sledimo tej ideji. Narišemo vzporednici skozi točki E in F k drugemu kraku kota, ki je enak tretjini prvotnega kota (Slika 14, rdeča premica).



Slika 14: Razvoj ideje novega tretjinjenja

Če pogledamo Abejevo konstrukcijo, opazimo značilni enakokraki trapez (na Sliki 12 je to trapez $OGHE$.) Pregib poteka simetrično na osnovnici trapeza. Skušajmo poiskati podoben enakokraki trapez na Sliki 14. Sklepamo, da bosta osnovnici tega trapeza ležali na vzporednicah k drugemu kraku kota (tretjini prvotnega kota) skozi točki E in F . Zato poiščemo presečišči teh dveh vzporednic z nosilko prvega kraka kota α (označimo z G) in s pravokotnico na prvi krak v vrhu A (označimo s H) ter narišemo daljice HF , FG in HE (Slika 15). Označimo trapez $EGFH$. V GeoGebri narišemo simetrali vsake izmed osnovnic in opazimo, da sovpadata. Sklepamo, da je trapez $EGFH$ enakokrak. Preiskovali smo tudi pri poljubno izbranem kote α in vedno dobili enakokraki trapez. Iz tega pa sedaj v obratni smeri izpeljemo nov postopek delitve ostrega kota na tri enake dele.



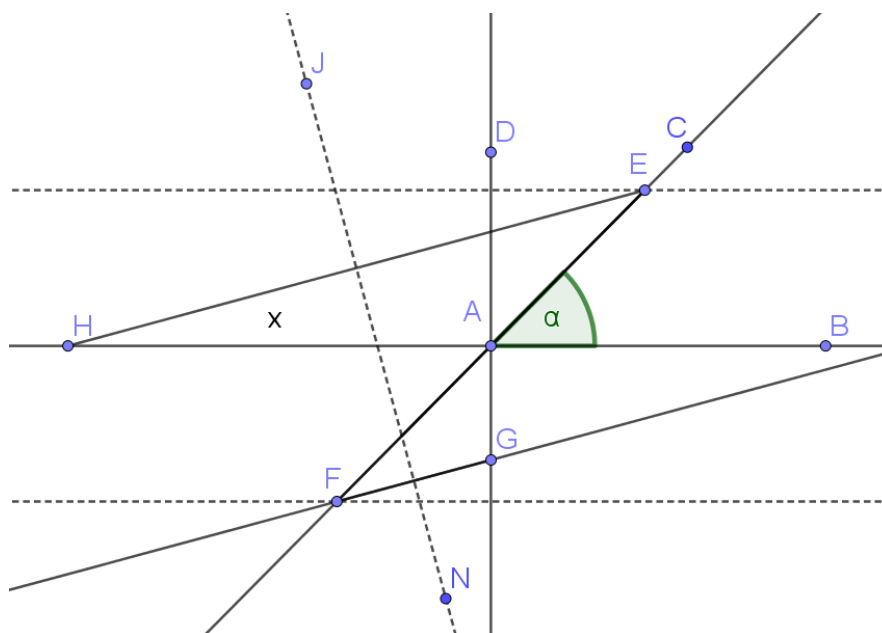
Slika 15: Končni korak razvoja ideje iskanja novega postopka tretjinjenja ostrega kota

7.2 Nov način delitve kota na tri enake dele – metoda TSM

Idejo, ki smo jo razvili s pomočjo Abejeve metode delitve ostrega kota na tri enake dele, podrobneje opišimo in dokažimo. To metodo bomo poimenovali »metoda TSM« (po avtorjih).

Potek (glej sliko 16):

1. Narišemo kot α in podaljšamo krake.
2. V vrhu A naredimo pravokotnico (to je premico skozi A in D) na prvi krak kota AB
3. Naredimo vzporednici k prvemu kraku na enakih razdaljah na vsaki strani. Vzporednici sekata premico, nosilko drugega kraka kota, v točkah E in F .
4. Nato naredimo pregib tako, da točko E preslikamo na podaljšek prvega kraka kota (to je na premico AB) in hkrati nosilko pravokotnice AD položimo na točko F .
5. Sliko točke E na premici AB označimo s H . Povežemo H in E .
6. Hipoteza: Kot AHE je ena tretjina kota α .

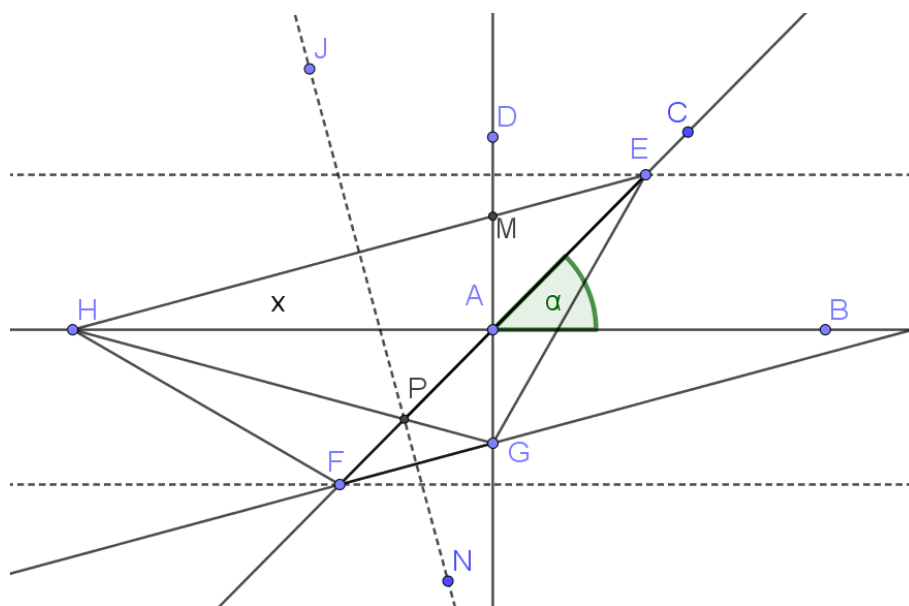


Slika 16: Prikaz novega postopka tretinjenja kota

Če narišemo vzporednico k daljici HE skozi A in razpolovimo preostanek kota α , razdelimo kot α na tri enake dele.

