RAZISKOVALNA NALOGA

ORIGAMIKA
Delitev kota na več enakih delov

Avtorji: Matic Kravos, Rene Turk, Aljaž Velikonja

Mentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Področje: SŠ matematika

April, 2022

Škofijska gimnazija Vipava

Zahvala

Zahvaljujemo se profesorjem Škofijske gimnazije Vipava:

- profesorju Alojzu Grahorju za usmerjanje in spodbude pri raziskovanju,
- profesorici Sonji Matelič za pregled povzetka v angleškem jeziku.

Povzetek

V raziskovalni nalogi uporabljamo za reševanje geometrijskih problemov *matematični origami.* To je metoda, pri kateri namesto neoznačenega ravnila in šestila konstruiramo geometrijske elemente s pomočjo prepogibanja papirja.

V prvem delu naloge obravnavamo problem delitve kota na tri enake dele. Predstavimo Abejevo in dve Justinovi metodi, ki pa opisujeta delitev ali samo ostrega ali samo topega kota. Za vsako izmed njih izpeljemo podoben postopek (z dokazom), ki omogoča razdelitev druge vrste kota.

V drugem delu opišemo metodo dvojnega pregibanja in z njeno pomočjo razdelimo kot na pet enakih delov (Langova metoda). Langovo metodo quintisekcije priredimo tudi za trisekcijo kota.

Ključne besede: *matematični origami, origametrija, prepogibanje papirja, trisekcija, petsekcija, sedemsekcija.*

Abstract

In the research project *origami mathematics* is used to solve mathematical geometric problems. This is a method in which, instead of using an unmarked ruler and compass, the construction of the geometric elements is made by folding paper.

In the first part of the research project the problem of dividing the angle into three equal parts is discussed. Abe's method and Justin's two methods of trisection are introduced, but they only describe the division of either acute or obtuse angles. For each of the trisection methods, a similar procedure (with proof) that allows the division of the other angle type is performed.

In the second part the method of double folding is described and with its help the angle is divided into five equal parts (Lang’s method). Lang's quintisection method is also adapted to perform the trisection of an angle.

Key words: *mathematical origami, origametry, paper folding, trisection, quintisection, septisection.*

KAZALO VSEBINE

Zahvala 3
Povzetek 4
Abstract 4
1. Uvod 6
1.1. Matematični origami 6
1.2. Pravila običajnih geometrijskih konstrukcij v ravnini 7
1.3. Pravila matematičnega origamija 8
1.4. Cilji naloge 9
1.5. Metode dela 9
2. Delitev kota na tri enake dele (trisekcija kota) 10
2.1. Abejeva metoda trisekcije ostrega kota (Abe_ostri) 11
2.2. Prilagoditev Abejeve metode trisekcije Abe_ostri za topi kot 13
2.3. Justinova metoda trisekcije topega kota (Justin_topi) 15
2.4. Prilagoditev Justinove metode Justin_topi za ostri kot 17
2.5. Justinova metoda trisekcije za ostri kot (Justin_ostri) 18
2.6. Prilagoditev Justinove metode Justin_ostri za trisekcijo topega kot 20
3. Razdelitev kota na pet enakih delov (quintisekcija kota) 22
3.1. Langova razdelitev ostrega kota na pet enakih delov 22
3.2. Prilagoditev Langove metode za trisekcijo kota 28
3.3. Langova razdelitev topega kota na pet enakih delov 29
3.4. Zanimivost: Od Langa do Abeja 31
4. Delitev kota na sedem enakih delov (septisekcija kota) 32
5. Zaključek 34
6. Viri in literatura 35
7. Slikovno kazalo 36

1. Uvod

1.1. Matematični origami

Origami[1] je stara japonska in kitajska umetnost, ko s prepogibanjem papirja (brez lepila in škarij) izdelujemo praktične ali umetniške izdelke. Ko prepognemo papir, ostane sled – premica. Tej sledi pravimo *pregib.* Poleg tega lahko poiščemo presek dveh premic (če obstaja). Osnovne operacije so zbrali v seznam sedmih aksiomov. Tako se prepogibanje papirja uporablja tudi v matematiki, zlasti pri geometriji. V raziskovalni nalogi ORIGAMIKA: *Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja* (Maraž 2016:5) so avtorji imenovali uporabo matematičnega origamija v matematiki s pojmom ORIGAMIKA, ki ga uporabljamo tudi v tej nalogi.

Z običajnim geometrijskim orodjem (neoznačeno ravnilo in šestilo) ni mogoče razdeliti poljubnega kota na tri enake dele (Maraž 2016: 8). V ozadju tega problema je namreč polinomska enačba tretje stopnje. Z neoznačenim ravnilom in šestilom pa lahko »rešimo« le probleme, ki imajo v ozadju kvadratno enačbo. Matematiki so dokazali, da se da z matematičnim origamijem z enojnimi pregibi rešiti tudi polinomske enačbe tretje stopnje (na primer v Justin 1986 ali Hull 2021).

Matematika Abe in Justin sta odkrila postopek, kako z matematičnim origamijem razdelimo kot na tri enake dele (*trisekcija* kota). V nalogi predstavimo njune konstrukcije in opišemo še nove načine.

Delitev kota na pet enakih delov imenujemo *quintisekcija.* V ozadju tega problema je enačba pete stopnje, ki pa ni rešljiva z enojnimi pregibi (Lang, 2015). Lang je problem rešil z dvojnim pregibom (prav tam). Quintisekcija je opisana v četrtem poglavju.

[1] origami –ja *m* [jap. *oru* zložiti, zgibati, prepogniti + *gami* iz *kami* papir] japonska umetnost zgibanja papirja (Tavzes 2002: 824)

1.2. Pravila običajnih geometrijskih konstrukcij v ravnini

Z »običajnimi geometrijskimi konstrukcijami v ravnini« mislimo na konstrukcije, ki jih lahko naredimo z neoznačenim ravnilom in šestilom. Označili jih bomo z oznako NR&Š. Glede na to, da vemo, kateri orodji imamo na razpolago, zelo lahko oblikujemo pravila.

NR&Š1: Skozi dve različni točki P_1 in P_2 lahko narišemo premico.

NR&Š2: Naj bo dana točka S in daljica dolžine r. S šestilom lahko narišemo krožnico s središčem v točki S in polmerom r.

NR&Š3: Za dve premici, dve krožnici ali za premico in krožnico lahko določimo presečišča.

1.3. Pravila matematičnega origamija

Različni avtorji nekoliko drugače razvrstijo in poimenujejo pravila matematičnega origamija. Nekateri jih imenujejo preprosto pravila, drugi pa aksiomi (Huzita-Justinovi aksiomi). Tu se bomo držali vira (Hull, 23) in jih poimenovali *osnovne origami operacije.* Pri vseh osnovnih origami operacijah uporabljamo enojni pregib (ko papir enkrat prepognemo).

O1: Za dani različni točki P_1 in P_2 obstaja pregib, s katerim dobimo premico skozi dani točki.

O2: Za dani premici lahko poiščemo presečišče, če obstaja.

O3: Za dani dve točki P_1 in P_2 obstaja pregib, ki točko P_1 preslika v točko P_2 (dobimo simetralo daljice P_1P_2).

O4: Za dani dve različni premici l_1 in l_2 obstaja pregib, ki premico l_1 preslika na premico l_2 (dobimo simetralo kota, ki ga določata premici l_1 in l_2.

O5: Za dano točko P in premico l lahko naredimo pregib skozi točko P pravokotno na premico l (dobimo pravokotnico na premico, ki poteka skozi dano točko).

O6: Za dani točki P_1 in P_2 ter premico l lahko naredimo pregib tako, da leži točka P_1 na premici l in da poteka skozi točko P_2.

O7: Za dani točki P_1 in P_2 ter premici l_1 in l_2 lahko naredimo pregib tako, da se točka P_1 preslika na premico l_1 in točka P_2 preslika na premico l_2.

1.4. Cilji naloge

V nalogi smo si zastavili tri cilje:

- Prvi cilj: Opisati znane konstrukcije delitve kota na tri enake dele.
- Drugi cilj: Odkriti nove načine delitve kota na tri enake dele.
- Tretji cilj: Opisati Langovo konstrukcijo delitve kota na pet enakih delov.
- Četrti cilj: Proučiti delitev kota na sedem enakih delov.

1.5. Metode dela

Pri izdelavi raziskovalne naloge smo uporabljali:

- metodo dela po strokovni literaturi in internetnih virih,
- preiskovanje s pomočjo grafičnega programa GeoGebra,
- praktično preizkušanje s prepogibanjem papirja ter
- matematično sklepanje in dokazovanje.

