



Gibanje MLADI RAZISKOVALCI KOROŠKE

Področje: MATEMATIKA ALI LOGIKA

KVADRATNI PALINDROMI

AVTOR: Kaja Vreš

MENTOR: Dragomir Benko, prof. mat.

SOMENTORJA: Domen Vreš, dipl. inž. rač. in mat. (UN)

Simona Vreš, univ. dipl. inž. mat.

Ravne na Koroškem, 2021/2022

Gimnazija Ravne na Koroškem, Na gradu 4, 2390 Ravne na Koroškem

1 ZAHVALE

Zahvaljujem se mentorju Dragomirju Benku, prof. mat., za osnovno idejo raziskovalne naloge, pomoč in usmeritve pri izdelavi ter somentorjema Domnu Vrešu, dipl. inž. mat. in rač.(UN), za vso pomoč, usmeritve, ideje, podporo ter Simoni Vreš, univ. dipl. inž. mat., za podporo in pomoč pri izdelavi raziskovalne naloge.

2 POVZETEK

Kvadratni palindrom je par števil, za kateri velja, da ima eno število števk v obratnem vrstnem redu kot drugo, in to velja tudi za njuna kvadrata; torej ima kvadrat enega števila števk v obratnem vrstnem redu kot kvadrat drugega števila. V tej raziskovalni nalogi raziskujemo, kakšni so pogoji, da je število kvadratni palindrom. S pomočjo Microsoft Excela smo poiskali nekaj primerov kvadratnih palindromov in jih nato opazovali. Ugotovili smo, da jih sestavljajo samo številke 0, 1, 2 in 3. V nadaljevanju dokažemo, da kvadratni palindrom ne more vsebovati nobene druge številke in da ne sme prihajati do prenosa enote pri kvadriranju števila. To dokažemo s pomočjo kongruenc in indukcije. Iz tega zaključimo, da je v kvadratnem palindromu lahko največ ena številka enaka 3 in da številki 2 in 3 ne moreta skupaj nastopati v kvadratnem palindromu. V nalogi ugotovimo, da številka 3 ne sme biti na sredini števila, ki ga kvadriramo, da je to število lahko kvadratni palindrom. Prav tako pokažemo, da lahko enako obravnavamo tudi kvadratne palindrome, ki imajo različno število števk; torej ima eno število na koncu vsaj eno številko enako 0, vendar zanje ne velja ugotovitev, da številka 3 ni na srednjem mestu.

Ključne besede: palindromi, kvadratni palindromi, teorija števil, indukcija.

2.1 THE ABSTRACT

A square palindrome is a pair of numbers that is considered to have digits of one number in reverse order than another and the same is also considered to be true for their square, that means that the square of one number has digits in reverse order than the square of another number. In this research paper we investigate the conditions for the number to be square palindrome. Using Microsoft Excel, we searched for a few examples of square palindromes and then observed them. We found that they consist only of the digits 0, 1, 2 and 3. We also prove that square palindromes cannot contain any other digits and that there must be no transfer of the unit when squaring the numbers. We prove this with the help of congruence and induction. From this we conclude that in a square palindrome there is a maximum of one digit that can be equal to 3 and that digits 2 and 3 cannot appear together in a square palindrome. In this work we find that the digit 3 cannot be in the middle of the number we are squaring so that this number is still considered a square palindrome. We also show that we can treat square palindromes with a different number of digits in the same way. That means that one number has at least one digit equal to 0 at the end, but the finding that the number 3 is not in the middle is invalid for them.

Keywords: palindromes, square palindromes, number theory, induction

3 KAZALO VSEBINE

1	Zahvale	1
2	Povzetek.....	2
2.1	The abstract	3
4	Kazalo slik.....	6
5	Uvod	7
5.1	Definicija kvadratnega palindroma	7
5.2	Hipoteze in cilji	8
5.3	Metode dela	8
6	Desetiški zapis naravnega števila	9
6.1	Posplošitev.....	9
7	Kvadriranje $n+1$ -mestnega števila	10
8	Kongruence	11
9	Indukcija	12
10	Generiranje kvadratnih palindromov	13
10.1	Dvomestna števila	13
10.2	Trimestna števila.....	14
10.3	Štirimestna števila	15
10.4	Petmestna števila	16
10.5	Ugotovitve	17
11	Števke, ki tvorijo kvadrtni palindrom.....	18
11.1	Dokaz za prvo oziroma zadnje mesto	18
11.2	Dokaz za celotno število	22
11.2.1	Indukcija	23
11.3	Pogoji, ki določajo kvadratne palindrome	24

11.3.1	Potence s sodimi eksponenti	24
11.3.2	Potence z lihimi eksponenti	24
11.4	Omejitve	25
11.5	Dodatne omejitve	26
11.5.1	Pomembne ugotovitve	28
11.5.2	Kvadratni palindromi Z LIHIM številom ŠTEVK	30
12	Posebni kvadratni palindromi	31
12.1	Kvadratni palindromi, zgrajeni iz enakih števk	31
12.1.1	Kvadratni palindromi, zgrajeni iz samih 1	31
12.1.2	Kvadratni palindromi, sestavljeni iz samih 2	32
12.2	Kvadratni palindromi z različnim številom mest	33
	Dokaz za naravna števila z zadnjo števk 0	34
13	Rezultati	35
13.1	Preizkus prve hipoteze H1	35
13.2	Potrditev druge hipoteze H2	36
14	Razprava	37
15	Zaključek	38
15.1	Nove hipoteze	38
15.2	Možne razširitve	38
15.2.1	Kubični palindromi	38
15.2.2	Vsota členov PRI isti potenci manjša od 10	39
15.3	Pomanjkljivosti	40
16	Viri in literatura	41

4 KAZALO SLIK

Slika 1: Preglednica dvomestnih kvadratnih palindromov.....	14
Slika 2: Preglednica trimestnih kvadratnih palindromov	15
Slika 3: Preglednica štirimestnih kvadratnih palindromov	16
Slika 4: Primer najdenih petmestnih kvadratnih palindromov	17
Slika 5: Grafični prikaz števila členov za devetmestno število.....	29
Slika 6: Grafični prikaz števila členov za poljuben n	29
Slika 7: Preglednica kvadratnih palindromov, sestavljenih iz samih enk	31
Slika 8: Kvadriranje osemestnega in devetmestnega števila, sestavljenega iz samih enic ...	32
Slika 9: Preglednica kvadratnih palindromov, sestavljenih iz samih dvojek.....	32
Slika 10: Kvadriranje dvomestnega in trimestnega števila sestavljenega, iz samih dvojek	33
Slika 11: Preglednica dvomestnih in trimestnih kubičnih palindromov	39

5 UVOD

V tej raziskovalni nalogi raziskujemo dokaj neraziskano področje matematike – kvadratne palindrome. Zaslediti je zapise o praštevskih palindromih in seštevanju palindromov, ki dajo vsoto, ki je palindrom, ter številskih palindromih na sploh.

Čeprav so kvadratni palindromi v literaturi, ki preučuje palindrome, velikokrat omenjeni, so navedeni le kot zanimivost, nismo pa zasledili zapisov, ki bi jih podrobneje proučevali, zato menimo, da je to novost na matematičnem področju.

5.1 DEFINICIJA KVADRATNEGA PALINDROMA

Palindrom je število, ki se enako prebere naprej in nazaj (simetrično število v matematiki). To pomeni, da so v njegovem desetiškem oziroma decimalnem zapisu vse številke razporejene simetrično (prva številka je enaka zadnji, druga številka je enaka predzadnji ...).

Lahko ga zapišemo kot: $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots} \dots \overline{a_3 a_2 a_1}$.

V raziskovalni nalogi raziskujemo posebno vrsto številskih palindromov, ki jo poimenujem kvadratni palindrom.

Kdaj je naravno število kvadratni palindrom?

Kvadratni palindrom dobimo, ko kvadriramo dve števili, ki imata številke v obratnem vrstnem redu in sta njuna kvadrata ravno tako števili, ki imata obrnjen vrstni red števk. To je torej par števil (k, l) , za kateri velja:

$$k = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} \quad k^2 = \overline{b_m b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0}$$

$$l = \overline{a_0 a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n} \quad l^2 = \overline{b_0 b_1 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m}$$

Primer:

$$12^2 = 144$$

$$21^2 = 441$$

Število 12 je kvadratni palindrom. Kaj to pomeni?

Če izračunamo kvadrat števila 12 in kvadrat števila, ki ima številke v obratnem vrstnem redu, torej števila 21, ugotovimo, da imata tudi njuna kvadrata številke v obratnem vrstnem redu..

OPOMBA: V tej raziskovalni nalogi sprva ne preučujemo parov števil, ki nimajo enakega števila števk oziroma števil, ki imajo za zadnjo števko 0.

5.2 HIPOTEZE IN CILJI

Cilji naloge so:

- najti pravilo oziroma pogoje, kdaj je neko število kvadratni palindrom,
- določiti lastnosti kvadratnih palindromov.

Hipoteze:

- H1: Vsako naravno število, ki je palindrom, je tudi kvadratni palindrom.
- H2: Vse števke kvadratnega palindroma so manjše od neke meje, ta pa je strogo manjša od 9.

5.3 METODE DELA

Pri raziskovanju in pisanju naloge smo kot temeljno metodo dela uporabljali metodo matematičnega sklepanja in dokazovanja.

Kvadratne palindrome smo opazovali s pomočjo generiranih kvadratnih palindromov, ki smo jih generirali v programu Microsoft Excel. Grafe smo narisali s pomočjo programa GeoGebra.

6 DESETIŠKI ZAPIS NARAVNEGA ŠTEVILA

V tej nalogi uporabljamo desetiški zapis števil, saj je to trenutno najbolj razširjen številski zapis. Vsako naravno število lahko razčlenimo po potencah števila 10. Koeficienti, ki nastopajo ob posameznih potencah, oblikujejo desetiški zapis izbranega naravnega števila. Števke v desetiškem zapisu naravnega števila so iz množice $\{0, 1, 2, 3 \dots 8, 9\}$. Imena posameznih števk od desne proti levi so: enice, desetice, stotice, tisočice ... Naravno število je n -mestno, če je v njegovem zapisu n števk.