Dokaz (glej Sliko 17):

- Najprej narišimo daljice: HF , GE in HG .
- Presečišče med daljico HE in premico GD označimo z M .
- Presečišče diagonal trapeza HG in FE naj bo točka P .
- Z x označimo kot AHE . (Kot $BAC = \alpha$.)



Slika 17: K dokazu novega postopka tretjinjenja ostrega kota

Sklepamo:

- Ker sta premici skozi FG in HE vzporedni in ker je $EA = AF$ (vzporednici skozi E in F sta enako oddaljeni od prvega kraka kota), je tudi $AM = AG$. To ugotovitev lahko utemeljimo tudi s skladnostjo trikotnikov AEM in AFG . Ujemata se v stranicah $AE = AF$ ter v kotih: kota GFA in MEA sta skladna, ker sta izmenična kota ob vzporednicah, kota MAE in GAF pa sta sovršna. Ker sta trikotnika AEM in AFG skladna, se ujemata tudi v ostalih stranicah. Tako je $AM = AG$.
- Trikotnik GMH je enakokrak, ker je $AM = AG$ in je HA pravokotna na GM .
- Kot AHM naj bo enak x .
- Ker je trikotnik GMH enakokrak, je tudi kot $AHG = x$ in zato je kot $GHM = 2x$.
- Ker je trikotnik HPE enakokrak (točka P leži na simetrali HE), sta kota EHP in HEP skladna in torej enaka $2x$. Tako je kot $MEA = 2x$.
- Ker je kot HAM pravi kot, je kot $HMA = 90^\circ - x$.
- Ker je kot $HMA = 90^\circ - x$, je kot AME enak $90^\circ + x$ (skupaj imata 180°).
- Izračunamo kot MAE v trikotniku AEM : kot $MAE = 180^\circ - 2x - (90^\circ + x) = 90^\circ - 3x$.
- Kot $BAM = 90^\circ$, zato je: $90^\circ = \alpha + \text{kot } MAE = \alpha + 90^\circ - 3x$. Od tu izračunamo, da je

$$\alpha = 3x, \text{ torej je } x = \frac{\alpha}{3}.$$

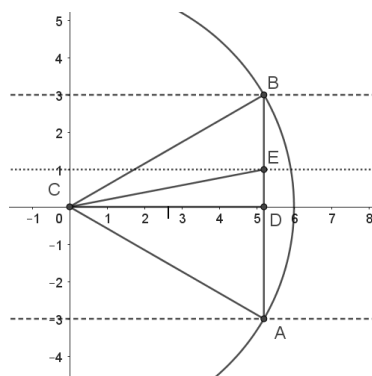
Pri pregledu nam dostopne literature s tega področja nismo našli metodo delitve ostrega kota na tri enake dele, kot smo jo opisali pod imenom »metoda TSM«. Edino v članku (Justin, stran 12) je matematik Justin uporabil podobno idejo za tretjinjenje topega kota. Njegov postopek ni direktno uporaben za tretjinjenje ostrega kota. Pa tudi dokaz je bistveno drugačen od zgoraj opisanega. Podobno je tudi v (Hull, 2021, stran 18).

8. Natančna konstrukcija pravilnega sedemkotnika

V tem poglavju bomo opisali natančno konstrukcijo pravilnega sedemkotnika. Združili bomo obe metodi (neoznačeno ravnilo in šestilo, to je evklidsko orodje) ter prepogibanje papirja. Daljico CF na Sliki 8 bomo konstruirali s pomočjo prepogibanja papirja. Uporabili bomo metodo, ki smo jo opisali v prejšnjem poglavju. Konstrukcijo lahko izvedemo na papirju z uporabo šestila, neoznačenega ravnila in prepogibanja papirja. Lahko pa jo izvedemo tudi s programom za geometrijo. V nalogi smo uporabili program Geogebra. Plemelj je konstruiral dolžino stranice pravilnega sedemkotnika v enakostraničnem trikotniku s stranico 1. Plemelj sedemkotnik potem vrišemo v krožnico s polmerom 1. Ker sta polmer očišrtane krožnice in stranica pravilnega sedemkotnika premo sorazmerni, lahko vzamemo enakostranični trikotnik s stranico a in v njem konstruiramo stranico pravilnega sedemkotnika. Potem to stranico naneseemo na krožnico s polmerom a . Zaradi preprostejših slik smo pri naši konstrukciji v Geogebri vzeli, da je stranica enakostraničnega trikotnika dolga 6 enot.¹ Stranico bomo na koncu nanесли na krožnico s polmerom 6.