2. Delitev kota na tri enake dele (trisekcija kota)

Pokažimo, da delitev kota na tri enake dele z neoznačenim ravnilom in šestilom ni možna. Razvijmo izraz $\cos(3x)$ po adicijskih izrekih in dobimo

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Ko postavimo $x = \frac{\pi}{9}$ in označimo $\cos x = t$ ter uredimo, smo pri enačbi tretje stopnje

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \qquad (1)$$

Enačba (1) je nerazcepna nad množico racionalnih števil. Ni je mogoče prevesti na sistem enačb $ax + by + c = 0$ (premica – ravnilo) in $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ (krožnica – šestilo). Od tod sklepamo, da v splošnem trisekcija kota ni mogoča z neoznačenim ravnilom in šestilom (glej Marаž 2016:8). Ker pa je enačba tretje stopnje rešljiva z origamiko (glej Justin 1986:2 ali Hull 2021: 38), je mogoče s prepogibanjem papirja razdeliti kot na tri enake dele.

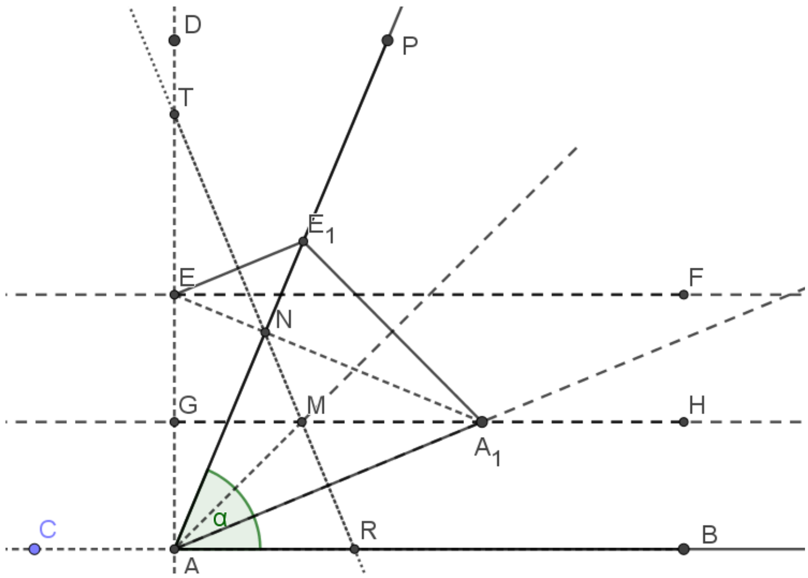
V literaturi smo našli Abejevo metodo trisekcije ostrega kota, ki smo jo označili z Abe_ostri, Justinovo metodo trisekcije topega kota (Justin_topi) in Justinovo trisekcijo ostrega kota (Justin_ostri). Za vsako izmed teh metod pa smo opisali in dokazali prilagoditev za drugo vrsto kota, ki je sledi originalni metodi.

Pri originalnih metodah trisekcije je ključni korak izvedba pregiba, pri katerem se hkrati dve točki na prepogne (preslika) na dve različni premici. V prilagoditvah pa smo uporabili idejo, da smo hkrati prepognili dano premico na določeno točko in dano točko na premico.

Opomba: Sicer pa lahko katerokoli metodo za ostri kot uporabimo pri topem kotu tako, da topi kot najprej razpolovimo in dobimo dva ostra kota. Vsakega izmed njih nato razdelimo na tri enake dele. Lahko pa tudi tako, da na tri enake dele najprej razdelimo njemu suplementarni kot $\alpha = 180^0 - \beta$, kjer je β dani topi kot. Potem je $\frac{\beta}{3} = 60^0 - \frac{\alpha}{3}$. Podobno bi naredili v primeru, ko poznamo delitev topega kota. Če sta α in β suplementarna kota, velja $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = 60^0$. Kot 60^0 lahko konstruiramo z matematičnim origamijem (glej na primer Maraž 2016: 49).

2.1. Abejeva metoda trisekcije ostrega kota (Abe_ostri)

Prvo znano metodo trisekcije kota je opisal Hishasi Abe leta 1970 (Hull 2021: 17). Opisana metoda deluje za poljubni ostri kot. Na sliki 1 je prikazan postopek.



Slika 1: Prikaz trisekcije ostrega kota (Abe_ostri)

Postopek 1:

i. Na listu papirja konstruiramo z matematičnim origamijem kot BAP velikosti α.
ii. Vzdolž kraka AB naredimo pregib BC in v točki A pravokotnico AD.
iii. Na pregibu AD izberemo točko E in v njej konstruiramo pravokotnico EF na pregib AD. Rob AB prepognemo na pregib EF in naredimo pregib GH. Točka G razpolavlja daljico AE. Premice, nosilke daljic AB, GH in EF, so vzporedne.
iv. Levo polravnino pregiba AD (tisto polravnino, ki vsebuje točko C) zapognemo (skrijemo) pod papir.
v. (Ključni del) Pregib TR naredimo tako, da pregib AD prepognemo tako, da točko A položimo (prepognemo) na pregib GH in hkrati točko E na pregib (krak kota) AP. Preslikavo točke A na daljici GH označimo z $\mathrm{A_1}$, preslikano točko E na kraku AP pa z $\mathrm{E_1}$. Presečišče pregibov TR in GH naj bo točka M.
vi. Naredimo pregib AM skozi točki A in M.
vii. Naredimo pregib $\mathrm{AA_1}$, ki je simetrala kota BAM.
viii. Kot $\measuredangle \mathrm{BAA_1}$ je tretjina kota α.

Izrek 1: Origami konstrukcija, ki je opisana v postopku 1, razdeli ostri kot na tri enake dele:

$$\measuredangle BAA_1 = \measuredangle A_1AM = \measuredangle MAE_1 = \frac{\alpha}{3}$$

Dokaz:

Iz origami konstrukcije sledi:

- daljice AB, GH in EF so vzporedne,
- $|GA| = |GE|$,
- daljici AE ter GA_1 sta pravokotni,
- štirikotnik AA_1E_1E je enakokraki trapez,
- trikotniki AA_1M, AA_1N in EAA_1 so enakokraki.

Naj bo kot $\sphericalangle BAA_1 = \varphi$. Potem velja tudi

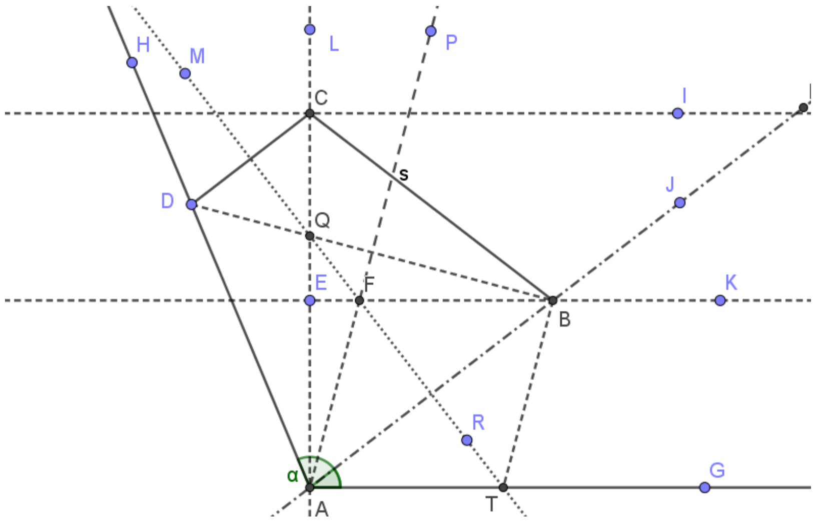
$$\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle AA_1M = \sphericalangle A_1AM = \sphericalangle AA_1G = \sphericalangle E_1AM = \varphi.$$

S tem dobimo, da je $\alpha = 3\varphi$.

q.e.d.

2.2. Prilagoditev Abejeve metode trisekcije Abe_ostri za topi kot

V knjigi Thomasa C. Hulla je na strani 18 zapisano, da Abejeva metoda, ki smo jo predstavili v Izreku 1, velja le za ostre kote (Hull 2021:18). To metodo smo uporabili in dokazali, da deluje tudi pri trisekciji topih kotov.



Slika 2: Metoda trisekcije Abe_ostri, prirejena za topi kot

Postopek 2: Na sliki 2 je skica postopka, kako po prirejeni Abejevi metodi razdelimo na tri enake dele topi kot.

i. Na listu papirja naredimo pregib AG in pregib AH tako, da je kot $\measuredangle GAH$ topi kot. Označimo ga z α.
ii. V točki A naredimo pregib AL, pravokotno na AG.
iii. Na pregibu AL naredimo v primerno izbrani točki C (na primerni razdalji od točke A) pravokotni pregib CI. Pregiba CI in AG sta vzporedna.
iv. Pregiba CI in AG prekrijemo in dobimo pregib EK, ki je vporeden prejšnjima, točka E pa razpolavlja daljico AC.
v. (Ključni del) Najprej zapognemo levi del pregiba AH tako, da je skrit za listom. Potem pa naredimo pregib MR tako, da se točka A preslika na pregib EK in da se istočasno pregib AH prekrije s točko C. Točko na pregibu AH, katere slika je točka C, označimo z D.
vi. Točka F je presečišče pregibov MR in EK. Naredimo pregib AP skozi točki A in F.
vii. Naredimo pregib AJ – simetralo kota $\measuredangle GAP$. Točka B na pregibu EK je slika točke A in hhrati leži na pregibu AJ. Štirikotnik $ATBF$ je po konstukciji romb.
viii. Kot $\measuredangle GAB$ je tretjina kota α.

