BRAHISTOKRONA KRIVULJA

MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

Avtor: Ana Šmid

Mentor: Barbara Kušar

Šola: Gimnazija Kranj

2022, Kranj

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorici za obilo napotkov in pomoči pri raziskovalni nalogi. Z njeno pomočjo sem odkrila veliko novih področij matematike in spoznala zgodovinsko ozadje in pomembnost brahistokrone krivulje.

Kazalo

1. Povzetek/ Abstract

Povzetek:

V raziskovalni nalogi se bom lotila obravnave brahistokrone krivulje. Zdi se mi, da je le ta eden od najbolj zanimivih že rešenih problemov v matematiki, saj sta se z njo ukvarjala že Galileo Galilei in Johann Bernoulli. Brahistokrona je krivulja po kateri potuje telo med dvema točkama, da doseže najkrajši čas, medtem ko na nanj deluje konstantna gravitacijska sila. Kakršnekoli sile upora v času potovanja so zanemarjene.

V svoji raziskovalni nalogi se bom najprej osredotočila na čas potovanja masne točke med dvema točkama in energetske zakone, ki jih mora masna točka ubogati. Nato se bom osredotočila na zapis Euler- Lagrangeeve enačbe in reševanje le te na primeru Brahistokrone krivulje. V naslednjem poglavju se bom osredotočila na cikloido in njeno diferencialno enačbo.

Na koncu raziskovalne naloge bom s pomočjo vseh obravnavanih enačb rešila enačbo za čas potovanja masne točke in nato izračune prikazala na modelu potovanja masne točke in izračuna njene poti.

Ključne besede: Brahistokrona, Čas potovanja, Euler- Lagrangeva enačba, cikloida

Abstract

In the frame of this research project, I will aim to explore the Brachistocrone curve. It seems to me that this is one of the most interesting problems already solved in mathematics, as Galileo and Johann Bernoulli have already dealt with it. The brachistochrone is the curve of the shortest travel time of a mass between two points, while a constant gravitational force acts on the mass and any resistance or drag forces during the journey are neglected.

I will first focus on the time of mass travel between two points and the energy laws that the mass must obey. I will then focus on the evaluation of the Euler-Lagrange equation and its

solution in the case of the Brachistochrone curve. In the next chapter, I will focus on the cycloid and its differential equation.

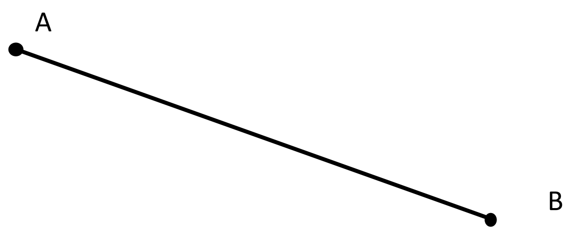
At the end of the research project, I will solve the equation for the time of travel with the help of all the considered equations and then show the calculations on the model of the travel of a mass and the calculation of its path.

Key words: Brachistocrone curve, Time of travel, Euler-Lagrange equation, the Cycloid

2. Uvod

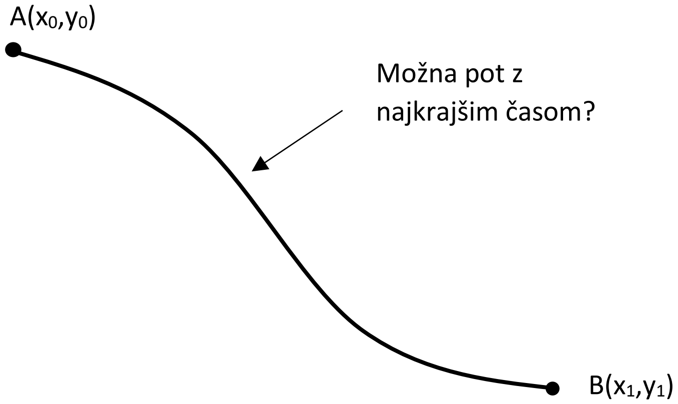
Brahistokrona krivulja je eden od najbolj zanimivih, že rešenih matematičnih problemov. Izvira iz grških besed *brachos* (kratek) in *cronos* (čas) in, kot že direkten prevod pove, pomeni najkrajšo pot glede na čas potovanja od točke A do točke B. Prvi se je z brahistokrono krivuljo ukvarjal Galileo Galilei, »popularno« pa jo je naredil Johann Bernoulli leta 1657, ko je s »Problemom brahistokrone krivulje« javno izzval Newtona, da reši problem. Ta ga je rešil, in to v le eni noči.

