# ALI JE UNIVERZALNOST MATEMATIKE DOKAZ ZA UNIVERZALNOST ČLOVEŠKEGA UMA?

FILOZOFIJA

RAZISKOVALNA NALOGA

MATEVŽ KASTELIC, 4. LETNIK

MENTOR: DR. JERNEJ PISK

LETO IZDELAVE: 2021/22

ŠKOFIJSKA KLASIČNA GIMNAZIJA, LJUBLJANA

## Kazalo vsebine



## Povzetek

Raziskovalna naloga s področja filozofije z naslovom »Ali je univerzalnost matematike dokaz za univerzalnost človeškega uma?« se spušča v povezavo med matematičnim obstojem in človeškim umom. Namen naloge je najti odgovor na izhodiščno vprašanje s pomočjo študijskega raziskovanja strokovne literature, analize ključnih pojmov ter logičnega sklepanja. Prva glavna dilema, ki jo zastavlja izhodiščno vprašanje, je dilema univerzalnosti matematike. Skozi raziskovalno nalogo se primerja dva različna pogleda na univerzalnost matematike (realistični in antirealistični) ter argumente obeh strani. Človeški um je v nalogo integriran preko povezave z odkritji v zgodnjem računalništvu, ter obrazložen v kontekstu Platonove filozofije. V razpravi so ključne točke povezave matematike in uma podobno razdelane in opredeljene. Iz postavljenih opredelitev je izpeljan sklep, ki zaradi empiričnih dokazov v matematiki in nepopolnosti matematičnih sistemov zavrne izhodiščno vprašanje, a postavi novo iztočnico za hipotetično nadaljnjo razpravo.

KLJUČNE BESEDE: matematika, realizem, antirealizem, univerzalnost, um

## Uvod

Posebnost matematike, v primerjavi z drugimi, ne zgolj panogami znanosti, temveč tudi družboslovnimi in humanističnimi aspekti znanja, je njena domnevna skrajna neodvisnost od prostora in časa (non spatio-temporalnost). Skoraj vse znanje, ki ga ima človeštvo, se v svojih teorijah močno opira na zelo konkretne elemente našega obstoja v konkretnem prostoru in času. Kar velja v na primer biologiji, fiziki, geografiji, družboslovju ipd. na planetu Zemlja, v našem vesolju leta 2022, ne bi nujno veljalo tudi pod drugačnimi prostorsko-časovnimi pogoji. Pojavlja pa se vprašanje, če to velja tudi za matematiko. V ta namen si predstavljajmo nek planet v neki drugi galaksiji v nekem drugem vesolju. Na tem planetu rastejo zelene rastline, vendar ne izvajajo procesa fotosinteze, drugačen je tudi marsikateri fizikalni zakon. Gre za lastnosti, za katere si lahko predstavljamo da so drugačne od zemeljskih in njihovo drugačnost opravičujemo z drugačno formiranostjo narave in sestavo tega konkretnega vesolja (gre torej za prostorsko odvisnost). Podobno je z (ne) odvisnostjo od časa, ki se jo med splošnimi ljudskimi množicami večkrat naslavlja, prej iz humanističnega (teološkega), kot iz strogo fizikalnega pogleda. Ideja, da je Bog (govorimo o monoteistični interpretaciji) zunaj časa, medtem ko smo ljudje od njega odvisni, se zdi abstraktna, vendar kljub vsemu možna in koherentna. Za nas torej veljajo časovni zakoni in smo od njih odvisni. Problem se pojavi pri matematiki in njeni odvisnosti od prostora in časa. Težko si predstavljamo, da na primer zakon seštevanja ne bi veljal tudi v drugem vesolju z drugačno prostorsko odvisnostjo, ali na drugem nivoju obstoja, z drugačno časovno (ne)odvisnostjo. Ideja o tem, da je 2+2 enako štiri se zdi nemogoča za zavrnitev in zagotovo veliko težja od idej o zelenih rastlinah brez fotosinteze in (ne)linearnosti časa. Iz tovrstnih primerov je jasno razvidno da je pri matematiki predpostavljena neodvisnost od prostora in časa, vendar ali je to že dokaz za njeno univerzalnost? Odgovor na to vprašanje je zagotovo preverjanje nujnost temeljenjih aksiomov in njihove univerzalnosti, kar je eden od ciljev naloge. Pri matematiki naj bi šlo za neodvisno spremenljivko obstoja. Vsak aspekt narave, tehnike in po nekaterih teorijah celo družbe je v svojem bistvu mogoče opisati s pomočjo matematike. Zaradi prisotnostih različnih matematičnih zapisov v naravi (npr: zlati rez, Fibonaccijevo zaporedje, eksponentno parjenje zajcev …) matematiko hitro označimo za univerzalno in vseprisotno. Gre za ideje s katerimi se raziskovalci matematike ukvarjajo že več tisoč let, začenši z Pitagorejci. Prej omenjene sisteme v naravi je, ob predpostavki znanja ki ga imamo danes, relativno lahko zreducirati na matematiko, vendar se na tej točki pojavi vprašanje, če je z matematiko res mogoče zapisati vse, in če ne, kaj to pomeni za univerzalnost same matematike. Problem se pojavi pri (naj)kompleksnejših strukturah, kot je človeški um in vprašanje njegove univerzalnosti. Že dejstvo, da se nekaterih, za filozofsko razmišljanje temeljnih konceptov, kot so pravičnost, lepota, dobrota (po merilih današnjega znanja) ne da opisati matematično, je v tem kontekstu problem in relevantno vprašanje. V končni fazi je prav človeški um tisti, ki je uspel razvozlati matematiko kot jezik narave in univerzalen zapis obstoja. Na tej točki se pojavi vprašanje. Ali zmožnost človeškega uma, da prepozna neodvisnost in domnevno univerzalnost matematike, kaže na domnevno univerzalnost človeškega uma in kaj le ta je. Ob tem se je potrebno vprašati tudi o obteženosti premise v uvodnem vprašanju, ki domneva, da je matematika univerzalna. Kar nas privede do vprašanja: ali je matematika zares univerzalna, ali pa je njena univerzalnost zgolj privid/poenostavitev, ki nam jo daje naš zavajajoč človeški um, iz česar sledi, da je le ta vse prej kot univerzalen. V izogib zmotam in predvsem prehitri opredelitvi matematike, si je vredno zastaviti vprašanje: Ali je univerzalnost matematike dokaz za univerzalnost človeškega uma?