Izrek 2: Origami konstrukcija, ki je opisana v postopku 2, razdeli topi kot na tri enake dele:

$$\measuredangle GAB = \measuredangle BAP = \measuredangle PAH = \frac{\alpha}{3}$$

Dokaz: Naj bo kot $\alpha = \measuredangle GAH$.

Zaradi origami konstrukcije velja:

- štirikotnik $ABCD$ je enakokraki trapez
- premici skozi AG in EK sta vzporedni,
- premica skozi EB je simetrala daljice AC,
- trikotnika ABF in CAB sta enakokraka.

Naj bo kot $\measuredangle GAB = \varphi$. Potem velja tudi

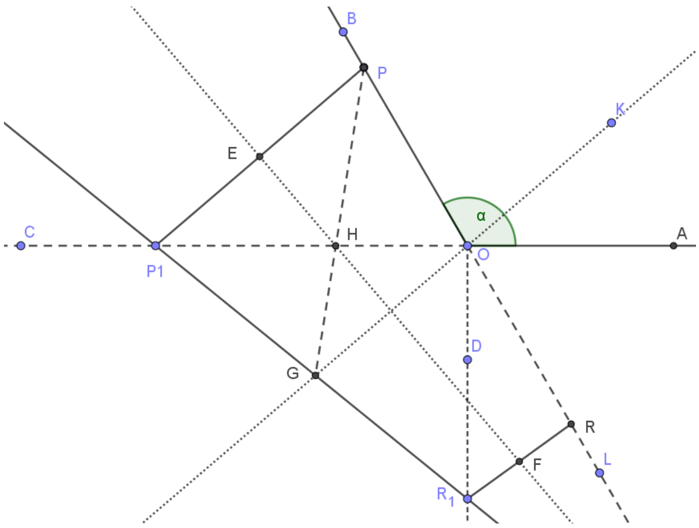
$$\measuredangle GAB = \varphi = \measuredangle ABF = \measuredangle BAF = \measuredangle EBC = \measuredangle DAF$$

Torej je je $\alpha = 3\varphi$.

q.e.d.

2.3. Justinova metoda trisekcije topega kota (Justin_topi)

V Justinovem članku (Justin 1986:3) in v Hullovi knjigi (Hull 2021:18) je opisana Justinova metoda trisekcije topega kota. Imenujmo jo prva Justinova metoda, saj je Justin izpeljal še eno metodo trisekcije in sicer za ostri kot.



Slika 3: Justinova metoda za topi kot (Justin_topi)

Postopek 3 (glej sliko 3): Dan je topi kot $\measuredangle AOB = \alpha$.

i. Najprej naredimo pregibe AC in BL vzdolž pregibov OA in OB
ii. Na poltrakih OB in OL konstruiramo točki P in R tako, da je $|OP| = |OR|$
iii. Naredimo pregib OD, pravokoten na pregib AC (v točki O)
iv. (Ključni del) Naredimo pregib EF tako, da se točka P preslika na pregib OC in istočasno točka R na pregib OD ($OD\ je$ pravokoten na OA). Točka P se preslika v točko P_1, točka R pa v točko R_1.
v. Skozi točko O naredimo pregib GK, ki je pravokoten na pregib EF.
vi. Kot $\measuredangle AOK$ je tretjina kota α.

Izrek 3: Origami konstrukcija, ki je opisana v postopku 3, razdeli topi kot na tri enake dele:

$$\measuredangle AOK = \frac{1}{3} \measuredangle AOP$$

Dokaz: Zaradi origami konstrukcije velja:

- daljice OP, OR, GP_1 in GR_1 so enako dolge,
- daljice PP_1, OG in RR_1 so vzporedne,

- štirikotniki PP_1R_1R, PP_1GO in GR_1RO so enakokraki trapezi,
- trikotnik PP_1H je enakokrak.

Trikotnik P_1R_1O je pravokotni trikotnik. Točka G razpolavlja hipotenuzo P_1R_1 in je središče trikotniku P_1R_1O očrtane krožnice. Daljici GO in GP_1 sta enako dolgi in je zato trikotnik P_1GO enakokrak.

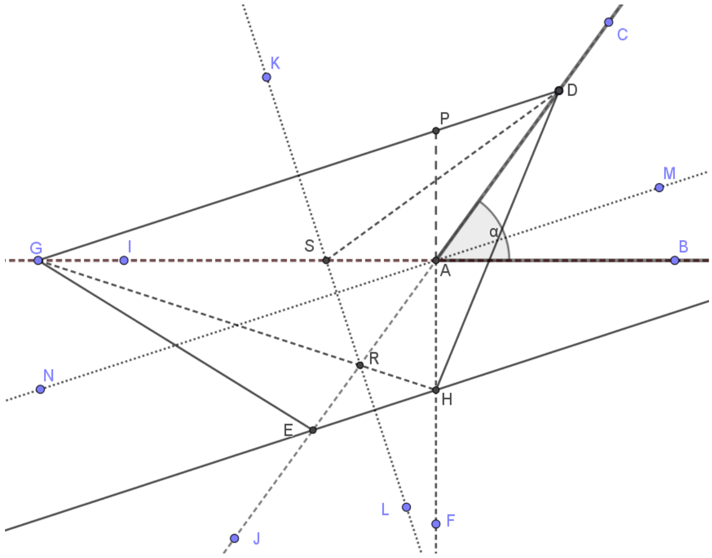
Naj bo kot $\angle AOK = \varphi$. Zaradi naštetih lastnosti so temu kotu enaki tudi koti:

$$\varphi = \angle GOP_1 = \angle GP_1O = \angle OP_1P = \angle P_1PH = \angle HPO.$$

Tako je kot $\angle P_1OP = \pi - 3\varphi$, od koder sledi, da je $\alpha = 3\varphi$.

q.e.d.

2.4. Prilagoditev Justinove metode Justin_topi za ostri kot



Slika 4: Prilagoditev metode Justin_topi za trisekcijo ostrega kota

Postopek 4: Metoda deluje, če prepogibamo prozorni papir. Dan je ostri kot $\alpha = \measuredangle BAC$ (glej sliko 4).

i. Vzdolž danih krakov naredimo pregiba BI in CJ.
ii. Podobno kot pri točki 2.3 konstruiramo točki D in E na pregibu CJ tako, da je $|AD| = |AE|$.
iii. V točki A naredimo pregib FP, pravokoten na pregib IB.
iv. (Ključni korak) Pregib KL naredimo tako, da točko D postavimo (preslikamo) na pregib BI (dobimo točko G) in istočasno postavimo pregib FP v točko E. Točko na pregibu FP, ki se je preslikala v točko E, označimo s H.
v. Skozi točko A naredimo pravokotni pregib MN na pregib KL.
vi. Kot $\measuredangle BAM$ je tretjina kota α.

Izrek 4: Origami konstrukcija, ki je opisana v postopku 4, razdeli topi kot na tri enake dele: $\measuredangle BAM = \frac{1}{3}\measuredangle BAC$

Dokaz: Zaradi origami konstrukcije velja:

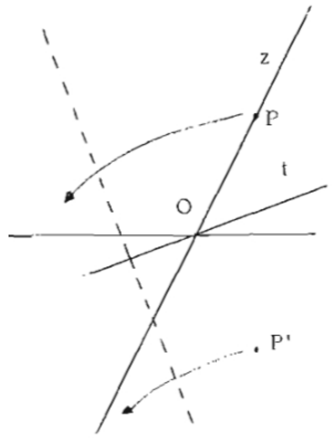
- dolžini daljic AD in AE sta enaki,
- daljici DG in HE ter pregib MN so vzporedni,
- štirikotnik $DGEH$ je enakokraki trapez,
- trikotnika DGS in GRD sta enakokraka,
- trikotnika ADP in AEH sta skladna, ker se ujemata v dolžini ene stranice in v dveh kotih. Tako je $|AP| = |AH|$,
- trikotnik PHG je enakokrak.

Naj bo $\measuredangle BAM = \varphi$. Zaradi kotov ob vzporednicah velja $\varphi = \measuredangle NAI = \measuredangle BGP$. Ker je trikotnik PHG enakokrak, je tudi kot $\measuredangle HGA = \varphi$. Trikotnik DGR in DGS sta enakokraka, zato je kot $\measuredangle GDR = 2\varphi$. Tako je kot $\measuredangle DAG = \pi - 3\varphi$ in zato je $\alpha = 3\varphi$.