Primer:

$$7194 = 7000 + 100 + 90 + 4 = 7 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 4$$

$$7194 = 7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 4$$

Število zapišemo z znaki 7, 1, 9, 4, ki jih imenujemo števke ali cifre. Vsaka števka ima svoje mesto v zapisu (mestni ali pozicijski zapis) danega štirimestnega števila.

$$7 = \text{tisočice}, 1 = \text{stotice}, 9 = \text{desetice}, 4 = \text{enice}$$

6.1 POSPLOŠITEV

Vsako naravno število $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0}$ (pri večmestnem številu pišemo v splošnem desetiškem zapisu zgoraj črto) zapišemo na en sam način v obliki izraza

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0$ so števke ali cifre ($0 \leq a_k \leq 9$ za $k = 0, 1, 2 \dots n$).

Število a ima v desetiškem zapisu natanko $n + 1$ mest.

7 KVADRIRANJE N+1-MESTNEGA ŠTEVILA

Vzemimo poljubno naravno število, zapisano v desetiškem zapisu, in izračunajmo njegov kvadrat.

$$a^2 = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0) \cdot (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0)$$

Pri množenju mnogočlenikov• množimo vsak člen z vsakim in uredimo. Tako dobimo za n+1-mestno število:

$$\begin{aligned} & (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0)^2 = \\ & = (a_n)^2 \cdot 10^{2n} + (a_{n-1})^2 \cdot 10^{2n-2} + \dots + (a_1)^2 \cdot 10^2 + (a_0)^2 + \\ & \quad 2(a_n \cdot 10^n)(a_{n-1} \cdot 10^{n-1}) + 2(a_n \cdot 10^n)(a_{n-2} \cdot 10^{n-2}) + \dots + \\ & \quad 2(a_1 \cdot 10) \cdot a_0 . \end{aligned}$$

Kvadrat mnogočlenika je torej enak vsoti kvadratov posameznih členov in zmnožkov vsakega člena z vsakim (razen s samim seboj), pomnoženih z 2.

- SSKJ: **mногочлѐnik** -a m (ѐ) mat. izraz, ki ima več členov

8 KONGRUENCE

V splošnem rečemo, da sta celi števili a in b kongruentni po modulu d (d je izbrano naravno število), če dasta pri deljenju s številom d enaka ostanka.

To zapišemo kot $a \equiv b \pmod{d}$ in preberemo: število a je kongruentno številu b po modulu d .

Velja: $a \equiv b \pmod{d}$ natanko takrat, ko d deli razliko $a - b$.

Če je $a \equiv a' \pmod{d}$ in $b \equiv b' \pmod{d}$, velja:

- 1.) $a + b \equiv a' + b' \pmod{d}$
- 2.) $a - b \equiv a' - b' \pmod{d}$
- 3.) $ab \equiv a'b' \pmod{d}$
- 4.) $a^n \equiv b^n \pmod{d}$ za vsako naravno število n

V tej nalogi kongruence uporabljamo pri dokazovanju, da se lahko na prvem in zadnjem mestu naravnega števila, ki je kvadratni palindrom, pojavijo le določene številke. Računanje se z uporabo kongruenc in njihovih lastnosti poenostavi.

9 INDUKCIJA

Popolna ali matematična indukcija je v matematiki metoda dokazovanja, ki se običajno uporablja za dokazovanje, ali je dana trditev resnična oziroma izrek resničen za vsa naravna števila oziroma za vse člene neskončnega zaporedja.

To storimo v dveh korakih:

1. Dokažemo, da lastnost velja za začetno oziroma prvo naravno število (običajno je to število 1; $n = 1$).
2. Indukcijski korak: $n \rightarrow n + 1$.

Predpostavimo, da lastnost velja za naravna števila $1, 2 \dots n$ in od tod pokažemo, da velja tudi za naravno število $n + 1$.

Primer indukcije za vse člene nekega zaporedja je, če postavimo neskončno dolgo vrsto domin. V prvem koraku potrdimo, da pade prva domina. V drugem koraku potrdimo, da pade tudi druga domina zaradi prve, tretja zaradi druge, četrta zaradi tretje itd. Iz tega sledi logično sklepanje in dokazovanje, da to velja za vse domine v vrsti oziroma za vse člene neskončnega zaporedja.

V tej nalogi s pomočjo indukcije dokažemo, da pri kvadriranju kvadratnih palindromov ne sme priti do prenosa enote.

10 GENERIRANJE KVADRATNIH PALINDROMOV

Najprej bomo poskušali na podlagi opazovanja zapisati nekaj pogojev, ki jim morajo ustrezati številke, da je število kvadratni palindrom. S pomočjo aplikacije za preglednice Microsoft Excel smo zapisali vsa dvomestna, trimestna, štirimestna in petmestna števila, vsako skupino na svoj list. To smo lahko storili, saj aplikacija Microsoft Excel samostojno prepozna zaporedje in smo tako napisali prvi dve števili, nato pa razširili zaporedje na naslednje celice. Na koncu smo s pomočjo preproste funkcije A^2 izračunali kvadrate teh števil.

Funkcija, ki obrne števila, je malo zahtevnejša in se razlikuje glede na število mest, zato jo bomo napisali za vsako skupino posebej. Zapisali smo jo s pomočjo vgrajenih funkcij *QUOTIENT*, ki vrne celoštevilski del pri deljenju, in *MOD*, ki vrne ostanek pri deljenju števila z deliteljem. Ko smo dobili obrnjena števila, smo te kvadrirali na enak način, kot smo kvadrirali prvotna števila. S tem smo lahko opazovali, katera števila so kvadratni palindromi in katera ne.

10.1 DVOMESTNA ŠTEVILA

Ko smo zapisali vsa dvomestna števila in njihove kvadrate, smo števila obrnili s funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 10) + \text{MOD}(A; 10) * 10 ,$$

pri čemer je A poljubno dvomestno število, ki ga želimo obrniti.

Ko smo dobljena števila kvadrirali, smo lahko opazovali, katera števila so kvadratni palindromi. Dobljeni rezultati so prikazani na Sliki 1. Dvomestna števila, ki so kvadratni palindromi, so:

11, 12, 13, 21, 22, 31.

	A	B	C	D	E
1	11	121	11	121	
2	12	144	21	441	
3	13	169	31	961	
4	14	196	41	1681	
5	15	225	51	2601	
6	16	256	61	3721	
7	17	289	71	5041	
8	18	324	81	6561	
9	19	361	91	8281	
10	20	400	2	4	
11	21	441	12	144	
12	22	484	22	484	
13	23	529	32	1024	
14	24	576	42	1764	
15	25	625	52	2704	
16	26	676	62	3844	
17	27	729	72	5184	
18	28	784	82	6724	
19	29	841	92	8464	
20	30	900	3	9	
21	31	961	13	169	
22	32	1024	23	529	
23	33	1089	33	1089	
24	34	1156	43	1849	
25	35	1225	53	2809	
26	36	1296	63	3969	
27	37	1369	73	5329	
28	38	1444	83	6889	
29	39	1521	93	8649	

Slika 1: Preglednica dvomestnih kvadratnih palindromov

10.2 TRIMESTNA ŠTEVILA

Trimestna števila smo obrnili s funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A1; 100) + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A1; 10); 10) * 10 + \text{MOD}(A1; 10) * 100 ,$$

pri čemer je A poljubno trimestno število, ki ga želimo obrniti. Nato smo dobljena števila zopet kvadrirali. Rezultati so prikazani na Sliki 2. Iz te je razvidno, da so trimestni kvadratni palindromi:

101, 102, 103, 111, 112, 113, 121, 122, 201, 202, 211, 212, 221, 301, 311.

	A	B	C	D		A	B	C	D		A	B	C	D		A	B	C	D
1	100	10000	1	1	31	130	16900	31	961	101	200	40000	2	4	201	300	90000	3	9
2	101	10201	101	10201	32	131	17161	131	17161	102	201	40401	102	10404	202	301	90601	103	10609
3	102	10404	201	40401	33	132	17424	231	53361	103	202	40804	202	40804	203	302	91204	203	41209
4	103	10609	301	90601	34	133	17689	331	109561	104	203	41209	302	91204	204	303	91809	303	91809
5	104	10816	401	160801	35	134	17956	431	185761	105	204	41616	402	161604	205	304	92416	403	162409
6	105	11025	501	251001	36	135	18225	531	281961	106	205	42025	502	252004	206	305	93025	503	253009
7	106	11236	601	361201	37	136	18496	631	398161	107	206	42436	602	362404	207	306	93636	603	363609
8	107	11449	701	491401	38	137	18769	731	534361	108	207	42849	702	492804	208	307	94249	703	494209
9	108	11664	801	641601	39	138	19044	831	690561	109	208	43264	802	643204	209	308	94864	803	644809
10	109	11881	901	811801	40	139	19321	931	866761	110	209	43681	902	813604	210	309	95481	903	815409
11	110	12100	11	121	41	140	19600	41	1681	111	210	44100	12	144	211	310	96100	13	169
12	111	12321	111	12321	42	141	19881	141	19881	112	211	44521	112	12544	212	311	96721	113	12769
13	112	12544	211	44521	43	142	20164	241	58081	113	212	44944	212	44944	213	312	97344	213	45369
14	113	12769	311	96721	44	143	20449	341	116281	114	213	45369	312	97344	214	313	97969	313	97969
15	114	12996	411	168921	45	144	20736	441	194481	115	214	45796	412	169744	215	314	98596	413	170569
16	115	13225	511	261121	46	145	21025	541	292681	116	215	46225	512	262144	216	315	99225	513	263169
17	116	13456	611	373321	47	146	21316	641	410881	117	216	46656	612	374544	217	316	99856	613	375769
18	117	13689	711	505521	48	147	21609	741	549081	118	217	47089	712	506944	218	317	100489	713	508369
19	118	13924	811	657721	49	148	21904	841	707281	119	218	47524	812	659344	219	318	101124	813	660969
20	119	14161	911	829921	50	149	22201	941	885481	120	219	47961	912	831744	220	319	101761	913	833569
21	120	14400	21	441	51	150	22500	51	2601	121	220	48400	22	484	221	320	102400	23	529
22	121	14641	121	14641	52	151	22801	151	22801	122	221	48841	122	14884	222	321	103041	123	15129
23	122	14884	221	48841	53	152	23104	251	63001	123	222	49284	222	49284	223	322	103684	223	49729
24	123	15129	321	103041	54	153	23409	351	123201	124	223	49729	322	103684	224	323	104329	323	104329
25	124	15376	421	177241	55	154	23716	451	203401	125	224	50176	422	178084	225	324	104976	423	178929
26	125	15625	521	271441	56	155	24025	551	303601	126	225	50625	522	272484	226	325	105625	523	273529
27	126	15876	621	385641	57	156	24336	651	423801	127	226	51076	622	386884	227	326	106276	623	388129
28	127	16129	721	519841	58	157	24649	751	564001	128	227	51529	722	521284	228	327	106929	723	522729

Slika 2: Preglednica trimestnih kvadratnih palindromov

10.3 ŠTIRIMESTNA ŠTEVILA

Da smo obrnili štirimestna števila, smo uporabili funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 1000) + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 100); 10) * 10 \\ + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 10); 10) * 100 + \text{MOD}(A; 10) * 1000 ,$$

pri čemer je A poljubno štirimestno število, ki ga želimo obrniti. Rezultati so prikazani na Sliki

3. Ugotovili smo, da so štirimestna števila, ki so kvadratni palindromi:

1001, 1002, 1003, 1011, 1012, 1013, 1021, 1022, 1031, 1101, 1102, 1103, 1111, 1112, 1113, 1121, 1122, 1201, 1202, 1211, 1212, 1301, 2001, 2002, 2011, 2101, 2102, 2012, 2021, 2022, 2111, 2121, 2201, 2202, 2211, 3001, 3011, 3101, 3111.