Potek natančne konstrukcije pravilnega sedemkotnika

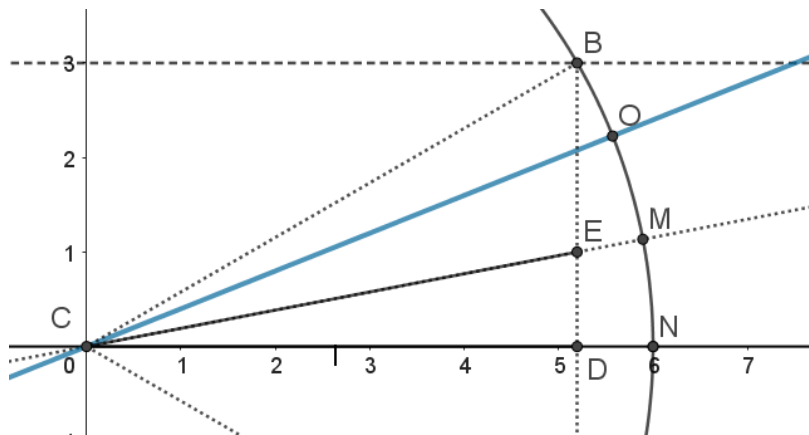
Prvi korak: Narišemo enakostranični trikotnik (Slika 18). Postavimo ga tako, da bo potem lažje tretjiniti kot. Točka D je razpolovišče stranice AB , točka E pa tretjini stranico AB .



Slika 18: Prvi korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja

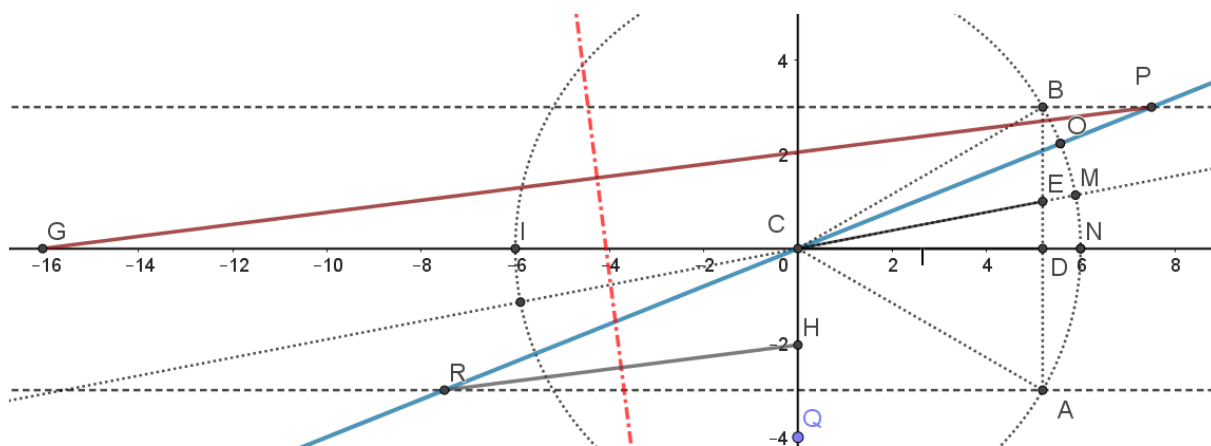
¹ Če bi vzeli poljubno dolžino stranice AB , bi jo razdelili na tri enake dele z običajno metodo delitve daljice na n enakih delov s pomočjo pomožnega poltraka ...)

Ker je kot $\angle DCE$ majhen in bo izvedba tretjinjenja nekoliko nerodna, podvojimo kot $\angle DCE$ (Slika 19). Na tri enake dele bomo razdelili kot $\angle NCO$, potem pa tretjino razpolovili.



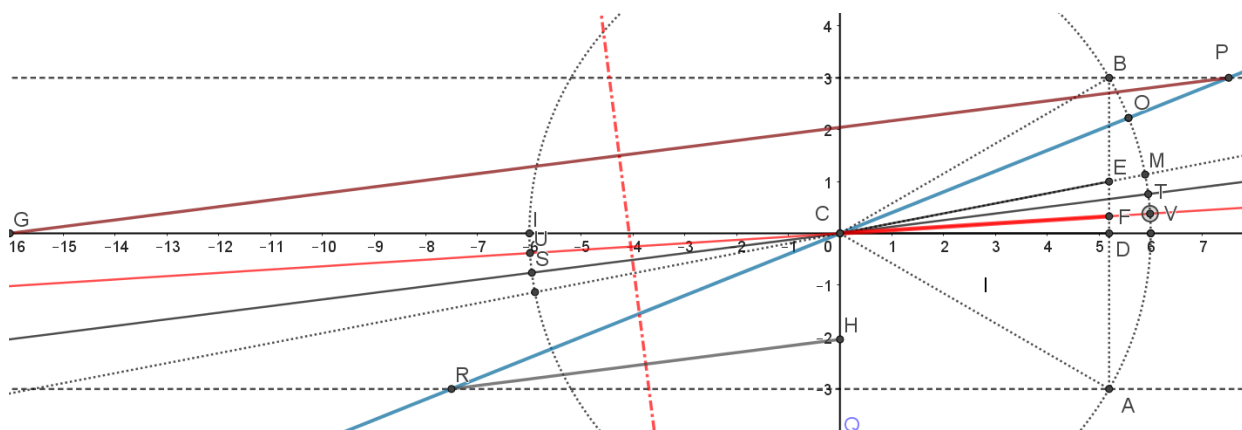
Slika 19: Drugi korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja

Na Sliki 20 je prikazana delitev kota $\angle NCO$ na tri enake dele po metodi, ki smo jo izpeljali sami. Narišemo vzporednici k prvemu kraku na razdalji 3: $y = 3$ in $y = -3$. (V našem primeru sta že narisani). Nosilka drugega kraka kota $\angle NCO$, to je premica skozi točki C in O , seka vzporednici v točkah P in R . Nato naredimo pregib tako, da točka P pade na podaljšek prvega kraka kota (točko označimo z G) in hkrati, da se pravokotnica na prvi krak pokrije s točko R (točka H). Kot $\angle CGP$ je iskani kot (ki je sicer dvakrat večji od tretjine prvotnega kota).