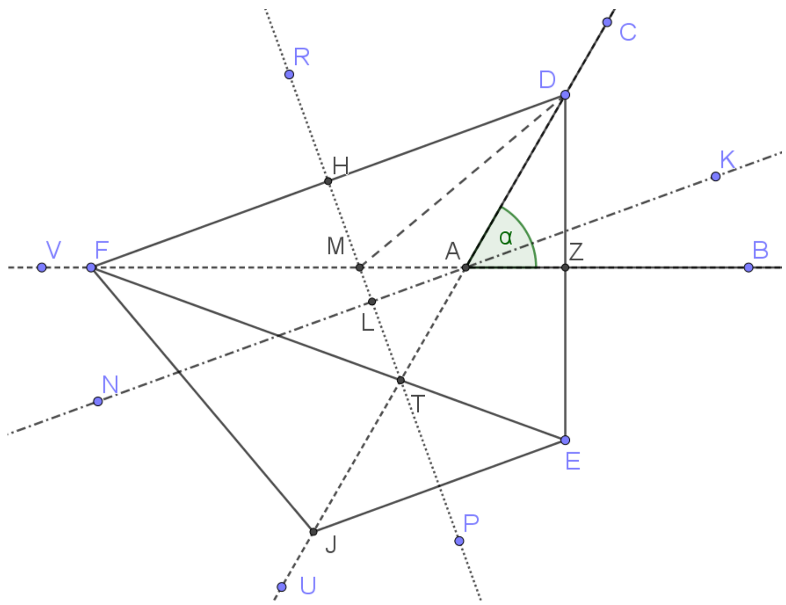
q.e.d.

2.5. Justinova metoda trisekcije za ostri kot (Justin_ostri)

V Justinovem članku (glej Justin 1986:4) je skica delitve ostrega kota na tri enake dele (slika 5) brez dokaza. V nadaljevanju navajamo podrobnejši opis metode in dokaz.



Slika 5: Kopija originalne Justinove skice za trisekcijo ostrega kota (Vir: Justin 1986:4)



Slika 6: Prikaz Justinove metode Justin_ostri delitve ostrega kota na tri enake dele

Postopek 5 (slika 6*):* Dan je kot $\alpha = \measuredangle BAC$.

i. Podaljšamo pregiba krakov v pregiba VB in UC.
ii. Na pregibu AB izberemo primerno točko Z in s pomočjo pravokotnega pregiba v točki Z določimo točko D na kraku AC ter nato še točko E na pregibu DZ tako, da je $|ZD| = |ZE|$.
iii. Naredimo pregib PR tako, da prepognemo (preslikamo) točko D na pregib BV (dobimo točko F) in istočasno prepognemo točko E na pregib CU (dobimo točko J).
iv. Skozi točko A naredimo pregib KN, ki je pravokoten na pregib PR.
v. Kot $\measuredangle BAK$ je tretjina kota α.

Izrek 5: Origami konstrukcija, ki je opisana v postopku 5, razdeli ostri kot na tri enake dele:

$$\measuredangle BAK = \frac{1}{3} \measuredangle BAC$$

Dokaz: Naj bo kot $\measuredangle BAK = \varphi$.

Zaradi origami konstrukcije velja:

- daljici ZD in ZE sta enako dolgi,
- trikotnik EDF je enakokrak,
- štirikotnik $DFJE$ je enakokrak trapez,
- trikotnika DFM in DFT sta enakokraka.

Naj bo kot $\measuredangle BAK = \varphi$. Potem so tudi velikosti naslednjih kotov enake φ:

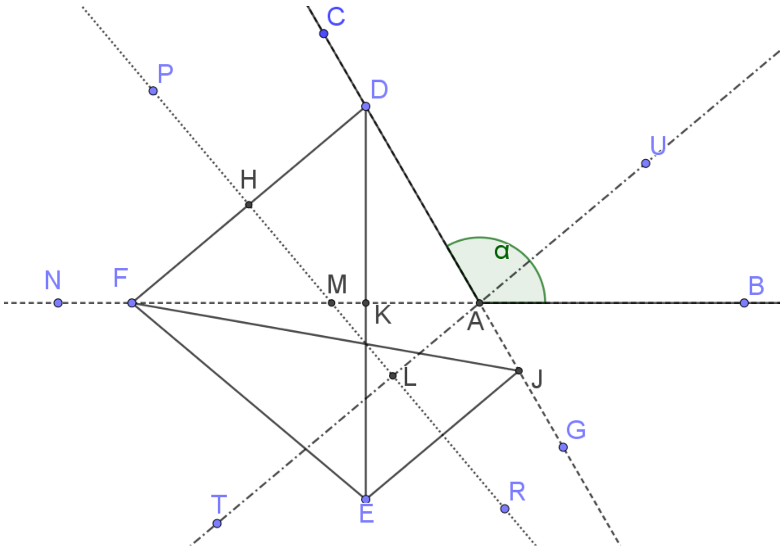
$$\measuredangle BAK = \varphi = \measuredangle FAN = \measuredangle DFM = \measuredangle EFM = \measuredangle MDF = \measuredangle TDM.$$

Tako je kot $\measuredangle DAF = \pi - 3\varphi$ in zato je $\alpha = 3\varphi$.

q.e.d.

2.6. Prilagoditev Justinove metode Justin_ostri za trisekcijo topega kot

Idejo, ki jo je Justin uporabil za trisekcijo ostrega kota, lahko uporabimo tudi za trisekcijo topega kota (slika 7).



Slika 7: Prilagoditev metode Justin_ostri za trisekcijo topega kota

Postopek 6:

i. Kraka danega kota α prepognemo in dobimo pregiba BN in GC.
ii. Na pregibu BN izberemo primerno točko K in z origami konstrukcijo načrtamo pravokotnico v točki K. Presek pravokotnice in pregiba GC označimo z D.
iii. Na pravokotnici v točki K konstruiramo točko E tako, da je $|KD| = |KE|$.
iv. Polravnino pregiba GC, ki vsebuje točko B, zapognemo, da dobimo rob.
v. (Ključni korak) Naredimo pregib PR tako, da prepognemo točko D na pregib BN (dobimo točko F) in istočasno pregib CG tako, da pokrije točko E. Točko na pregibu $GC,$ ki se preslika v točko $E,$ označimo z J.
vi. Skozi točko A naredimo pravokotni pregib TU na pregib PR.
vii. Kot $\measuredangle BAU$ je tretjina kota α.

Izrek 6: Origami konstrukcija, ki je opisana v postopku 6, razdeli topi kot na tri enake dele:

$$\measuredangle BAU = \frac{1}{3}\measuredangle BAC$$

Dokaz:

Zaradi origami konstrukcije velja:

- štirikotnik $DFEJ$ je enakokraki trapez,
- trikotnik DFE je enakokraki trikotnik.

Naj bo kot $\measuredangle BAU = \varphi$. Potem so enako veliki tudi koti

$$\measuredangle BAU = \varphi = \measuredangle TAK = \measuredangle DFK = \measuredangle EFK.$$

Od tod sledi, da je kot $\measuredangle FDA = 2\varphi$ in zato $\measuredangle FAD = \pi - 3\varphi$. Tako dobimo, da je je $\alpha = 3\varphi$.

q.e.d.

3. Razdelitev kota na pet enakih delov (quintisekcija kota)

V razdelku 1.3 so opisani Huzita-Justinovi aksiomi (HJ aksiomi). Opisujejo osnovne origami operacije, ki jih lahko naredimo z enojnimi pregibi. V članku *Angle Quintisection* (Lang, 2015) je zapisano, da se da na način rešiti probleme, ki imajo v ozadju največ polinomsko enačbo četrte stopnje. Podobno kot smo za trisekcijo kota izrazili $\cos 3x$ s funkcijo $\cos x$, razvijmo $\cos 5x$.

$$\cos 5x = \cos(3x + 5x) = \cdots = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

Ko v gornjo enačbo vstavimo $x = \frac{\pi}{15}$ in označimo $\cos\frac{\pi}{15} = t$, dobimo

$$32t^5 - 40t^3 + 10t - 1 = 0 \qquad (2)$$

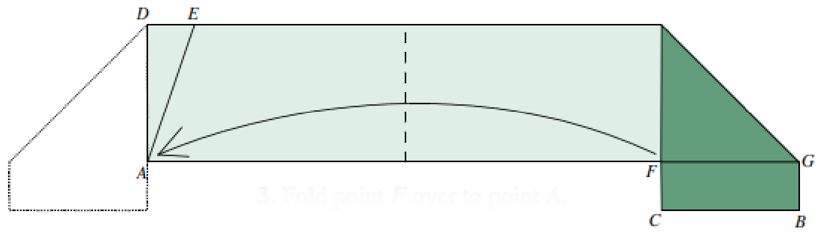
Enačba je pete stopnje, kar pomeni, da problem razdelitve kota na pet enakih delov ni mogoč s HJ aksiomi, to je z enojnimi regibi. Matematiki so HJ aksiomom dodali še pravila, ki omogočajo tako imenovani dvojni pregib. Primer dvojnega pregiba je razdelitev dolžine (recimo pravokotnika) na tri enake dele, ko pravokotnik »primemo hkrati z leve in z desne strani« in hkrati zapognemo, ko dobimo tri enake dele. Enako lahko naredimo z dvojnim pregibom trisekcijo kota: »hkrati prepognemo vsakega izmed krakov, poravnamo vse tri gube na enako velikost in hkrati zapognemo. Lang je v članku *Angle Quintisection* (Lang, 2015) opisal razdelitev ostrega kota na pet enakih delov z dvojnim pregibom, ki ga predstavljamo v naslednjem razdelku.