B	C	D	E	F	B	C	D	E	F	B	C	D	E	F
10	10000			10000001	1210	1464100	121	14641	146410014641	2001	4004001	1002	1004004	40040011004004
1001	1002001	1001	1002001	10020011002001	1211	1466521	1121	1256641	14665211256641	2002	4008004	2002	4008004	40080044008004
1002	1004004	2001	4004001	10040044004001	1212	1468944	2121	4498641	14689444498641	2010	4040100	102	10404	404010010404
1003	1006009	3001	9006001	10060099006001	1220	1488400	221	48841	148840048841	2011	4044121	1102	1214404	40441211214404
1010	1020100	101	10201	102010010201	1300	1690000	31	961	1690000961	2012	4048144	2102	4418404	40481444418404
1011	1022121	1101	1212201	10221211212201	1301	1692601	1031	1062961	16926011062961	2020	4080400	202	40804	408040040804
1012	1024144	2101	4414201	10241444414201	2000	4000000	2	4	40000004	2021	4084441	1202	1444804	40844411444804
1013	1026169	3101	9616201	10261699616201	2001	4004001	1002	1004004	40040011004004	2022	4088484	2202	4848804	40884844848804
1020	1040400	201	40401	104040040401	2002	4008004	2002	4008004	40080044008004	2100	4410000	12	144	4410000144
1021	1042441	1201	1442401	10424411442401	2010	4040100	102	10404	404010010404	2101	4414201	1012	1024144	44142011024144
1022	1044484	2201	4844401	10444844844401	2011	4044121	1102	1214404	40441211214404	2102	4418404	2012	4048144	44184044048144
1030	1060900	301	90601	106090090601	2012	4048144	2102	4418404	40481444418404	2110	4452100	112	12544	445210012544
1031	1062961	1301	1692601	10629611692601	2020	4080400	202	40804	408040040804	2111	4456321	1112	1236544	44563211236544
1100	1210000	11	121	1210000121	2021	4084441	1202	1444804	40844411444804	2120	4494400	212	44944	449440044944
1101	1212201	1011	1022121	12122011022121	2022	4088484	2202	4848804	40884844848804	2121	4498641	1212	1468944	44986411468944
1102	1214404	2011	4044121	12144044044121	2100	4410000	12	144	4410000144	2200	4840000	22	484	4840000484
1103	1216609	3011	9066121	12166099066121	2101	4414201	1012	1024144	44142011024144	2201	4844401	1022	1044484	48444011044484
1110	1232100	111	12321	123210012321	2102	4418404	2012	4048144	44184044048144	2202	4848804	2022	4088484	48488044088484
1111	1234321	1111	1234321	12343211234321	2110	4452100	112	12544	445210012544	2210	4884100	122	14884	488410014884
1112	1236544	2111	4456321	12365444456321	2111	4456321	1112	1236544	44563211236544	2211	4888521	1122	1258884	48885211258884
1113	1238769	3111	9678321	12387699678321	2120	4494400	212	44944	449440044944	3000	9000000	3	9	90000009
1120	1254400	211	44521	125440044521	2121	4498641	1212	1468944	44986411468944	3001	9006001	1003	1006009	90060011006009
1121	1256641	1211	1466521	12566411466521	2200	4840000	22	484	4840000484	3010	9060100	103	10609	906010010609
1122	1258884	2211	4888521	12588844888521	2201	4844401	1022	1044484	48444011044484	3011	9066121	1103	1216609	90661211216609
1130	1276900	311	96721	127690096721	2202	4848804	2022	4088484	48488044088484	3100	9610000	13	169	9610000169
1200	1440000	21	441	1440000441	2210	4884100	122	14884	488410014884	3101	9616201	1013	1026169	96162011026169
1201	1442401	1021	1042441	14424011042441	2211	4888521	1122	1258884	48885211258884	3110	9672100	113	12769	967210012769
1202	1444804	2021	4084441	14448044084441	3000	9000000	3	9	90000009	3111	9678321	1113	1238769	96783211238769

Slika 3: Preglednica štirimestnih kvadratnih palindromov

10.4 PETMESTNA ŠTEVILA

Petmestna števila smo obrnili s funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 10000) + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 1000); 10) * 10 + \\ \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 100); 10) * 100 + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 10); 10) * 1000 + \\ \text{MOD}(A; 10) * 10000,$$

pri čemer je A poljubno petmestno število, ki ga želimo obrniti. Petmestnih števil, ki so kvadratni palindromi, je veliko (90), zato si oglejmo le nekaj primerov, in sicer:

10001, 10002, 10003, 10011, 10012, 10013, 10021, 10022,
 10031, 10101, 10102, 10103, 10111, 10112, 10113,
 10121, 10122, 10201, 10202, 10211, 10221, 11001, 11002,
 11003, 11011, 11012, 11013, 11021, 11022, 11031,
 11101, 11102, 11103, 11111, 11112, 11113, 11121, 11122,
 11201, 11202, 11211, 12001, 12002, 12011, 12012 ...

Nekaj primerov petmestnih kvadratnih palindromov je prikazanih tudi na Sliki 4.

B	C	D	E	F	G
21200	449440000	212	44944	44944000044944	Palindrom
21201	449482401	10212	104284944	449482401104284944	Palindrom
21210	449864100	1212	1468944	4498641001468944	Palindrom
22000	484000000	22	484	484000000484	Palindrom
22001	484044001	10022	100440484	484044001100440484	Palindrom
22002	484088004	20022	400880484	484088004400880484	Palindrom
22010	484440100	1022	1044484	4844401001044484	Palindrom
22011	484484121	11022	121484484	484484121121484484	Palindrom
22020	484880400	2022	4088484	4848804004088484	Palindrom
22100	488410000	122	14884	48841000014884	Palindrom
22101	488454201	10122	102454884	488454201102454884	Palindrom
22102	488498404	20122	404894884	488498404404894884	Palindrom
22110	488852100	1122	1258884	4888521001258884	Palindrom
22111	488896321	11122	123698884	488896321123698884	Palindrom
30000	900000000	3	9	9000000009	Palindrom
30001	900060001	10003	100060009	900060001100060009	Palindrom
30010	900600100	1003	1006009	9006001001006009	Palindrom
30011	900660121	11003	121066009	900660121121066009	Palindrom
30100	906010000	103	10609	90601000010609	Palindrom
30101	906070201	10103	102070609	906070201102070609	Palindrom
30110	906612100	1103	1216609	9066121001216609	Palindrom
30111	906672321	11103	123276609	906672321123276609	Palindrom
31000	961000000	13	169	961000000169	Palindrom
31001	961062001	10013	100260169	961062001100260169	Palindrom
31010	961620100	1013	1026169	9616201001026169	Palindrom
31011	961682121	11013	121286169	961682121121286169	Palindrom
31100	967210000	113	12769	96721000012769	Palindrom
31101	967272201	10113	102272769	967272201102272769	Palindrom
31110	967822100	1113	1228769	9678221001228769	Palindrom

Slika 4: Primer najdenih petmestnih kvadratnih palindromov

10.5 UGOTOVITVE

Z opazovanjem pridobljenih kvadratnih palindromov smo ugotovili, da so ti sestavljeni samo iz števk 0, 1, 2 in 3. Nobeden ne vsebuje števk, ki bi bile večje od 3, zato lahko sklepamo, da je to eden od pogojev, da je število kvadratni palindrom, kar bomo dokazali v nadaljevanju. Opazili smo tudi, da se z večanjem števila mest večja število kvadratnih palindromov, vendar iz tega ne bi mogli zaključiti, koliko je kvadratnih palindromov, saj jih je verjetno neskončno mnogo.

11 ŠTEVKE, KI TVORIJO KVADRATNI PALINDROM

V tem poglavju dokažemo, da se v kvadratnih palindromih ne morejo pojaviti druge številke, kot 0, 1, 2 in 3. To naredimo v dveh delih. V prvem delu dokažemo, da so lahko na prvem oziroma zadnjem mestu le številke 1, 2 in 3. S pomočjo tega dokaza v drugem delu potrdimo, da so te številke skupaj z 0 edine, ki se lahko pojavijo v kvadratnih palindromih.

V obeh dokazih predpostavimo, da imamo par števil (k, l) , ki tvorita kvadratni palindrom. Njuna desetiška zapisa sta: $k = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$, $l = \overline{a_0 a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n}$. V obeh dokazih opazujemo kvadrata teh števil, ki ju zaporedoma označim z x in y .

$$x = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}^2$$

$$y = \overline{a_0 a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n}^2$$

11.1 DOKAZ ZA PRVO OZIROMA ZADNJE MESTO

Poglejmo si, kaj se zgodi, če je zadnja številka v številu k večja od tri ($4 \leq a_0 \leq 9$).