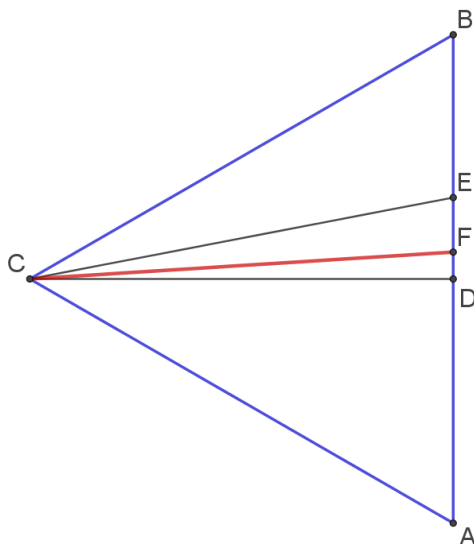


Slika 20: Tretji korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja

Narišemo vzporednico skozi točko C k daljici GP (to je premica skozi C in T) ter razpolovimo kot DCT (glej sliko 21). Kot DCF je enak eni tretjini prvotnega kota DCE . Točka F naj bo presečišče kraka CV s stranico AB enakostraničnega trikotnika. Daljica CF je enaka stranici pravičnega sedemkotnika (Slika 21). Na Sliki 22 je prikazan »Plemljev trikotnik« s Slike 8 z vrisano natančno dolžino stranice pravičnega sedemkotnika.

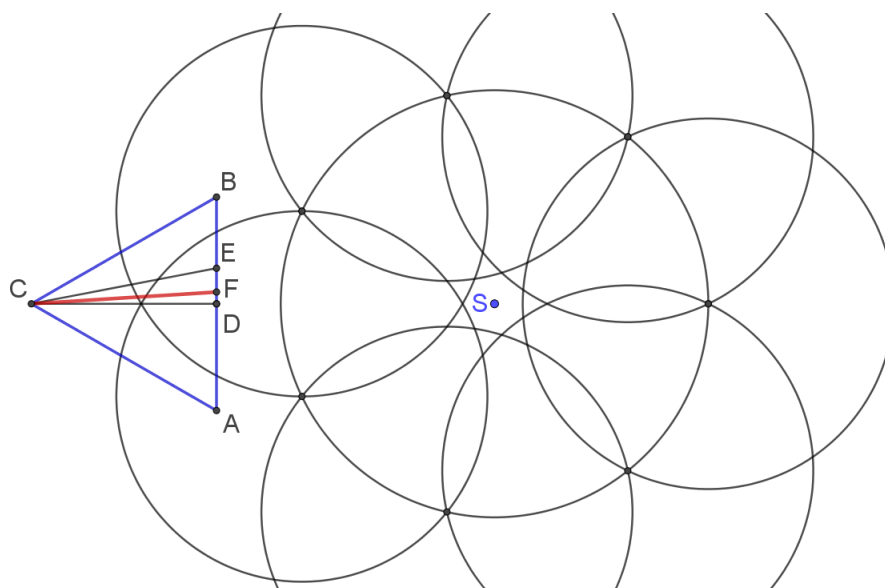


Slika 21: Četrti korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja

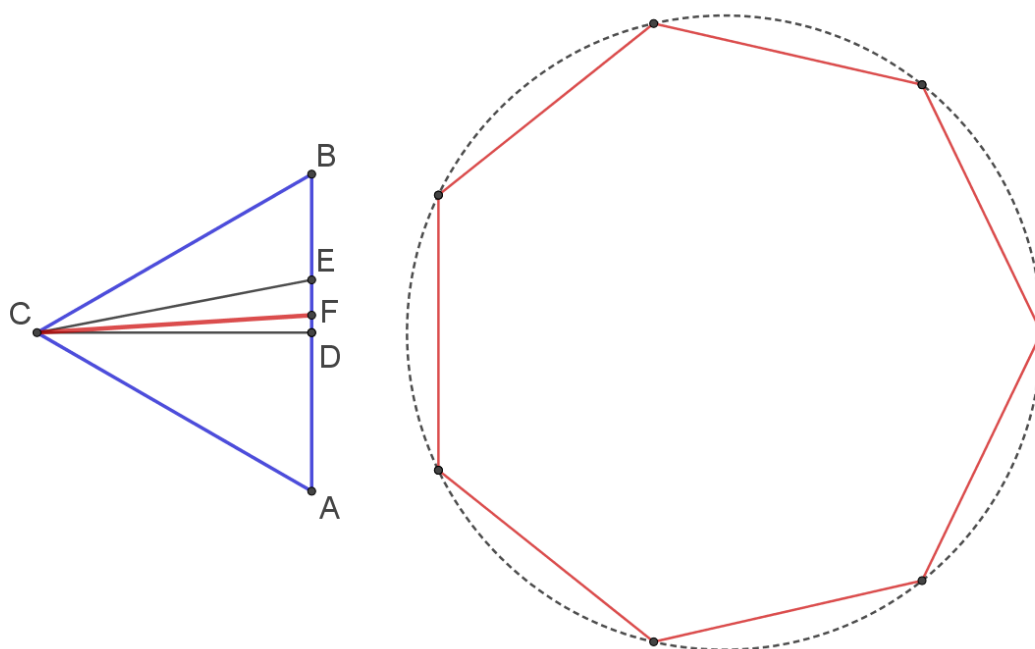


Slika 22: Peti korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja

Sledi konstrukcija pravilnega sedemkotnika: narišemo krožnico s polmerom 6 in nanjo nanesimo stranice CF . Na Sliki 23 je prikaz nanašanja v Geogebri, na Sliki 24 pa končni rezultat.