3.1. Langova razdelitev ostrega kota na pet enakih delov

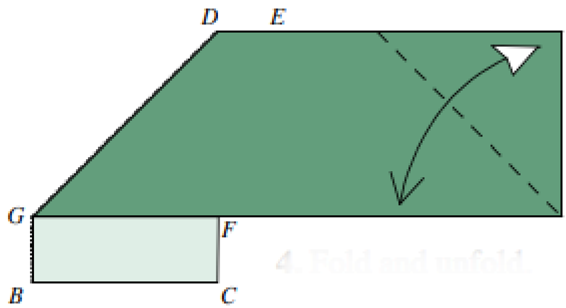
Postopek 7: Opis metode je prirejen po Langovem postopku, ki je dostopen na povezavi https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/quintisection.pdf Spodnje skice so kopirane iz istega članka.

i. Vzamemo dolg trak ABCD in »narišemo« kot BAE. Na desnem koncu naredimo navpični pregib.

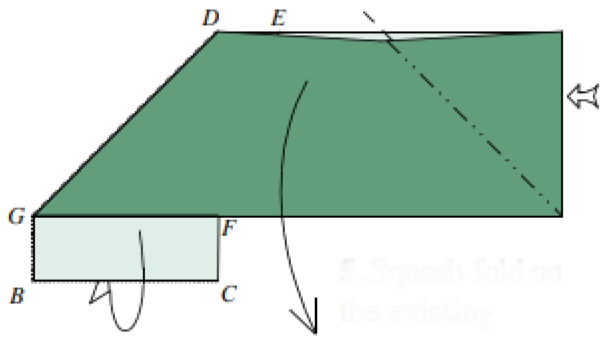
ii. Daljico GE preslikamo na spodnji rob AB



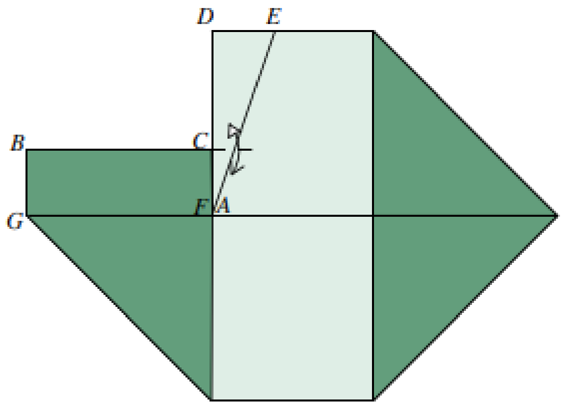
iii. Točko F preslikamo na točko A.



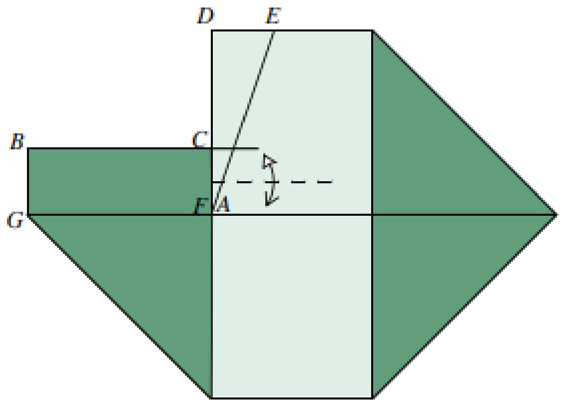
iv. Zapognemo in poravnamo



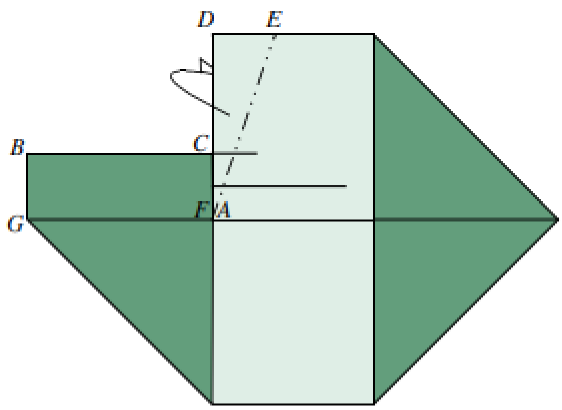
v. Razpremo



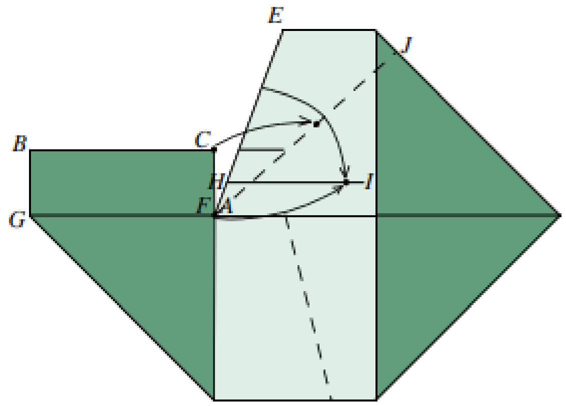
vi. Skozi točko C naredimo (kratek) vzporedni pregib k daljici GA



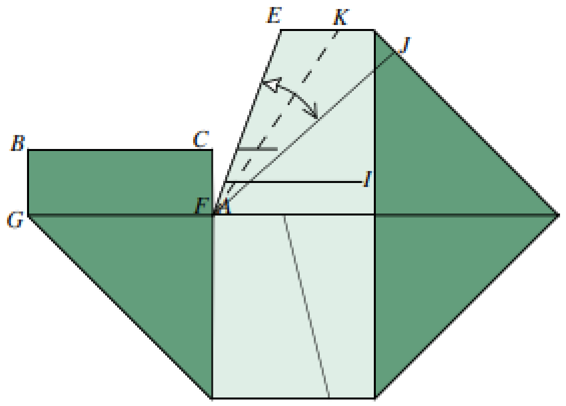
vii. Naredimo simetralo daljic AC in BG



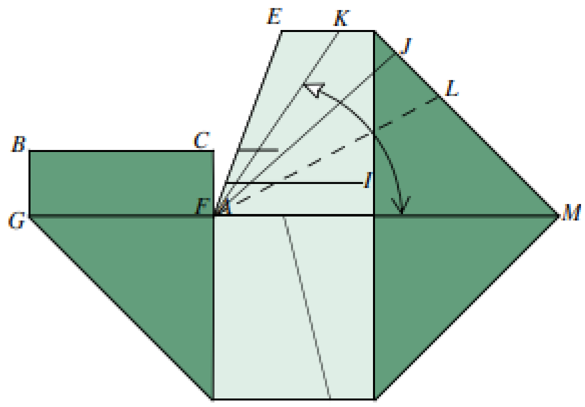
viii. Skrijemo vogal D (prepognemo po kraku AE)



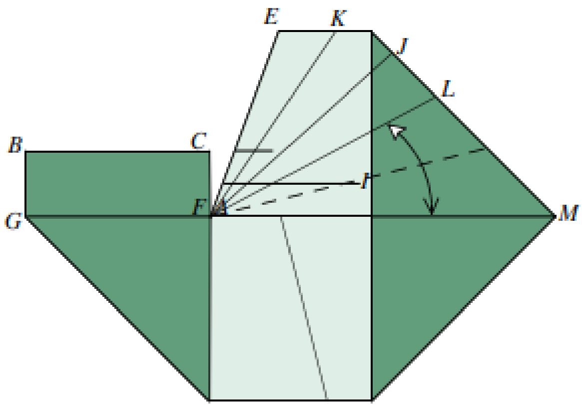
ix. Ključni korak (dvojni pregib): Istočasno naredimo dva pregiba tako, da točko A (A=F) preslikamo na daljico HI, krak AE zapognemo tako, da seka daljico HI v isti točki, v katero se preslika točka A, istočasno pa se točka C preslika na nastajajoči pregib AJ. Ko vse poravnamo, »stisnemo« oba pregiba hkrati.



