

Mladi raziskovalci Slovenije 2023
57. srečanje

Razrez torte

Matematika ali logika
Raziskovalna naloga

OŠ Bojana Iliča, Maribor

Avtorja: Mark Verginella,

Luka Krajnc

Mentor: Jožef Senekovič

Maribor 2023

KAZALO

1. UVOD	1
2. OKROGLA TORTA.....	2
2.1 RAZREZ NA KROŽNE IZSEKE	2
2.2 RAZREZ NA KONCENTRIČNE KROGE.....	4
2.3 RAZREZ S TETIVAMI	8
3. KVADRATNA TORTA	10
3.1 REZANJE S SIMETRALAMI KOTOV	10
3.2 VZPOREDNICE NOSILK STRANIC	12
3.3 KVADRATI ZNOTRAJ KVADRATOV	13
4. PRAVOKOTNA TORTA	14
4.1 RAZREZ PRAVOKOTNE TORTE Z DIAGONALAMI.....	14
4.2 VZPOREDNICE NOSILK STRANIC	16
5. TRIKOTNE TORTE.....	17
5.1 TORTA, KI JE ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK	17
5.2 RAZREZ NA MANJŠE TRIKOTNIKE Z ISTIMI VIŠINAMI	19
5. ZAKLJUČEK	20
6. DRUŽBENA ODGOVORNOST	20
7. VIRI	21

Povzetek

Torte obožuje veliko ljudi. Seveda je potrebno torto razrezati na (običajno) enake kose. Za okroglo torto en razrez poznamo, morda še za kakšno. Kaj pa če torta ni okrogle oblike ali pravokotna? V raziskovalni smo raziskali kako razrežemo torte različnih oblik, da bodo vsi kosi enako veliki.



1. UVOD

Ko jemo torto, cele običajno ne pojemo sami. Torto zato narežemo na kose. Ti kosi niso skoraj nikoli popolnoma količinsko enaki, saj pri rezanju nismo najbolj natančni ter ne pojemo vsi enake količine torte. Okrogle torte običajno narežemo na krožne izseke, ki naj bi bili vsi enake velikosti. Torto v obliki kvadra pa z ravnimi rezi, ki so vzporedni ali pravokotni na robove torte, narežemo na kose v obliki manjših kvadrov. V nadaljevanju se poigrajmo z mislijo, kako bi (vsaj matematično), še lahko razrezali torte različnih oblik. Pri tem seveda želimo, da so vsi kosi torte enako veliki. To pomeni, da je vsak kos po masi in prostornini enak. Ni pa nujno enak po videzu (obliki).



Slika 1: okrogla torta



Slika 2: pravokotna torta

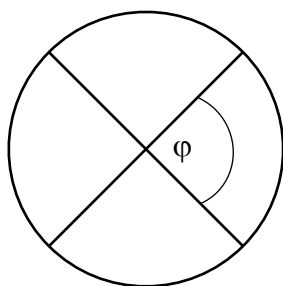
V raziskovalni nalogi bova torte raziskujemo kot dvodimenzionalne oblike (2D). To pomeni, da namišljeno režemo torte samo po zgornji ploskvi in ne po stranskih. Vsi kosi torte imajo tako enako višino. To pomeni, da bodo torte vidne iz ptičje perspektive.

2. OKROGLA TORTA

2.1 RAZREZ NA KROŽNE IZSEKE

Okrogla torta kot geometrijsko telo je valj, njena zgornja ploskev pa je krog, omejen s krožnico, ki jo predstavlja zgornji rob valja oziroma torte.

Pri običajnem razrezu torte režemo po polmerih, torej od roba torte do središča. Z rezanjem oblikujemo krožne izseke. Če želimo, da so vsi kosi enaki, potem mora biti središčni kot velik $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$. Središčni kot je kot med polmeroma kroga z vrhom v središču kroga. V tem primeru nam n predstavlja število zelenih kosov torte (slika 3).



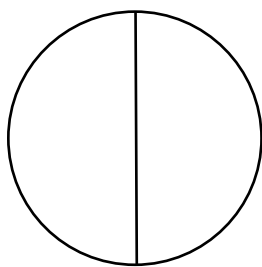
Slika 3: primer delitve

Nastali kos pri tem načinu rezanja je omejen z dvema polmeroma in krožnim lokom (krožni izsek). Krožni lok in polmer sta pri vsakem od teh kosov enaka. Krožni lok izračunamo tako, da obseg celotne torte delimo s številom kosov ($l = \frac{o}{n} = \frac{2\pi r}{n}$), pri tem je o obseg kroga (torte) in r polmer torte.

Enako velja za ploščino kosa torte. Izračunamo jo tako, da ploščino celotne torte delimo s številom kosov ($\frac{p}{n} = \frac{\pi r^2}{n}$). Ker so ploščine krožnih izsekov enake, so enaki tudi kosi torte.