# Teoretični del

## Uvod v problem univerzalnosti matematike

Pred iskanjem argumentov za dokaz oziroma ovržbo izhodiščnega vprašanja, je potrebno prvi del raziskave nameniti obteženosti premise v uvodnem vprašanju. Premisa sama po sebi sklepa, da je matematika univerzalna, vendar se na tej točki pojavi že prvi problem potreben dokazovanja. Sprva je potrebno opredeliti, kaj sploh pomeni univerzalnost matematike. Predpostavimo, da je univerzalnost dejstvo, da je kaj prisotno, veljavno na vseh področjih. To pomeni, da so matematični teoremi dokazljivi, aksiomi in entitete pa resnične tudi pri drugačnih pogojih tako v naravi kot družbi (npr. v paralelnem vesolju z drugačnimi naravnimi procesi in družbenimi relacijami, kot jih pozna trenutna znanost na planetu Zemlja). Skozi zgodovino raziskovanja matematike in filozofije, sta se oblikovali dve struji: realisti in antirealisti.[1]Teorija realistov temelji na Platonizmu in na splošno na starogrškem raziskovanju matematike. Gre za precej filozofski pristop do celotne matematike, ki označujejo matematične strukture (v začetku števila, nato pa tudi funkcije in enačbe) za neodvisne od opazovalca. Naj si gre za Platonove podobe v metafizičnem svetu, Pitagorov »pannumerični« pristop, ali pa še precej bolj skrajni matematični materializem, ki številke označi celo kot nekaj fizičnega (predmet). Glavni predstavniki realistične struje so Platon, Pascal in Gödel. Po Platonovi teoriji je matematika medij med fizičnim svetom in metafizičnim svetom idej. Ideje so univerzalne in prav tako je univerzalna matematika. Je metafizična in zato brezčasna in nespremenljiva. Matematika je hierarhično višje od človeka in človeškega uma (v kolikor človeka razumemo kot materijo, (raz)um pa kot zaporedje biološko-kemijskih procesov v možganih, živčevju,… , ki se v konkretnem aplicirajo kot sprejeta odločitev, izraženo čustvo,…) in vsega kar je fizično. Platonova ontologija veleva drugače. Predpostavi, da sta um in razum (umski, bivajoči del duše) vsaj sorodna matematiki, saj se z njima matematiko spoznava, vendar je slednja interpretacija večkrat ovržena s strani naravoslovne interpretacije uma (biološko-kemijski procesi), kar (raz)um konkretizira in s tem matematiko postavi »višje« na skali univerzalnega. Njena univerzalnost je njena temeljnost, saj se z njo na najbolj temeljen način lahko zapiše realnost sveta. Gre za (po Platonu) najbolj zapisljiv in merljiv približek metafizičnemu svetu. Sama po sebi matematika ni zgolj orodje, temveč svoja raven obstoja in dokazovanja, kar pomeni, da je neodvisna od vsega okoli nje Če se ljudje nikoli ne bi razvili, bi obstajala v do potankosti istem obsegu kot obstaja sedaj. Njeno univerzalnost in neodvisnost dokazujeta propada teorije logicizma, ki je želel temeljno znanje matematike prepisati v precej aplikativnejše znanje logike[2] (B. Russell) in Hilbertovega (David, 1862-1943) načrta razvoja matematike v okviru aksiomatične metode.[3] Odgovor na problem (ne)univerzalnosti matematike je pri prvih realistih precej jasen: matematika je univerzalna. Pri matematičnih antirealistih pa je obravnavan problem precej bolj večplasten. Gre za strujo v teoriji

