

Osnovna šola Alojzija Šuštarja
Štula 23
Ljubljana



KAPREKARJEVA KONSTANTA

Raziskovalna naloga

Področje: OŠ matematika

Avtorici: Nuša Demšar in Neža Jeromen, 9. razred
Mentor: mag. Ambrož Demšar

Ljubljana, marec 2023

KAZALO

1	UVOD.....	4
2	TEORETIČNI DEL	5
2.1	KAPREKARJEVA KONSTANTA.....	5
2.2	D. R. KAPREKAR	5
2.3	CILJI RAZISKOVALNE NALOGE.....	6
2.4	METODE RAZISKOVANJA	7
3	EMPIRIČNI DEL	8
3.1	KONSTANTA ZA TRIMESTNA ŠTEVILA.....	8
3.2	KONSTANTA ZA DVOMESTNA ŠTEVILA	11
3.3	KONSTANTA ZA PETMESTNA ŠTEVILA.....	12
3.4	KONSTANTA PRI ŠTIRIMESTNIH ŠTEVILIH	13
3.5	ZAKAJ POSTOPEK VODI V KONSTANTE ALI CIKLE?	16
4	ZAKLJUČEK.....	18
5	VIRI IN LITERATURA.....	19
	PRILOGA A: Mreže za 6-, 7-, 8-, 9- in 10-mestna števila	20
	PRILOGA B: Program za izračun zaporedja.....	25
	PRILOGA C: Izris mreže v programu Orange	26
	PRILOGA D: Ročni izračuni zaporedja za nekaj števil	27

KAZALO SLIK

Slika 1:	Dattatreya Ramchandra Kaprekar	6
Slika 2:	Poti trimestnih števil do konstante 495	11
Slika 3:	Mreža petmestnih števil.	13
Slika 4:	Mreža štirimestnih števil	15
Slika A.1:	Mreža za šestmestna števila.	20
Slika A.2:	Mreža za sedemmestna števila.....	21
Slika A.3:	Mreža za osemestna števila.....	22
Slika A.4:	Mreža za devetmestna števila.....	23
Slika A.5:	Mreža za desetmestna števila.....	24
Slika C.1:	Izris mreže s programom Orange	26

POVZETEK

V nalogi sva raziskovali Kaprekarjevo konstanto za dvomestna, trimestna, štirimestna in petmestna števila. Razmišljali sva tudi o številu korakov, ki vodijo do konstante ter zakaj do Kaprekarjeve konstante sploh pride. Ugotovili sva, da se Kaprekarjev postopek vedno izteče v cikel ali konstanto.

Ključne besede: Kaprekarjeva konstanta, zaporedja števil, razvedrilna matematika

ABSTRACT

In the research paper, we were studying the Kaprekar constant for two-digit, three-digit, four-digit and five-digit numbers. We were also researching how many steps lead to the constant and why do we get Kaprekar's constants at all. We found out that Kaprekar's constant always leads to a cycle or a constant.

Keywords: Kaprekar's constant, sequences of numbers, recreational mathematics

1 UVOD

Sva Nuša in Neža, učenki devetega razreda osnovne šole in za temo Kaprekarjeve konstante sva se odločili, ker imava obe radi izzive in naju zanimajo logične igre, zato je bila tema, v kateri se vsa števila končajo s konstanto, ravno prava za naju.

Preden sva začeli z raziskovanjem, o tem nisva vedeli skoraj nič, zato je bilo raziskovanje še toliko bolj zanimivo.

Na internetu o tej temi ne piše ravno veliko. Našli sva zelo malo slovenskih virov, eden od njih je tudi kratek članek matematične revije Presek z naslovom Pozor, črne luknje! (Osredkar, 1996; povzeto po Ecker, 1992), ki sva ga uporabili pri raziskovanju. Malo več pa je bilo angleških virov, a jih pri nalogi nisva uporabljali.

Na začetku sva si zastavili nekaj zanimivih vprašanj, ki so naju vodila skozi raziskovanje in pisanje te naloge. Pomagali sva si tudi s programom, ki ga je za namen raziskovalne naloge spisal Martin Demšar, in lahko izračuna zaporedja, ki jih dobimo pri večmestnih številih. Program je bil zelo dober dodatek k nalogi, saj je potrdil najine ugotovitve in nama pomagal pridobivati nove.

2 TEORETIČNI DEL

2.1 KAPREKARJEVA KONSTANTA

Člene Kaprekarjevega zaporedja računamo po naslednjem pravilu. Vzamemo poljubno štirimestno število, ki predstavlja prvi člen zaporedja, ter njegove številke uredimo po velikosti od največje do najmanjše. Od dobljenega števila odštejemo število z istimi števki v obratnem vrstnem redu. Razlika, ki jo dobimo, je naslednji člen zaporedja. Za primer sestavimo zaporedje z začetnim členom 3297.

$$9732 - 2379 = 7353$$

$$7533 - 3357 = 4176$$

$$7641 - 1467 = 6174$$

$$7641 - 1467 = 6174$$

$$7641 - 1467 = 6174 \dots$$

V zgornjem primeru so po treh korakih vsi členi zaporedja od četrtega dalje enaki 6174. To število imenujemo Kaprekarjeva konstanta.

Vsak člen zaporedja je odvisen le od prejšnjega člena. Ker členi prihajajo iz končne množice števil, se morajo prej ko slej ponoviti in za ponovljenim členom se ponovijo vsi naslednji. Tako se zaporedje, ne glede na izbrani začetni člen, prej ko slej izteče v cikel. Cikli so lahko različno dolgi. Poseben primer so cikli dolžine 1, torej en sam člen, ki se ponavlja, kar imenujemo konstanta.

Kaprekarjevo konstanto lahko iščemo s števili v poljubnem številskem zapisu in s poljubnim številom mest. Prvi člen zaporedja je lahko poljubno število.

2.2 D. R. KAPREKAR

Dattatreya Ramchandra Kaprekar (Slika 1) je bil indijski "rekreativni" matematik, po poklicu pa učitelj na osnovni šoli. Rodil se je 17. januarja 1905 v Dahanu. Nad matematiko ga je navdušil njegov oče. Postopek, ki ga raziskujeva v tej nalogi, je predstavil leta 1949 na matematični konferenci v Madrasu (Bhattacharjee, 2020). Poleg tega je raziskoval tudi druga števila, kot so lastna števila, Harshadova števila (1729, 1977) in Demlova števila (Wikipedia, 2022).

Lastna števila – Nekatera števila lahko »ustvarimo« tako, da vzamemo neko število (npr. 23) in mu prištejemo njegove številke ($23 + 2 + 3$ in ustvarimo število 28). Števila, ki jih ni mogoče ustvariti na ta način, imenujemo lastna števila (npr. 1, 3, 5, 7, 9, 20, 31 ...).

Kaprekarjevo število - Kaprekar je ugotovil, da imajo nekatera števila zanimivo lastnost – če jih kvadriramo, nato pa rezultat razdelimo na dva dela (dve števili) in

seštejemo obe števili, dobimo število, ki smo ga kvadrirali. Za primer si lahko pogledamo število 45. Če ga kvadriramo (45^2) dobimo število 2025. Če rezultat razdelimo na dve števili 20 in 25 in ju seštejemo, dobimo število 45.

Harshadovo število je poimenoval cela števila, ki so deljiva z vsoto svojih števk. Tako je npr. vsota števk števila 24 enaka 6 in število 24 je deljivo s 6. Tudi število 2023 je deljivo s 7, zato ga uvrščamo med Harshadova števila. Pri poimenovanju števil s tako zakonitostjo je uporabil besedo *harshad*, ki izhaja iz sanskirta in pomeni *veliko veselje*.

Najbolj znana **Demlova števila** so kvadrati števil, ki so sestavljeni iz enakih števk – npr. $1^2 = 1$, $11^2 = 121$, $111^2 = 12321$...



Slika 1: Dattatreya Ramchandra Kaprekar
(vir: https://en.wikipedia.org/wiki/D._R._Kaprekar)

Postopek za **Kaprekarjevo konstanto** je Kaprekar opisal v pismu reviji Scripta Mathematica (Kaprekar, 1949) kot "novo vrsto pasijanse". Pokazal je primer, kako iz 2359 v pet korakih pride do 6174 in zatrdil, da pride do tega števila pri vseh štirimestnih številih. Za petmestna števila je zapisal, da se vedno končajo z enim od treh možnih ciklov, ki sva jih, še preden sva odkrili to pismo s pomočjo računalniškega programa našli tudi sami. Za te trditve v svojem kratkem pismu ne navaja dokazov. Dodal je, da je našel nekaj ciklov za šest-, sedem-, osem- in devetmestna števila, vendar je njihovo raziskovanje težavno. Za razliko od naju, si pri svojem delu ni mogel pomagati z računalniškim programom.