Poglejmo naslednje primere rezanja torte, če spreminjamo število n , torej število kosov:

- a) za $n = 2$ torto razdelimo na dva enaka dela (slika 4)

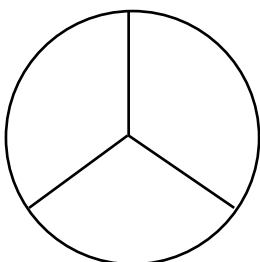


$$\varphi = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$p = \frac{\pi r^2}{2}$$

Slika 4: razrez torte na dva dela

b) za $n = 3$ torto razdelimo na tri enake dele (slika 5)

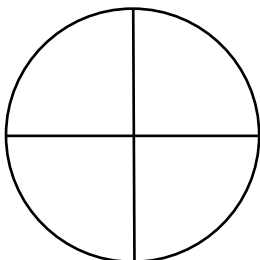


$$\varphi = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

$$p = \frac{\pi r^2}{3}$$

Slika 5: razrez torte na tri dele

c) za $n = 4$ torto razdelimo na štiri enake dele (slika 6)

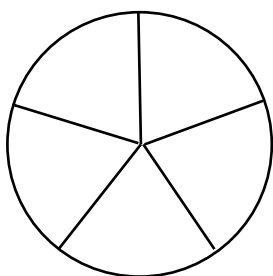


$$\varphi = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

$$p = \frac{\pi r^2}{4}$$

Slika 6: razrez torte na štiri dele

d) za $n = 5$ torto razrežemo na pet enakih delov (slika 7)

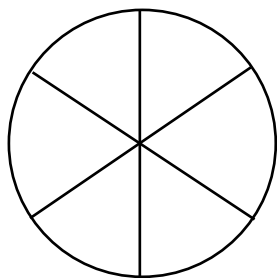


$$\varphi = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$p = \frac{\pi r^2}{5}$$

Slika 7: razrez torte na pet delov

e) za $n = 6$ torto razrežemo na šest enakih delov (slika 8)

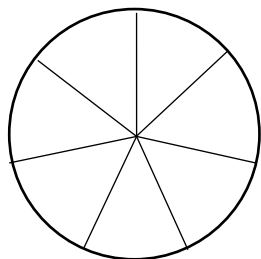


$$\varphi = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$p = \frac{\pi r^2}{6}$$

Slika 8: razrez torte na šest delov

f) za $n = 7$ torto razrežemo na sedem enakih delov (slika 9)



$$\varphi = \frac{360^\circ}{7} \doteq 51,4$$

$$p = \frac{\pi r^2}{7}$$

Slika 9: razrez torte na sedem delov

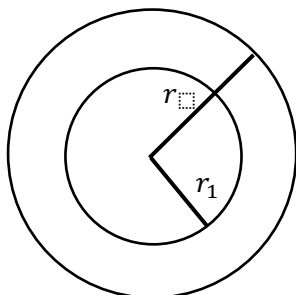
V kolikor torto razrežemo na sedem enakih kosov, dobimo za središčni kot φ decimalno število, zapisano s približkom $51,4^\circ$. Najpogosteje torte režemo na tako število kosov, kot je delitelj števila 360. Tudi števila 3, 5 in 9 so delitelji števila 360, ampak torte običajno režemo na sodo število kosov.

2.2 RAZREZ NA KONCENTRIČNE KROGE

Okrogle torte lahko razrežemo tudi na kolobarje, čeprav je ta način rezanja zelo nepraktičen. Kolobar je lik, ki ga omejujeta dve krožnici. Ploščino kolobarja izračunamo z enačbo $\pi r_2^2 - \pi r_1^2$, kar je razlika med ploščino večjega (r_2) in manjšega (r_1) kroga. Če želimo dobiti enake kose tort pomeni, da so ploščine posameznih krožnih kolobarjev enake. Ploščine so odvisne od polmerov krožnic, ki omejujejo kolobar (kose torte). V nadaljevanju bomo označili

z r polmer celotne torte, z $r_1, r_2 \dots$ pa polmere posameznih kolobarjev od manjšega proti večjemu (največji je seveda polmer torte, r).

a) Poglejmo razrez na dva enaka dela - kolobarja (slika 10)



Slika 10: razrez torte na dva dela

Ploščina manjšega kroga s polmerom r_1 je πr_1^2 . Ploščina kolobarja je $\pi r^2 - \pi r_1^2$. Ker sta ploščini enaki, zapišemo $\pi r_1^2 = \pi r^2 - \pi r_1^2$. Enakost krajšamo s π in zapišemo $r_1^2 = r^2 - r_1^2$.

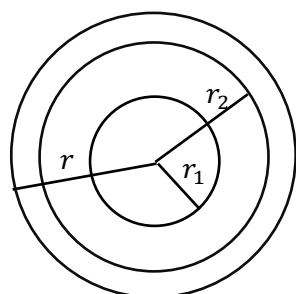
Potem je $2r_1^2 = r^2$ in $\frac{r^2}{r_1^2} = 2$. iz tega sledi, da je $\frac{r}{r_1} = \sqrt{2}$. Lahko zapišemo razmerje polmerov

$r : r_1 = \sqrt{2} : 1$. Če je polmer celotne torte r , je manjši polmer (kjer bi recimo rezali torto) enak

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{2}} = r \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Zapišimo zaporedje polmerov: $r \sqrt{\frac{1}{2}}, r$.

b) Razrez na tri enake dele (slika 11)



Slika 11: razrez torte na tri dele

Zapišimo ploščine posameznih kolobarjev od zunanjega proti notranjemu:

$$\pi r^2 - \pi r_2^2$$

$$\pi r_2^2 - \pi r_1^2$$

$$\pi r_1^2$$

Ploščine kolobarjev so enake. Vemo, da mora biti $p_1 = p_2 = p_3$, to so ploščine dveh kolobarjev in notranjega kroga. Pridemo do ugotovitve, da je $\pi r^2 - \pi r_2^2 = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi r_1^2$. Okrajšamo lahko s π in zapišemo enakost $r^2 - r_2^2 = r_2^2 - r_1^2 = r_1^2$.