Slika 23: Šesti korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja



Slika 24: Sedmi korak konstrukcije z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja

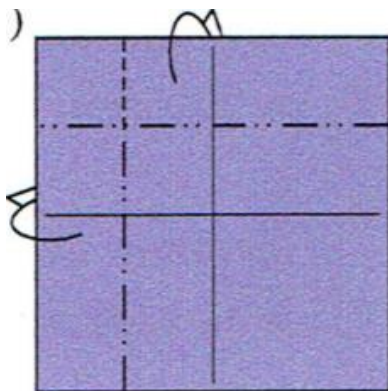
9. Natančna konstrukcija pravilnega sedemkotnika samo s prepogibanjem papirja

V knjigi (Hull, 2021) sta opisana dva načina, kako samo s pomočjo prepogibanja papirja konstruiramo pravilni sedemkotnik. Prvi način na strani 20 vsebuje samo enojne pregibe, drugi način na strani pa večkratni pregib in sicer 5-kratni. Večkratni pregib je pregib, ko naredimo hkrati več pregibov in pazimo na njihovo medsebojno ujemanje. Primer dvojnega pregiba je tretjinjenje kota, ko »primemo kraka« in ju zapognemo proti notranjosti kota tako, da dobimo tri enake kote. V nadaljevanju povzemamo iz istega vira opise, dokazi pa presegajo naše znanje.

9.1. Natančna konstrukcija pravilnega sedemkotnika z enojnimi pregibi

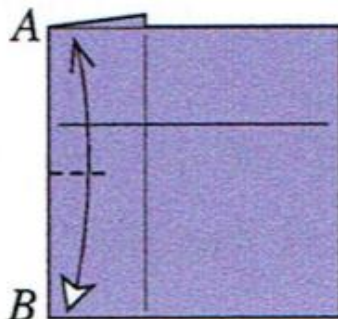
Thomas Hull v (Hull, 2021) navaja postopek konstrukcije pravilnega sedemkotnika s prepogibanjem papirja. Tu navajamo postopek, ki smo ga nekoliko skrajšali. Slike so skenirane iz (Hull, 2021, 20).

Prvi korak. Kvadrat prepognemo na polovico v vodoravni in v navpični smeri. Vodoravno simetralo označimo z L_1 , navpično pa z L_2 , njuno presečišče z O . Točko na sredini desne stranice pa s C . Nato prepognemo čez polovici še zgornjo in levo polovico. Zgornjo četrtino zapognemo nazaj za kvadrat, prav tako levo četrtino. Dobimo situacijo na naslednji Sliki 25.



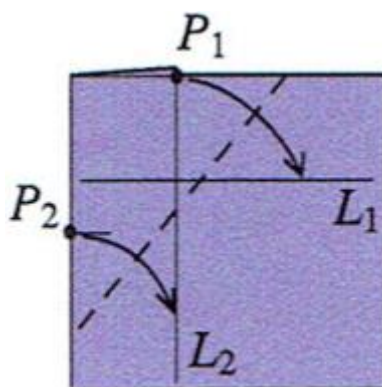
Slika 25: Prvi korak konstrukcije s prepogibanjem papirja

Drugi korak: Točki A in B prepognemo skupaj in naredimo majhen pregib na levi stranici (pomanjšanega kvadrata). Točko na sredini daljice AB označimo s P_2 , točko na vrhu navpične simetrale prvotnega kvadrata pa s P_1 (Slika 26).



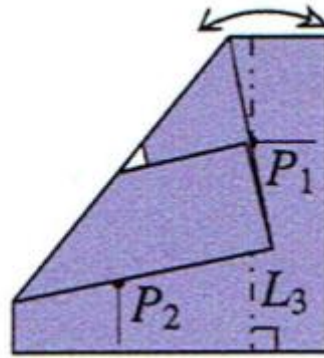
Slika 26: Drugi korak konstrukcije s prepogibanjem papirja

Tretji korak: Naredimo pregib tako, da hkrati postavimo točko P_1 na premico L_1 in točko P_2 na premico L_2 (črtkana črta je nastali pregib) (Slika 27).



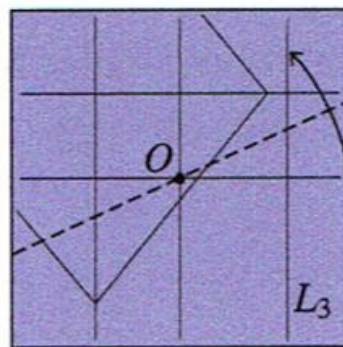
Slika 27: Tretji korak konstrukcije s prepogibanjem papirja

Četrti korak: S svinčnikom označimo odtis točke P_1 na premici L_1 . Skozi odtis točke P_1 (ki je nastala na premici L_1), naredimo pregib, ki je pravokoten na spodnjo stranico kvadrata. Ta pregib označimo z L_3 . Vse zavihke poravnamo nazaj in dobimo prvotni kvadrat (Slika 28).