Kaprekarja matematiki sprva niso jemali resno in zaslovel je šele, ko so o njem pisali v ameriškem časopisu. Umrl je leta 1986 star 80 let (Wikipedia, 2022).

2.3 CILJI RAZISKOVALNE NALOGE

Cilj raziskovalne naloge je bil odgovoriti na spodnja vprašanja:

1. Ali obstaja Kaprekarjeva konstanta tudi za dvomestna, trimestna, petmestna števila?
2. V največ koliko korakih dobimo Kaprekarjevo konstanto pri štirimestnih številih?
3. Ali obstajajo štirimestna števila, iz katerih ne dobimo Kaprekarjeve konstante?

4. Je postopek možno obrniti - ali je za vsako število možno izračunati njegovega predhodnika v zaporedju?
5. Zakaj postopek pri štirimestnih številih privede do Kaprekarjeve konstante?

Pri raziskovanju sva postavili naslednje hipoteze:

Hipoteza 1: Tudi za dvomestna, trimestna in petmestna števila obstaja Kaprekarjeva konstanta, le da je drugačna od tiste pri štirimestnih številih.

Hipoteza 2: Število korakov do konstante je majhno, okoli pet, in je odvisno od posameznega števila.

Hipoteza 3: Obstajajo štirimestna števila, iz katerih ne dobimo Kaprekarjeve konstante.

Hipoteza 4: Postopka ni mogoče obrniti. Obstajajo števila, ki nimajo predhodnika.

2.4 METODE RAZISKOVANJA

Pri raziskovanju sva uporabili metodo dela s strokovno literaturo, praktično preiskovanje problema, matematično sklepanje, posploševanje in dokazovanje.

Veliko števil sva preiskali s pisanjem računov na papir, za nekatere ugotovitve pa sva uporabili računalniški program, ki ga je v namen raziskovalne naloge napisal Martin Demšar.

3 EMPIRIČNI DEL

Ker so se nama petmestna števila zdela preveč zakomplicirana, da bi z njimi začeli, dvomestna pa preveč preprosta, sva začeli s trimestnimi in upali, da bova našli kakšno pravilo, ki ga lahko uporabiva tudi pri dvomestnih in petmestnih številih.

3.1 KONSTANTA ZA TRIMESTNA ŠTEVILA

Pri trimestnih številih tako kot pri štirimestnih, pridemo do konstante. Ponavljajoče se število je 495, razen v primeru, če so vse tri števke enake, ko dobimo konstanto 0.

Vzemimo na primer število 581:

$$\begin{aligned}851 - 158 &= 693 \\963 - 369 &= 594 \\954 - 459 &= \mathbf{495} \\954 - 459 &= \mathbf{495} \dots\end{aligned}$$

Opazimo, da je srednja števka vsakega člena zaporedja po prvem koraku vedno devet. To lahko tudi dokažemo z naslednjo enačbo, v kateri so a, b, c števke trimestnega števila, urejene po velikosti od največje do najmanjše. Takšno število bomo zapisali kot $[a][b][c]$.

$$\begin{aligned}[a][b][c] - [c][b][a] &= 100 \cdot a + 10 \cdot b + 1 \cdot c - (100 \cdot c + 10 \cdot b + 1 \cdot a) = \\&= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = \\&= a(100 - 1) + c(1 - 100) = \\&= 99a - 99c = \mathbf{99(a - c) = 99i}\end{aligned}$$

Ugotovimo, da je za konstanto pomembna samo razlika med največjo in najmanjšo števko izbranega števila, ki jo bomo v nalogi imenovali i . Če upoštevamo zgornjo enačbo, takoj ugotovimo, da nam za drugi člen zaporedja ostane le devet možnih števil:

- Če je $i = 1$, dobimo število 99
- Če je $i = 2$, dobimo število 198
- Če je $i = 3$, dobimo število 297
- Če je $i = 4$, dobimo število 396
- **Če je $i = 5$, dobimo število 495**
- Če je $i = 6$, dobimo število 594
- Če je $i = 7$, dobimo število 693
- Če je $i = 8$, dobimo število 792
- Če je $i = 9$, dobimo število 891

To pomeni, da lahko na podlagi razlike i razdelimo vsa trimestna števila v devet skupin. Nadaljevanje zaporedja je za vsa števila v skupini enako.

Tako lahko vidimo, da bomo, če je $i = 5$, dobili konstanto že po prvem koraku.

Za vsako število i lahko ugotovimo, v koliko korakih pride do konstante. Kadar je bila razlika dvomestno število, sva ga zapisali kot $0bc$. To se zgodi samo v primeru, ko je $i = 1$.

- Če je $i = 1$

$$\begin{aligned} 998 - 899 &= 099 \\ 990 - 099 &= 891 \\ 981 - 189 &= 792 \\ 972 - 279 &= 693 \\ 963 - 369 &= 594 \\ 954 - 459 &= 495 \end{aligned}$$

- Če je $i = 2$

$$\begin{aligned} 765 - 567 &= 198 \\ 981 - 189 &= 792 \\ 972 - 279 &= 693 \\ 963 - 369 &= 594 \\ 954 - 459 &= 495 \end{aligned}$$

- Če je $i = 3$

$$\begin{aligned} 542 - 245 &= 297 \\ 972 - 279 &= 693 \\ 963 - 369 &= 594 \\ 954 - 459 &= 495 \end{aligned}$$

- Če je $i = 4$

$$\begin{aligned} 642 - 246 &= 396 \\ 963 - 396 &= 594 \\ 954 - 459 &= 495 \end{aligned}$$

- Če je $i = 5$

$$964 - 469 = 495$$

- Če je $i = 6$

$$\begin{aligned} 852 - 258 &= 594 \\ 954 - 459 &= 495 \end{aligned}$$

- Če je $i = 7$

$$\begin{aligned} 831 - 138 &= 693 \\ 963 - 396 &= 594 \\ 954 - 459 &= 495 \end{aligned}$$

- Če je $i = 8$

$$\begin{aligned} 941 - 149 &= 792 \\ 972 - 279 &= 693 \\ 963 - 396 &= 594 \\ 954 - 459 &= 495 \end{aligned}$$

- Če je $i = 9$

$$\begin{aligned} 960 - 069 &= 891 \\ 981 - 189 &= 792 \\ 972 - 279 &= 693 \\ 963 - 396 &= 594 \\ 954 - 459 &= 495 \end{aligned}$$

Opazimo, da se število korakov spreminja enakomerno. Do $i = 5$ se število korakov postopoma zmanjšuje, potem pa začne postopoma rasti.

Ker se nama je zdelo to zanimivo, sva poskusili z računom ugotoviti, zakaj se to zgodi.

Opazili sva, da je po prvem koraku srednja številka vedno 9. Prva številka je za 1 manjša od i , zadnja številka pa se s prvo številko sešteje v 9, torej je enaka $9 - \text{prva številka}$.

Torej so številke števila po prvem koraku: $[i - 1][9][9 - (i - 1)] = [i - 1][9][10 - i]$

Nato jih moramo urediti po velikosti. Tukaj lahko ugotovimo, da bo vedno največja številka 9, ostali dve pa razvrstimo glede na i :

- Če je $i > 5$, je $i - 1 > 10 - i$, torej bo druga številka po velikosti $i - 1$.
- Če je $i < 5$, je $i - 1 < 10 - i$ in druga številka po velikosti bo $10 - i$.
- Če pa je $i = 5$, smo že po prvem koraku dobili Kaprekarjevo konstanto

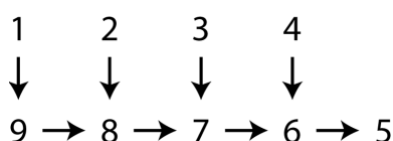
V prvem primeru dobimo razliko:

$$[a][b][c] - [c][b][a] = 99(a - c) = 99(9 - (10 - i)) = 99(i - 1)$$

V drugem primeru pa je razlika:

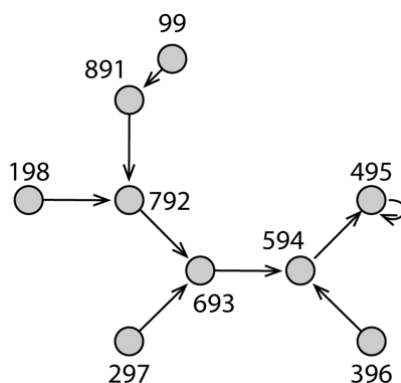
$$[a][b][c] - [c][b][a] = 99(a - c) = 99(9 - (i - 1)) = 99(10 - i)$$

Razlike med najmanjšo in največjo številko (i) se po vrsti spreminjajo tako:



Število 594 ima $i = 5$, vendar je do konstante 495 potrebno narediti še en korak. Iz te slike lahko preštejemo število korakov, ki ga potrebujemo do 495. Največje je, če je začetni i enak 1 (primer takšnega števila je 112), saj takrat potrebujemo 6 korakov. Zaporedne razlike i so enake 1, 9, 8, 7, 6, 5, 5.