Iz enakosti $r_2^2 - r_1^2 = r_1^2$ izračunamo, da je $r_1^2 = \frac{r_2^2}{2}$, $r_1 = \frac{r_2}{\sqrt{2}} = r_2 \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Iz enakosti $r^2 - r_2^2 = r_2^2 - r_1^2$, kjer za r_1 vstavimo zgoraj izračunano vrednost, zapišemo $r^2 - r_2^2 = r_2^2 - \frac{r_2^2}{2}$. Izrazimo $r_2^2 = \frac{2}{3}r^2$, ali $r_2 = r \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Izrazimo še $r_1^2 = \frac{r_2^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}r^2$ in zato je $r_1 = r \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Zapišimo zaporedje polmerov: $r \sqrt{\frac{1}{3}}, r \sqrt{\frac{2}{3}}, r$.

c) Razrez na štiri enake dele (kolobarje)

Zapišimo ploščine posameznih kolobarjev od zunanjšega proti notranjemu:

$$\pi r^2 - \pi r_3^2$$

$$\pi r_3^2 - \pi r_2^2$$

$$\pi r_2^2 - \pi r_1^2$$

$$\pi r_1^2$$

Ploščine kolobarjev so enake. Vemo, da mora biti $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, to so ploščine treh kolobarjev in notranjega kroga. Pridemo do ugotovitve, da je $\pi r^2 - \pi r_3^2 = \pi r_3^2 - \pi r_2^2 = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi r_1^2$. Okrajšamo lahko s π in zapišemo enakost $r^2 - r_3^2 = r_3^2 - r_2^2 = r_2^2 - r_1^2 = r_1^2$.

Iz enakosti $r_2^2 - r_1^2 = r_1^2$ izračunamo, da je $r_1^2 = \frac{r_2^2}{2}$, $r_1 = \frac{r_2}{\sqrt{2}} = r_2 \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Iz enakosti $r_3^2 - r_2^2 = r_2^2 - r_1^2$, kjer za r_1 vstavimo zgoraj izračunano vrednost, zapišemo $r_3^2 - r_2^2 = r_2^2 - \frac{r_2^2}{2}$. Izrazimo $r_2^2 = \frac{2}{3}r_3^2$.

Iz enakosti $r^2 - r_3^2 = r_3^2 - r_2^2$, kjer za r_2 vstavimo zgoraj izračunano vrednost, zapišemo $r^2 - r_3^2 = r_3^2 - \frac{2}{3}r_3^2$. Izrazimo $r_3^2 = \frac{3}{4}r^2$ in $r_3 = r\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Z vstavljanjem izračunane vrednosti za r_3 lahko izračunamo še $r_2^2 = \frac{2}{3}r_3^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}r^2$ in $r_2 = r\sqrt{\frac{2}{4}}$.

Po enakem postopku izračunamo še $r_1 = r\sqrt{\frac{1}{4}}$.

Zapišimo zaporedje polmerov: $r\sqrt{\frac{1}{4}}, r\sqrt{\frac{2}{4}}, r\sqrt{\frac{3}{4}}, r$ (kjer bi lahko zapisali $r\sqrt{\frac{4}{4}}$).

č) Razrez na pet enakih delov (kolobarjev)

Po popolnoma enakem postopku opravimo razrez na pet enakih delov in zapišemo zaporedje polmerov $r\sqrt{\frac{1}{5}}, r\sqrt{\frac{2}{5}}, r\sqrt{\frac{3}{5}}, r\sqrt{\frac{4}{5}}, r$ (kjer bi lahko zapisali $r\sqrt{\frac{5}{5}}$).

d) Razrez na n število enakih delov (kolobarjev)

Iz zapisanih primerov lahko sklepamo, da so polmeri (od najmanjšega proti največjemu) za poljubno število kolobarjev naslednji:

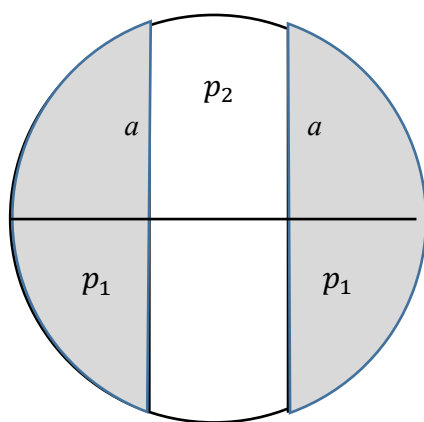
$r\sqrt{\frac{1}{n+1}}, r\sqrt{\frac{2}{n+1}}, r\sqrt{\frac{3}{n+1}}, \dots, r\sqrt{\frac{n}{n+1}}, r$ (kjer bi lahko zapisali $r\sqrt{\frac{n+1}{n+1}}$).

2.3 RAZREZ S TETIVAMI

Zadnji način rezanja okrogle torte, ki ga predstavimo je ta, da torto razrežemo na enake dele s prečnimi prerezi, torej s tetivami. Tetiva je daljica s krajiščema na krožnici. Izkazalo se je, da je ta razrez zahteven za računanje.

Če torto razrežemo z eno tetivo, ta poteka skozi središče kroga in krog razdeli na dva polkroga. Kar pa že poznamo, saj je ploščina enega dela $p = \frac{\pi r^2}{2}$.

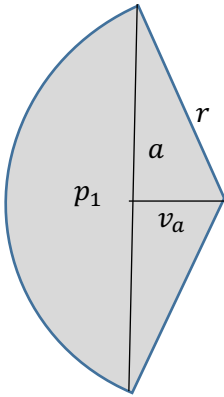
Poglejmo še rezanje torte s tetivami na tri enake dele (slika 12).



Slika 12: razrez torte na tri dele s tetivami

Polmer kroga je r , dolžini tetiv, ki sta enaki, označimo z a .