Problem brahistokrone krivulje nagovori bralca naj najde črto med dvema točkama. Po Evklidu, je lahko med katerekoli dvema točkama v prostoru narisana ravna črta, ki je najkrajša pot glede na razdaljo med točkama. Vendar, kakšna bi bila pot, če bi želeli najti črto, za katero velja, da je najkrajša pot med dvema točkama glede na čas?



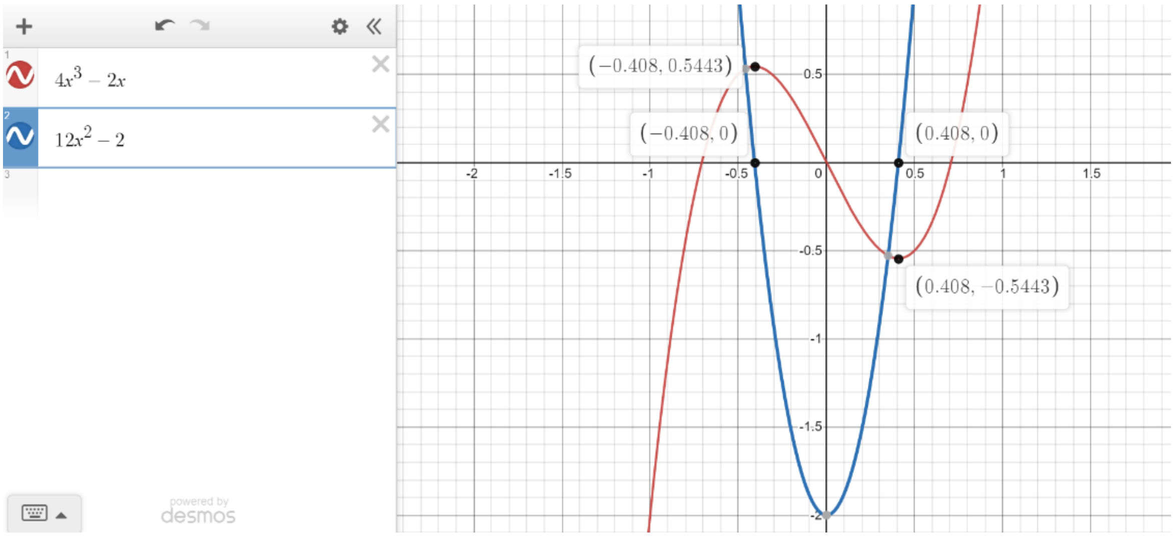
Slika 1: najkrajša razdalja med točkama A in B, Ana Šmid, 2022

Predstavljajmo si, da imamo vrvico na kateri je kroglica z maso *m*. Kroglica se med točkama A in B premika brez trenja in upora. Prav tako na kroglico stalno deluje navpični pospešek g. Kakšna bo v tem primeru oblika vrvice, da bo kroglica opravila pot z najkrajšim časom?



Slika 2: Možna pot z najkrajšim časom od točke A do B, Ana Šmid, 2022

To se lahko zdi kot preprost problem minimizacije. S pomočjo računskih operacij lahko določimo minimume in maksimume funkcije. f(x) odvajamo v $12x^2 – 2$ in kjer ima $12x^2$ -2 ničle funkcije, ima f(x) svoje minimume ali maksimume.



Graf 1: primer funkcije f(x) (rdeča) in njenega odvoda f'(x) (modra)

Odvod je definiran kot smerni koeficient tangente v dani točki. V ekstremu je tangenta vodoravna in posledično je odvod v ekstremu enak 0. To na grafu vidimo, ker sta x koordinati ekstremov funkcije $f(x)=4x^3 – 2x$ in ničel funkcije $f'(x)=12x^2$ -2 enaki. Z uporabo te logike bomo najprej definirali formulo za čas potovanja med dvema točkama.