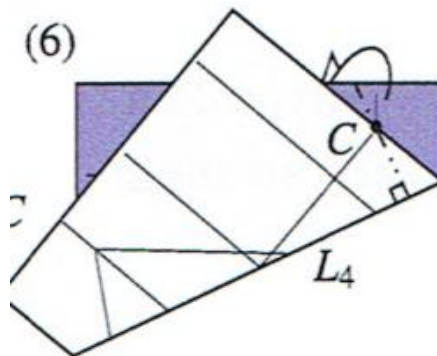
Slika 28: Četrty korak konstrukcije s prepogibanjem papirja

Peti korak: Točka C je razpolovišče desnega roba prvotnega kvadrata. Naredimo pregib (označimo ga z L_4) tako, da prepognemo točko C na premico L_3 in hkrati poteka skozi točko O . Označimo točko, kjer točka C pade na premico L_3 (odtis točke C na L_3 označimo s C') (Slika 29).



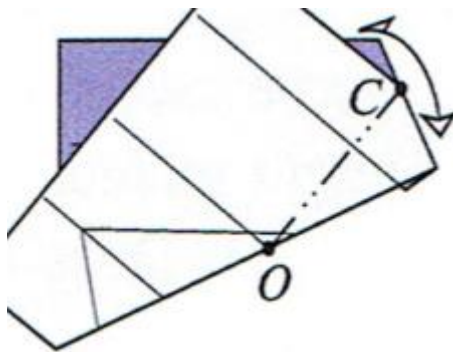
Slika 29: Peti korak konstrukcije s prepogibanjem papirja

Šesti korak: Desni vogal zapognemo za kvadrat tako, da poteka skozi novo točko C' in je pravokoten na pregib L_4 (Slika 30).



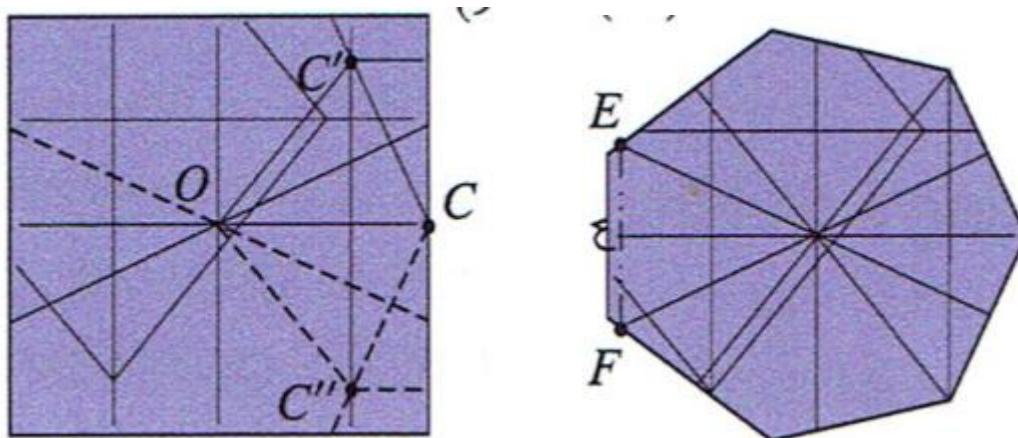
Slika 30: Šesti korak konstrukcije s prepogibanjem papirja

Sedmi korak (Slika 31): Naredimo pregib skozi O in novo točko C' . Ta pregib že obstaja, a ga sedaj naredimo skozi vse plasti. Potem vse poravnamo v prvotni kvadrat.



Slika 31: Sedmi korak konstrukcije s prepogibanjem papirja

Osmi korak: Naredimo pregib skozi točki C in C' . Daljica CC' je stranica pravilnega sedemkotnika. Naredimo pregib preko $L1$ in označimo odtis točke C' s C'' na $L3$. Nato smiselno nadaljujemo določanje oglišč in stranic, dokler ne dobimo pravilnega sedemkotnika (Slika 32). Na Sliki 33 je fotografija pravilnega 7-kotnika, ki smo jo naredili samo s prepogibanjem papirja.



Slika 32: Zaključek konstrukcije s prepogibanjem papirja

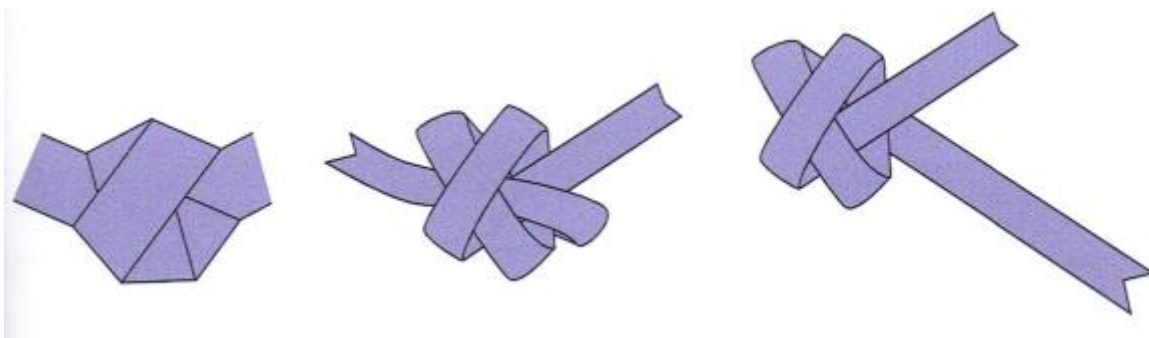


Slika 33: Fotografija končanega pravičnega sedemkotnika s prepogibanjem papirja

(Foto: Samo Maček)

9.2. Natančna konstrukcija pravilnega sedemkotnika z vozlom

V knjigi (Hull, 2021, 60) je opisan način prepogibanja traku z vozlom. Kot je razloženo, gre za hkraten nastanek petih pregibov. Navajamo brez dokaza. Potek je prikazan na Sliki 34, fotografija končnega izdelka pa na Sliki 35.