[1] Stewart Shapiro,Phylosophy of Mathematics: Structure and Ontology, 1997, 22.

[2] Marc Colyvan, An introduction to the Philosophy of Mathematics, 2006, 14.

[3] Richard Zach, Hilbert's program, Stanford encyclopedia of Philosophy, 2003, 1.

matematike, ki zavrača Platonistični pogled na matematiko, da je matematika del višjega, metafizičnega sveta. Na matematiko gledajo kot na popis človeške interakcije s fizičnim svetom. Ne strinjajo se, da je možno matematiko na kakršen koli način prepisovati v filozofijo, kot jo je gojil Platon. Človek si lahko ustvari bazičen pogled le na stvari, s katerimi je lahko v stiku v fizičnem svetu. Iz tega nato dela bazične predpostavke. Po tej struji torej matematika zgolj v okviru poznanega statusa quo naredi sklepe, ki so pravilni v le določenem okolju. Glavni predstavniki te struje so Paul Benacerraf (1931- ), Hartry Field (1946- ) Bertrand Russell (1872-1970) in W. D. Hart (1943- ). V primerjavi s Platonom gre za precej mlajšo strujo, ki ima za svoje raziskovanje sveta na voljo več podatkov sodobnega znanja, zato si je pomembno ogledati njihovo stališče do matematike in njene univerzalnosti. Glavni gradnik njihove teorije je Benacerrafov in Fieldov epistemični problem,[4] ki je direktna kritika Platonove teorije. Problem pravi, da če osebek A verjame, da je matematična entiteta P, mora poznati P in dokaz P. Z drugimi besedami, gre za induktivno sklepanje, ki temelji na poznavanju vzorcev in ponavljanj. Gre za miselnost, da ima vsaka stvar v matematiki svoj dokaz in obrazložitev znotraj strogo matematičnega sveta. Procesi so med seboj povezani in vsaka entiteta potrebuje svoj neposreden dokaz. Gre za precej grob in tehničen pristop do problema matematike, ki ga Benacerraf in Field podpreta z opredelitvijo dokazov matematike, kot neposrednih implikacij matematičnih izrekov in nič drugega. Pristaši tovrstnega razmišljanja sklepajo iz preproste predpostavke. Če je pet krat šest enako trideset, to preprosto pomeni, da imamo pet sklopov (konkretnih, fizičnih stvari) po šest elementov. Skupaj je elementov trideset. Večji problem nastane pri iracionalnih ali imaginarnih številih, ki težje nakažejo konkretno vrednost. Zelo zanimiv fenomen so imaginarna števila, ki so bila, v času svojega odkritja/izumitve v srednjem veku, način za izpopolnjevanje nemogočega vzorca (kar kaže na osnoven realističen pristop), v zadnjem času pa so utemeljena predvsem znotraj precej bolj aplikativne in človeško izumljene elektrotehnike (kar kaže njihov namen pri opisovanju dogodkov konkretnega sveta in celo opisovanje stvari izven narave, torej človeških proizvodov, kar pa je precej antirealistično). Antirealisti ne sprejmejo Platona in poznavanja idej (matematike) v metafizičnem svetu, temveč so na strani spoznavanja v fizičnem svetu oziroma stika s stvarjo, ki je matematično opisana. Zaradi njihovih teorij v tej smeri, bi težko trdili, da imajo matematiko za popolnoma univerzalno, vendar ob enem bi bilo napačno trditi, da matematika ni vsaj do neke mere univerzalna, saj v sferi stvari s katerimi imamo kontakt še vseeno deluje kot dober popis obstoja in narave. V njihovem svetu si lahko obstoj sveta in matematiko interpretiramo ločeno (kar ne velja za realiste). Narava je delujoč stroj, matematika pa orodje, za obdelovanje specifično tega stroja. Vsekakor lahko trdimo, da je stroj nastal pred orodjem in da orodje brez tega stroja nima svojega namena. Lahko sklepamo, da brez stroja to orodje nikakor ne bi moglo obstajati, kakor tudi matematika ne bi mogla obstajati brez konkretnega sveta, ki ga opisuje. Kot »orodje« opisa sveta, mora torej matematika biti precej definirana in podkrepljena z dokazi. V celoti mora delovati kot zaporedje soslednjih funkcij, kot jih najdemo v računalniških programih. To nas privede nazaj do epistemičnega problema, ki sklepa iz predpostavke, da matematika je bolj orodne narave in ni metafizične, vselej prisotna entiteta, kot zagovarjajo realisti. Zanimivo je tudi njihovo stališče do logike, ki naj bi bila v nekaterih pogledih celo bolj temeljna od matematike. Slednji pogled izhaja že iz Fregejevega (Gottlob,