3. Čas potovanja med dvema točkama

T je opredeljen kot skupni čas, potreben za potovanje kroglice:

$$T = \int dt \tag{1}$$

Trenutno hitrost definiramo kot odvod poti po času:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

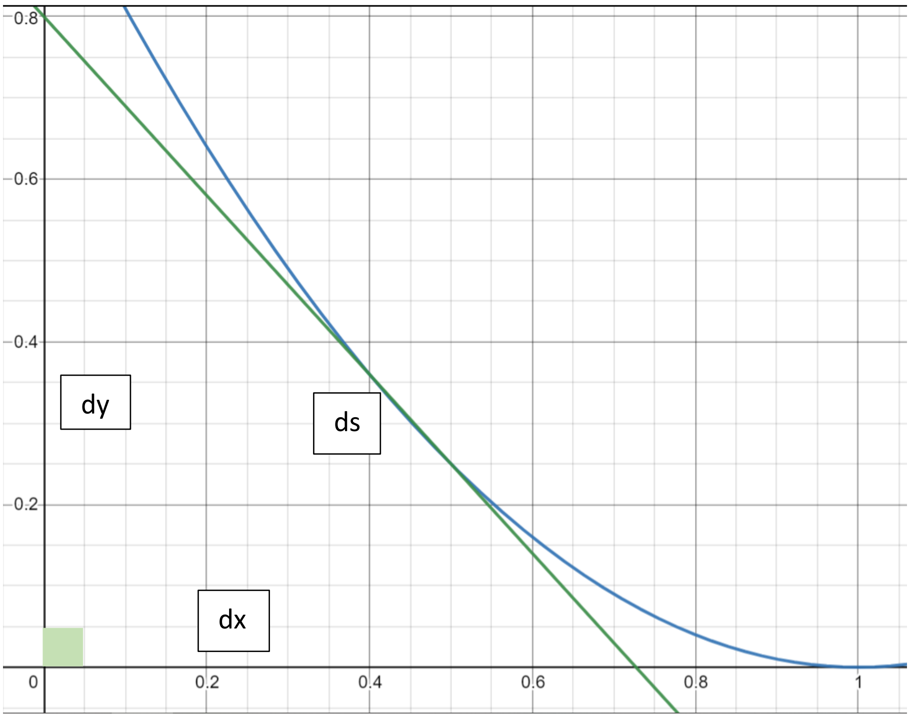
kjer ds predstavlja prepotovano pot in dt čas, v katerem je bila pot prepotovana. Če to formulo preuredimo:

$$dt = \frac{ds}{v}$$

$$T = \int \frac{ds}{v} \tag{2}$$

Spremembo poti lahko izrazimo s Pitagorovim izrekom, kjer sta dx in dy spremembi v smereh koordinatne osi: $ds^2 = dx^2 + dy^2$, torej:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$



Graf 2: primer krivulje (modra) z njeno tangento (zelena)

Enačbo nato nekoliko preuredimo, da dobimo:

$$ds = \sqrt{dx^2\,(1 + y'^2)}$$

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx \tag{3}$$

Kroglica mora upoštevati tudi zakon o ohranitvi energije in če primerjamo njeno potencialno energijo U z njeno kinetično energijo KE, dobimo:

$$W_p = m \cdot g \cdot h$$

$$W_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$W_p = W_k \quad m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Kjer je W_p potencialna energija kroglice, W_k kinetična energija kroglice, m masa kroglice, v hitrost kroglice, h sprememba višine oziroma vertikalna pot, ki jo kroglica opravi. G je gravitacijski pospešek, $g=9.81\ m/s^2$

Ko definiramo h kot y, kar je razdalja nad osjo x:

$$v = \sqrt{2gy} \tag{4}$$

Če v enačbo 2 vstavimo enačbi 4 in 3, dobimo:

$$T = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx \tag{5}$$

Če pogledamo to enačbo, je očitno, da diferenciacija in integracija tukaj ne veljata, saj moramo minimizirati celotno družino funkcij, ne le posamezno točko. Zato se bomo posluževali v tem primeru posluževali Euler- Lagrangeve diferencialne enačbe.

4. Euler- Lagrangeva diferencialna enačba

Ko govorimo o brahistokronski krivulji, moramo omeniti Eulerja. On je bil tisti, ki je posplošil problem. Tesno je sodeloval z Lagrangeom in skupaj sta raziskovala enačbo, ki se danes imenuje Euler- Lagrangeva diferencialna enačba. Slednja je danes opredeljena kot »veja matematike, ki se ukvarja z uporabo metod računanja pri iskanju maksimumov in minimumov funkcije, katere vrednosti so odvisne od druge funkcije ali krivulje« (Merriam Webster). Zato bomo za reševanje problema brahistokrone krivulje uporabili temeljno enačbo, ki je nastala zaradi Eulerjevega in Lagrangeovega sodelovanja; Euler-Lagrangeeova enačba.