Slika 2 kaže, kako se razlike, ki jih lahko dobimo, končajo v 495. Slika vsebuje vsa števila, ki jih lahko dobimo po prvem in po vseh naslednjih korakih.



Slika 2: Poti trimestnih števil do konstante 495. Sliko (in vse naslednje slike) sva pripravili s programom Orange. “(<https://orangedatamining.com/>) (Orange, 2013)

3.2 KONSTANTA ZA DVOMESTNA ŠTEVILA

Pri dvomestnih številih postopek vedno pripelje do števila 9. Edina izjema so števila, ki imajo obe števki enaki - ta se iztečejo v 0. Poglejmo primer z začetnim številom 15:

$$51 - 15 = 36$$

$$63 - 36 = 27$$

$$72 - 27 = 45$$

$$54 - 45 = 09$$

Lahko se odločimo, da se postopek s tem konča. Lahko pa 9 razumemo kot dvomestno število 09. V tem primeru postopek vedno pripelje do ponavljajočega se zaporedja petih števil.

$$\left. \begin{array}{l} 90 - 09 = 81 \\ 81 - 18 = 63 \\ 63 - 36 = 27 \\ 72 - 27 = 45 \\ 54 - 45 = 09 \end{array} \right\}$$

Tudi za dvomestna števila sva poskusili poiskati podobno pravilo kot za trimestna.

Začnimo s številom $[a][b]$, pri čemer je $a > b$.

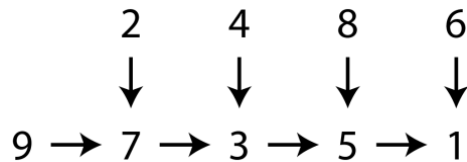
$$(10a + b) - (10b - a) = 10(a - b) - (a - b) = 9(a - b) = 9i$$

Če razliko med $a - b$ označimo z i , je to enako $9i$. Tako je očitno, zakaj vedno dobimo večkratnik števila 9.

Tako kot pri trimestnih številih lahko vidimo, da sta števki novega števila enaki $i - 1$ in $10 - i$.

1. Če je i enak 1, bomo takoj v naslednjem koraku dobili konstanto 9.
2. Če je i manjši ali enak 5, je $10 - i$ večji od $i - 1$. V tem primeru bo razlika i enaka $(10 - i) - (i - 1)$ oz. $11 - 2i$.
3. Če je i večji od 5, je $10 - i$ manjši od $i - 1$. V tem primeru bo razlika i enaka $(i - 1) - (10 - i)$ oz. $2i - 11$.

Razlike i se spreminjajo tako:



3.3 KONSTANTA ZA PETMESTNA ŠTEVILA

Pri raziskovanju petmestnih števil sva ugotovili, da ne pride do ene konstante, tako kot pri štirimestnih, dvomestnih in trimestnih številih, ampak se ponavlja zaporedje štirih števil.

Za primer lahko vzamemo število 45231:

$$\begin{array}{l}
 54321 - 12345 = 41976 \\
 97641 - 14679 = 82962 \\
 98622 - 22689 = 75933 \\
 97533 - 33579 = 63954 \\
 96543 - 34569 = 61974 \\
 \hline
 97641 - 14679 = 82962 \dots
 \end{array}$$

Vidimo, da se že pri drugem računu ujamemo v cikel. Med raziskovanjem sva opazili, da se pri petmestnih številih cikel ne začne vedno z istim številom, vendar je vsakič enaka (sestavljena iz števil 82962, 75933, 63954, 61974).

Pri opazovanju postopka na petmestnih številih pa sva naleteli tudi na drugačen cikel. Poglejmo primer s številom 11311:

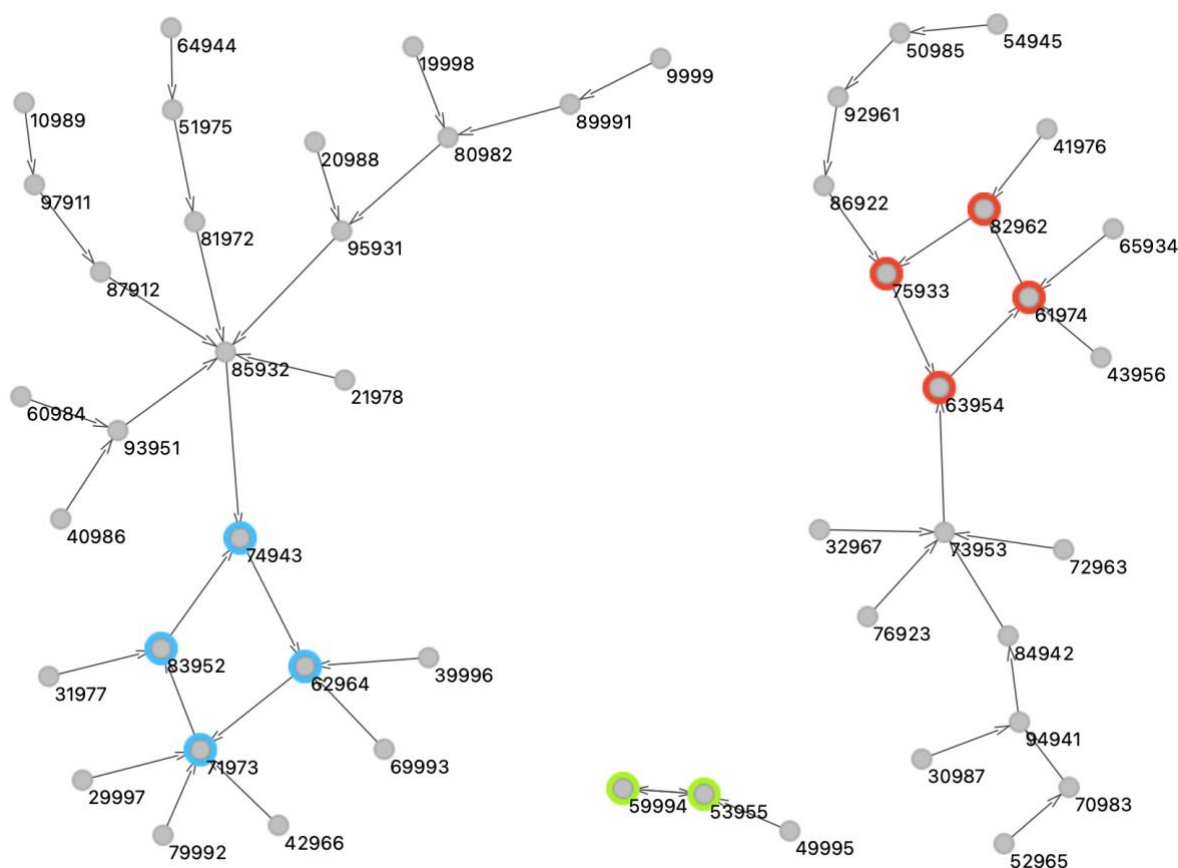
$$\begin{array}{l}
 31111 - 11113 = 19998 \\
 99981 - 18999 = 80982 \\
 98820 - 02889 = 95931 \\
 99531 - 13599 = 85932 \\
 98532 - 23589 = 74943 \\
 97443 - 34479 = 62964 \\
 96642 - 24669 = 71973 \\
 97731 - 13779 = 83952 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$98532 - 23589 = 74943 \dots$$

Izjema so tudi števila, ki imajo vse številke enake. Ta števila že v prvem koraku privedejo do konstante 0.

Samo s poskušanjem ne moreva poiskati vseh možnih ciklov. Zato sva uporabili program, ki izriše mrežo, ki vsebuje vsa števila, ki jih dobimo v prvem in v naslednjih korakih, ter s puščicami pokaže, katero število vodi v katero (Slika 3).

Vidimo lahko, da poleg dveh ciklov dolžin 4, ki sva ju našli sami (63954–61974–82962–75933 in 74943–62964–71973–83952), obstaja še cikel dolžine 2, to je števili, ki se izmenjujeta med seboj (53955–59994).



Slika 3: Mreža petmestnih števil.