[4] Marc Colyvan, An introduction to the Philosophy of Mathematics, 2006, 18-19.

1848-1925) in Russlovega logicizma, ki skuša matematiko zreducirati na logiko.[5] Logicisti sklepajo iz predpostavke, da mora biti vsa matematika dokazljiva z logičnimi principi in metodami, kar ji vzame status absolutne »nedotakljive« bazičnosti in ob predpostavki, da so logični koncepti konstrukt ljudi, tudi univerzalnost. Po tej teoriji naj bi vsa matematika delovala po principu logičnih zaporedji in sosledij, s čimer bi se do neke mere strinjali tudi realisti. Razlika nastane v izvoru teh sosledji. Realisti temeljijo svojo teorijo na hierarhičnosti (začetek sosledji v matematiki je pri njih del metafizičnega in višjega sveta, del fizičnega pa je zgolj aplikacija na realni svet, naravo), medtem ko antirealisti zanikajo kakršnokoli hierarhijo in na sosledje gledajo zelo tehnično. Njihov model si je možno interpretirati kot stroj, ki ob pritisku na gumb (prva izvedena funkcija v sosledju) izvede ostala opravila. Zelo zanimiva je tudi vpeljava logike drugega reda. Gre za novo vrsto logike z veliko več izrazne moči in posledično manj matematične. Zapisi logike drugega reda vsebujejo celotne konkretne besede, ki se navezujejo na konkretne primere, kar pa si je v skladu s precej bazično in abstraktno matematiko precej kontradiktorno. Prav zaradi tega je po več različnih teorijah logika drugega reda bolj filozofska kot pa matematična smer in ni prava matematika. Slednje sklepanje pa nas zopet pripelje do problema (ne)univerzalnosti matematike. Če za rešitev nekega problema potrebujemo izraznost, se moramo odmakniti od osnovnih zapisov matematike, ki so bazični in sami po sebi neizrazni. Če se moramo torej za razrešitev nekega problema odmakniti od matematike, to pomeni, da ta ni univerzalna in da jo drugi modeli raziskovanja presegajo. Gre predvsem za razliko v načinu pogleda na samo matematiko: Platonova smer na matematiko gleda kot temelj in nekaj kar neoporečno obstaja, ne glede na človekov odnos z njo, medtem ko nova, antirealistična smer matematiko vidi kot konstrukt človeštva, kot orodje. Pri tovrstni razlagi gre še posebej daleč filozof W. D. Hart[6] označi filozofsko interpretacijo matematike kot »zločin nad intelektom« in kot »nerelevantno«, saj je v matematiki pomembna zgolj navezava teoremov na konkretne probleme. Hart poda primer, ki realistično dojemanje matematike postavi vzporedno z na primer prikazovanjem neraziskane in nerazumljene znanosti z religijo oz. nadnaravnim. Ravno časovna razlika med Hartom (1943-) in Platonom (cca. 428-348 pr. Kr) predstavlja obdobje v katerem je človeštvo ogromno napredovalo in znalo skozi napredek znanosti posledično določiti tudi izvor in namen matematike. Če je po Platonu spoznanje matematike za nekaj višjega dokaz visokega razuma, je po novodobnih antirealistih to dokaz pomankanja le tega. Prav zaradi časovne razlike med njimi pa Platon žal nikoli ni uspel priti v dialog z Hartom ali Benacerrafom, vendar je kljub temu med realisti in antirealisti prišlo do nekakšne oblike dialoga v obliki Gödlovih teoremov.