x. Naredimo pregib=simetralo kota EAJ,



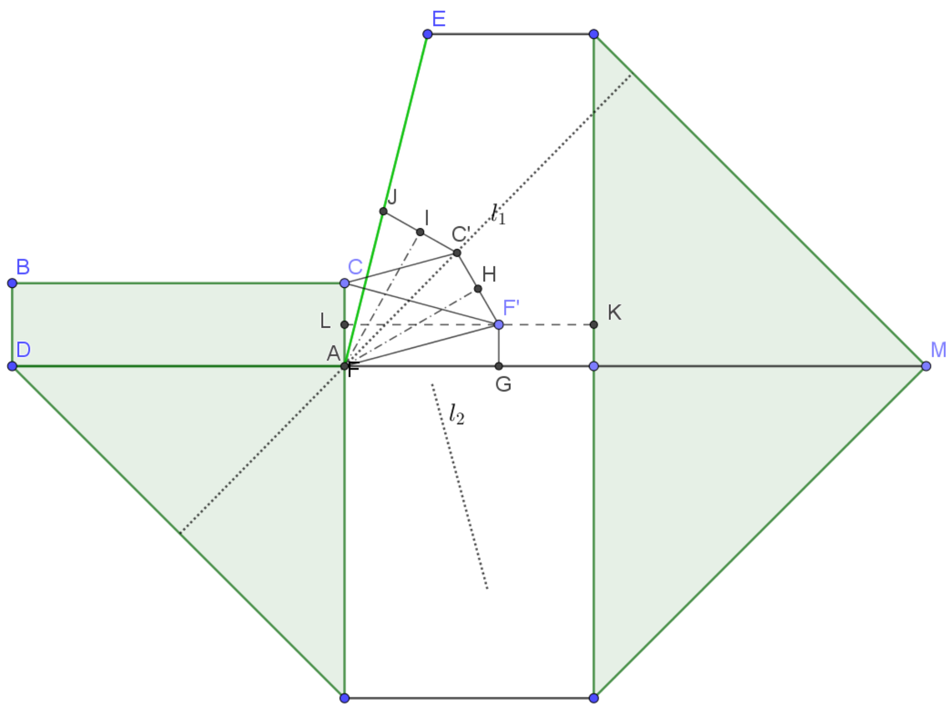
xi. Naredimo simetralo kota KAM



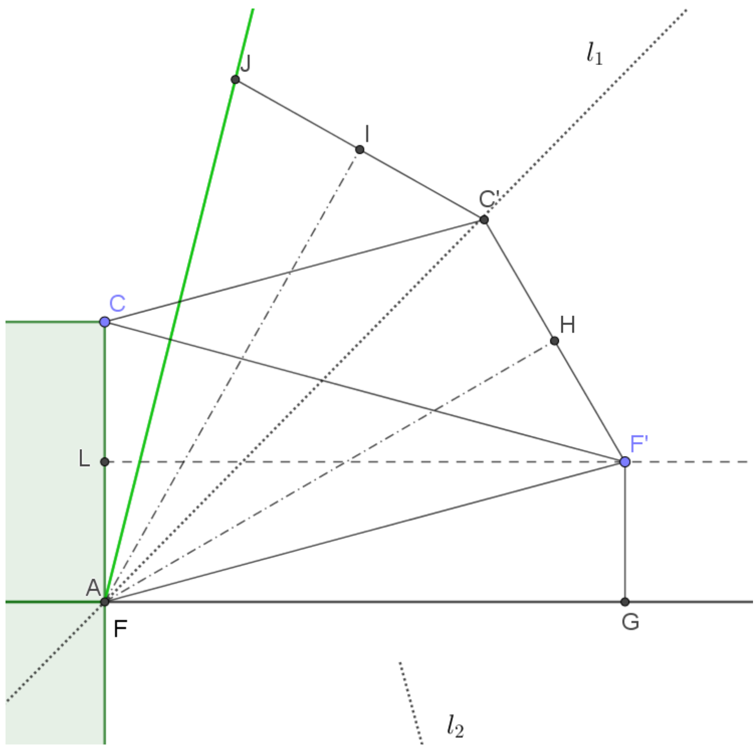
xii. Naredimo simetralo kota LAM.
Kot EAM je razdeljen na petine.

Izrek 7: Origami konstrukcija z dvojnim pregibom, ki je opisana v postopku 7, razdeli ostri kot na pet enakih delov.

Dokaz (glej sliki 8a in 8b):



Slika 8a: K dokazu izreka 7



Slika 8b: K dokazu izreka 7 - povečava

V poteku razdelitve kota na pet enakih delov (postopek 7) sta združeni dve origami konstrukciji, ena nam da pregib l_1, druga pregib l_2.

Pri pregibu l_1 velja: Točka J je tista točka na kraku AE, ki se preslika v točko F'. Daljici JC' in $C'F'$ sta enako dolgi. Prav tako sta enako dolgi daljici FJ in FF'.

Pri pregibu l_2 velja, da sta daljici FC in $F'C'$ sta enako dolgi, daljici FF' in CC' sta vzporedni. Štirikotnik $FF'C'C$ je enakokrak trapez.

Druge lastnosti, ki sledijo:

- Trikotnik CFF' je enakokrak, torej je $|FF'| = |CF'|$.
- Ker je štirikotnik $FF'C'C$ je enakokraki trapez, je tudi $|CF'| = |FC'|$.
- Po konstrukciji leži daljica FI na simetrali kota JAC'. Ker je trikotnik JAC' enakokrak, je daljica FI pravokotna na daljico $C'J$
- Točka H leži na razpolovišču daljice $F'C'$ (po konstrukciji). Ker je trikotnik $C'F'F$ enakokrak, je daljica FH pravokotna na daljico $F'C'$.
- Po konstrukciji pregiba l_2 je $|FC| = |F'C'|$ in seveda je $|FL| = |LC| = |HC'| = |HF'| = |F'G| = |C'I| = |IJ|$

Sklep: Trikotniki $GFF' = HFF' = HFC' = C'FI = JFI$ so skladni in zato so koti

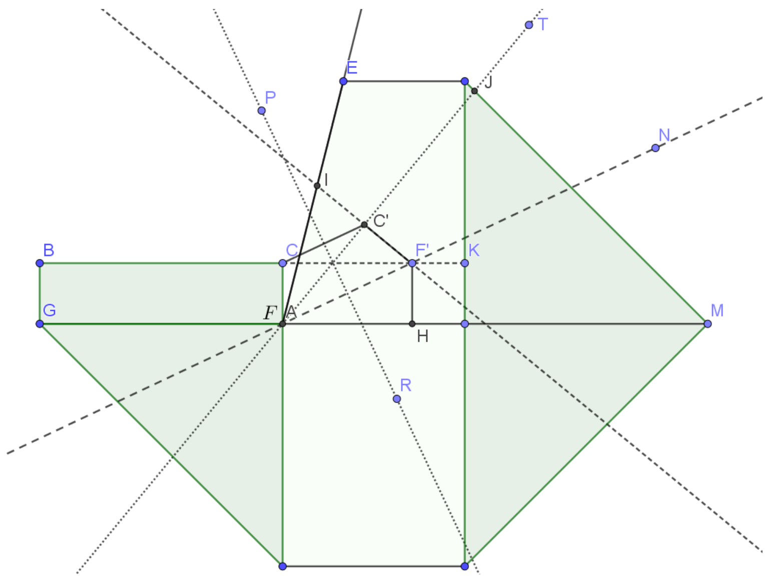
$\measuredangle GFF' = \measuredangle HFF' = \measuredangle HFC' = \measuredangle C'FI = \measuredangle JFI$ enaki med sabo.

q.e.d.

3.2. Prilagoditev Langove metode za trisekcijo kota

Postopek 8: Postopek trisekcije, prilagojen po Langovi metode quintisekcije, je enak postopku 7, le da je izpuščen vii. korak, v xi. koraku pa pregibamo na premico, nosilko daljice BC.

Izrek 8: Origami konstrukcija z dvojnim pregibom, ki je opisana v postopku 8, razdeli kot na tri enake dele.[2]



Slika 9: K dokazu trisekcije, prilagojene Langovi quintisekciji

Dokaz: Pri konstrukciji sta kombinirani dve origami konstrukciji. Vemo, da je $A = F$ (slika 9).

Pregib PR: Daljica FC se preslika v daljico $F'C'$, zato je štirikotnik $AF'C'C$ enakokrak trapez.

Pregib AT ohranja točko A, točki I in F' sta simetrični glede na točko C'. Točka I je točka na kraku AE, ki se je preslikala v F'.

Velja torej:

- $|FC| = |HF'|$, $|FC| = |F'C'|$, $|F'C'| = |C'I|$
- $|FI| = |FF'|$
- Daljica AC' je pravokotna na daljico $F'I$,
- Daljica AH je pravokotna na daljico HF'.

[2] Z dokazom izreka 8 smo po e-pošti seznanili dr. Hulla, ki je v odgovoru sporočil, da se mu zdi dokaz korekten.

Trikotniki AHF', $AC'F'$ in $AC'I$ so pravokotni in se ujemajo v dolžini dveh stranic, zato so skladni. Tako so koti $\measuredangle HAF', \measuredangle C'AF'$ in $\measuredangle C'AI$ skladni.

q.e.d.