3.4 KONSTANTA PRI ŠTIRIMESTNIH ŠTEVILIH

Pri štirimestnih številih z opisanim postopkom dobimo Kaprekarjevo konstanto, ki je število 6174. Poglejmo si to na primeru:

$$6543 - 3456 = 3087$$

$$8730 - 0378 = 8352$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

$$7641 - 1467 = 6174...$$

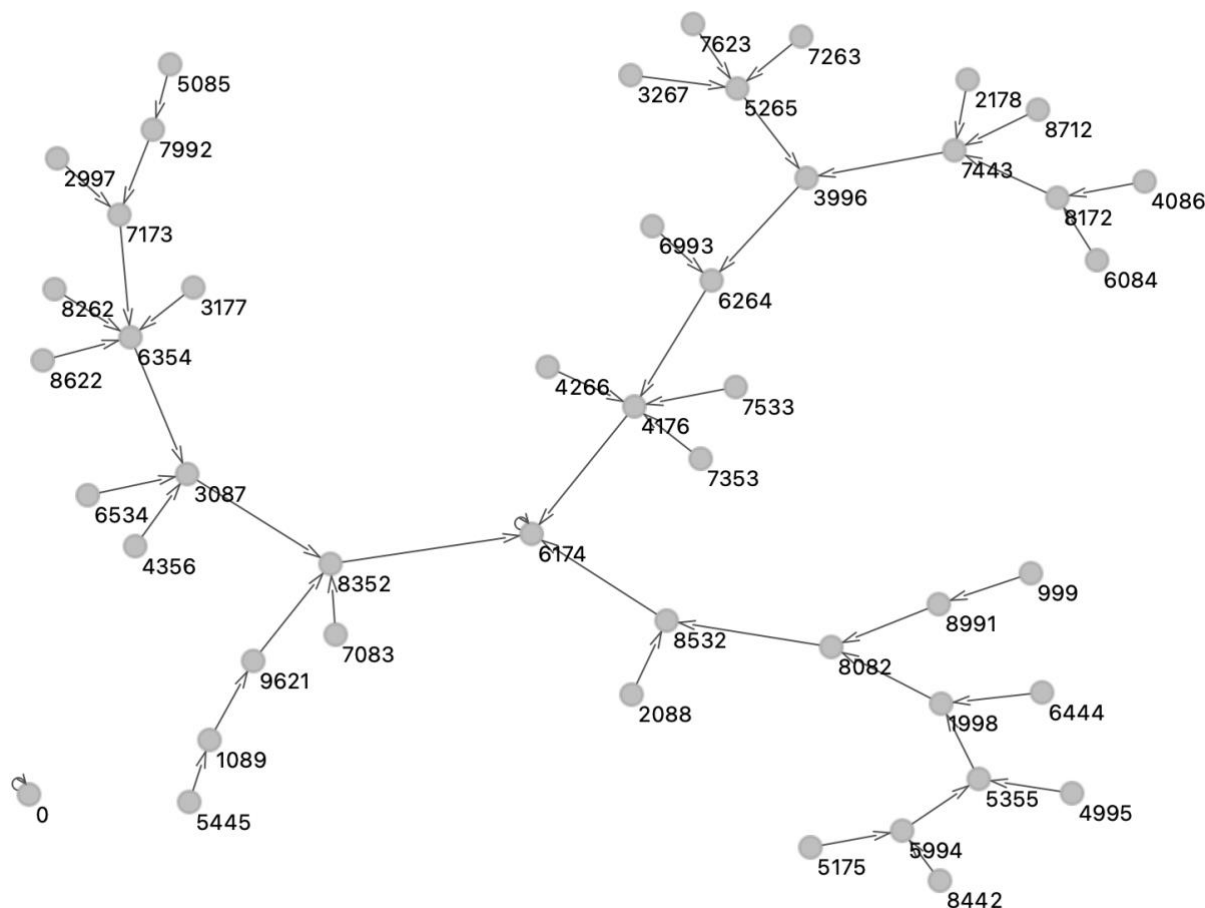
Izjeme so števila, ki so sestavljena iz štirih enakih števk. Ta nas pripeljejo do števila 0.

Ugotovili sva, da v dvomestnih in trimestnih številih lahko izračunamo, po koliko korakov pridemo do konstante glede na i . Število korakov je tu odvisno samo od razlike i . Pri dvomestnih bomo potrebovali največ 5 korakov, pri trimestnih pa največ 6.

Pri štirimestnih številih sva poskusili zapisati razliko po prvem koraku:

$$\begin{aligned} & [a][b][c][d] - [d][c][b][a] = \\ & = 1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = \\ & = 1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a = \\ & = a(1000 - 1) + d(1 - 1000) + b(100 - 10) + c(10 - 100) = \\ & = 999a - 999d + 90b - 90c = 999(a - d) + 90(b - c) = \\ & = \mathbf{999i + 90j} \end{aligned}$$

Pri štirimestnih številih ne znamo vnaprej predvideti, koliko korakov potrebujemo do konstante oz. cikla, ne da bi jih dejansko izračunali. Iz slik, ki jih naredi program (Slika 4) pa vidimo, da je najdaljše število korakov sedem. S tem tudi odgovoriva na najino drugo raziskovalno vprašanje: V največ koliko korakih dobimo Kaprekarjevo konstanto?



Slika 4: Mreža štirimestnih števil

Razmišljali sva, da lahko vsa štirimestna števila razdelimo v skupine. V vsaki skupini so števila, iz katerih po opravljenem enem koraku dobimo enako število.

Skupine dobimo tako, da se držimo nekaterih pravil:

1. Vrstni red števk ni pomemben, ker v koraku Kaprekarjevega postopka števke tako ali tako uredimo po velikosti. Vzemimo na primer števila 4368, 6348, 3864. Ko števke uredimo po velikosti, iz vseh števil dobimo število 3468, zato je naslednje število v vsakem primeru 8643 - 3468. Takšnih števil je štiriindvajset, saj ima večina štirimestnih števil štiriindvajset ($4!$) permutacij. Število permutacij pa je manjše, če se v številu katera številka ponovi. Na primer, če imamo število 2334, se število permutacij razpolovi. Predstavljajmo si, da sta trojki različnih barv, na primer modra in zelena. V dvanajstih številih je modra pred zeleno, v dvanajstih pa za njo, v resnici pa gre za isto število. Če se kaka številka ponovi trikrat (kot na primer v 2333), se število permutacij deli s $3!$, kolikor je možnih vrstnih redov treh trojk. Če pa ima število vse števke enake, ga lahko zapišemo le na en način. Manj permutacij je tudi, če ima število kakšno ničlo, saj ta ne more biti na začetku.
2. V isto skupino spadajo števila z enako razliko med prvo in zadnjo ter drugo in tretjo številko. Ti razliki imenujemo i in j . Za primer vzemimo število 5927. Najprej ga uredimo po velikosti: 2579. Razlika i je 7, j pa 2. To število bo v skupini, za katero velja, da je $i = 7$ in $j = 2$.

Za lažjo predstavbo bova pregledali števila v eni skupini. Izbrali sva $i = 6$ in $j = 4$.

V prvem koraku vse številke uredimo po velikosti od najmanjše do največje. Začeli sva s številko 1. Zadnja mora biti enaka $1 + i$, torej 7. Drugo številka mora biti najmanj 1, ker mora biti večja od prve. Tretja številka mora biti enaka drugi + j , pri tem pa ne sme biti večja od zadnje. Števila, ki se začnejo z 1 in imajo številke urejene po velikosti, so tri:

1157

1267

1377

Za vsa ta števila moramo upoštevati še njihove permutacije. V prvem in zadnjem številu se ponovita dve številki, zato se njuno število permutacij razpolovi. Tako dobimo skupno 48 permutacij ($12 + 24 + 12$). Zdaj imamo v skupini že 48 števil. V naslednjem koraku dodamo še števila, ki se začnejo s številkama 2 in 3. S številko 4 ali več se ne morajo začeti, ker zadnja številka ne more biti več kot 9.

2268

2378

2488

3379

3489

3599

Zgornja števila imajo skupaj $2 \cdot 48$ permutacij, torej imamo v tej skupini 144 števil. Vsa ta števila se iztečeje v število 6354. To število sva našli na sliki, ki jo je ustvaril računalniški program. Iz skice je hitro razvidno, da če bi nadaljevali s Kaprekarjevim postopkom, dobimo konstanto v treh korakih.

Iz vseh najinih ugotovitev lahko logično sklepamo, da postopka ne moremo obrniti, ker se na vsakem koraku postopka v eno število steka veliko drugih števil in nikoli ne moremo vedeti, katero je bilo predhodno število v zaporedju.

3.5 ZAKAJ POSTOPEK VODI V KONSTANTE ALI CIKLE?

Postopek lahko ponavljamo v neskončnost in v vsakem koraku izračunamo naslednje število. Različnih števil pa je končno: če na primer začnemo s štirimestnim številom, razlika nikoli ne bo presegla 9999, torej bomo naleteli na največ 10000 različnih števil. Po največ 10000 korakih (v resnici pa že veliko prej) se bo neko število ponovilo in potem se ponovijo vsa števila, ki mu sledijo. Tako nastane cikel.