Ker morajo kosi torte biti enaki, je ploščina enega dela $p_1 = \frac{\pi r^2}{3}$. Ploščino krožnega odseka, ki je omejen s krožnim lokom in tetivo p_1 izračunamo tako, da od središča do točk, kjer se stikata tetiva in krožnica, načrtamo dva polmera. Dobimo krožni izsek (slika 13). Med polmeroma tako nastane središčni kot φ . Ploščina tega krožnega izseka je enaka $\pi r^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ}$. Tetiva in polmera, ki smo ju narisali, so stranice enakokrakega trikotnika. Ploščino tega trikotnika zapišemo $\frac{a \cdot v_a}{2}$. Da lahko izračunamo v_a , moramo uporabiti Pitagorov izrek, kar pomeni, da je $v_a^2 = r^2 - (\frac{a}{2})^2$. Iz tega sledi, da je $v_a = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$. Tako smo prišli do ugotovitve, da je ploščina krožnega izseka enaka $p_1 = \pi r^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} - \frac{a \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}$.

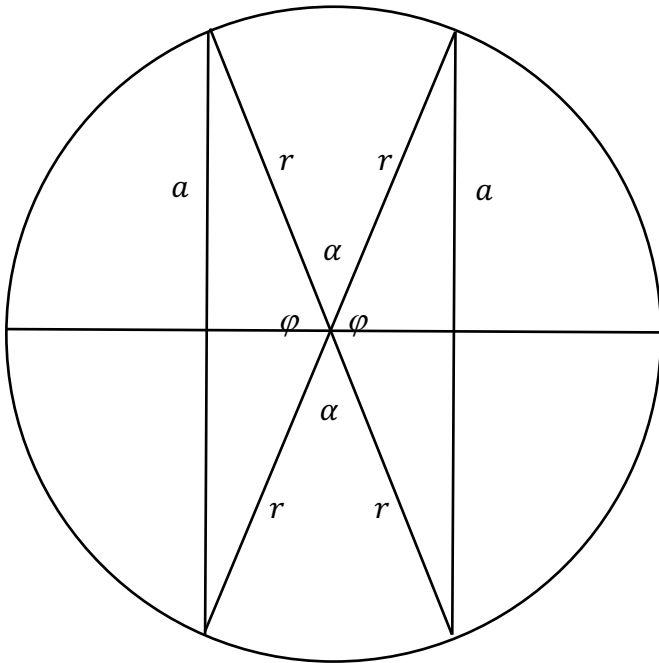


Slika 13: ploščina krožnega izseka

Ploščina sredinskega dela p_2 pa je zelo kompleksna. Seveda je pri taki delitvi enaka ploščini p_1 . Že prej smo ugotovili, da je ploščina trikotnika, ki ima za stranice tetivo in dva polmera,

enaka $p_{\Delta} = \frac{a \cdot \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}$. Ploščina p_2 je vsota dveh takih trikotnikov in dveh enakih krožnih izsekov s središčnim kotom α . Njun središčni kot bomo označili z α , torej je ploščina enega tega krožnega izseka $\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$. Velikost kota α lahko zapišemo $\alpha = \frac{360^\circ - 2\varphi}{2} = 180^\circ - \varphi$. S

temi ugotovitvami vemo, da je $p_2 = 2 \cdot \frac{a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}{2} + 2\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{\pi r^2 \alpha}{180^\circ}$ (slika 14).



Slika 14: ploščina srednjega dela

Ker je ploščina srednjega dela enaka ploščini enega odseka, lahko zapišemo enakost

$$\pi r^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} - \frac{a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}{2} = a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{\pi r^2 \alpha}{180^\circ}. \text{ Nekoliko poenostavimo}$$

$$\pi r^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} - \frac{2\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \text{ in}$$

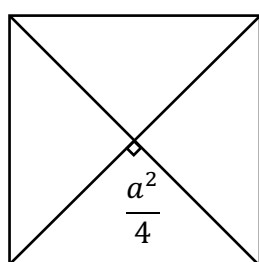
$$\frac{\pi r^2}{360^\circ} (\varphi - 2\alpha) = \frac{3}{2} \cdot a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Enačba presega naše matematično znanje, saj vsebuje preveč neznank. Kar pomeni, da žal ne znamo izračunati kje načrtati obe tetivi, da torto razrežemo na tri enake dele.

3. KVADRATNA TORTA

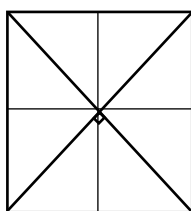
3.1 REZANJE S SIMETRALAMI KOTOV

Kvadratne torte so torte, ki imajo za zgornjo ploskev kvadrat. Vemo, da je ploščina kvadrata a^2 , obseg pa $4a$. Najenostavnejši način rezanja v praksi je ta, da režemo od krajišča do krajišča, torej po diagonalah kvadrata. Poznamo tudi dolžino teh diagonal in sicer $a\sqrt{2}$. Če zarežemo po obeh diagonalah, dobimo štiri enake pravokotne trikotnike (slika 15). Ploščina vsakega izmed teh kosov je enaka $p = \frac{a^2}{4}$.



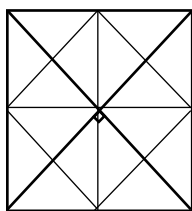
Slika 15: razrez kvadratne torte na štiri pravokotne trikotnike

Z novima dvema rezoma razrežemo torto na 8 enakih delov (slika 16).



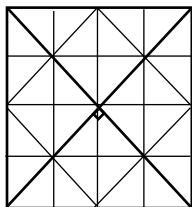
Slika 16: razrez kvadratne torte na osem enakih kosov

Z nadaljevanjem rezanja lahko razrežemo torto na 16 enakih delov (slika 17). Dodamo štiri reze.