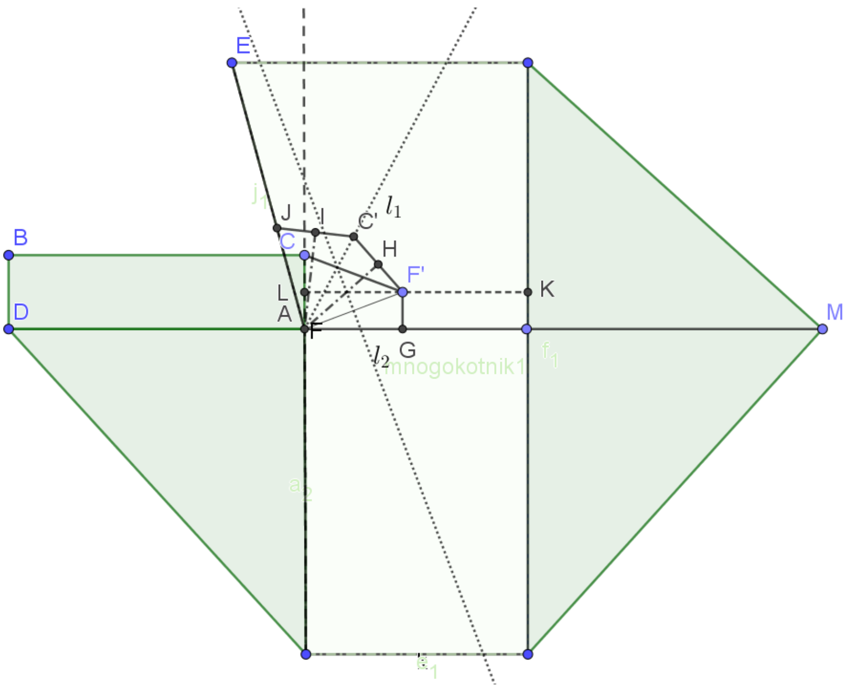
3.3. Langova razdelitev topega kota na pet enakih delov

Langovo metodo za delitev ostrega kota na pet enakih delov prilagodimo še za delitev topega kota na pet enakih delov.

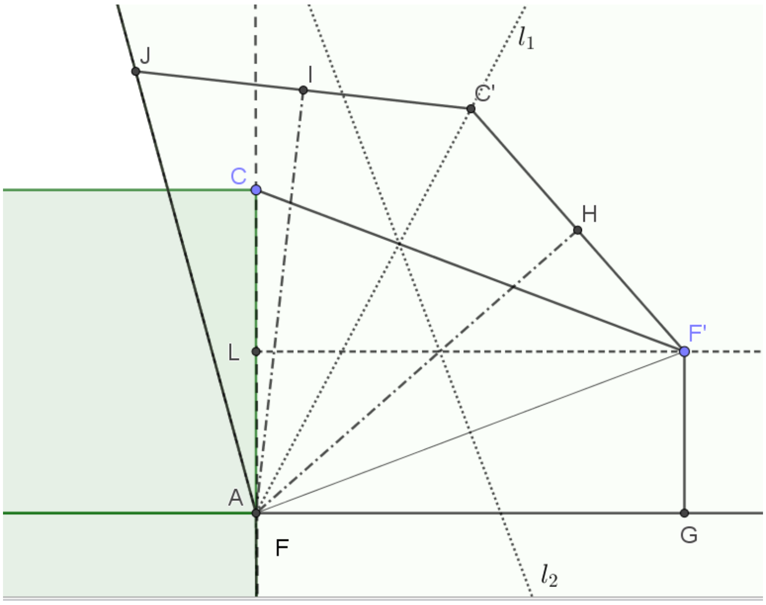
Postopek 9: Postopek je enak postopku 7 (Langova metoda delitve ostrega kota na pet enakih delov), le da izhodišče kota točko A postavimo nekoliko od levega roba traku (tako da je ves krak na traku, oddaljenost ni pomembna). V točki A naredimo pravokotni pregib na daljšo stranico traku. Končna situacija je prikazana na slikah 10a in 10b.

Ugotovili smo, da poteka dokaz enako kot dokaz izreka 7.

Pri konstrukciji moramo biti na ix. koraku iznajdljivi, saj lahko levi del kraka AE zavihamo tudi navzven.



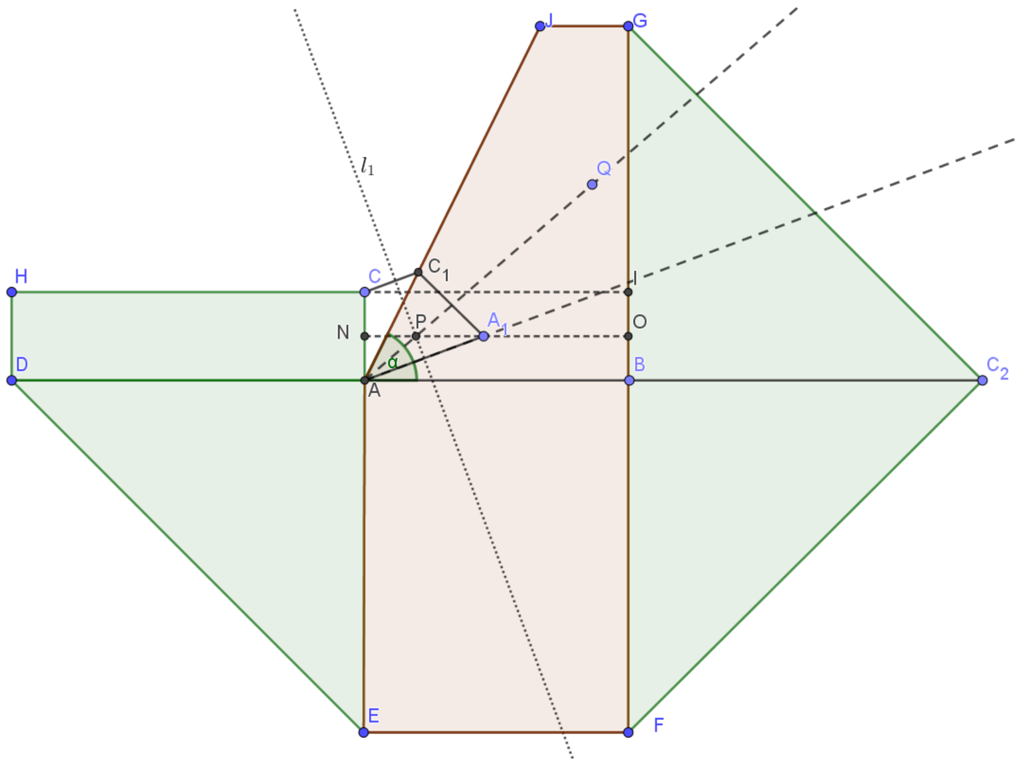
Slika 10a: Delitev topega kota na pet enakih delov



Slika 10b: Delitev topega kota na pet enakih delov – povečava osrednjega dela

3.4. Zanimivost: Od Langa do Abeja

Pri študiju Langove metode smo odkrili, da končna situacija pri Langovi quintisekciji zelo spominja na Abejevo trisekcijo ostrega kota (dve vzporednici). Podrobni pregled je pokazal (slika 11), da gre pravzaprav za originalno Abejevo metodo, ko uporabimo le en pregib. Pravokotnica na krak AB je daljica AC, do katere smo prišli »po dolgi poti«. Vrh kota A preslikamo na simetralo daljice AC, to je na daljico NO, točko C pa na krak AJ (preslikana točka je točka C_1). Kot $\measuredangle PAJ$ je tretjina kota α.



Slika 11: Od Langa do Abeja

4. Delitev kota na sedem enakih delov (septisekcija kota)

Zastavlja se vprašanje, kako je z delitvijo kota na sedem enakih delov. Če razvijemo $\cos 7x$ s funkcijo $\cos x$, dobimo:

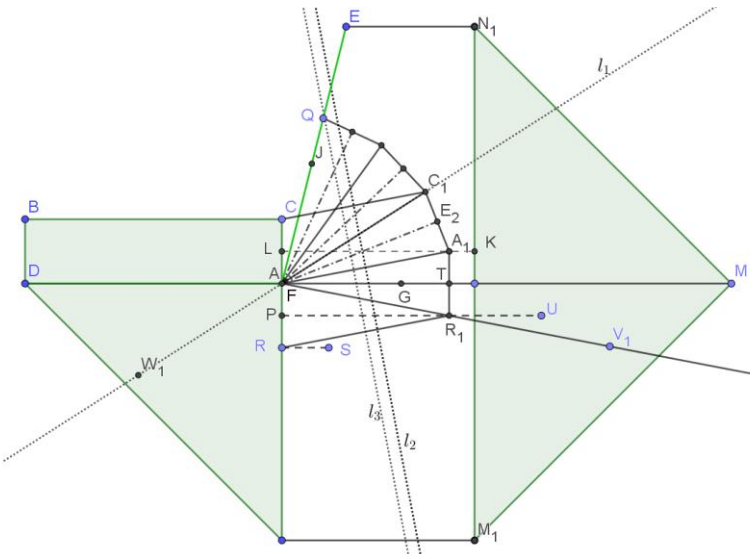
$$\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x$$

Ko v enačbo vstavimo $x = \frac{\pi}{21}$ in označimo $\cos\frac{\pi}{21} = t$, dobimo

$$128t^7 - 224t^5 + 112t^3 - 14t - 1 = 0$$

Dobili smo enačbo sedme stopnje, torej problem delitve kota na sedem enakih delov ni rešljiv z enojnimi pregibi. V dostopni literaturi nismo našli rešitve (to je origami postopka). Preizkusili smo s prilagoditvijo Langove metode, a nismo uspeli.