Kot sva videli pri opazovanju dvo-, tri-, štiri- in petmestnih števil, lahko dobimo različno dolge cikle. Pri tri- in štirimestnih številih pridemo do konstante, pri petmestnih pa do ciklov. Konstanta pa pravzaprav ni nič drugega kot cikel dolžine 1.

Vsako štirimestno število se že po prvem koraku spremeni v enega izmed števil na Sliki 4. V naslednjem koraku se ta množica še zmanjša. Ugibava, da do cikla ne pride, ker se množica števil zelo hitro manjša. Matematičnega dokaza za to pa ne poznavamo in ga tudi ne znava sami izpeljati.

Pri petmestnih številih sva naleteli na tri cikle. Da bi opazovali, kako se število ciklov vede pri večmestnih številih, sva narisali podobne mreže še zanje (Priloga A). Vidimo, da te mreže vedno razpadejo na več ločenih delov. Opazili sva, da:

1. Vsak ločen del mreže vsebuje vsaj en cikel. V tem delu mreže je omejeno število števil, zato se morajo začeti ponavljati.
2. Noben del mreže ne more vsebovati dveh ali več ciklov. Če bi bilo tako, bi to pomenilo, da lahko iz nekega števila pridemo v dva ali več različnih ciklov, kar pa se ne more zgoditi, saj lahko iz vsakega števila pridemo le v eno število.

Zato mreža razpade na točno toliko delov, kolikor je različnih ciklov.

To, da pri večmestnih številih vedno dobimo več konstant ali ciklov, dodatno kaže, da je to, da pri štirimestnih številih dobimo samo eno konstanto, najbrž samo posebnost štirimestnih števil, ki najbrž izvira iz tega, da jih je premalo in jih zato prehitro zmanjka.

4 ZAKLJUČEK

V nalogi sva raziskali konstanto ter odgovorili na vsa najina raziskovalna vprašanja.

Raziskali sva konstante z 2-, 3-, 4- in 5-mestna števila. Za dvomestna števila sva ugotovili, da se v največ petih korakih po Kaprekarjevem postopku stekajo v konstanto 9 ali pa v cikel števil 81, 63, 27, 45 in 09, če razliko 9 zapišemo kot 09. Pri trimestnih številih dobimo konstanto 495 v največ šestih korakih. Pri štirimestnih številih je Kaprekarjeva konstanta število 6174, ki ga dobimo v največ sedmih korakih. Pri petmestnih številih dobimo tri različne cikle števil glede na izbrano začetno število. Prvo hipotezo lahko le delno potrdimo, ker pri petmestnih številih nastanejo cikli, ne konstanta. Drugo hipotezo lahko potrdimo na podlagi izrisanih slik, matematično pa sva jo dokazali samo pri tri- in dvomestnih številih.

Edina štirimestna števila, ki se ne iztečejo v konstanto 6174 so tista, ki imajo vse številke enake. Pri teh številih že po prvem koraku dobimo razliko 0. Torej lahko potrdimo tudi tretjo hipotezo.

Kaprekarjevega postopka ne moremo obrniti, ker se na vsakem koraku postopka v eno število steka veliko drugih števil in nikoli ne moremo vedeti, katero je bilo predhodno število v zaporedju. Pri četrti hipotezi sva pravilno sklepali, da postopka ni mogoče obrniti, razlog pa ni bil pravi. Pravi razlog je ta, da ne vemo, iz katerega izmed mnogih je dano število prišlo.

Odgovor na vprašanje, zakaj postopek pri štirimestnih številih privede do Kaprekarjeve konstante, je zelo zanimiv. Do Kaprekarjeve konstante pride le slučajno. Lahko bi se ponavljal cikel večih števil, tu pa se ponavlja število 6174.

Ob raziskovanju sva se zelo zabavali in uživali med nastajanjem najine naloge. Na splošno naju je naloga celo raziskovanje presenečala, saj sva odkrili veliko več, kot sva pričakovali.

Najina naloga je uporabna za vse, ki jih zanima razvedrilna matematika in se radi igrajo s števili.

Če bi imeli še več časa, bi lahko raziskali še konstante pri drugih večmestnih številih ali pa bi se pozabavali s Collatzovo domnevo, po kateri z določenim postopkom iz vsakega števila pridemo do konstante 1, vendar je še nihče ni uspel dokazati.

5 VIRI IN LITERATURA

Bhattacharjee, P. K. (2020). Kaprekar's Constant 6174 for Four Digits Number Reality to Other Digits Number. *International Journal of Chemistry, Mathematics and Physics*, 4(5), Sept-Oct. str. 92-94.

Dostopno na https://aipublications.com/uploads/issue_files/1IJCMP-SEP20202-Kaprekar.pdf

Demšar, J., Curk, T., Erjavec, A., Gorup, Č., Hočevar, T., Milutinović, M., Možina, M., Polajnar, M., Toplak, M., Starič, A., Štajdohar, M., Umek, L., Žagar, L., Žbontar, J., Žitnik, M., Zupan, B. (2013). Orange: Data Mining Toolbox in Python, *Journal of Machine Learning Research* 14(Aug): 2349–2353.

Dostopno na <https://jmlr.org/papers/volume14/demsar13a/demsar13a.pdf>.

Ecker, M. (1992). Caution: Black Holes at Work. *New Scientist*, December 1992.

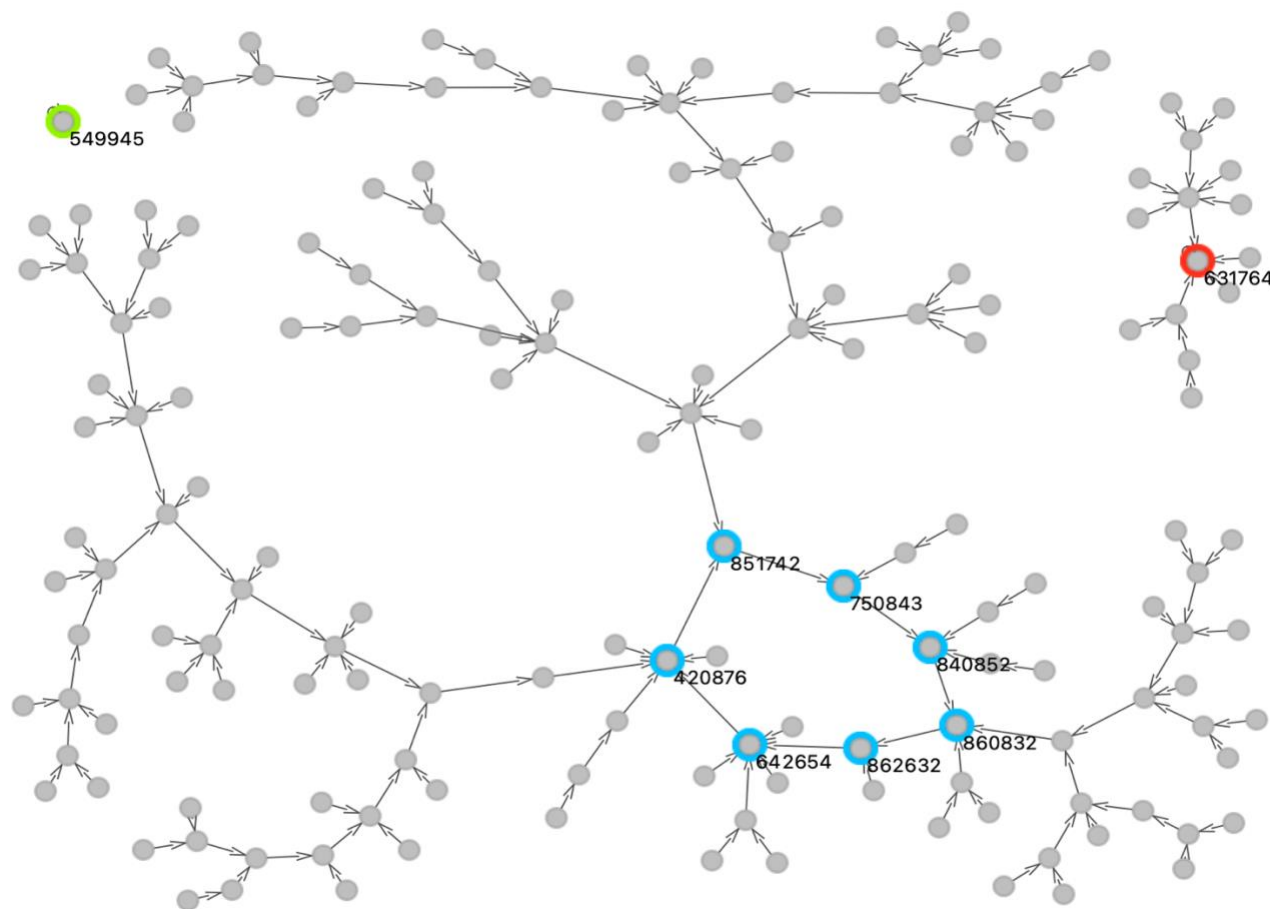
Kaprekar, D. R. (1949). Another Solitaire Game. *Scripta Mathematica* 15, str. 244-245.