## Nov vpogled na pomen matematike

Avstrijski matematik Kurt Gödel (1906-1978) je s svojima izrekoma postavil vprašanje o dovršenosti ali popolnosti (completenes) matematike.[7] Za odkrivanje je ustvaril popolnoma nov, svoj sistem, ki ga sestavljajo kartice, kjer ima vsaka matematična operacija, zakon, aksiom, število in entiteta svojo lastno, novo, Gödlovo število. Nekatera Gödlova Števila,

[5] Bertrand Russell , Introduction to mathematical philosophy, 2010 (1919), 173-176.
[6] Marc Colyvan, An introduction to the Philosophy of Mathematics, 2006, 19.
[7] Marc Colyvan, An introduction to the Philosophy of Mathematics, 2006, 30-31.

namenjena števkam in osnovnejšim trditvam, so definirana, medtem, ko so druga, ki ponazarjajo dokaze in izreke izračunana po eksponentnem modelu, ki velja v Gödlovem sistemu. Število nič ima na primer svoje Gödlovo število, ki je šest. Dokaz, da je nič enako nič ima prav tako svoje Gödlovo število, ki je sestavljeno in znaša dvesto triinštirideset milijonov. Nekatera Gödlova števila so definirana tudi s črkami in drugimi simboli. V tem sistemu obstaja tudi matematična trditev, ki pravi, da dokaz, da obstaja Gödlovo število »g« ne obstaja. Problematika, kartončka s to trditvijo je, da je njegovo Gödlovo število g. Tako smo naenkrat dokazali g in ne g, kar pa nas pripelje do problema samoreference[8] in ugotovitve, da matematika ni dovršena. V dovršenem, pravilnem sistemu, je mogoče celotno shemo sistema dovesti iz dedukcije, kar pomeni, da se vsaka pravilna in dokazana stvar lahko dokaže preko osnovnih pravil (aksiomov v primeru matematike). Problem samoreference, ki se kaže v dokazljivosti g in ne g pa kaže na luknjo v osnovnem sistemu (z drugimi besedami, nekatere Gödlove entitete bi morale biti že same po sebi splošni aksiomi). Gre za princip, na katerega je opozoril že Russell ob svojem komentarju na teorijo množic.[9] Ob tem je dodal primer vasi kjer so vsi moški obriti. Tistih, ki se ne brijejo sami, brije brivec in tisti, ki jih brivec ne brije, se brijejo sami. Na tej točki se pojavi ključno vprašanje: Kdo brije brivca? Če se brije sam, se ne more briti, ker tistih, ki se brijejo sami brivec ne brije in obratno. Konkreten primer v teoriji množic se je rešil s podrobnejšo definicijo, vendar nam Russlov alegoričen primer da dober uvid v problem samoreference v matematiki. Že zaradi pojava tega problema bi lahko sklepali, da je s samim sistemom nekaj narobe in da bi kakorkoli postavljen sistem matematike, vselej privedel do problema samoreference. Če torej obstaja g in ne g lahko to pomeni dvoje: bodisi sitem ni dovršen, saj v njem obstajajo resnične trditve, ki ne morejo biti dokazane, bodisi je sistem nekonsistenten, kar nas privede do izhodiščne trditve in (ne)univerzalnosti matematike. Princip, zelo podoben Gödlovemu je »Igra življenja« Johna Conwaya.[10] V Conwayevi igri obstaja neskončna ravnina, ki je mrežasto razdeljena na celice kvadratne oblike. Vsaka celica je bodisi pobarvana (živa), bodisi črna (mrtva). Pobarvanost določene celice je odvisna od pobarvanosti celic, ki jo obkrožajo (vodoravno, horizontalno in diagonalno). To so njene sosedne celice. V tej igri obstaja tudi časovna faza imenovana generacija. Pravila igre so sledeča. Če ima neka živa celica nič, eno, ali več kot tri žive sosednje celice, bo ta celica v naslednji generaciji mrtva, če pa ima dve ali tri žive sosede bo živa. Vsaka mrtva celica, ki pa ima tri in samo tri žive sosede, pa bo v naslednji generaciji oživela. Igra se igra sama od sebe. Ob spontanem toku generacij se izmenjujejo žive in nežive celice. Strukture celic tako tvorijo različne vzorce, ki se iz generacije v generacijo spreminjajo. Nekateri po nekem času stagnirajo in se ustavijo, saj tako velevajo pravila, drugi ostanejo v zanki (imajo zgolj nekaj različnih faz premikanja), nekateri prosto potujejo po ravnini, spet drugi pa se nenehno širijo po ravnini in delijo na več različnih vzorcev. Sistem na prvi pogled deluje enovito in popolnoma razdelano ter predvsem popolno in dovršeno, vendar ob podrobnejšem pogledu na problem je razvidno, da kljub navidezni kontroli spreminjanja stanja celic, ni mogoče popolnoma razdelati njihove prihodnosti in končne postavitve. Glavni problem tega je, da imajo vzorci med seboj interakcije (nekateri namreč potujejo), kar ob stiku dveh ustvari čisto nov sistem. Algoritem, ki bi lahko v času realnih generacij določil usodo in premike celic