Slika 17: razrez kvadratne torte na šestnajst enakih kosov

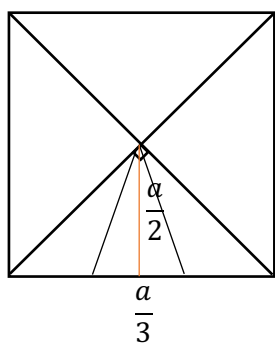
Rezanje bi lahko nadaljevali tako, da dobimo 32 enakih kosov (slika 18).



Slika 18: razrez kvadratne torte na 32 enakih kosov

Tak način rezanja nam torej da 1 (cela torta), 2 (ena diagonala), 4, 8, 16, 32, 64 ... enakih kosov.

V nadaljevanju lahko režemo torto tako, da režemo iz presečišča diagonal proti robovom. Tako dobimo več manjših, ploščinsko enakih kosov. Tudi ti kosi so trikotni, le da niso pravokotni trikotniki (slika 19). Opazujmo spodnjo četrtino. Želimo jo razdeliti na tri enake dele.



Slika 19: razrez kvadratne torte iz presečišča tetiv

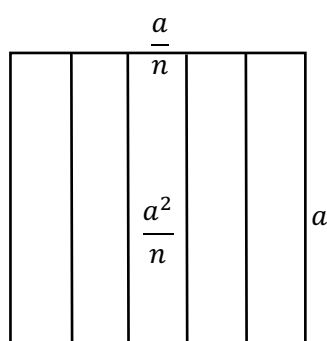
Nastanejo trije trikotniki, ki imajo enako stranico $\frac{a}{3}$ in enako višino $\frac{a}{2}$. Ploščina enega trikotnika je $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{12}$. Tako lahko celo torto razrežemo na dvanajst enakih kosov.

Če četrtino torte razdelimo na n enakih trikotnikov, imajo vsi stranico $\frac{a}{n}$ in enako višino $\frac{a}{2}$.

Ploščina enega trikotnika je $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4n}$. Tako celo torto razrežemo na $4n$ enakih kosov.

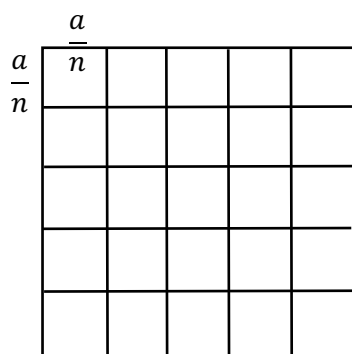
3.2 VZPOREDNICE NOSILK STRANIC

Kvadratno torto lahko razrežemo tudi na pravokotne kose. To storimo tako, da režemo po vzporednicah nosilk stranic. Ker želimo da so kosi ploščinsko enaki, morajo biti te vzporednice med seboj oddaljene za $\frac{a}{n}$. Pri tem a predstavlja dolžino stranice torte, n pa število zelenih kosov. Ploščina kosa je $p = \frac{a}{n} \cdot a = \frac{a^2}{n}$ (slika 20). Ugotovimo tudi, da bomo za n število kosov, potrebovali $n - 1$ število rezov.



Slika 20: razrez kvadratne torte na pravokotne kose

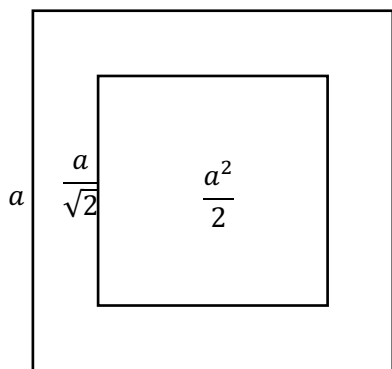
Nato lahko isto storimo še tako, da režemo vzporednice k drugima dvema nosilkama stranic. Če bomo upoštevali enak n , bomo dobili kvadratne, ploščinsko enake kose, ki sestavljajo šahovnico (slika 21). V tem primeru bo ploščina kosa enaka $p = \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} = \left(\frac{a}{n}\right)^2$.



Slika 21: razrez kvadratne torte kot šahovnica

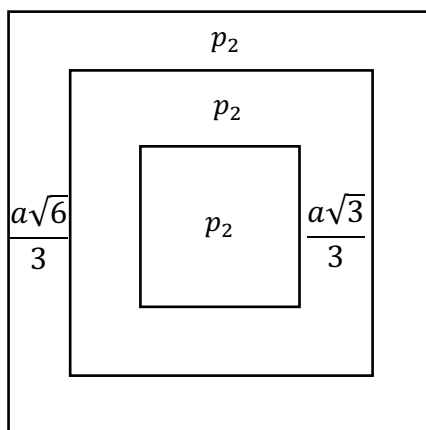
3.3 KVADRATI ZNOTRAJ KVADRATOV

Še zadnji in zelo nepraktičen način, ki ga bova predstavila je ta, da režemo tako, da z nožem v ploskev v obliko kvadrata, zarežemo manjše kvadrate. Če je dolžina stranice torte enaka a , bo ploščina celotne torte enaka a^2 . Če želimo torej torto razdeliti na dva ploščinsko enaka dela bo ploščina posameznega kosa enaka $p = \frac{a^2}{2}$. Iz tega sledi, da bo stranica manjšega kvadrata dolga natanko $\sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Če dobljen rezultat racionaliziramo, je dolžina stranice manjšega kvadrata enaka $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Glej sliko 22.