1.) $a_0 = 4$

1. $a_0^2 = 16 \Rightarrow a_0^2 \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow$ zadnja številka števila x je 6 $\Rightarrow$ prva številka števila y je 6.
2. Velja: $(4 \cdot 10^n)^2 \leq y < (5 \cdot 10^n)^2$
in zato $16 \cdot 10^{2n} \leq y < 25 \cdot 10^{2n}$.
3. Vidimo, da je prva številka števila y 1 ali 2, kar je v nasprotju z ugotovitvijo v prvi točki, kjer smo ugotovili, da bi morala biti prva številka 6, zato število, ki ima na prvem oziroma zadnjem mestu številko 4, ni kvadratni palindrom.

2.) $a_0 = 5$

1. $a_0^2 = 25 \Rightarrow a_0^2 \equiv 5 \pmod{10} \Rightarrow$ zadnja številka števila x je 5 $\Rightarrow$ prva številka števila y je 5.
2. Velja: $(5 \cdot 10^n)^2 \leq y < (6 \cdot 10^n)^2$
in zato $25 \cdot 10^{2n} \leq y < 36 \cdot 10^{2n}$.
3. Prva številka števila y je 2 ali 3, kar je v protislovju z ugotovitvijo v prvi točki, kjer smo ugotovili, da bi morala biti prva številka 5, zato število, ki ima za prvo oziroma zadnjo številko 5, ni kvadratni palindrom.

3.) $a_0 = 6$

1. $a_0^2 = 36 \Rightarrow a_0^2 \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow$ zadnja številka števila x je 6 $\Rightarrow$ prva številka števila y je 6.
2. Velja: $(6 \cdot 10^n)^2 \leq y < (7 \cdot 10^n)^2$
in zato $36 \cdot 10^{2n} \leq y < 49 \cdot 10^{2n}$.
3. Prva številka števila y je zato 3 ali 4, kar se ne sklada z ugotovitvijo v prvi točki, kjer smo ugotovili, da bi morala biti prva številka 6, zato število, ki ima za prvo oziroma zadnjo številko 6, ni kvadratni palindrom.

4.) $a_0 = 7$

1. $a_0^2 = 49 \Rightarrow a_0^2 \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow$ zadnja številka x je 9 $\Rightarrow$ prva številka števila y je 9.
2. Velja: $(7 \cdot 10^n)^2 \leq y < (8 \cdot 10^n)^2$
in zato $49 \cdot 10^{2n} \leq y < 64 \cdot 10^{2n}$.
3. Prva številka števila y je 4, 5 ali 6, kar je v nasprotju z ugotovitvijo v prvi točki, kjer smo ugotovili, da bi morala biti prva številka 9, zato število, ki ima za prvo oziroma zadnjo številko 7, ni kvadratni palindrom.

5.) $a_0 = 8$

1. $a_0^2 = 64 \Rightarrow a_0^2 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow$ zadnja številka x je 4 $\Rightarrow$ prva številka števila y je 4.
2. Velja: $(8 \cdot 10^n)^2 \leq y < (9 \cdot 10^n)^2$
in zato $64 \cdot 10^{2n} \leq y < 81 \cdot 10^{2n}$.
3. Prva številka števila y je lahko 6, 7 ali 8, kar je v neskladju z ugotovitvijo v prvi točki, kjer smo ugotovili, da bi morala biti prva številka 4, zato število, ki ima za prvo oziroma zadnjo številko 8, ni kvadratni palindrom.

6.) $a_0 = 9$

1. $a_0^2 = 81 \Rightarrow a_0^2 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow$ zadnja številka števila x je 1 $\Rightarrow$ prva številka števila y je 1.
2. Velja: $(9 \cdot 10^n)^2 \leq y < (10 \cdot 10^n)^2$
in zato $81 \cdot 10^{2n} \leq y < 100 \cdot 10^{2n} = 10 \cdot 10^{2n+1}$.
3. Prva številka števila y je 8 ali 9, kar je v protislovju z ugotovitvijo v prvi točki, kjer smo ugotovili, da bi morala biti prva številka 1, zato število, ki ima za prvo oziroma zadnjo številko 9, ni kvadratni palindrom.

S tem smo dokazali, da se številke, ki so večje od 3, ne morejo pojaviti na začetku oz. na koncu kvadratnega palindroma. Velja torej:

$$a_0 \leq 3$$

$$a_0 \neq 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

V nadaljevanju bomo dokazali, da se to ne zgodi pri števkih 1, 2 in 3.

$$a_0 \leq 3$$

1.) $a_0 = 1$

1. $a_0^2 = 1 \Rightarrow$ zadnja številka števila x je 1 $\Rightarrow$ prva številka števila y je 1.
2. Velja: $(1 \cdot 10^n)^2 \leq y < (2 \cdot 10^n)^2$
in zato $1 \cdot 10^{2n} \leq y < 4 \cdot 10^{2n}$.

Prva številka števila y je lahko 1, 2 ali 3, kar je v skladu z ugotovitvijo v prvi točki, saj je ena od možnih števk na prvem mestu števka 1. Število, ki ima na prvem mestu 1, izpolnjuje enega od pogojev, da je število kvadratni palindrom.

2.) $a_0 = 2$

1. $a_0^2 = 4 \Rightarrow$ zadnja števka števila x je 4 $\Rightarrow$ prva števka števila y je 4.
2. Velja: $(2 \cdot 10^n)^2 \leq y < (3 \cdot 10^n)^2$
in zato $4 \cdot 10^{2n} \leq y < 9 \cdot 10^{2n}$.

Prva števka števila y je lahko 4, 5, 6, 7 ali 8, kar ni v nasprotju z ugotovitvijo v prvi točki, saj je ena od možnih števk na prvem mestu 4. Število, ki ima na prvem mestu 2, izpolnjuje enega od pogojev, da je število kvadratni palindrom.

3.) $a_0 = 3$

1. $a_0^2 = 9 \Rightarrow$ zadnja števka števila x je 9 $\Rightarrow$ prva števka števila y je 9.
2. Velja: $(3 \cdot 10^n)^2 \leq y < (4 \cdot 10^n)^2$
in zato $9 \cdot 10^{2n} \leq y < 16 \cdot 10^{2n}$.

Prva števka števila y je 9 ali 1, kar je v skladu z ugotovitvijo v prvi točki, saj je ena od možnih števk, ki zasedejo prvo mesto 9. Število, ki ima na prvem mestu 3, torej izpolnjuje enega od pogojev, da je število kvadratni palindrom.

Iz tega lahko zaključimo, da je eden od pogojev, da je število kvadratni palindrom, da je na prvem oziroma zadnjem mestu ena izmed števk 1, 2 ali 3, torej velja:

$$a_0 \leq 3 \text{ oziroma } a_n \leq 3.$$

11.2 DOKAZ ZA CELOTNO ŠTEVILO

Pri tem dokazu si bomo pomagali z desetiškim zapisom kvadrata števila in njegovega kvadratnega palindroma. Ta kvadrata bomo ponovno označili z x in y .

x :	y :
$a_n^2 \cdot 10^{2n}$	$a_0^2 \cdot 10^{2n}$
$2a_n a_{n-1} \cdot 10^{2n-1}$	$2a_1 a_0 \cdot 10^{2n-1}$
$(a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2}) \cdot 10^{2n-2}$	$(a_1^2 + 2a_2 a_0) \cdot 10^{2n-2}$
$\vdots$	$\vdots$
$(a_1^2 + 2a_2 a_0) \cdot 10^2$	$(a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2}) \cdot 10^2$
$2a_1 a_0 \cdot 10^1$	$2a_n a_{n-1} \cdot 10^1$
$a_0^2 \cdot 10^0$	$a_n^2 \cdot 10^0$

Dodatno označimo še s c_i izraz, ki v zgornjem zapisu števila x nastopa pred potenco 10^i . Velja torej $c_0 = a_0^2$, $c_1 = 2a_1 a_0$, ..., $c_{2n} = a_n^2$. Opazimo lahko, da v zgornjem zapisu števila y izraz c_i nastopa pred potenco 10^{2n-i} .

- 1.) Ker smo dokazali da mora biti $a_0 \leq 3$ in s tem $a_0^2 \leq 9$, ne pride do prenosa enote iz enic na desetice v številu x , saj je $a_0^2 < 10$.
- 2.) Na zadnje mesto v številu x ne vpliva nobena drugo mesto, kar pomeni, da je vrednost zadnje številke števila x enaka vrednosti a_0^2 . Ker morata biti zadnja številka števila x in prva številka števila y enaki (da sta to kvadratna palindroma), to pomeni, da mora imeti tudi prva številka števila y vrednost a_0^2 . Iz tega sledi, da drugo mesto v tem številu ne sme vplivati na prvo mesto. Da to drži, mora biti $2a_1 a_0 \leq 9$.
- 3.) Sedaj vemo, da velja $a_0^2 \leq 9$ in $2a_1 a_0 \leq 9$. Torej je vrednost predzadnje številke števila x enaka vrednosti $2a_1 a_0$. Ker enice ne vplivajo na desetice in ker je ta vrednost manjša

od deset, je predzadnja številka x enaka $2a_1a_0$. Da bosta števili x in y kvadratna palindroma, morata biti tudi druga številka števila y in predzadnja številka števila x enaki. Iz tega sledi, da mora imeti tudi druga številka števila y vrednost $2a_1a_0$. Da to drži, ne sme priti do prenosa enote iz tretjega na drugo mesto števila y , torej tretje mesto ne sme vplivati na drugo. Iz tega sledi, da mora veljati $(a_1^2 + 2a_2a_0) \leq 9$.

- 4.) Ta postopek bi lahko ponavljali, dokler ne bi prišli do prvega mesta števila x in zadnjega mesta števila y . Z indukcijo lahko sklepamo in dokažemo, da se na nobenem mestu ne zgodi prenos enote na naslednje mesto.

11.2.1 INDUKCIJA

Označimo z b_i i –to številko števila x . Zapišemo lahko torej:

$$x = \overline{b_mb_{m-1} \cdots b_1b_0}$$

$$y = \overline{b_0b_1 \cdots b_{m-1}b_m}.$$

Z indukcijo sedaj dokažimo, da velja $b_i = c_i$ (oz. da ne pride do prenosa enote iz c_{i-1} na c_i) za $i \leq m$.

BAZA INDUKCIJE: $b_0 = c_0$ in $b_1 = c_1$.

To smo dokazali že v točkah 1.) in 2.), ko smo ugotovili, da mora veljati $c_2 \leq 9$, da sta števili kvadratni palindrom in da mora biti vrednost b_1 enaka c_1 , da sta prva in zadnja številka števil x in y enaki, torej tam ne sme priti do prenosa enote.