[8] Thomas Bolander, Selfreference, Stanford encyclopedia of Philosophy, 2017, 3.
[9] Bertrand Russell , Introduction to mathematical philosophy, 2010 (1919), 173-176.
[10] Siobian Roberts, The lasting lession of John Conway's game of life, NY times, 2020.

je ne mogoče definitivno določiti. Kljub temu, da je matematika non spatio-temporalna, Conwayeva igra vplete novo, drugačno dimenzijo časa, od katere matematičen proces, predstavljen v igri, ne more biti neodvisen. Kljub temu, da so bila na začetku igre, predstavljena jasna pravila, ki se ne spreminjajo, tudi prisotnost teh vodi v vzorec, ki ga ne moremo dokončno izpisati in opredeliti. To nas pripelje nazaj na Gödlov izrek o nepopolnosti matematike, saj se nam v igri pojavijo resnične izjave (prekrivanje vzorcev, spreminjanje načina njihovega širjenja), ki jih ne moremo dokazati (pravila so ista, ko se vzorec prekrije in spremeni in ko se ne). Možno je sicer, interpretaciji, ki jo ponuja Igra življenja, oporekati, češ, da v igri nastopa neodvisna spremenljivka (čas, generacije), ki povzroča spremembo in da je v končni fazi prav ta kriva, da ni mogoče definirati usode celic do konca, vendar si lahko »čas« v tem kontekstu interpretiramo kot problem samoreference (krožnega sklepanja), ki smo ga omenjali že pri Gödlu. Ta interpretacija se na prvi pogled morda zdi visokoleteča, vendar ob uvidu, da zaradi obeh stvari v nekem matematičnem modelu naletimo na ne končnost procesa in na njegovo domnevno nekonsistentnost, se v danem kontekstu zdi mogoča. Če je Conwayev model mogoče koristno uporabiti za interpretacijo Gödlovega, potem je v kontekstu filozofije matematike razvidno, da sami matematiki nekaj manjka do tega, da bi bila popolnoma dovršena. Na podlagi svojih odkrivanj je Gödel predpostavil, da matematika ni dovršena. Naslednje vprašanje je bilo vprašanje konsistentnosti, (da vselej veljajo iste stvari). Gödel navaja, da je konsistentnost matematike pod vprašajem in da se njene (ne)konsistentnosti ne da dokazati prav zaradi njene nepopolnosti. Za dokaz nečesa, kot je konsistentnost matematike bi bil potreben popoln in enoten sistem, ki pa ga matematika, zaradi svoje nepopolnosti ne more nuditi. Gre za drugi Gödlov izrek.[11] Na tej točki se zopet vračamo na izhodiščno vprašanje in na problem (ne)univerzalnosti matematike. V uvodu teoretičnega dela smo najprej razdelali univerzalnost matematike kot nujnost dokazljivosti matematičnih teoremov (ekvivalent za popolnost) in enotni ter brezpogojni pravilnosti (ekvivalent za konsistentnost). Na tej točki se pojavi dvom v univerzalnost matematike po Gödlu (realist), saj zaradi svojih odmikov od predpostavljenih pravilnosti, matematika ne more biti univerzalna. Zanimivo je tudi dejstvo, da je po Gödlovih odkritjih antirealizem v matematiki dobil vse več privržencev. Če postavimo njegovo raziskovanje v zgodovinski kontekst, moramo omeniti Gödlovega rivala Hilberta , ki je zagovarjal aksiomatično (antirealistično) metodo raziskovanja matematike. V svojih tezah je predpostavljal, da matematika je konsistentna in popolna, ter se jo zato da aksiomizirati. Njegov formalističen pristop je na matematiko, gledal kot na produkt človeka, kar jo že samo po sebi konkretizira in »deuniverzalizira«. Če je matematika preprosto indukcija ali celo interpretacija sveta in ne zakonitosti sveta dedukcija matematike, to že zanika njeno univerzalnost tudi po Hilbertu.

[11] Marc Colyvan, An introduction to the Philosophy of Mathematics, 2006, 30-31.