Slika 22: kvadrat znotraj kvadrata

Če hočemo torto na ta način razrezati na 3 ploščinsko enake kose, moramo v torto vrezati dva kvadrata. Ploščino celotne torte bomo v tem primeru označili s p , ploščina vsakega novo nastalega kosa pa bo p_2 (slika 23). Ko v torto vrežemo prvi kvadrat, je njegova ploščina enaka $2p_2$. ker vemo, da je $p_2 = \frac{p}{3}$, p pa je enaka $p = a^2$, lahko zapišemo, da je $p_2 = \frac{a^2}{3}$, torej je $2p_2 = \frac{2a^2}{3}$. Ko to korenimo, ugotovimo, da je dolžina stranice prvega kvadrata, ki smo ga rezali enaka $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Po racionalizaciji izračunamo, da je stranica tega večjega vrezanega kvadrata dolga $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Iz tega lahko izračunamo, da bo stranica manjšega kvadrata dolga $\sqrt{\frac{a^2}{3}}$. In to je $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

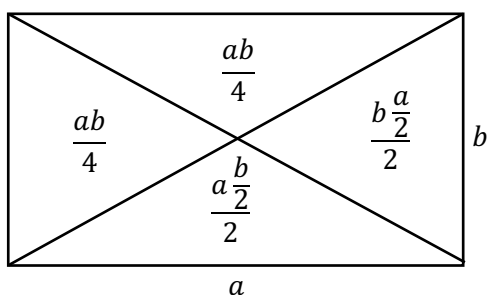


Slika 23: dva kvadrata znotraj kvadrata

4. PRAVOKOTNA TORTA

4.1 RAZREZ PRAVOKOTNE TORTE Z DIAGONALAMI

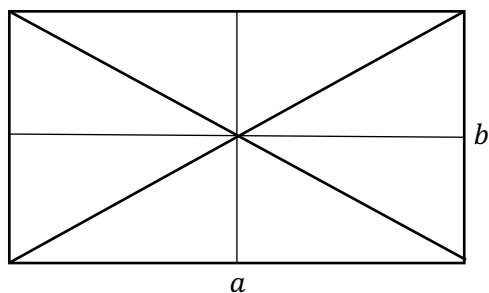
Zelo pogosto se na zabavah ali drugih dogodkih srečamo tudi s pravokotnimi tortami. Pravokotne torte so kvadri, ki imajo za zgornjo (in spodnjo) ploskev pravokotnik. Ploščina pravokotnika je enaka ab , obseg pa $2a + 2b$ ali $2(a + b)$. Tako kot pri kvadratnih tortah, je tudi tukaj en izmed enostavnejših načinov rezanja ta, da režemo po diagonalah pravokotnika. Tako bomo dobili 4 ploščinsko enake trikotnike. Prav tako vemo, da dolžine diagonal pravokotnika izračunamo s Pitagorovim izrekom, $d^2 = a^2 + b^2$ (glej sliko 24).



Slika 24: razrez pravokotne torte z diagonalami

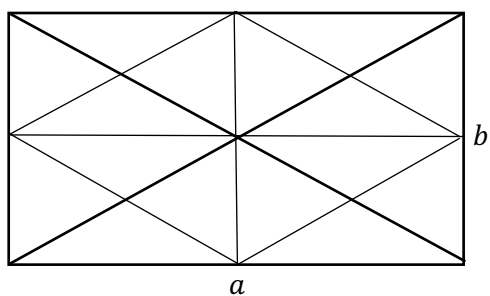
V tem primeru je ploščina vsakega kosa enaka $\frac{ab}{4}$. Če pa bi ploščino kosa računali s formulo $p = \frac{a \cdot v_a}{2}$, bi zapisali $p = \frac{a \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{ab}{4}$ ali $p = \frac{b \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{ab}{4}$.

Z dvema dodatnima rezoma nato torto razdelimo na 8 ploščinsko enakih kosov (slika 25).



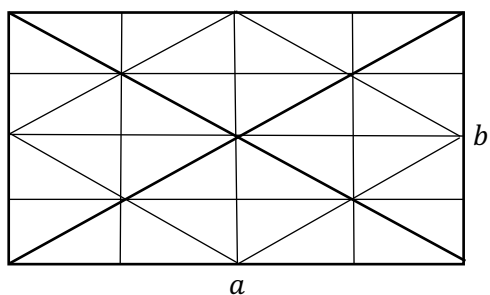
Slika 25: razrez pravokotne torte na 8 delov

Če z nožem zarežemo še štirikrat, dobimo 16 ploščinsko enakih kosov (slika 26).



Slika 26: razrez pravokotne torte na 16 delov

V nadaljevanju postopka za 32 enakih kosov moramo dodati štiri reze (slika 27).

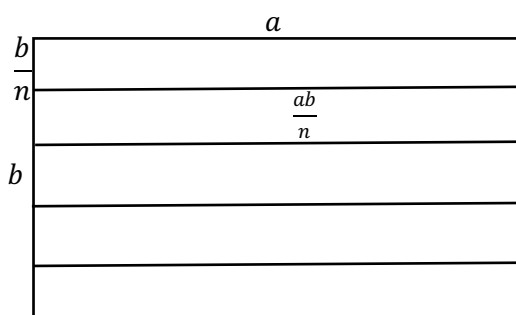


Slika 27: razrez pravokotne torte na 32 delov

Postopek bi z matematičnega vidika lahko nadaljevali v nedogled. S takim načinom rezanja lahko dobimo 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64... kosov.