INDUKCIJSKA PREDPOSTAVKA: $b_j = c_j$ za $0 \leq j \leq i$.

INDUKCIJSKI KORAK: $i \rightarrow i + 1$

Opazujmo število y . Po indukcijski predpostavki vemo, da je prvih i števk tega števila od leve proti desni zaporedoma enakih c_j za $0 \leq j \leq i$. Ker vemo, da na teh mestih pri računanju števila y ni prišlo do prenosa enote, to pomeni, da prav tako ni smelo priti do prenosa enote med c_{i+1} in c_i , saj bi bila v nasprotnem primeru vsaj ena od prej omenjenih števk števila y različna od vrednosti iz indukcijske predpostavke. To nam pove, da mora veljati: $c_{i+1} \leq 9$. Sedaj pa pogledajmo še število x . Po indukcijski predpostavki velja: $b_j = c_j$ za $0 \leq j \leq i$, iz česar sledi

$c_j \leq 9$ za $j \leq i$, kar pa pomeni, da pri računanju x ni prišlo do prenosa enote iz c_i na c_{i+1} . Iz tega in iz ugotovitve, da velja $c_{i+1} \leq 9$, sledi $b_{i+1} = c_{i+1}$. S tem je indukcijski korak dokazan.

11.3 POGOJI, KI DOLOČAJO KVADRATNE PALINDROME

Ker vemo, da je i -ta številka števila x enaka c_i , sledi, da velja $c_i \leq 9$ za $i = 0, 1, \dots, 2n$. To nam da pogoje glede velikosti števk števil a in b . Te pogoje bomo ločili glede na sodost/lihost eksponenta potence, ki nastopa pred c_i .

11.3.1 POTENCE S SODIMI EKSPONENTI

Vsota dveh sodih števil je sodo število in vsota dveh lihih števil je sodo število. Ko množimo potence med sabo, storimo to tako, da osnovo prepisemo, eksponente pa seštejemo.

Zato dobimo potenco s sodim eksponentom, kadar pomnožimo med sabo dve potenci s sodim eksponentom ali dve potenci z lihim eksponentom.

Potence s sodim eksponentom ($2k$) bodo zato pomnožene s koeficienti oblike:

$$a_k^2 + 2 \sum_{i \neq j, i+j=2k} a_i a_j.$$

Iz tega sledi:

- 1.) $a_k^2 \leq 9$ za $0 \leq k \leq n$,
- 2.) $a_k \leq 3$ za $0 \leq k \leq n$.

Kvadrati vseh števk k in l so manjši od 10, kar pomeni, da mora biti njihova osnovna vrednost manjša ali enaka 3, saj je $4^2 = 16$, medtem ko je $3^2 = 9$.

11.3.2 POTENCE Z LIHIMI EKSPONENTI

Potence z lihim eksponenti ($2k + 1$) bodo pomnožene s koeficienti oblike:

$$2 \sum_{i \neq j, i+j=2k+1} a_i a_j.$$

11.4 OMEJITVE

Pri kvadriranju moramo pomnožiti vsako števko z vsako števko po formuli $2a_i a_j$. Ker smo ugotovili, da ne sme priti do prenosa enote v številu, to pomeni, da je $2a_i a_j \leq 9$.

Iz tega lahko hitro ugotovimo nekaj pravil, ki jih ne smemo prekršiti, da bo neko število kvadratni palindrom. Pri tem nam bo v pomoč dejstvo, da kvadratni palindrom tvorijo le števke 0, 1, 2 in 3.

S temi števki dobimo devet možnosti, ki nam bodo povedale, katera števila lahko soustvarjajo kvadratni palindrom in katera ne.

1.) 1 in 0

$$2 \cdot 1 \cdot 0 \text{ oz. } 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \leq 9$$

Iz tega sledi, da 1 in 0 lahko skupaj tvorita kvadratni palindrom, saj ne povzročita prenosa enote.

2.) 1 in 1

$$2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \leq 9$$

Iz tega sledi, da lahko imamo dve enici v številu, da je le-to še vedno kvadratni palindrom.

3.) 1 in 2

$$2 \cdot 1 \cdot 2 \text{ oz. } 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \leq 9$$

Iz tega sledi, da 1 in 2 lahko skupaj tvorita kvadratni palindrom, saj ne povzročita prenosa enote.

4.) 1 in 3

$$2 \cdot 1 \cdot 3 \text{ oz. } 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \leq 9$$

Iz tega sledi, da 1 in 3 lahko skupaj tvorita kvadratni palindrom, saj ne povzročita prenosa enote.

5.) 2 in 0

$$2 \cdot 2 \cdot 0 \text{ oz. } 2 \cdot 0 \cdot 2 = 0 \leq 9$$

Iz tega sledi, da 2 in 0 lahko skupaj tvorita kvadratni palindrom, saj ne povzročita prenosa enote.

6.) 2 in 2

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \leq 9$$

Iz tega sledi, da lahko imamo dve dvojki v številu, da je to še vedno kvadratni palindrom.

7.) 2 in 3

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \text{ oz. } 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 > 9$$

Iz tega sledi, da 2 in 3 ne moreta skupaj tvoriti kvadratnega palindroma, saj povzročita prenos enote.

8.) 3 in 0

$$2 \cdot 3 \cdot 0 \text{ oz. } 2 \cdot 0 \cdot 3 = 0 \leq 9$$

Iz tega sledi, da 3 in 0 lahko skupaj tvorita kvadratni palindrom, saj ne povzročita prenosa enota.

9.) 3 in 3

$$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18 > 9$$

Iz tega sledi, da ne moremo imeti dveh trojk v številu, če želimo, da je to še vedno kvadratni palindrom

Iz teh možnosti smo ugotovili:

- 1.) 2 in 3 ne smeta biti v istem številu, da je le-to še kvadratni palindrom
- 2.) V številu je lahko samo ena številka enaka 3.

11.5 DODATNE OMEJITVE

Poleg vseh že ugotovljenih lastnosti in omejitev lahko pri opazovanju potenc v zapisu števila določimo dodatne omejitve. Te se razlikujejo glede na to, ali je število mest liho ali sodo. Preden raziščemo te omejitve, si pogledjmo še nekaj desetiških zapisov in značilnosti, ki jih ob tem opazimo.

Trimestno število:

$$\begin{aligned}
 a &= \overline{a_2 a_1 a_0} = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \\
 a^2 &= (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0) \cdot (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0) = \\
 &= a_2^2 \cdot 10^4 + a_2 \cdot a_1 \cdot 10^3 + a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2 + \\
 &\quad + a_1 \cdot a_2 \cdot 10^3 + a_1^2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + \\
 &\quad + a_0 \cdot a_2 \cdot 10^2 + a_0 a_1 \cdot 10 + a_0^2 = \\
 &= a_2^2 \cdot 10^4 + 2a_1 \cdot a_2 \cdot 10^3 + (a_1^2 + 2a_0 \cdot a_2) \cdot 10^2 + 2a_2 a_0 \cdot 10 + a_0^2.
 \end{aligned}$$

Najvišja stopnja potence v zapisu trimestnega števila a : 2.

Najvišja stopnja potence v zapisu kvadrata danega trimestnega števila a : 4.

Število členov, ki nastopajo v zapisu kvadrata pri posamezni potenci (od najvišje do najnižje stopnje), je: 1, 2, 3, 2, 1.

Štirimestno število:

$$\begin{aligned}
 a &= \overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \\
 a^2 &= (a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0) \cdot (a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0) \\
 &= a_3^2 \cdot 10^6 + a_3 \cdot a_2 \cdot 10^5 + a_3 \cdot a_1 \cdot 10^4 + a_3 \cdot a_0 \cdot 10^3 + \\
 &\quad + a_2 \cdot a_3 \cdot 10^5 + a_2^2 \cdot 10^4 + a_2 \cdot a_1 \cdot 10^3 + a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2 + \\
 &\quad + a_1 \cdot a_3 \cdot 10^4 + a_1 \cdot a_2 \cdot 10^3 + a_1^2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + \\
 &\quad + a_0 \cdot a_3 \cdot 10^3 + a_0 \cdot a_2 \cdot 10^2 + a_0 a_1 \cdot 10 + a_0^2 = \\
 &= a_3^2 \cdot 10^6 + 2a_2 \cdot a_3 \cdot 10^5 + (a_2^2 + 2a_1 \cdot a_3) \cdot 10^4 + (2a_0 \cdot a_3 + 2a_1 \cdot a_2) \cdot 10^3 \\
 &\quad + (a_1^2 + 2a_0 \cdot a_2) \cdot 10^2 + 2a_2 a_0 \cdot 10 + a_0^2.
 \end{aligned}$$

Najvišja stopnja potence v zapisu štirimestnega števila a : 3.

Najvišja stopnja potence v zapisu kvadrata danega štirimestnega števila a : 6.

Število členov, ki nastopajo v zapisu kvadrata pri posamezni potenci (od najvišje do najnižje stopnje), je: 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1.

11.5.1 POMEMBNE UGOTOVITVE

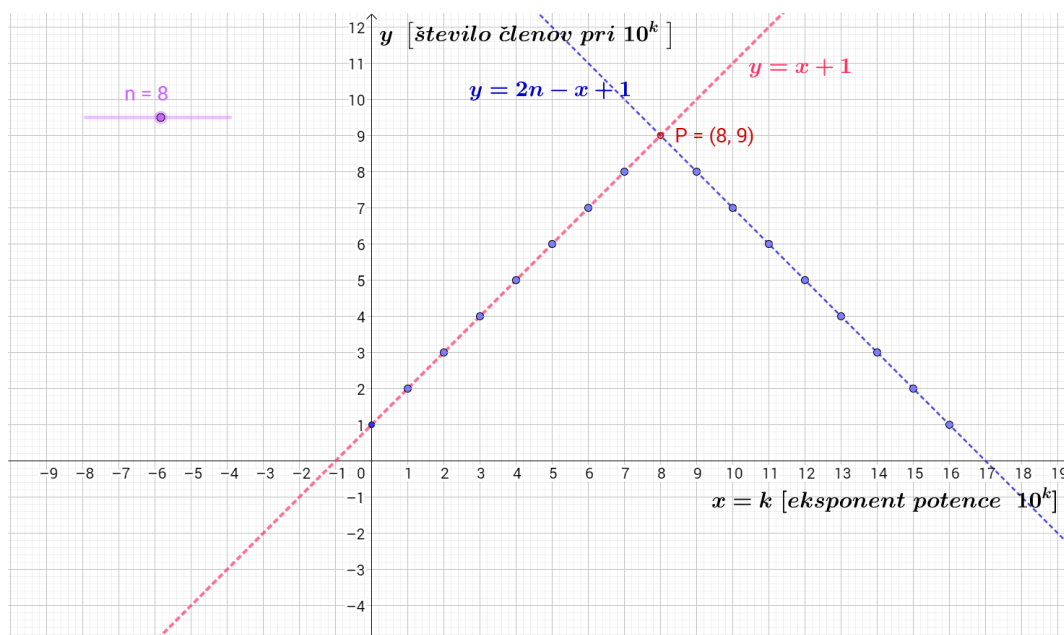
Prva takšna ugotovitev je, da a_n sodeluje le pri koeficientih od potence 10^n do potence 10^{2n} . Nižje potence, pri kateri sodeluje a_n , ni, ker je najmanjša potenca, s katero lahko množimo potenco 10^n , potenca 10^0 oziroma 1.