## Matematična univerzalnost in njena sodobna aplikacija

V kontekstu dvajsetih in tridesetih let prejšnjega stoletja smo torej dobili najboljši približek dialoga med novimi realisti in antirealisti, ki pa je pripeljal, do precej presenetljivih zaključkov. Kljub temu, da se razlikujejo v mnogih pogledih, si v kontekstu univerzalnosti matematike njihove sklepe lahko prej razlagamo kot ujemajoče se. Tako po interpretaciji enih, kot drugih matematika ni univerzalna in tudi ni konsistentna. Čeprav so zgodnji realisti poudarjali pomen dojemanja matematike kot enovitega in univerzalnega pojma, je Gödel s svojo, za svoj čas precej radikalno, ugotovitvijo premešal realistično interpretacijo matematike. Kljub temu pa naj bi matematika imela še eno lastnost, ki naj bi jo približala univerzalnosti in sicer, da izhaja iz univerzalne baze aksiomov (izvirnik: to be decidable). S tem se je podrobneje ukvarjal britanski matematik Alan Turing[12] (1912-1954), ki je, v skladu z napredkom tehnične in tehnološke znanosti svojega časa, zasnoval nov model. V osnovi gre za precej podoben princip kot pri igri življenja, le da imamo v tem primeru stroj. Turing predpostavi, da imamo končno dolg trak, razdeljen na kvadratke. V vsakem od kvadratkov je zapisana bodisi ničla, bodisi enka. Na trak priklopimo stroj, ki se lahko premika v levo ali desno po traku, spremeni ničle v enko in obratno, stoji na istem mestu, ali izvrši ukaz »stop«, ki pomeni, da je stroj izvršil vse ukaze in končal program. Vsak program je sestavljen iz logičnih zaporedji opravil tega stroja in ukazov, ki jih mora izvršiti (»input«) in iz ustavitve programa, ko je ta program izvršen (»output«). Obstaja tudi možnost, da se Turingov stroj ujame v zanko brez konca, v kateri obstane in nikoli ne izvrši funkcije stoj. Na tem mestu se postavi vprašanje, ali je možno napovedati, kdaj bo prišlo do situacije, ko se stroj ne bo ustavil in bo obstal v zanki. Če bi bilo možno zanko napovedati, bi bil to dokaz, da je sistem sestavljen in trditev, ki vselej držijo, torej aksiomov. Do tukaj sistem deluje zelo podoben tistemu iz Igre življenja, vendar Turing svojo raziskavo popelje še korak dlje. V sistem uvede nov stroj (poimenuje ga H), ki zna iz kombinacije ničel in enk napovedati, ali se bo prvotni Turingov stroj ujel v zanko, ali bo proces uspel dokončati. H ju nato zapove, da ob predpostavki, da stroj izvede funkcijo stop (dokonča proces), ustvari neskončno zanko in v primeru, da se prvotni stroj ujame v zanko, nemudoma izvede funkcijo stop. Ta stroj poimenuje kot H+. Vizualne interpretacije teh dveh strojev so večkrat takšne, da ohišje H+ pokriva celoten stroj H. Naslednje zaporedje števk, ki ga vstavimo v H+ ni zgolj zaporedje števk za H in prvotni stroj, temveč tudi »input« za H+. H mora tako predpostaviti, kaj bo naredil stroj H+. Problem nastane, ker bo H+ vselej naredil obratno od tega, kar bo storil H, torej bo imel vselej narobe. Gre za princip skoraj identičen Russlovemu brivcu. To torej pomeni, da stroj kot je H, ki bi določal, kaj bo naredil Turingov stroj, ne more obstajati. H je velika vzporednica aksiomom, ki se prav tako poskušajo obnašati kot H, vendar bodo zaradi problema samoreference (kot ga je že več let pred Turingom utemeljil Russell) vselej razpadli in se sesuli same vase. Nebaziranost matematike je prav tako velik problem za njeno univerzalnost. Zaradi tega matematika, ki velja za precej eksaktno in zaradi tega večkrat univerzalno vedo, izpade precej relativno in konkretno, prej kot univerzalno. Če poenostavimo nekaj prejšnjih primerov lahko rečemo, da je Hilbertova skupina formalistov, matematiko definirala kot zvezno, bijektivno funkcijo, kjer ima vsak neodvisni x (input) svoj odvisni y (output), Gödlova linija pa je na tej funkciji odkrila pole in asimptote, torej mesta, kjer ta funkcija, bodisi ne more biti definirana, bodisi nima nobenega »outputa«. Sledeče ugotovitve

[12] Stewart Shapiro, Phylosophy of Mathematics: Structure and Ontology, 1997, 195-196.

bi nas na prvi pogled lahko pripeljejo do sklepa, da matematika, niti kot interpetacija sveta s strani človeškega uma (antirealizem), niti kot metafizična entiteta, ki svet opisuje (realizem) ne more biti univerzalna, kar bi nas lahko pripeljalo v zaključek, da univerzalnost matematike ni dokaz za univerzalnost človeškega uma, ker matematika sploh ni univerzalna. Na tej točki se pojavljajo spet nova vprašanja o korelaciji matematike in človeškega uma, ki jih je v namen filozofskega izhodiščnega vprašanja pomembno raziskati.