Osredkar, D. (1996). Pozor, črne luknje! *Presek*, 23(6), str. 348–351.

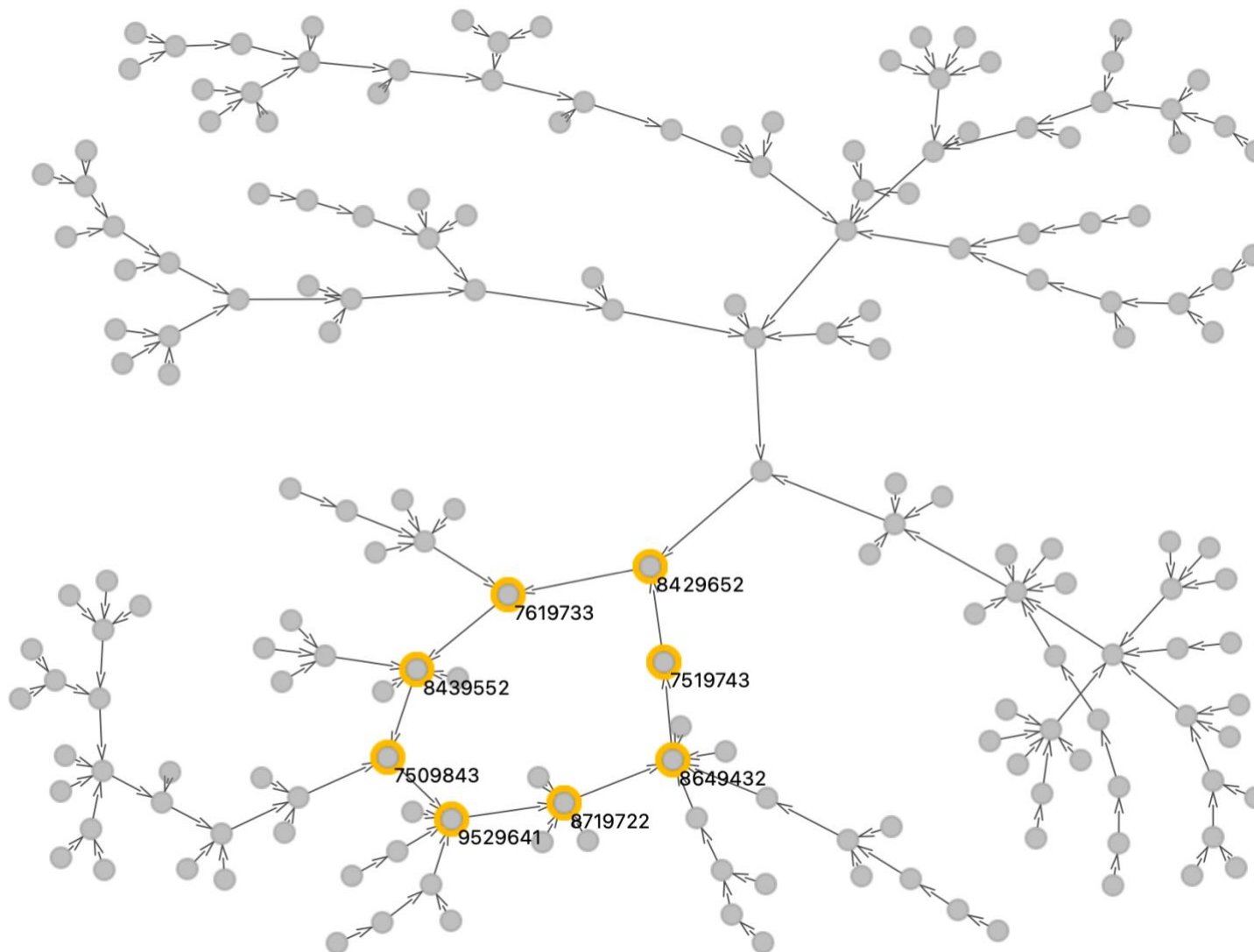
Wikipedia. D. R. Kaprekar. Dostopno na spletnem naslovu

[https://en.wikipedia.org/wiki/D. R. Kaprekar](https://en.wikipedia.org/wiki/D._R._Kaprekar), (prenešeno: 9. 2. 2023).

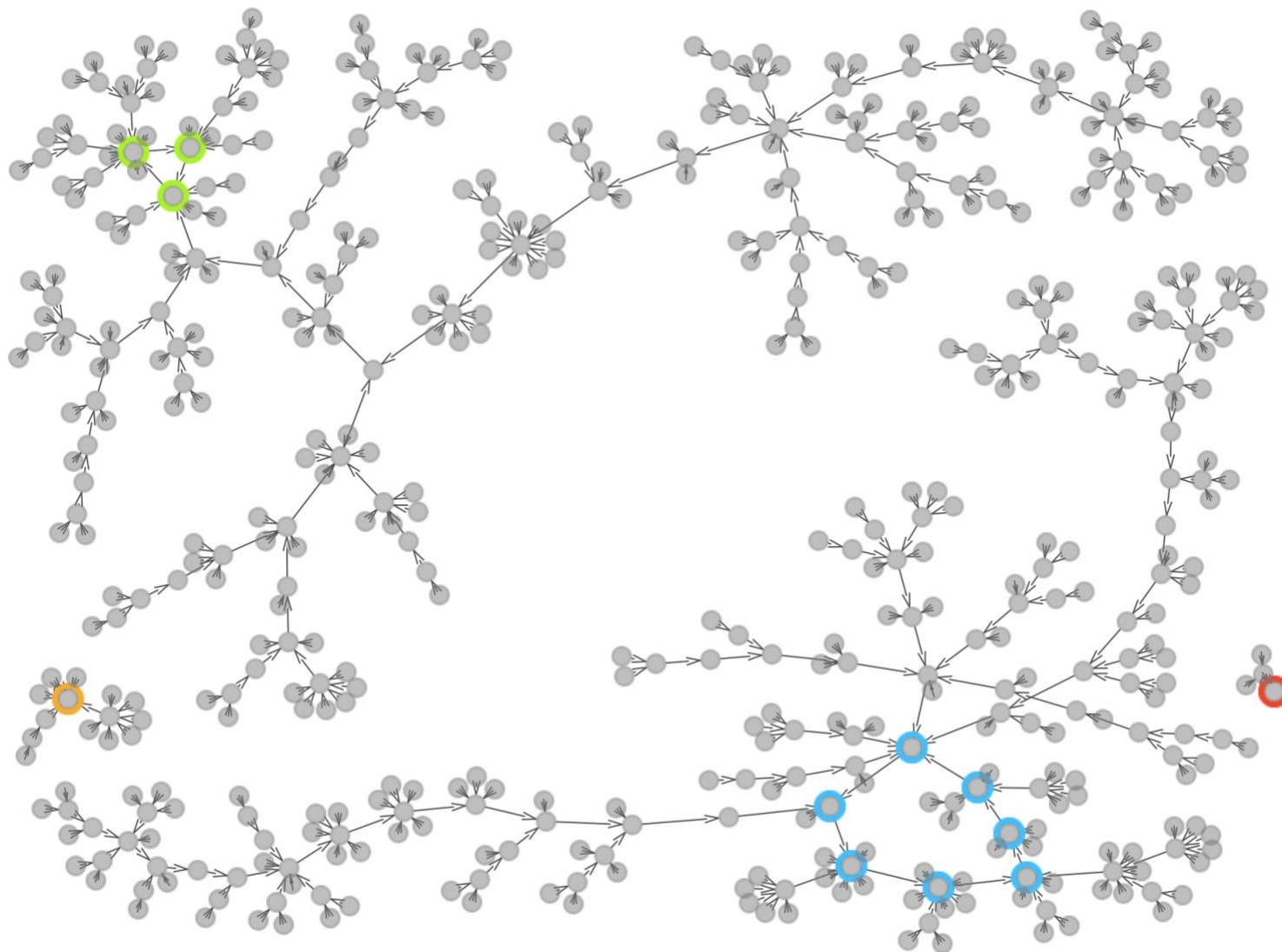
PRILOGA A: Mreže za 6-, 7-, 8-, 9- in 10-mestna števila