Slika 34: Nastanek pravilnega sedemkotnika s pomočjo vozla

(Vir slike: Hull 2021, stran 60)



Slika 35: Fotografija končnega pravilnega sedemkotnika s pomočjo vozla

(Foto: Samo Maček)

10. Zaključek

Na začetku našega raziskovanja smo si zastavili tri raziskovalna vprašanja in sicer:

1. Zakaj z (neoznačenim) ravnilom in šestilom ne moremo konstruirati pravilnega sedemkotnika?
2. Katere pravilne večkotnike sploh lahko konstruiramo z (neoznačenim) ravnilom in šestilom?
3. Kako bi natančno narisali pravilni sedemkotnik?

Na vsa tri vprašanja nam je uspelo odgovoriti.

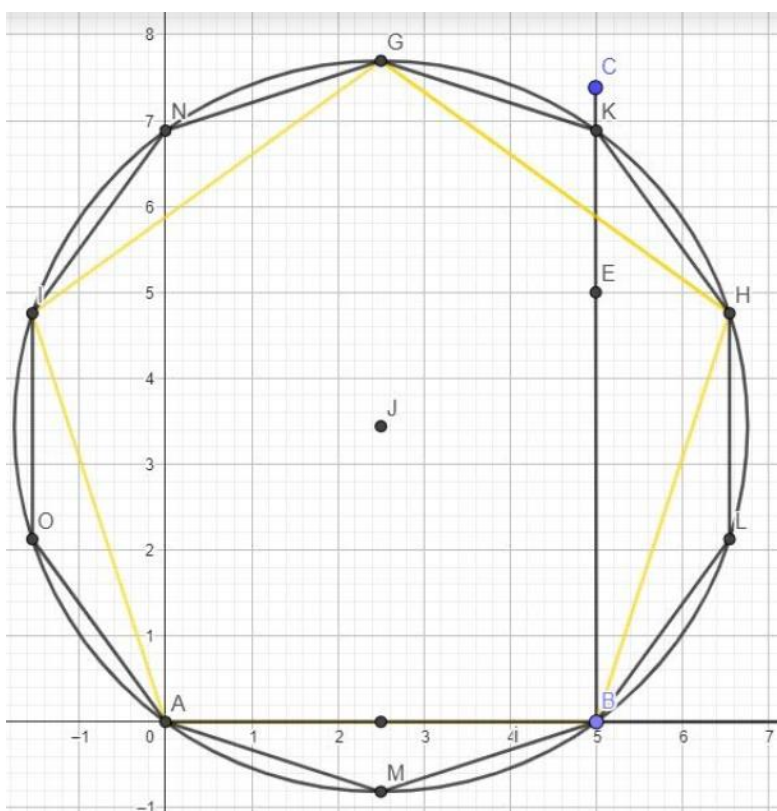
1. Pravilnega sedemkotnika ne moremo narisati samo z (neoznačenim) ravnilom in šestilom, ker so matematiki dokazali, da to ni mogoče. V postopku konstrukcije je potrebno določen kot razdeliti na tri enake dele. Delitev kota na tri enake dele je eden izmed znanih starogrških problemov (*tretjinjenje kota, podvojitev kocke in kvadratura kota*) in so konec 19. stoletja dokazali, da v splošnem ni možna samo z (neoznačenim) ravnilom in šestilom.
2. Matematika Gauss in Wantzel sta izpeljala pogoj, s katerim lahko preverimo, ali lahko pravilni n -kotnik konstruiramo samo z ravnilom in šestilom. Število n moramo razcepiti in ugotoviti, ali ustreza pogoju izreka na strani 13.

Na primer:

- pravilni dvajsetkotnik: $n = 20 = 2^2 \cdot 5$. Ker je n enak produktu potence števila 2 in Fermatovega praštevila, je pravilni dvajsetkotnik možno konstruirati samo z ravnilom in šestilom,
- pravilni dvainvajsetkotnik: $n = 22 = 2 \cdot 11$. Ker praštevilo 11 ni Fermatovo, pravilnega dvainvajsetkotnika ne moremo konstruirati samo z (neoznačenim) ravnilom in šestilom,
- pravilni 42-kotnik: $n = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Ker je n enak produktu števila 2 in dveh različnih Fermatovih praštevil, je pravilni 42-kotnik možno konstruirati samo z ravnilom in šestilom,
- pravilni devetkotnik: $n = 9 = 1 \cdot 3 \cdot 3$. Število 3 je sicer Fermatovo praštevilo, a se dvakrat ponovi. Biti morajo le različna Fermatova praštevila (ki so lahko pomnožena s potencami števila 2).
- pravilni 32-kotnik: $n = 32 = 2^5 \cdot 1$. Ker je n enak potenci števila 2, je pravilni 32-kotnik možno konstruirati samo z ravnilom in šestilom.