Slednja pravi, da:

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[\frac{\partial F}{\partial y\prime}\right] = 0}$$

Kjer **∂** pomeni parcialni odvod.

Z uporabo prej omenjene enačbe za čas lahko vstavimo za F:

$$\mathrm{F} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}$$

Zato,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}\ |x, y(x), y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[\frac{\partial F}{\partial a}\ \ |x, y(x), y'(x)\right] \tag{6}$$

Kjer je a = y’. Pri parcialnih odvodih ostale spremenljivke obravnavamo kot konstante. Konstanta bo prepoznana kot c.

4.1 Leva stran Euler-Lagrangeove enačbe

Najprej poglejmo levo stran Euler-Lagrangeove enačbe:

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{y}}\right)$$

$$= \sqrt{1+a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} y^{-0.5} =$$

$$= \sqrt{1+a^2} \cdot (-\frac{1}{2} y^{-1.5})$$

Torej:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y^3}} \tag{7}$$

4.2 Desna stran Euler-Lagrangeove enačbe

Pri računanju desne strani enačbe moramo najprej poiskati parcialni odvod F glede na a, nato pa upoštevati še, da a pomeni y'.

Torej:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{c}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \sqrt{1+a^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot 2a$$

Zato,

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{y \cdot (1+a^2)}} \tag{8}$$

a smo definirali kot a = y'(x) in če vzamemo odvod glede na x, dobimo naslednje:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial a}\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{y(1+(y')^2)}}\right)$$

Za poenostavitev zapisa upoštevamo p = y, q = y', r = y''. Zato:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial a}\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{\sqrt{p(1+q^2)}}\right)$$

Najprej uporabimo formulo za odvod količnika $\frac{u(x)}{v(x)}$

$$u(x) = q\ ,\ \ u'(x) = r$$

$$v(x)= \sqrt{p(1+q^2)}$$

$$v'(x)= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{p}\cdot\sqrt{1+q^2}\right)$$

Pri računanju odvoda v(x) pa pride v poštev še pravilo za odvod produkta

$$s(x) = \sqrt{p}\ ,\ \ s'(x) = \frac{1}{2\sqrt{p}}\cdot q$$

$$t(x) = \sqrt{1+q^2}\ ,\ \ t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+q^2}}\cdot 2q\cdot r$$

Tako da v'(x) = s(x) · t'(x) + t(x) · s'(x)

$$v'(x) = \frac{\sqrt{p}\cdot qr}{\sqrt{1+q^2}} + \frac{q\cdot\sqrt{1+q^2}}{2\sqrt{p}}$$

$$= \frac{qr\cdot\sqrt{p}\cdot 2\sqrt{p}+(q\cdot\sqrt{1+q^2}\cdot\sqrt{1+q^2})}{2\sqrt{p(1+q^2)}}$$

$$v'(x) = \frac{2pqr+q\cdot(1+q^2)}{2\sqrt{p(1+q^2)}}$$

Končni odvod se glasi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[\frac{\partial F}{\partial a}\right] = \frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v^2}$$

$$= \frac{r\cdot\sqrt{p(1+q^2)}-\left(q\cdot\frac{2pqr+q\cdot(1+q^2)}{2\sqrt{p(1+q^2)}}\right)}{p\cdot(1+q^2)}$$

$$=\frac{\left(2\cdot r\cdot\sqrt{p(1+q^2)}\sqrt{p(1+q^2)}-\left(q\cdot\left(2pqr+q(1+q^2)\right)\right)\right)}{2\sqrt{p(1+q^2)}}\cdot\frac{1}{p(1+q^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p(1+q^2)}}\cdot\frac{2p\left(1+q^2\right)r-2pq^2r-q^2(1+q^2)}{2p(1+q^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p(1+q^2)}}\cdot\frac{2pr+2pq^2r-2pq^2r-q^2(1+q^2)}{2p(1+q^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{p(1+q^2)}} \cdot \frac{2pr-q^2(1+q^2)}{2\cdot p(1+q^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{p(1+q^2)}} \cdot \left(\frac{2pr}{2p(1+q^2)} - \frac{(q^2(1+q^2)}{2p(1+q^2)}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{p(1+q^2)}} \cdot \left(\frac{r}{1+q^2} - \frac{q^2}{2p}\right)$$

Zato:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[\frac{\partial F}{\partial a}\right] = \frac{1}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} \cdot \left(\frac{y''}{1+y'^2} - \frac{y'^2}{2y}\right) \tag{9}$$