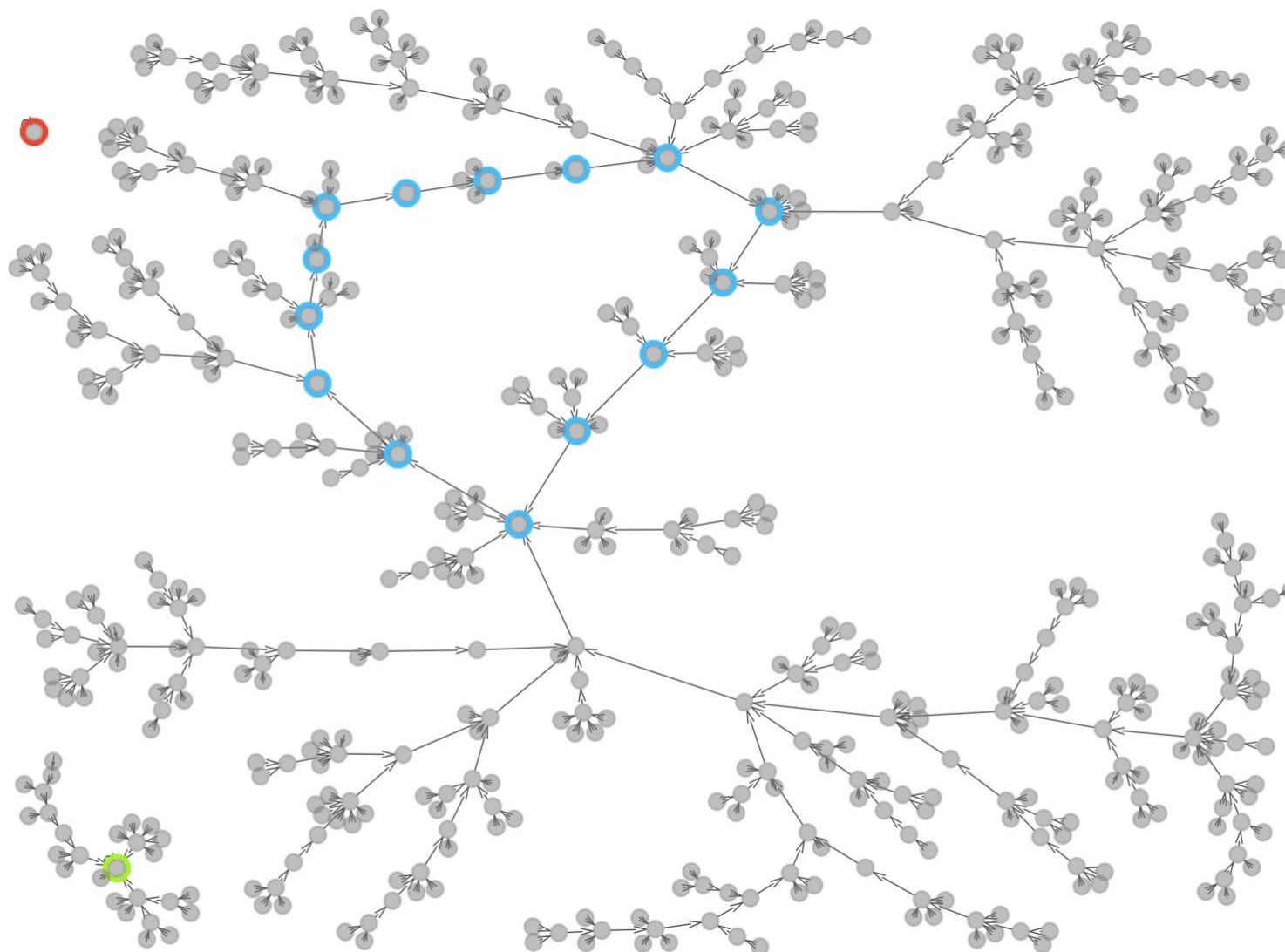
Slika A.1: Mreža za šestmestna števila vsebuje en cikel s 7 števili in dve konstanti. Do ene (549945) lahko pridemo le v enem koraku, nikoli pa v več korakih.



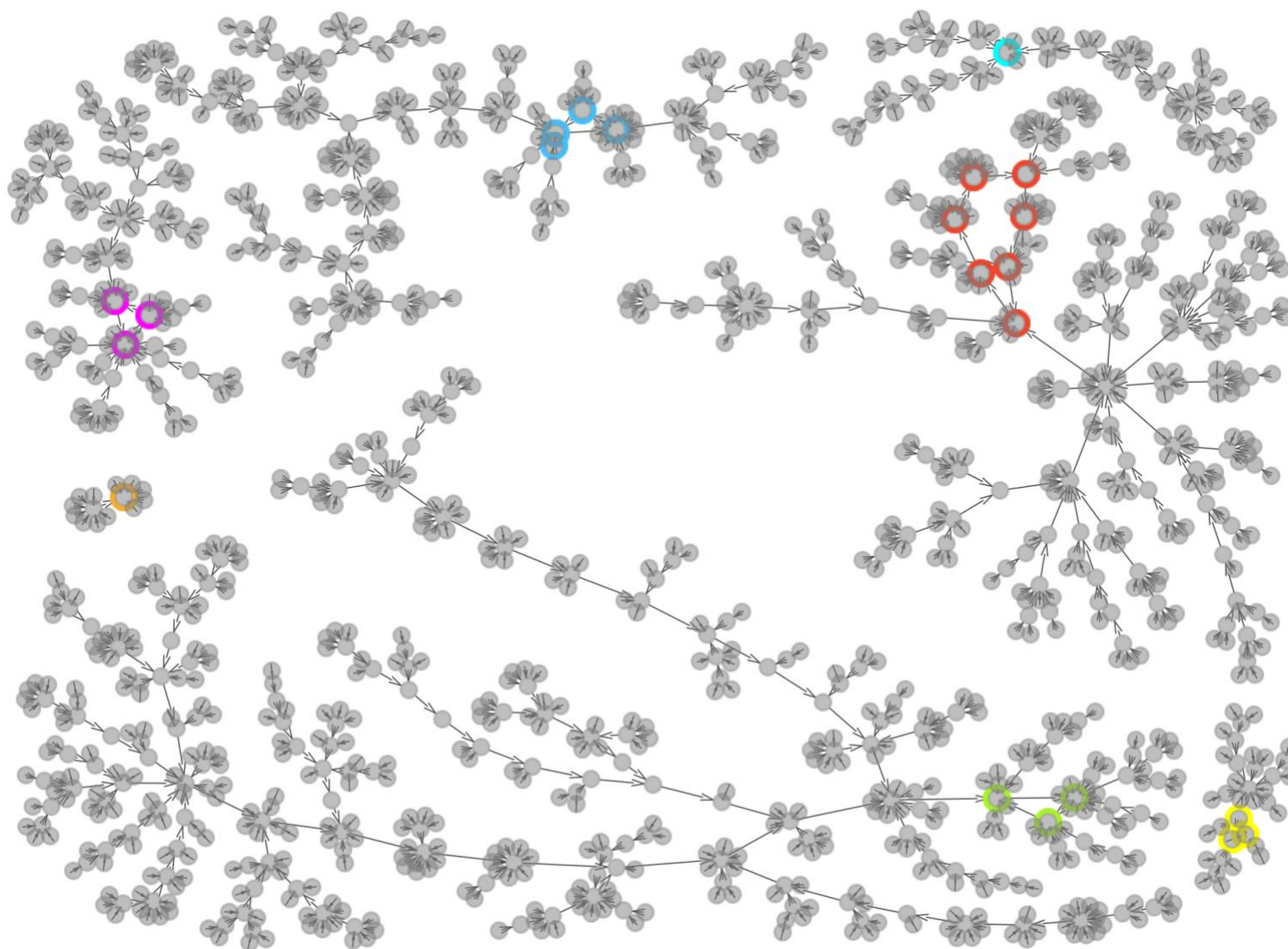
Slika A.2: Vsa sedemmestna števila (razen tistih, ki imajo same enake številke) vedno vodijo v cikel osmih števil.



Slika A.3: Osem mestna števila vodijo v dva cikla dolžin 3 in 6 ter dve konstanti.



Slika A.4: Devetmestna števila imajo cikel dolžine 14 in dve konstanti. Ena (554999445) je dosegljiva samo iz prvega koraka.



Slika A.5: Desetmestna števila imajo pet ciklov in dve konstanti.