Druga pomembna ugotovitev je, da je vsota indeksov koeficientov v členih pri posamezni potenci v zapisu kvadrata vedno enaka eksponentu potence. Tako je v kvadratu števila a potenca 10^k pomnožena z vsoto členov oblike $a_i \cdot a_j$, pri čemer je $i + j = k$. To sledi iz dejstva, da potence množimo tako, da osnovo prepisemo, eksponente pa seštejemo. Zato je $a_i \cdot 10^i \cdot a_j \cdot 10^j = a_i \cdot a_j \cdot 10^{i+j}$. Če v vsoti sodeluje a_i^2 , je $2i = k$.

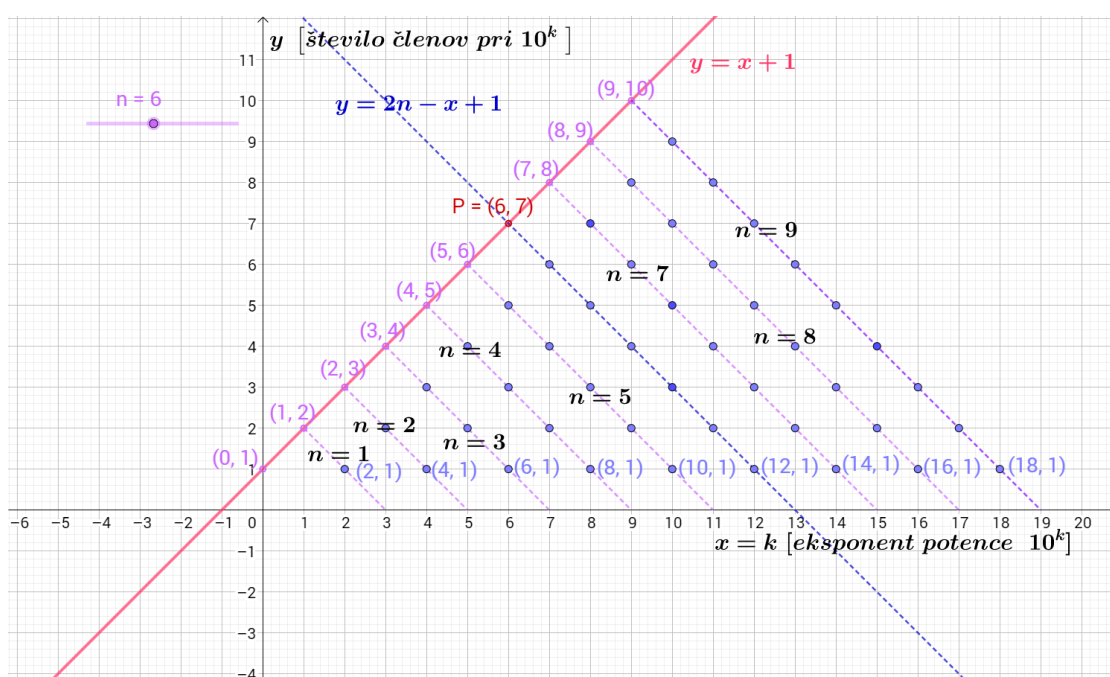
Število členov oblike $a_i \cdot a_j; i + j = k$, s katerimi je pomnožena potenca 10^k v zapisu kvadrata, linearno raste oziroma pada. Zato lahko število členov oblike $a_i \cdot a_j; i + j = k$, s katerimi je pomnožena potenca 10^k , v zapisu kvadrata števila $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ izračunamo po formuli:

$$f(k) = \begin{cases} k + 1; & 0 \leq k \leq n \\ 2n - k + 1; & n < k \leq 2n \end{cases}; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; n \in \mathbb{N}.$$

Največ členov nastopa pri potenci 10^n , kjer je tudi presečišče obeh grafov, ki sta prikazana na Sliki 5 in Sliki 6.



Slika 5: Grafični prikaz števila členov za devetmestno število



Slika 6: Grafični prikaz števila členov za poljuben n

Tretja pomembna ugotovitev je oblika vsote členov, s katerimi so pomnožene posamezne potence števila 10. Kot smo že ugotovili, je oblika vsote členov pri potencah s sodim eksponentom ($2k$):

$$a_k^2 + 2 \sum_{i \neq j, i+j=2k} a_i a_j.$$

Oblika vsote členov pri potencah z lihim eksponentom ($2k + 1$) je:

$$2 \sum_{i \neq j, i+j=2k+1} a_i a_j.$$

11.5.2 KVADRATNI PALINDROMI Z LIHIM ŠTEVILOM ŠTEVK

Če je n sodo število, potem ima osnovno število liho število mest. Indeksi gredo pri števkih od n do $\frac{n}{2} + 1$ pri prvem faktorju in od 0 do $\frac{n}{2} - 1$ pri drugem faktorju. To velja za produkte oblike: $2 \cdot a_i \cdot a_j$. Ker pa je n sodo število, je 10^n potenca s sodim eksponentom, iz česar sledi, da se pojavi tudi člen $a_{\frac{n}{2}}^2$.

$$10^n \cdot \left(a_{\frac{n}{2}}^2 + 2a_n a_0 + 2a_{n-1} a_1 + \cdots + 2a_{\frac{n+1}{2}} a_{\frac{n-1}{2}} \right)$$

Opazimo, da pri sodih n srednja številka števila $a_{\frac{n}{2}}^2$ ne sme biti 3, saj pri 10^n nastopa poleg $a_{\frac{n}{2}}^2$ še faktor $2a_n a_0$, ki ima vrednost vsaj ena, saj je a_n različno od nič, ker je prva številka.

Ravno tako je a_0 različno od nič, ker je zadnja številka, in raziskujemo kvadratne palindrome, ki imajo zadnjo številko različno od 0.

Če bi bila številka $a_{\frac{n}{2}} = 3$, bi to pomenilo, da je $a_{\frac{n}{2}}^2 = 9$, in bi prišlo do prenosa enote, saj je $2a_n a_0$ zagotovo 1 ali več.

Ta ugotovitev velja samo za kvadratne palindrome z lihim številom števkih, saj pri kvadratnih palindromih s sodim številom števkih srednje številke ni.

12 POSEBNI KVADRATNI PALINDROMI

Posebno obravnavo si zaslužijo kvadratni palindromi, ki imajo posebne lastnosti. Tako v tej nalogi raziskujemo poleg splošnih lastnosti in pravil za kvadratne palindrome tudi pravila za kvadratne palindrome, ki so sestavljeni iz samo ene števke, ter kvadratne palindrome, ki imajo na koncu ničle.

12.1 KVADRATNI PALINDROMI, ZGRAJENI IZ ENAKIH ŠTEVK

V tej nalogi se ukvarjamo tudi s kvadratnimi palindromi, ki so zgrajeni iz enakih števk. Ker smo do te točke ugotovili, da kvadratne palindrome gradijo le števke 1, 2, 3 in 0, tudi kvadratnih palindromov zgrajenih iz enakih števk, ne morejo tvoriti katere druge števke, vendar niti vse od teh števk ne tvorijo takšnih kvadratnih palindromov. Tako števka 0 ne more tvoriti takšnega kvadratnega palindroma, saj je potem to število enako 0. Prav tako števka 3 ne more tvoriti kvadratnega palindroma iz enakih števk, ker se lahko 3 pojavi največ enkrat v številu, da je to število še kvadratni palindrom.

12.1.1 KVADRATNI PALINDROMI, ZGRAJENI IZ SAMIH 1

Kljub temu da je 1 najmanjše naravno število, ob preveliki količini enic v številu pri kvadriranju tega števila pride do prenosa enote in to število posledično ni kvadratni palindrom. S pomočjo aplikacije Microsoft Excel smo preverili, največ koliko mest lahko ima število, zgrajeno iz samih 1, da je to še lahko kvadratni palindrom. Rezultati so prikazani na Sliki 7.

1	1
11	121
111	12321
1111	1234321
11111	123454321
111111	12345654321
1111111	1234567654321
11111111	123456787654321
111111111	12345678987654321
1111111111	1234567900987654321

Slika 7: Preglednica kvadratnih palindromov, sestavljenih iz samih enk

Ugotovili smo, da lahko ima takšno število 9 mest, da je še kvadratni palindrom. Pri desetmestnem številu namreč pride do prenosa enote, saj je vsota členov pri potenci 10^{10} enaka 10, kar pomeni, da pride do prenosa enote in število ni več kvadratni palindrom. Podrobno dogajanje pri kvadriranju takšnega devetmestnega in desetmestnega števila je razvidno na Sliki 8.