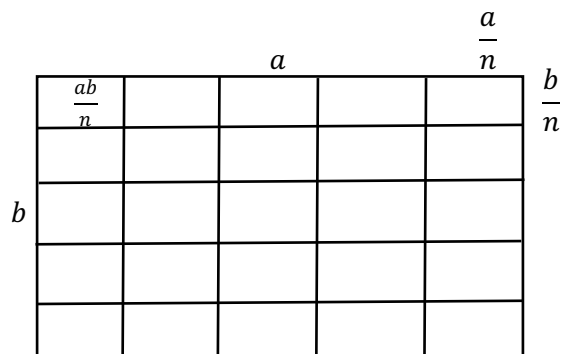
4.2 VZPOREDNICE NOSILK STRANIC

Eden izmed enostavnih načinov rezanja je tudi ta, da režemo po vzporednicah nosilk stranic. Pri tem dobimo manjše, ploščinsko enake pravokotnike. Ker želimo, da so kosi ploščinsko enaki, morajo biti te vzporednice med seboj oddaljene za $\frac{b}{n}$. Pri tem b predstavlja dolžino stranice torte, n pa število zelenih kosov. Ploščina vsakega kosa je $p = a \cdot \frac{b}{n}$ (slika 28). Ugotovimo tudi, da bomo za n število kosov, potrebovali $n - 1$ število rezov.



Slika 28: razrez pravokotne torte z vzporednicami nosilk stranic

Nato lahko zarežemo vzporednice še drugemu paru nosilk stranic, v tem primeru stranic b . Dobimo še manjše ploščinsko enake pravokotnike. Seveda je njihova ploščina odvisna od izbranega n . Če ohranimo enak n kot pri vzporednicah prvega para nosilk stranic, bodi ti pravokotniki imeli enako razmerje med stranicama, kot celotna zgornja ploskve tj. začetni pravokotnik. Ploščina nastalih kosov je $p = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n}$, obseg pa $o = 2\frac{a}{n} + 2\frac{b}{n}$ ali $o = 2(\frac{a}{n} + \frac{b}{n})$ (slika 29).



Slika 29: razrez pravokotne torte z vzporednicami obeh nosilk stranic

Postopek bi lahko z matematičnega vidika nadaljevali v nedogled, v praksi pa bi bilo to težje izvedljivo, zaradi zelo majhnih kosov.

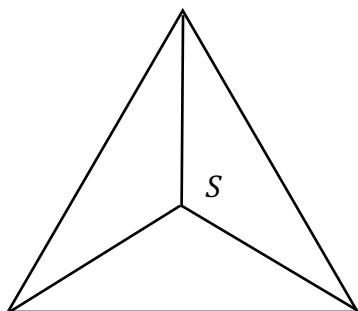
5. TRIKOTNE TORTE

5.1 TORTA, KI JE ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK

Najpogostejša oblika torte s tremi stranicami je v obliki enakostraničnega trikotnika. Enakostranični trikotnik je lik, ki ima vse stranice enako dolge. Prav tako ima vse zunanje (120°) in vse notranje (60°) enako velike.

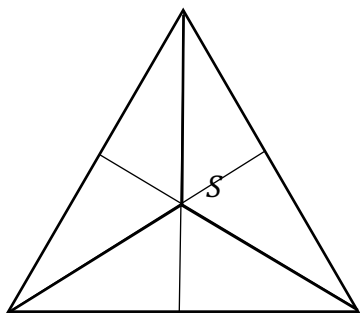
a) Razrez s simetralami kotov

Na začetku takšnega načina rezanja načrtamo simetrale vseh treh kotov. Točka S , v kateri se premice sekajo, predstavlja vrh novo nastalih trikotnikov. Glede na to, da je ploščina cele torte enaka $\frac{a \cdot V_a}{2}$, mora biti ploščina enega nastalega kosa $\frac{\frac{a \cdot V_a}{2}}{3}$, kar je enako $\frac{a \cdot V_a}{6}$ (slika 30).



Slika 30: razrez torte z obliko enakostraničnega trikotnika s simetralami kotov

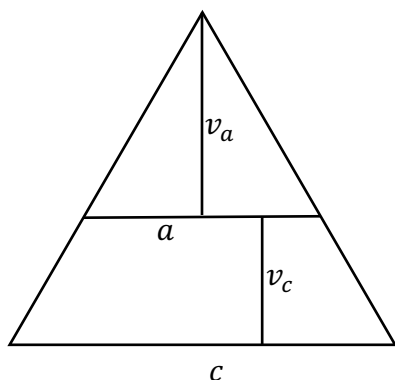
V nadaljevanju bi lahko torto razdelili na več enakih kosov tako, da bi rezali po simetralah vseh novo nastalih središčnih kotov, ki imajo vrh v točki S . Ploščina novo nastalega kosa v tem primeru pa je $\frac{a \cdot V_a}{12}$ (slika 31).



Slika 31: razrez torte z obliko enakostraničnega trikotnika s simetralami kotov na 6 kosov

b) Razrez z vzporednicami stranic

Pri tem načinu rezanja bodo vsi nastali kosi imeli obliko enakokrakega trapeza, razen tistega, ki ostane na vrhu torte. Ta bo imel le tri oglišča, kar pomeni da bo ta kos imel obliko trikotnika. Če bomo na primer s tem načinom rezanja torto razdelili na dva ploščinsko enaka dela, moramo točno vedeti, kje bomo opravili rez. Ker sta ploščini kosov enaki, bomo njuni enačbi enačili $\frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{v_c(a+c)}{2}$. S preoblikovanjem zapišemo $a \cdot v_a = v_c(a + c)$ in zapišemo razmerje $\frac{v_a}{v_c} = \frac{a+c}{a}$. Glej sliko 32.