4.3 Reševanje Euler-Lagrangeove enačbe za Brahistokronovo krivuljo

Izenačimo desno stran (9) in levo stran (7):

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y\left(1+\left(y'^2\right)\right)}} \cdot \left(\frac{y''}{1+y'^2} - \frac{y'^2}{2y}\right) \tag{10}$$

Nato vstavimo za: p = y, q = y’, r = y’’.

$$\frac{1}{\sqrt{p(1+q^2)}} \cdot \left(\frac{r}{1+q^2} - \frac{q^2}{2r}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+q^2}}{p^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{r}{1+q^2} - \frac{q^2}{2p}\right) = -1 \cdot \frac{\left(\sqrt{p} \cdot \sqrt{p(1+q^2)} \cdot \sqrt{p(1+q^2)}\right)}{2p^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{r}{1+q^2} - \frac{q^2}{2p}\right) = -1 \cdot \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2p^{\frac{3}{2}}} \cdot (1+q^2)$$

$$\frac{r}{1+q^2} = \frac{-(1+q^2)}{2p} + \frac{q^2}{2p}$$

$$\frac{r}{1+q^2} = -\frac{1}{2p}$$

$$2pr = -1 - q^2$$

$$2 \cdot y' \cdot y'' + 1 + y'^2 = 0 \tag{11}$$

Če pomnožimo z y', dobimo:

$$2 \cdot y \cdot y' \cdot y'' + y'^3 + y' = 0 \tag{12}$$

Z odvajanjem $y + y \cdot y'^2$ dobimo

$$2 \cdot y \cdot y' \cdot y'' + y'^3 + y' = 0$$

To je enačba enaka enačbi (12). Če tako integriramo obe strani enačbe (12) glede na x, dobimo:

$$\int \left(2 \cdot y \cdot y' \cdot y'' + y'^3 + y'\right) dx = \int 0 \; dx$$

$$\int \frac{d}{dx} \left[y + y \cdot y'^2\right] dx = C$$

$$y + y \cdot y'^2 = C$$

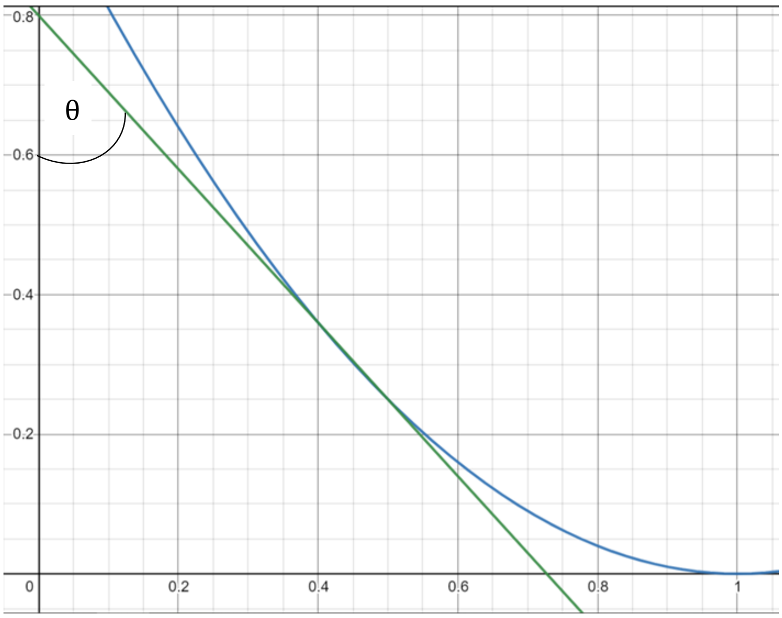
Ta enačba je diferencialna enačba drugega reda. Slednjo vrsto enačbe je običajno težko rešiti, vendar je ta enačba izjema, saj lahko izrazimo y' kot

$$y' = \sqrt{\frac{C - y}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C-y}{y}}, \quad \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C-y}} \tag{13}$$

Na tej točki moramo uvesti novo spremenljivko θ, tako da je

$$\tan\theta = \frac{dx}{dy}$$



Graf 3: Kot θ

Zdaj lahko rešimo enačbo za to krivuljo s spremenljivko θ.