Množenje števila iz samih enic (n=8) ⇒ devetmestno število																					
	a8	a7	a6	a5	a4	a3	a2	a1	a0		a8	a7	a6	a5	a4	a3	a2	a1	a0		
	9m	8m	7m	6m	5m	4m	3m	2m	1m	x	9m	8m	7m	6m	5m	4m	3m	2m	1m		
	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1		
(x 9m)	1	1	1	1	1	1	1	1	1												
(x 8m)		1	1	1	1	1	1	1	1	1											
(x 7m)			1	1	1	1	1	1	1	1	1										
(x 6m)				1	1	1	1	1	1	1	1	1									
(x 5m)					1	1	1	1	1	1	1	1	1								
(x 4m)						1	1	1	1	1	1	1	1	1							
(x 3m)							1	1	1	1	1	1	1	1	1						
(x 2m)								1	1	1	1	1	1	1	1	1					
(x 1m)									1	1	1	1	1	1	1	1	1				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8	7	6	5	4	3	2	1				
	10 ¹⁶	10 ¹⁵	10 ¹⁴	10 ¹³	10 ¹²	10 ¹¹	10 ¹⁰	10 ⁰⁹	10 ⁰⁸	10 ⁰⁷	10 ⁰⁶	10 ⁰⁵	10 ⁰⁴	10 ⁰³	10 ⁰²	10 ⁰¹	10 ⁰ =1				
Množenje števila iz samih enic (n=9) ⇒ desetmestno število																					
	a9	a8	a7	a6	a5	a4	a3	a2	a1	a0		a9	a8	a7	a6	a5	a4	a3	a2	a1	a0
	10m	9m	8m	7m	6m	5m	4m	3m	2m	1m	x	10m	9m	8m	7m	6m	5m	4m	3m	2m	1m
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(x 10m)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1											
(x 9m)		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1										
(x 8m)			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1									
(x 7m)				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1								
(x 6m)					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
(x 5m)						1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
(x 4m)							1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
(x 3m)								1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
(x 2m)									1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
(x 1m)										1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		
	10 ¹⁸	10 ¹⁷	10 ¹⁶	10 ¹⁵	10 ¹⁴	10 ¹³	10 ¹²	10 ¹¹	10 ¹⁰	10 ⁰⁹	10 ⁰⁸	10 ⁰⁷	10 ⁰⁶	10 ⁰⁵	10 ⁰⁴	10 ⁰³	10 ⁰²	10 ⁰¹	10 ⁰ =1		
Pride do prehoda!!																					

Slika 8: Kvadriranje osemestnega in devetmestnega števila, sestavljenega iz samih enic

12.1.2 KVADRATNI PALINDROMI, SESTAVLJENI IZ SAMIH 2

Kvadratnih palindromov, zgrajenih iz samih dvojok, je precej manj kot kvadratnih palindromov, zgrajenih iz samih enk, saj je število 2 večje in se zato prej nabere vsota členov pri isti potenci, ki je večja od deset, kar povzroči prenos enote. Ponovno smo si pomagali s programom Microsoft Excel in napisali nekaj števil, zgrajenih iz samih 2, ter jih kvadrirali. Rezultati so vidni na Sliki 9.

2	4
22	484
222	49284
2222	4937284
22222	493817284
222222	49382617284
2222222	4938270617284
22222222	493827150617284
222222222	49382715950617300
2222222222	4938271603950620000
22222222222	493827160483951000000

Slika 9: Preglednica kvadratnih palindromov, sestavljenih iz samih dvojok

Ugotovili smo, da sta takšna kvadratna palindroma samo dva, saj pri trimestnem številu že pride do prenosa enote, ker je vsota členov pri potenci 10^3 enaka 12. Podrobno dogajanje pri kvadriranju takšnega dvomestnega in trimestnega števila je razvidno na Sliki 10.

[illegible]

Slika 10: Kvadriranje dvomestnega in trimestnega števila sestavljenega, iz samih dvojok

12.2 KVADRATNI PALINDROMI Z RAZLIČNIM ŠTEVILOM MEST

Posebno obravnavo si zaslužijo tudi naravna števila, ki se končajo z vsaj eno števk 0. Ko zamenjamo vrstni red števk, ima dobljeno število v resnici v mestnem zapisu eno ali več mest manj. Kljub temu bi lahko bila nekatera takšna števila kvadratni palindromi.

$$10^2 = 100$$

$$1^2 = 1$$

$$120^2 = 14400$$

$$21^2 = 441$$

$$140^2 = 19600$$

$$41^2 = 1681$$

Števili 10 in 120 sta torej neke vrste kvadratna palindroma, medtem ko število 140 ni.

Ko smo generirali kvadratne palindrome, smo opazili, da je kar nekaj takšnih kvadratnih palindromov. Pri dvomestnih številih:

10, 20 in 30.

Pri trimestnih številih pa:

100, 110, 120, 130, 200, 210, 220, 300, 310.

Pri štirimestnih številih so takšni primeri:

1000, 1010, 1020, 1030, 1100, 1110, 1120, 1130, 1200, 1210, 1220, 1300, 2000, 2010, 2020, 2100, 2110, 2120, 2200, 2210, 3000, 3010, 3100, 3110.

Če pogledamo ta števila, bi lahko rekli, da zanje veljajo enaki pogoji kot za kvadratne palindrome, kakršne smo preučevali do sedaj. Poglejmo si, če je to res.

DOKAZ ZA NARAVNA ŠTEVILA Z ZADNJO ŠTEVKO 0

Velja: Število a , ki ima na koncu n ničel, je kvadratni palindrom natanko tedaj, ko je kvadratni palindrom tudi število, ki ga dobimo iz a , če odstranimo n ničel.

Dokaz: a^2 ima na koncu $2n$ ničel. Obrnjeno število od a^2 je torej enako kot obrnjen kvadrat števila, ki ga dobimo, če številu a odstranimo $2n$ ničel. Torej je a kvadratni palindrom natanko tedaj, ko je to število kvadratni palindrom.

Kljub temu da lahko te kvadratne palindrome obravnavamo kot kvadratne palindrome z enakim številom mest, zanje ne veljajo vsa pravila in omejitve. Tako lahko imajo takšni kvadratni palindromi za srednjo števko 3. Ta omejitev zanje ne drži, ker je pogoj za ustreznost te omejitve, da sta prva in zadnja števka različni od nič, kar zagotavlja, da je $2a_n a_0$ enako 1 ali več. V tem primeru to ni zagotovljeno, torej lahko imajo takšni palindromi za srednjo števko 3.

13 REZULTATI

Na koncu se je izkazalo, da je bila prva hipoteza nepravilna, druga pa pravilna. Poglejmo si, zakaj prva hipoteza H1 ne drži in zakaj je druga hipoteza H2 pravilna.

13.1 PREIZKUS PRVE HIPOTEZE H1

V raziskovalni nalogi smo ugotovili, da kvadratnega palindroma ne morejo tvoriti števke, ki so večje od tri. To bi pomenilo, da palindromi niso nujno kvadratni palindromi, če imamo števke večje od tri. Poglejmo si, če to res drži.

Po ugotovljenih lastnostih palindrom 1221 ne bi smel biti tudi kvadratni palindrom, saj ne izpolnjuje ene izmed lastnosti:

1. Prva in zadnja števka sta večji od 0 in manjši od 4, kar pomeni, da izpolnjuje ta pogoj.
2. Izkaže se, da kljub temu da so druge števke dovolj majhne, pride do prenosa enote:

$$1221^2 = (1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1)^2.$$

Neenakosti, ki morajo biti izpolnjene, so:

$$\text{Pri } 10^6 : 1^2 < 10$$

$$\text{Pri } 10^5 : 4 < 10$$

$$\text{Pri } 10^4 : 4 + 4 < 10$$

$$\text{Pri } 10^3 : 2 + 8 < 10 \rightarrow \text{to ni res}$$

$$\text{Pri } 10^2 : 4 < 10$$

$$\text{Pri } 10^1 : 4 + 4 < 10$$

$$\text{Pri } 10^0 : 1^2 < 10.$$

Iz tega vidimo, da 1221 ni kvadratni palindrom, ker ne izpolnjuje danega pogoja. Ko izračunamo kvadrat tega števila, vidimo, da ta res ni kvadratni palindrom.

$$1221^2 = 1\,490\,841$$

Še bolj očiten primer, ki ovrže to hipotezo, je število, ki ima vsaj eno števko večjo od 3. Tak primer je palindrom 1441. Ker vsebuje števko, večjo od 3, je očitno, da bo prišlo do prenosa enote. Če izračunamo kvadrat tega palindroma, vidimo, da kvadrat res ni palindrom.

$$1441^2 = 2\,076\,481$$

13.2 POTRDITEV DRUGE HIPOTEZE H2

Na začetku smo sklepali, da števke ne morejo biti večje od neke meje (strogo manjše od 9), da lahko tvorijo kvadratni palindrom. Ta hipoteza se je izkazala za pravilno.

To dokažemo s tem, ko smo dokazali, da števke ne smejo biti večje od tri in da ne sme priti do prenosa enote.

To hipotezo sedaj lahko razširimo še na ugotovitev, da moramo pri številih, ki imajo več mest, izbirati manjše števke, da ne pride do prenosa enote, saj se z večanjem mest večja tudi število členov pri isti potenci, kar pomeni, da se bo pri številu, ki ima 10 členov pri isti potenci, zagotovo morala pojaviti vsaj ena ničla, da ne bo prišlo do prenosa enote.

14 RAZPRAVA

Skozi raziskovalno nalogo smo odkrivali lastnosti in pogoje, da je neko število kvadratni palindrom. Vse hipoteze niso bile pravilne, saj se je prva predpostavka, v kateri smo domnevali, da so vsi palindromi tudi kvadratni palindromi, izkazala za napačno. Da ne morejo biti vsi palindromi tudi kvadratni palindromi, sledi iz dokaza, da v kvadratnih palindromih lahko nastopajo samo števke 0, 1, 2 in 3. To smo kasneje še preizkusili in ugotovili, da temu res ni tako, in s tem samo potrdili rezultate te naloge. Druga hipoteza, ki smo jo postavili na začetku raziskovanja, se je izkazala za pravilno. Preden smo začeli raziskovati kvadratne palindrome, smo domnevali, da števke ne morejo biti večje od neke meje (strogo manjše od 9), saj smo opazili, da so vsi primeri kvadratnih palindromov, ki smo jih do takrat spoznali, sestavljeni iz števk manjših od 4. Na koncu se je izkazalo, da je to res, saj smo dokazali, da so palindromi sestavljeni le iz števk 1,2,3 in 0, s čimer je bila potrjena naša hipoteza.

Zatem smo raziskovali, kakšne so možne dodatne omejitve, in ugotovili, da pri številih, ki imajo liho število mest, ne sme nastopati kot srednja števka števka 3. Prav tako smo ugotovili, da se ne smeta pojaviti dve števki 3 v številu in da števki 2 ter 3 skupaj ne tvorita kvadratnega palindroma.