Slika 32: razrez torte z obliko enakostraničnega trikotnika z vzporednicami stranice na dva kosa

Ker nas zanima kje prerežemo torto, sklepamo, da je dvakratnik ploščine manjšega trikotnika (ker sta ploščini manjšega trikotnika in trapeza enaki) enak ploščini cele torte, $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$. Preoblikujemo enačbo v $2a^2 = c^2$, in po korenjenju obeh strani je $a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2} \doteq 0,7c$. Z znano dolžino roba torte lahko izračunamo dolžino reza. Izračunajmo še višino v_a . Ker je trikotnik s stranico a enakostranični (podobni trikotniki), je $v_a = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{6}}{4}$.

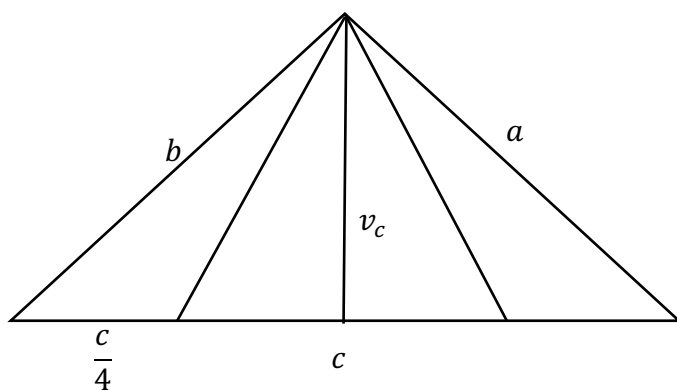
Torej, če prerežemo torto oblike enakostraničnega trikotnika v oddaljenosti $\frac{c\sqrt{6}}{4} \doteq 0,61c$ od vrha trikotnika (merjeno po višini), razrežemo torto na dva enaka kosa. Enak kos odrežemo, če od vrha trikotnika na obeh krakih odmerimo dolžino $0,7c$.

Enak postopek lahko uporabimo pri torti, ki ima obliko enakokrakega trikotnika.

5.2 RAZREZ NA MANJŠE TRIKOTNIKE Z ISTIMI VIŠINAMI

Ta način rezanja torte pride v poštev pri enakokrakih, enakostraničnih, raznostraničnih ter pravokotnih trikotnikih. Najprej moramo katerokoli stranico razdeliti na n število enakih delov, nato pa krajišča novo nastalih daljic povežemo z nasprotnim ogliščem oziroma z vrhom trikotnika (glej sliko 33). V tem primeru je $n = 4$, zato je ploščina vsakega izmed kosov enaka

$$p = \frac{\frac{c \cdot v_c}{2}}{4} = \frac{c \cdot v_c}{8} \text{ ali } p = \frac{\frac{c}{4} \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot v}{8}.$$



Slika 33: razrez torte z obliko trikotnika na n enakih delov

Ker so stranice in višine na stranico vseh manjših trikotnikov enake, so posledično kosi ploščinsko enaki.

5. ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi smo predstavili več načinov rezanja tort različnih oblik. Pri okrogli torti smo prikazali tri načine rezanja.

Prvi je ta, da režemo torto na krožne izseke. Ugotovimo, da je formula za ploščino enega kosa enaka p/n , velikost kota pri središču pa je $\frac{360^\circ}{n}$.

Pri načinu rezanja torte na kolobarje je polmer vsakega večjega kroga za $\sqrt{2}$ -krat večji od prejšnjega. To pomeni, da je $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \sqrt{2}$.

Rezanja okrogle torte s tetivami še ne znamo natančno izračunati.

Raziskali smo rezanje torte kvadratne in pravokotne oblike. Rezanje kvadratne torte je poseben primer rezanja pravokotne torte (kvadrat je pravokotnik s skladnimi stranicami). Rezali smo po diagonalah na trikotnike ali z vzporednicami k stranicam torte.

Vse trikotne torte lahko razrežemo na enake kose tako, da eno od stranic razdelimo na enake dele, ter delitvene točke povežemo z nasprotnim ogliščem. Nastanejo trikotniki z enako ploščino.

Prikazali smo rezanje enakostranične trikotne torte z daljico, vzporedno eni stranici. Pri tem nastane enakostranični trikotnik in trapez. Izračunali smo potrebno dolžino reza za tak način delitve torte.

Z več matematičnega znanja, bomo lahko še bolje raziskali delitev trikotne torte na trikotnik in več trapezov, rezanje okrogle torte s tetivami ter delitve tort poljubne oblike.

6. DRUŽBENA ODGOVORNOST

V raziskovalni nalogi sva uporabljala znanje, pridobljeno v šoli in iz matematičnih virov. Raziskovalna naloga je zanimiva, saj sva se ukvarjala z realnim, vsakdanjim problemom, ki pa ga v slaščičarnah najbrž ne rešujejo na tak način. Največkrat so torte v slaščičarnah pravokotne oblike, ki jo je tudi najlažje razrezati na manjše, enake kose. Torte drugačnih oblik pa režemo običajno sami, doma. Vse ugotovitve in z njimi napake so rezultat najinega raziskovalnega dela.

7. VIRI

1. Gazvoda, Frešer, Senekovič, Matematika za radovedneže 7, učbenik za OŠ, ICO d.o.o, 2012.
2. Smogavec, Govejšek, Senekovič, Matematika za radovedneže 8, učbenik za OŠ, ICO d.o.o, 2011.
3. Smogavec, Govejšek, Matematika za radovedneže 9, učbenik za OŠ, ICO d.o.o, 2011.
4. <https://padstowfoodservice.com.au/chocolate-cake-half-slab-happy-birthday/> 12. 11. 2022
<https://sprinkles.com/collections/cakes> 12. 11. 2022