Zato,

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{y}{C-y}}$$

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{y}{C-y}$$

$$\mathrm{C}\cdot(\sin\theta)^2 - y\cdot(\sin\theta)^2 = y\cdot(\cos\theta)^2$$

$$y = C\cdot(\sin\theta)^2$$

$$\boxed{y = \frac{C}{2}(1-\cos 2\theta)} \tag{14}$$

Reševanje enačbe v smeri x gre takole

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d\theta}} = C \cdot 2\sin\theta\cos\theta\,, \qquad \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C-y}}$$

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}} = C \cdot \sqrt{\frac{(\sin\theta)^2}{1-(\sin\theta)^2}} \cdot 2C\sin\theta\cos\theta$$

$$= C \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \mathrm{C}(1-(1-\ 2(\sin\theta)^2))$$

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}} = C(1-\ \cos 2\theta)$$

$$\mathrm{dx} = C(1-\ \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$\int dx = C\int (1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$x = C\int 1\,d\theta - C\int \cos 2\theta\,d\theta$$

$$x = C(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)$$

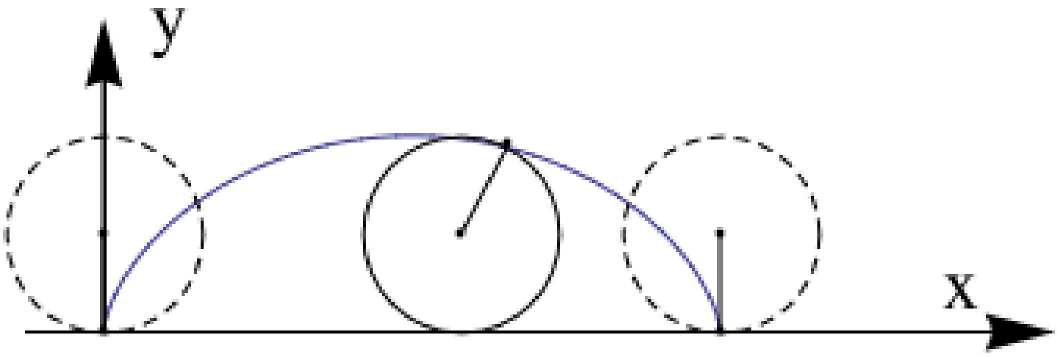
$$\boxed{x = \frac{C}{2}(2\theta - \sin 2\theta)} \qquad (15)$$

Enačbo iskane krivulje lahko zapišemo v parametrični obliki

$$\boxed{x = \frac{C}{2}(2\theta - \sin 2\theta)}$$

$$\boxed{y = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\theta)}$$

5. Cikloida

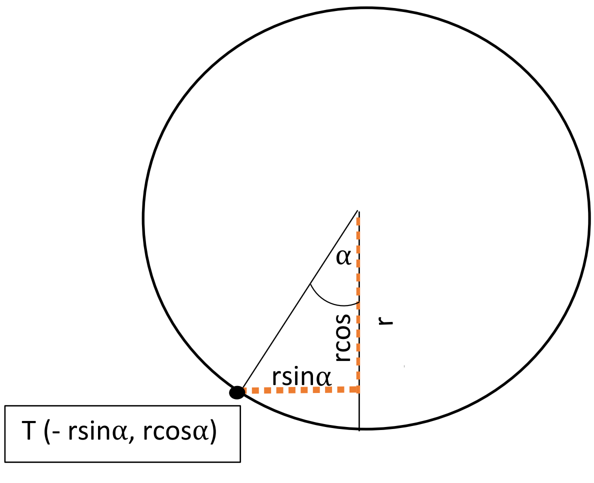


Slika 3 : Cikloida, Dobrushkin V., 2022

Cikloida je krivulja, ki si jo najlažje predstavljamo, kot sliko, ki bi nastala, če bi pero zataknili na rob kroga, medtem ko se krog vrti vodoravno v pozitivno smer. Zato lahko sestavimo parametrično enačbo za takšno krivuljo s preučevanjem kroga. Standardna enačba za krožnico je x= $r\cos\vartheta$, y $= r\sin\vartheta$, kjer je r polmer in $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