3. Ugotovili smo, da je *pravilni sedemkotnik* najmanjši n -kotnik, ki se ga ne da konstruirati z neoznačenim ravnilom in šestilom, saj je $n = 7 = 1 \cdot 7$ in 7 ni Fermatovo praštevilo.

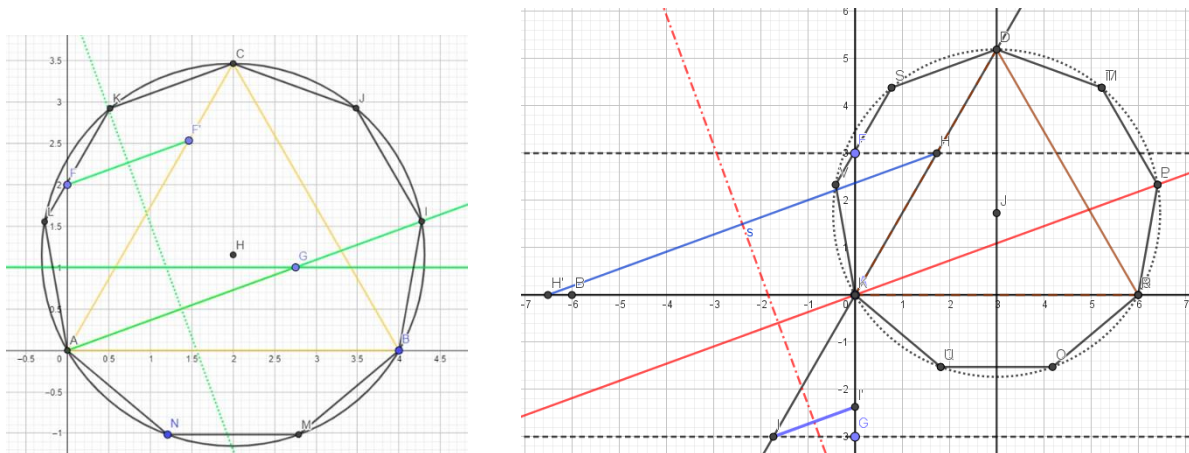
Pravilni petkotnik ustreza pogoju risanja, saj je $5 = 1 \cdot 5$ in je 5 Fermatovo praštevilo. Konstrukcija ne gre na enostavni način preko kota 60° , a so odkrili druge načine. Enega izmed njih smo opisali v nalogi, več pa je v viru (Hladnik, 1014). Iz konstrukcije pravilnega petkotnika dobimo pravilni desetkotnik z oglišči v presečiščih simetral stranic petkotnika in očrtane krožnice (Slika 36).



Slika 36: Natančna konstrukcija pravilnega desetkotnika z ravnilom in šestilom

Pri konstrukciji pravilnega sedemkotnika smo del postopka, ki ga ne moremo narediti z (neoznačenim) ravnilom in šestilom, nadomestili z natančno metodo delitve kota na tri enake dele s pomočjo prepogibanja papirja. Metodo smo razvili sami. Z uporabo (neoznačenega) ravnila, šestila in prepogibanja papirja smo naredili natančno konstrukcijo pravilnega sedemkotnika. Na osnovi pridobljenega znanja smo konstruirali tudi pravilni devetkotnik: v enakostraničnem trikotniku smo s pomočjo prepogibanja papirja razdelili

notranji kot na tri enake dele po Abejevi metodi na levi strani Slike 37 in na desni strani iste slike po metodi avtorjev.



Slika 37: Konstrukcija pravilnega 9-kotnika z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja

Na koncu lahko odgovorimo tudi na uvodni izziv, zakaj v osnovni šoli nikoli ne rišemo pravih petkotnikov, sedmokatnikov in devetkotnikov. Odgovor je na dlani. Konstrukcija pravilnega petkotnika je zahtevnejša, konstrukcija pravilnega sedemkotnika in pravilnega devetkotnika pa nemogoča samo z (neoznačenim) ravnilom in šestilom.

V prihodnje bi bilo še zanimivo raziskovati:

- kako lahko z ravnilom in šestilom narišemo tiste pravilne n -kotnike, ki jih je možno narisati, kjer je $n > 10$;
- kako lahko z ravnilom, šestilom in prepogibanjem papirja narišemo tiste pravilne n -kotnike, ki jih je možno narisati, kjer je $n > 10$;
- kako lahko samo s prepogibanjem papirja narišemo pravilne n -kotnike.

11. Viri in literatura

[1] HLADNIK, Milan. 2013. JOSIP PLEMELJ IN PRAVILNI SEDEMKOTNIK. Obzornik za matematiko in fiziko, september, leto 60, št. 5, str. 161- 172. ISSN 0473-7466.

<https://www.dlib.si/stream/URN:NBN:SI:DOC-A2032KG6/81a34da6-efd2-4593-ae32-1539ce83c934/PDF> (2022-10-05)

[2] HLADNIK, Milan. 2014. Franc Močnik in konstrukcija pravilnega petkotnika

http://www2.arnes.si/~supmrazp/Zgodovina/MocZMP5K_b.pdf (2022-10-10)

[3] HULL, C. Thomas. 2021. *ORIGAMETRY: Mathematical Methods in Paper Folding*. Cambridge University Press. Cambridge.

[4] JUSTIN, Jaques. Resolution par le pliage de l'equation du troisieme degre at applications geometriques

https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/L_Ouvert/n042/o_42_9-19.pdf

12. Priloge

Prikaz konstrukcije pravičnega sedemkotnika s prepogibanjem papirja