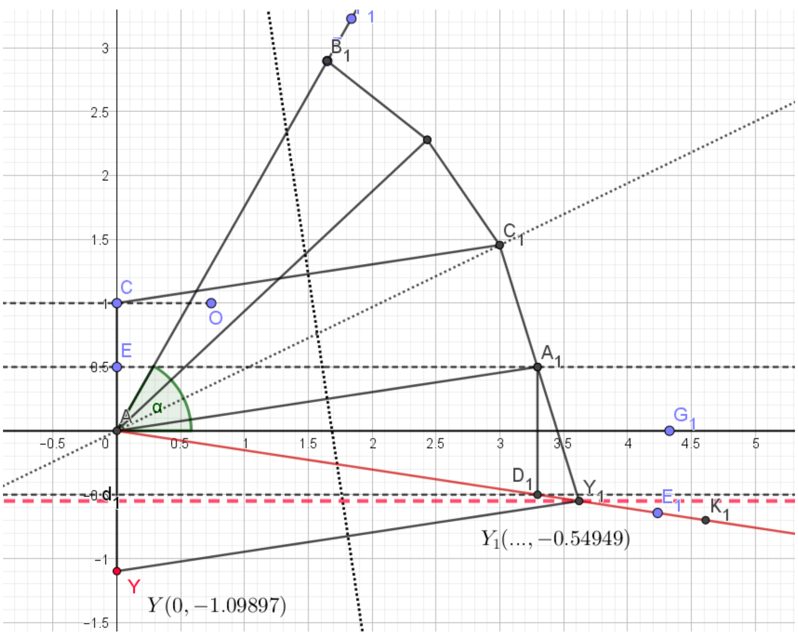
O septisekciji smo po e-pošti povprašali dr. Langa, ki je odgovoril, da sam uporablja približno delitev kota na sedem delov in da ne pozna natančne metode. Dr. Hull pa nam je poslal povezavo do akademskega članka *Septic equations are solvable by 2-fold origami* na povezavi: https://arxiv.org/pdf/1504.07090.pdf. V članku je teoretični dokaz, da je septisekcija možna z dvojnim pregibom.



Slika 12: Poskus septisekcije

Langovo idejo smo uporabili za poskus septisekcije. Do končne situacije (slika 12) je postopek enak kot pri Langovi quintisekciji (postopek 7). Ker je $7 = 8 - 1$, naredimo vzporednici PU in RS k nosilki kraka AM tako, da je $|AC| = |AR|$ in je točka P razpolovišče daljice AR. Nato naredimo dvojni pregib tako, da krak AE prepognemo na premico PU in hkrati točko R v točko R_1 na premico PU (točka R_1 je skupna) ter istočasno postavimo točko C na nastajajoči pregib l_1 (točka C_1). Točka R_1 ima tukaj enakovredno vlogo kot točka F' v izreku 7 (sliki 8a in 8b). Pregib l_2 je simetrala enakokrakega trapeza AA_1C_1C (slika 12), ki pa se ne ujema s simetralo daljice RR_1 (pregib l_3). Štirikotnik $RR_1\,A_1A$ je paralelogram. Tako gre v tem primeru za poskus septisekcije.

Iz opisanega sklepamo, da bi morala biti daljica PU nekoliko nižje, prav tako tudi točka R. Približna študija primera pri konkretnem kotu s pomočjo GeoGebre v koordinatnem sistemu (slika 13) je pokazala, da bi bila daljica PU približno za polovico desetine razdalje AC nižje (črtkana rdeča dajica na sliki 13), točka R pa tudi niže za desetino razdalje AC (nova točka je točka Y na sliki 13). Pri študiji smo upoštevali predpostavko, da mora biti štirikotnik YY_1C_1C na sliki 13 enakokrak trapez. Zato se tudi točka R_1 (na sliki 12) pomakne nekoliko niže in nekoliko desno (točka Y_1 na sliki 13). Poznana je delitev dolžine na n – enakih delov s pomočjo origami geometrije (glej na primer Hull 2021: 13), tako da bi bila ta približna konstrukcija tudi (sicer težko) izvedljiva.



Slika 13: Določanje približnih leg točke Y in vzporednice, na katero preslikujemo krak kota s pomočjo programa GeoGebra ($\alpha \doteq 60{,}34784^0$)

Koordinate točk Y in Y_1 smo izračunali tudi analitično (enota = $|AC|$) in dobili:

$$Y\left(0, \frac{\tan\frac{\alpha}{7} - \tan\frac{3\alpha}{7}}{2\tan\frac{\alpha}{7}}\right), \; Y_1\left(\frac{\tan\frac{3\alpha}{7} - \tan\frac{\alpha}{7}}{4\tan^2\frac{\alpha}{7}}, \frac{\tan\frac{\alpha}{7} - \tan\frac{3\alpha}{7}}{4\tan\frac{\alpha}{7}}\right).$$

Legi točke Y in spodnje vzporednice so odvisne od velikosti kota α, njihove koordinate niso konstantne. V konkretnem primeru s slike 13 je: $Y(0, -1.06592)$ in $Y_1\,(3.623558, -0.54938)$.

5. Zaključek

V nalogi smo predstavili tri izreke o trisekciji in enega o quintisekciji iz literature ter dodali in dokazali še štiri nove izreke o trisekciji. V postopku trisekcije topega kota po Abejevi metodi (izrek 2) smo pregib naredili tako, da smo hkrati dano točko preslikali na dano premico in drugo premico (krak kota) na drugo dano točko. Isto idejo smo uporabili tudi pri obeh Justinovih metodah. Nismo pa dokazali, ali te origami operacije izhajajo iz sedmih osnovnih origami operacij.

Predstavili smo Langovo delitev kota na pet enakih delov. Po njegovi metodi smo odkrili tudi trisekcijo in poskušali razdeliti kot na sedem enakih delov. Opisali smo približno metodo.

Izziv za možno nadaljevanje raziskovanja je odkriti metodo delitve kota na sedem enakih delov (septisekcija), pa mogoče še na kakšno drugo število enakih delov. Pričakujemo zapleten postopek, ki bo praktično težko izvedljiv. Domnevamo namreč, da se delitev na 11 enakih delov ne da narediti z dvojnima pregiboma in da bo potreben trojni pregib. To pa bo praktično težko izvedljivo. Ne glede na to pa je obravnavana tema zelo zanimiva in vsebuje veliko idej ter dokazov v okviru elementarne geometrije.

6. Viri in literatura

[1] Hull, T.: *ORIGAMETRY: Mathematical Methods in Paper Folding*, 2021, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Justin, J.: *Résolution Par Le Pliage de L'équation Du Troisième Degré Et Applications Géométriques*. Objavljeno v Huzita H (ed) L'Ouvert: Journal of the APMEP of Alsace and the IREM of Strasbourg, vol 42, 1986. [online] [citirano 8. 11. 2021] Dostopno na spletnem naslovu http://docplayer.fr/60440383-Resolution-par-le-pliage-de-l-equation-du-troisieme-degre-et-applications-geometriques.html

[3] Lang, R. J.: *Angle quintisection.* 2015. [online] [citirano 15. 10. 2021]

Dostopno na spletnem naslovu: https://langorigami.com/article/angle-quintisection/

[4] Maraž, S., Božič, T., Torkar, M.: *ORIGAMIKA: Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja,* ŠGV, Vipava, 2016, [online], [citirano 5. 10. 2021] Dostopno na naslovu: http://sgv.splet.arnes.si/files/2018/06/ORIGAMIKA-enakostranicnega-trikotnika-1.pdf

[5] Tavzes, M. ur.: *Veliki slovar tujk,* CZ, Ljubljana, 2002.

7. Slikovno kazalo

Slika 1: Prikaz trisekcije ostrega kota (Abe_ostri) 11
Slika 2: Metoda trisekcije Abe_ostri, prirejena za topi kot 13
Slika 3: Justinova metoda za topi kot (Justin_topi) 15
Slika 4: Prilagoditev metode Justin_topi za trisekcijo ostrega kota 17
Slika 5: Kopija originalne Justinove skice za trisekcijo ostrega kota (Vir: Justin 1986:4) 18
Slika 6: Prikaz Justinove metode Justin_ostri delitve ostrega kota na tri enake dele 18
Slika 7: Prilagoditev metode Justin_ostri za trisekcijo topega kota 20
Slika 8a: K dokazu izreka 7 26
Slika 8b: K dokazu izreka 7 - povečava 27
Slika 9: K dokazu trisekcije, prilagojene Langovi quintisekciji 28
Slika 10a: Delitev topega kota na pet enakih delov 29
Slika 10b: Delitev topega kota na pet enakih delov – povečava osrednjega dela 30
Slika 11: Od Langa do Abeja 31
Slika 12: Poskus septisekcije 32
Slika 13: Določanje približnih leg točke Y in vzporednice, na katero preslikujemo krak kota 33