Če se krog vrti v smeri urinega kazalca s kotom α od dna kroga, je treba za opis položaja točke preurediti naslednje enačbe:

$$x = -r\sin\alpha, \quad y = r\cos\alpha$$



Slika 4: Prikaz kota α, ko se krog vrti v smeri urnega kazalca, Ana Šmid, 2022

Ker se krog, ki oblikuje cikloido, premika v pozitivni smeri x, je treba to gibanje dodati v parametrično funkcijo cikloide. Če je t število radianov, ki jih je naredil krog:

$$\Delta x = 2\pi r \cdot \frac{t}{2\pi}$$

$$\boxed{\mathrm{x} = -\mathrm{r}\sin\alpha + r\alpha}$$

$$x = r(\alpha - \sin\alpha) \tag{16}$$

Predpostavimo, da je središče kroga na (r,r) in ne na (0,0), zato da dno kroga leži na x-osi. Torej,

$$y = \mathrm{r} - \mathrm{r}\cos\alpha$$

$$\boxed{\mathrm{y} = \mathrm{r}(1 - \cos\alpha)} \tag{17}$$

Enačba za brahistokrono in ta enačba sta sizelo podobni. Domnevamo lahko, da sta obe krivulji enaki.

5.1 Diferencialna enačba cikloide

Če odvajamo enačbi glede na α, dobimo

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\alpha}} = \frac{d}{d\alpha}(r(\alpha - \sin\alpha)) = r \ \cdot (1 - \cos\alpha\ )$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\big(r(1 - \cos\alpha)\big) = r \cdot (\sin\alpha)$$

Zato je mogoče določiti odvod cikloide:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \mathrm{r}\sin\alpha \cdot \frac{1}{\mathrm{r}(1-\cos\alpha)}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \tag{18}$$

Če kvadriramo obe strani, dobimo:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1-(\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)^2}$$

$$= \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)^2}$$

$$= \frac{(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)}$$

S pomočjo enačbe (17) dobimo:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{y}{r}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1+\left(1-\frac{y}{r}\right)}{1-\left(1-\frac{y}{r}\right)}$$

$$= \frac{2r-y}{r} \cdot \frac{r}{y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r-y}{y} \tag{19}$$

$$\boxed{y(y'^2+1) = 2r} \tag{20}$$

6. Računanje časa, ki ga masna točka prepotuje za pot po cikloidi

Z vsemi obravnavanimi enačbami, lahko poiščemo čas, prepotovan po cikloidi. Uporabimo enačbo (5):

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx$$

Iz enačbe (19) dobimo:

$$\mathrm{dx} = dy \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2r - y}{y}}}$$

Če to uporabimo v enačbi za čas potovanja,

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + \left(\sqrt{\frac{2r - y}{y}}\right)^2}{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2r - y}{y}}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^{y(x_1)} \sqrt{\frac{2r}{y} \cdot \frac{1}{2r - y}} \; dy$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^{y(x_1)} \sqrt{\frac{2r}{y(r-y)}} \mathrm{dy} \qquad (21)$$

Če uporabimo enačbo (17),

$$y = r(1 - \cos \alpha)$$

Lahko čas zapišemo kot

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^{y(x_1)} \sqrt{\frac{2r}{-1 \cdot ((r - y)^2 - r^2)}} dy$$

Zdaj se osredotočimo na imenovalec ulomka in ugotovimo:

$$(r - y)^2 - r^2 = (\mathrm{r} - \mathrm{r} + \mathrm{r} \cdot \cos \alpha)^2 - r^2$$

$$= \left(r \cdot (1 - 1 + \cos \alpha)\right)^2 - r^2$$

$$= r^2(\cos\alpha)^2 - r^2$$

$$= r^2((\cos\alpha)^2 - \ 1)$$

$$= -r^2(\sin\alpha)^2$$

Zato je integral poenostavljen kot:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^{y(x_1)} \frac{\sqrt{2r}}{r \cdot \sin\alpha} dy$$

$$\mathrm{dy} = r\sin\alpha\, d\alpha$$

Zato,

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^{\alpha(y(x_1))} \frac{\sqrt{2r}}{\mathrm{r} \cdot \sin\alpha} \cdot \mathrm{r}\sin\alpha\, d\alpha$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^{\alpha(y(x_1))} \sqrt{2r}\, d\theta$$

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \alpha \tag{22}$$

Ker sta **α** in g parametra v parametrični enačbi brahistokronske krivulje, lahko v kateri koli enačbi in ob gravitacijskem pospešku izračunamo najkrajši čas potovanja.