PRILOGA B: Program za izračun zaporedja

Avtor programa je Martin Demšar. Napisan je v programskem jeziku Python in za izračun do desetmestnih števil potrebuje nekaj sekund.

```
D = 10 # Število mest

# Sestavi vsa števila, ki jih dobiš v prvem koraku, tako da za
# vsakega predstavnika množice sorodnih števil (prva številka je
# 1, ostale so urejene nepadajoče) izračunaš naslednika.

preveri = []
rst = zst = "1" * D
while not preveri or rst != zst:
    rst = str(int(rst) + 1).rstrip("0")
    rst = (rst + rst[-1] * D)[:D]
    if (j := int(rst[:-1]) - int(rst)) != 0:
        preveri.append(j)

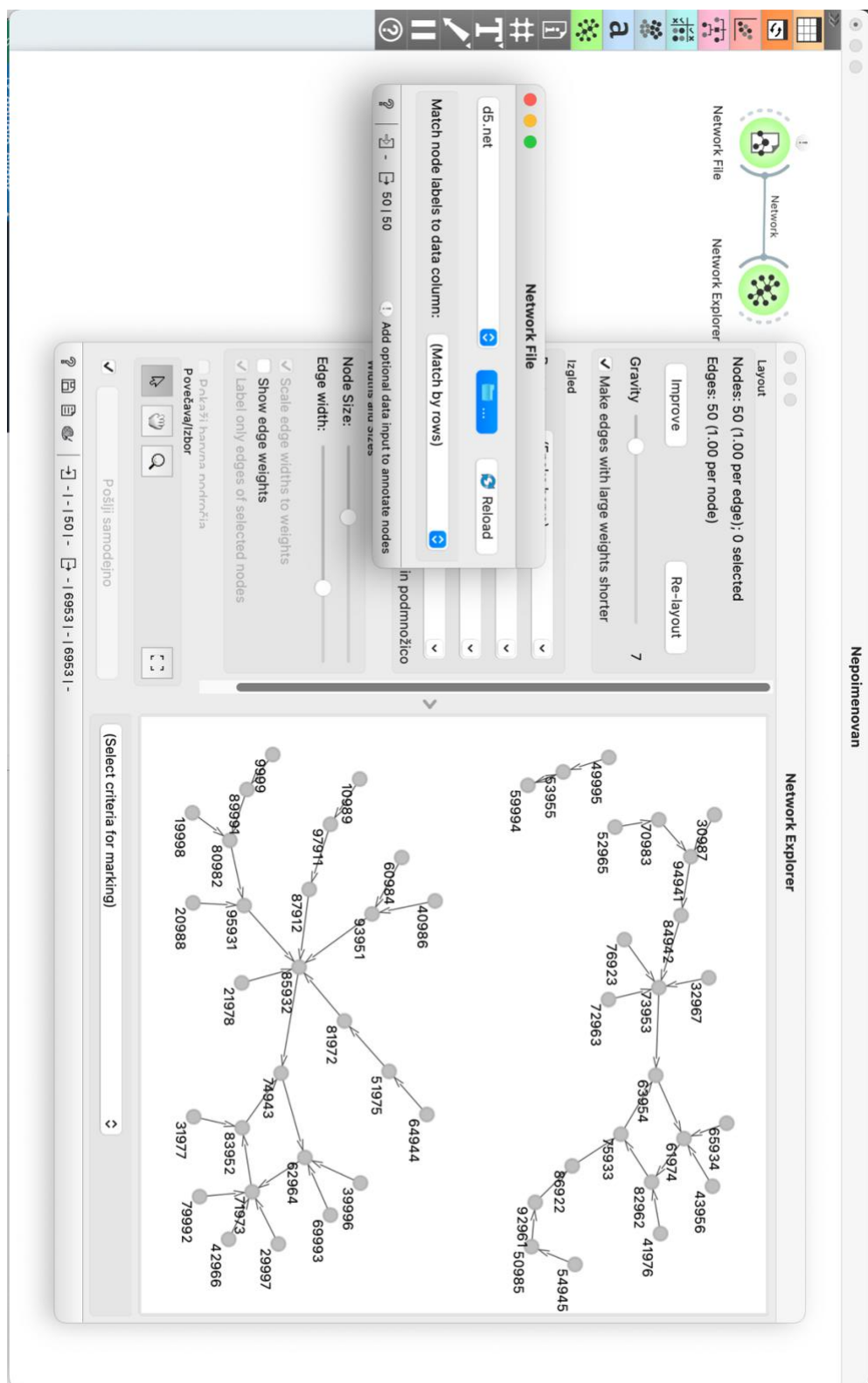
# Za vsako število izračunaj naslednje število in ga dodaj med
# števila, za katere bomo izračunali naslednika, razen če je že znan.

naprej = {}
for i in preveri:
    j = "".join(sorted(f"{i:0{D}}"))
    j = int(j[:-1]) - int(j.strip("0") or "0")
    naprej[i] = j
    if j not in naprej:
        preveri.append(j)

# Izpiši povezave v datoteko .net

vertices = set(naprej) | set(naprej.values())
print(len(vertices))
with open(f"d{D}.net", "w") as f:
    f.write(f"""*Network "Kaprekar-{D}"
*Description ""
*Vertices {len(vertices)}
""")
    f.write("".join(f"{k} {k}\n" for k in vertices))
    f.write(f"""*Arcs\n""")
    f.write("".join(f"{k} {n}\n" for k, n in naprej.items()))
```

PRILOGA C: Izris mreže v programu Orange



Slika C.1: Izris mreže s programom Orange

PRILOGA D: Ročni izračuni zaporedja za nekaj števil

$54321 - 12345 = 41976$ $97641 - 14679 = 82962$ $98622 - 22689 = 75933$ $97533 - 33579 = 63954$ $96543 - 34569 = 61974$ $97641 - 14679 = 82962$	PERIODA	89511 $98511 - 11589 = 86922$ $98622 - 22689 = 75933$ $97533 - 33579 = 63954$ $96543 - 34569 = 61974$ $97641 - 14679 = 82962$ $98622 - 22689 = 75933$
--	---------	---

~~štirimestna~~

štirimestna

(8282) $1 \quad 8822 - 2288 = 6534$ $2 \quad 6543 - 3456 = 3087$ $3 \quad 8730 - 0378 = 8352$ $4 \quad 8532 - 2358 = 6174$	(1223) $1 \quad 3221 - 1223 = 1998$ $2 \quad 9981 - 1899 = 8082$ $3 \quad 8820 - 0288 = 8532$ $4 \quad 8532 - 2358 = 6174$	(5189) $1 \quad 9851 - 1589 = 8262$ $2 \quad 8622 - 2268 = 6354$ $3 \quad 6543 - 3456 = 3087$ $4 \quad 8730 - 0378 = 8352$ $5 \quad 8532 - 2358 = 6174$
--	--	--

trimestna

(158) $1 \quad 851 - 158 = 693$ $2 \quad 963 - 369 = 594$ $3 \quad 954 - 459 = 495$ $4 \quad 954 - 459 = 495$	(981) $1 \quad 981 - 189 = 792$ $2 \quad 972 - 279 = 693$ $3 \quad 963 - 369 = 594$ $4 \quad 954 - 459 = 495$	(123) $1 \quad 321 - 123 = 198$ $2 \quad 981 - 189 = 792$ $3 \quad 972 - 279 = 693$ $4 \quad 963 - 369 = 594$ $5 \quad 954 - 459 = 495$
---	---	--

dvomestna

(92) $1 \quad 92 - 29 = 63$ $2 \quad 63 - 36 = 27$ $3 \quad 72 - 27 = 45$ $4 \quad 54 - 45 = 9$ $5 \quad 9 - 9 = 0$	(73) $1 \quad 73 - 37 = 36$ $2 \quad 63 - 36 = 27$ $3 \quad 72 - 27 = 45$ $4 \quad 54 - 45 = 9$ $5 \quad 9 - 9 = 0$	12 $21 - 12 = 9$ $9 - 9 = 0$
--	--	--------------------------------------

petmestna

(12345) $1 \quad 54321 - 12345 = 41976$ $2 \quad 97641 - 14679 = 82962$ $3 \quad 98622 - 22689 = 75933$ $4 \quad 97533 - 33579 = 63954$ $5 \quad 96543 - 34569 = 61974$ $6 \quad 97641 - 14679 = 82962$	PERIODA	(57573) $77553 - 35577 = 41976$ $97641 - 14679 = 82962$ $98622 - 22689 = 75933$ $97533 - 33579 = 63954$ $96543 - 34569 = 61974$ $97641 - 14679 = 82962$	(34280) $84321 - 23478 = 60843$ $98721 - 12789 = 85932$ $98532 - 23589 = 74943$ $97443 - 34479 = 62964$ $96642 - 24669 = 71973$ $97731 - 13779 = 83952$ $98532 - 23589 = 74943$
---	---------	---	--