Nalogo smo nato še nadgradili, ko smo vsa ugotovljena pravila in pogoje prenesli še na kvadratne palindrome, pri katerih ima ena izmed števil na koncu eno ali več 0, ter na palindrome, ki so zgrajeni iz enakih števk. Na koncu smo ugotovili, da za števila, ki imajo na koncu 0, veljajo isti pogoji kot za navadne kvadratne palindrome, saj je 0 lahko na prvem in zadnjem mestu, pri kasnejših korakih dokazovanja pa jo obravnavamo kot navadno števko. Čeprav nismo navajeni pisati 0 pred nekim številom, lahko z upoštevanjem tega dokažemo, da za kvadratne palindrome z ničlami na koncu oziroma začetku veljajo isti pogoji. Kljub temu zanje ne velja pogoj, da na sredini števila z lihim številom mest ne sme biti števka 3. Prav tako smo ugotovili, da je devetmestno število največ mestno število zgrajeno iz samih enic, ter da je dvomestno število največ mestno število zgrajeno iz samih dvojok.

S tem, ko smo raziskovali, kakšni morajo biti pogoji, da je neko število kvadratni palindrom, smo ugotovili nekaj, za kar sklepamo, da je dokaj neraziskano, saj nismo zasledili zapisov o tem področju. Čeprav so številski palindromi, praštevilski palindromi in seštevanje palindromov že dobro raziskani, pa so kvadratni palindromi omenjeni le kot zanimivost pri številskih palindromih.

15 ZAKLJUČEK

V tej nalogi smo definirali in raziskali dokaj neraziskano področje, in sicer kvadratne palindrome. Odkrili sem ključne pogoje, da je neko število kvadratni palindrom, in sicer:

- 1.) Sestavljen je samo iz števk 0, 1, 2 in 3.
- 2.) Pri kvadriranju števila ne sme priti do prenosa enote.

Ko smo dokazali, da ne sme prihajati do prenosa enote, smo iz tega dobili tri dodatne pogoje:

1. 2 in 3 ne smeta biti v istem številu, da je le-to še kvadratni palindrom.
2. V številu je lahko samo ena števka enaka 3.
3. V številu z lihim številom mest števka 3 ne sme biti srednja števka, če sta prva in zadnja števka različni od 0.

Poleg tega smo opazili, da se število kvadratnih palindromov večja z večanjem števila mest.

15.1 NOVE HIPOTEZE

Med raziskovanjem kvadratnih palindromov smo dobili idejo za novo hipotezo, in sicer:

Kvadratni palindromi so lahko tudi števila, ki imajo za prvo oziroma zadnjo števko 0.

To hipotezo smo nato tudi potrdili in dokazali, da lahko kvadratne palindrome, ki nimajo enakega števila mest, obravnavamo enako kot kvadratne palindrome, ki imajo enako število mest.

15.2 MOŽNE RAZŠIRITVE

Pri nadaljnjem raziskovanju bi lahko raziskovali, kakšni so pogoji, da je neko število kubični palindrom in kdaj so vsote členov, pomnoženih z isto potenco 10, manjše od 10.

15.2.1 KUBIČNI PALINDROMI

Na podoben način, kot smo iskali pogoje, da je neko število kvadratni palindrom, bi lahko iskali pogoje in lastnosti kubičnih palindromov.

Opazovali bi jih lahko s pomočjo Microsoft Excela, saj je postopek popolnoma enak, samo, da namesto A^2 uporabim A^3 . Rezultati tega so prikazani na Sliki 11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I		A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	10	100	1	1		10	1000	1	1	1	100	10000	1	1		100	1000000	1	1
2	11	121	11	11		11	1331	11	1331	2	101	10201	101	10201		101	1030301	101	1030301
3	12	144	21	441		12	1728	21	9261	3	102	10404	201	40401		102	1061208	201	8120601
4	13	169	31	961		13	2197	31	29791	4	103	10609	301	90601		103	1092727	301	27270901
5	14	196	41	1681		14	2744	41	68921	5	104	10816	401	160801		104	1124864	401	64481201
6	15	225	51	2601		15	3375	51	132651	6	105	11025	501	251001		105	1157625	501	1,26E+08
7	16	256	61	3721		16	4096	61	226981	7	106	11236	601	361201		106	1191016	601	2,17E+08
8	17	289	71	5041		17	4913	71	357911	8	107	11449	701	491401		107	1225043	701	3,44E+08
9	18	324	81	6561		18	5832	81	531441	9	108	11664	801	641601		108	1259712	801	5,14E+08
10	19	361	91	8281		19	6859	91	753571	10	109	11881	901	811801		109	1295029	901	7,31E+08
11	20	400	2	4		20	8000	2	8	11	110	12100	11	121		110	1331000	11	1331
12	21	441	12	144		21	9261	12	1728	12	111	12321	111	12321		111	1367631	111	1367631
13	22	484	22	484		22	10648	22	10648	13	112	12544	211	44521		112	1404928	211	9393931
14	23	529	32	1024		23	12167	32	32768	14	113	12769	311	96721		113	1442897	311	30080231
15	24	576	42	1764		24	13824	42	74088	15	114	12996	411	168921		114	1481544	411	69426531
16	25	625	52	2704		25	15625	52	140608	16	115	13225	511	261121		115	1520875	511	1,33E+08
17	26	676	62	3844		26	17576	62	238328	17	116	13456	611	373321		116	1560896	611	2,28E+08
18	27	729	72	5184		27	19683	72	373248	18	117	13689	711	505521		117	1601613	711	3,59E+08
19	28	784	82	6724		28	21952	82	551368	19	118	13924	811	657721		118	1643032	811	5,33E+08
20	29	841	92	8464		29	24389	92	778688	20	119	14161	911	829921		119	1685159	911	7,56E+08
21	30	900	3	9		30	27000	3	27	21	120	14400	21	441		120	1728000	21	9261
22	31	961	13	169		31	29791	13	2197	22	121	14641	121	14641		121	1771561	121	1771561
23	32	1024	23	529		32	32768	23	12167	23	122	14884	221	48841		122	1815848	221	10793861
24	33	1089	33	1089		33	35937	33	35937	24	123	15129	321	103041		123	1860867	321	33076161
25	34	1156	43	1849		34	39304	43	79507	25	124	15376	421	177241		124	1906624	421	74618461
26	35	1225	53	2809		35	42875	53	148877	26	125	15625	521	271441		125	1953125	521	1,41E+08
27	36	1296	63	3969		36	46656	63	250047	27	126	15876	621	385641		126	2000376	621	2,39E+08
28	37	1369	73	5329		37	50653	73	389017	28	127	16129	721	519841		127	2048383	721	3,75E+08
29	38	1444	83	6889		38	54872	83	571787										
30	39	1521	93	8649		39	59319	93	804357										
31	40	1600	4	16		40	64000	4	64										
32	41	1681	14	196		41	68921	14	2744										
33	42	1764	24	576		42	74088	24	13824										
34	43	1849	34	1156		43	79507	34	39304										
35	44	1936	44	1936		44	85184	44	85184										
36	45	2025	54	2916		45	91125	54	157464										

Slika 11: Preglednica dvomestnih in trimestnih kubičnih palindromov

Ko opazujemo kubične palindrome, opazimo, da so sestavljeni samo iz števk 0, 1 in 2.

Iz teh opazk bi lahko nato nadaljevali z raziskovanjem, zakaj je temu tako, in bi verjetno lahko našli kar nekaj podobnosti med odkrivanjem pogojev, da je neko število kvadratni palindrom in da je neko število kubični palindrom. Ena izmed teh bi lahko bila, da tudi pri kubiranju ne sme priti do prenosa enote.

15.2.2 VSOTA ČLENOV PRI ISTI POTENCI MANJŠA OD 10

Kljub temu da smo v nalogi točno določili pogoje, da je neko število kvadratni palindrom, ni lahko takoj ugotoviti, če vsota členov pri isti potenci ni večja oziroma enaka 10. To je pogoj, da ne pride do prenosa enote. Da bi nalogo nadgradili, bi lahko torej iskali pogoje, pod katerimi ne pride do tega, da vsota členov pri isti potenci preseže 10.

Sicer smo odkrili, da se z višanjem števila mest viša tudi število členov pri isti potenci, ampak je težko določiti, katere številke sestavljajo te člene in kdaj se jih nabere toliko, da brez manjših števk pride do prehoda. Če bi uspeli odkriti še to, bi lahko točno določili, na katera mesta lahko postavimo katera števila in kolikokrat lahko uporabimo katero od števil.

Vendar tudi če bi odkrili te pogoje, verjetno ne bi občutno pospešili iskanja palindromov, saj bi bilo teh pogojev kar nekaj, zato to ni tako ključnega pomena za to nalogo.

15.3 POMANJKLJIVOSTI

V nalogi smo sicer ugotovili, kakšni morajo biti pogoji, da je neko število kvadratni palindrom, vendar je še vedno nekaj prostora za omejitve. Med raziskovanjem namreč nismo uspeli odkriti, kakšno je pravilo, da vsota členov pri isti potenci ni večja ali enaka 10. Kljub temu smo točno določili, kdaj je neko število kvadratni palindrom.

16 VIRI IN LITERATURA

- [1] MAJCEN, Irena. 2002. Teorija števil. Brihtnež: elektronska revija za mlade matematike[online], 11.dec., let. 0, št. 2, str. 3-14. Dostopno na spletnem mestu: <<https://www.dmfa.si/tekmovanja/Brihtnez/Brihtnez-0-2.pdf>>
- [2] MOHORIČ, Andreja. 2014. VEGA 1: i-učbenik za matematiko v 1. letniku gimnazije[online]. Ljubljana: Zavod RS za Šolstvo [citirano 19.2.2021]. ISBN 978-961-03-0135-6. Dostopno na spletnem naslovu: <<https://eucbeniki.sio.si/vega1/12/index2.html>>
- [3] MOHORIČ, Andreja. 2014. VEGA 1: i-učbenik za matematiko v 1. letniku gimnazije[online]. Ljubljana: Zavod RS za Šolstvo [citirano:19.2.2021]. ISBN 978-961-03-0135-6. Dostopno na spletnem naslovu: <<https://eucbeniki.sio.si/vega1/19/index1.html>>.
- [4] SNOJ, Jakob Jurij. 2020. Indukcija [online]. [citirano 20.2.2021]. Dostopno na spletnem naslovu: <https://www.dmfa.si/Tekmovanja/MaSSA/Dokumenti/indukcija_predavanje.pdf>