7. Izračun poti na podlagi prejšnjih ugotovitev

Raziščimo brahistokronsko krivuljo med točkama (0,0) in (10,-10).

$$10 = r(\alpha - \sin\alpha)$$

$$10 = \mathrm{r}(1 - \cos\alpha)$$

$$\frac{10}{1 - \cos\alpha} = r$$

$$1 - \cos\alpha = \mathrm{\alpha} - \sin\alpha$$

$$1 - \mathrm{\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$$

S pomočjo uporabe računala (Texas Instruments TI-84 Plus CE-T) dobimo rešitev, $\alpha \approx 2{,}41201$. Izračunamo r,

$$r = \frac{10}{1 - \cos 2.41201} \approx 5.7292$$

Prezrcalimo krivulj čez os x, da dobimo brahistokrono krivuljo:

$$x = 5.73\,(\mathrm{\alpha} - \sin\alpha)$$

$$\mathrm{y} = -5.73(1 - \cos\alpha)$$

Iz tega izračunamo čas,

$$T = \sqrt{\frac{5.7292}{9.81}} \cdot 2.412$$

$$T = 1.8433\ s$$

Za primerjavo zdaj izračunamo čas potovanja, ko je pot ravna črta:

$$razdalja = \sqrt{10^2 + (-10)^2} = \sqrt{200}$$

$$pospešek = g \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9.81 = \frac{9.81}{\sqrt{2}}$$

$$d = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$T_{linearna} = \sqrt{\frac{2\sqrt{400}}{9.81}} = 2.0193\ s$$

$$\Delta T = T_{linearna} - T_{cikloida} = 0.17598\ s$$

Da bi bila razlika bolj očitna, izračunamo relativno razliko:

$$Relativna\ razlika = \frac{\Delta T}{T_{linearna}}$$

$$Relativna\ razlika \approx 8.72\%$$

Če vnesemo različne točke, ugotovimo, da relativna razlika ostane konstantna, ne glede na to, katere koordinate izberemo za točke.

Soočamo se z eno omejitev, to je, da je začetna točka višja od končne, saj s tem zagotovimo, da je zakon o ohranjanju energije upoštevan. Kinetična energija, ki je potrebna za premikanje kroglice, izhaja iz razlike potencialne energije med izbranimi točkami, zato bo energije dovolj le, če je $y_1 - y_2 \leq 0$.

8. Zaključek

Med to raziskavo sem prebrala veliko znanstvenih člankov, ki so pomembni za to temo. Zdeli so se mi izredno zanimivi in sem se od njih, pa tudi iz same raziskave, naučila veliko novega. Problem brahistokrone je najprej pritegnil mojo pozornost zaradi zgodovinskega ozadja, Bernoulli je izzval Newtona, Newton pa je rešil problem v eni noči. To je resnično edinstven problem, kar se vidi iz številnih načinov, s katerimi je problem mogoče rešiti. Na primer s pomočjo lomnega zakona ali v našem primeru s pomočjo Euler-Lagrangeve diferencialne enačbe. Med obsežnim raziskovanjem na to temo sem naletela tudi na nekatere druge podobne probleme, kot je na primer tavtohrona krivulja ali celo samo cikloida. Obe odpirata nova vprašanja in področja raziskovanja ter možnost spoznavanja pomembnih matematikov iz različnih obdobij.

Zelo sem vesela, da sem za temo raziskovalne naloge izbrala problem brahistokrone krivulje, saj je postavil nove izzive, s katerimi sem se morala soočiti, in odkrila sem zame novo področje matematike, Euler-Lagrangevo diferencialno enačbo. Ogledala sem si nešteto videoposnetkov in prebrala veliko člankov, da bi bolje razumela temo, kar mi je na koncu tudi uspelo. Spoznala sem tudi, da je ta tema močno povezana s fiziko, predvsem z optiko in ohranjanjem energije, kar daje bolj praktičen vpogled v ta problem in morda še eno področje morebitnega nadaljnjega raziskovanja.

9. Viri

Lawlor G., 1996. *A New Minimization Proof for the Brachistocrone*. The American Mathematical Monthly. Accessible at: https://www.jstor.org/stable/2975375 22.11.2021

Kreyszig E., 1999. *Advanced Engineering Mathematics 8th edition*. John Wiley & Sons Inc. 13.9.2021

Eves H., 1964. *An Introduction to the history of mathematics*. Holt, Rinehart and Winston Inc. 13.9.2021

Watkins J., 2014. *Number Theory A historical approach*. Princeton University press. 13.9.2021

Desmos Inc. Desmos. Computer software. desmos.com. Accessible at: https://www.desmos.com. 17.11.2021

Johnson N. P., 2004. *The Brachistocrone Problem*. The College Mathematics Journal. Accessible at: https://www.jstor.org/stable/4146894. 28.10.2021