## Matematika in um

V povezavi matematike in človeškega uma se je zagotovo smiselno vrniti na Turingov stroj, ki je osnova za prve (in vse) moderne računalnike. Stroj na traku z ničlami in enkami v teoriji lahko opravi delo vsakega računalnika in celo vsakega človeškega uma. V tem času so se začele pojavljati teorije o tem, da je človeški um sestavljen iz zaporednih ukazov in njihovih aplikacij, ki opravljajo življenjske funkcije (v kontekstu matematike, izvršujejo programe). Naslednja aplikacija tega problema je bila ideja o umetni inteligenci. Gre sicer za precej konkretno-tehničen problem, vendar njegov temelj nam lahko pri raziskovanju izhodiščnega vprašanja precej pomaga, saj se ukvarja z vsebnostjo matematike v človeškem umu. Turing svoje raziskovanje povezave uma in matematike popelje še dlje. Zasnuje tako imenovan Turingov test. Pri testu sodeluje izpraševalec, ki je izoliran od dveh izprašancev, od katerih je eden biološki človek, drugi pa umetna inteligenca (U.I.). Namen testa je, da izpraševalec ugotovi, kdo je umetna inteligenca in kdo ne, pri čemer se U.I. pretvarja, da je človek in skuša izpraševalca »zavesti«. V kolikor izpraševalec umetne inteligence ne spozna za robota in predpostavi, da je človek, U.I. naredi test. Vemo, da je (raz)um umetne inteligence popolnoma »umeten«, torej sprogramiran in narejen po matematičnih principih. Ob uspešnem opravljenem testu ugotovimo tudi, da je (ob predpostavki, da je izpraševalec zadovoljivo izpraševal) umetni um U.I kompetenten in primerljiv s človeškim. Turingov test, ki ga je v času od njegovega nastanka (1950), do danes (2022) opravilo že nekaj umetnih inteligenc je dokaz, da korelacija med matematiko in delovanjem človeškega (raz)uma je. Vendar na tej točki se pojavi nova dilema, ki se sprašuje če umetna inteligenca sploh razume racionalno, ali zgolj sledi ukazom in še bolj radikalna misel: ali človek zares razume, ali tudi on zgolj sledi ukazom. Gre za vprašanje zavesti. Naslednje smiselno vprašanje na tej točki je zagotovo ali se U.I. zaveda svojega početja (ljudje domnevno se) in kako se (ne)zavedanje (ki deluje na umskem področju) povezuje z matematiko. Turingovi koncepti o delovanju strojev so se v njegovem času in času po njem vse bolj približevali konceptu uma in zavesti. Najbolj poznan »plod« Turingovih teorij na tem področju je kitajska soba Johna Searla.[13] V osnovi gre za podoen princip problemu ustavljanja Turingovih strojev H in H+, vendar se kitajska soba osredotoča bolj na koncept razmišljanja. V neki sobi z dvema luknjama je zaprt nek človek, ki ne zna in ne razume kitajsko. Ob sebi ima le priročnik, kjer so napisani (recimo da angleški) prevodi vseh pismenk, torej zlogi. Skozi eno luknjo k njemu stalno prihajajo zaporedja pismenk. Človek v sobi z uporabo priročnika pismenke prepiše v angleščino in »prevod« pošlje ven skozi drugo luknjo. Nekomu zunanjemu se na prvi pogled te sobe zdi, da notri sedi vrhunski prevajalec, ki obvlada in razume tako kitajščino, kot angleščino, vendar temu ni tako. Ne samo, da človek

[13] David Cole, The Chinise room argument, Stanford encyclopedia of Philosophy, 2020.

notri ne zna kitajsko, teoretično niti znanja angleščine ne potrebuje. Da bi nalogo uspešno opravil, zgolj sledi navodilom. Ali je tako tudi z (umetno) inteligenco? Z drugimi besedami, ali robot s katerim igramo šah, sploh ve, kaj je šah. Ali mi sploh vemo kaj je šah? Mogoče poznamo koncept in pravila šaha, ga znamo povezati s šahovnico, figurami in premiki, vendar ali resnično vemo, kaj šah je, ali je odvisen ali neodvisen od figur (da se ga namreč igrati tudi brez figur). Na tej točki pridemo do nove dileme: na kakšen način šah (ali karkoli drugega) sploh obstaja. Vprašanja na kakšen način obstaja matematika smo se že dotaknili v prvem delu teoretičnega dela, vendar se je smiselno vrniti na obstoj matematike, kot je povezan s človeškim umom. Kako um sploh obstaja? V kontekstu povezave matematike in človeškega razmišljanja ter načinov njunih obstojev, ali to pomeni, da je vse znanje človeka odvisno od simuliranih, matematičnih procesov narave (oziroma po formalistično, da so procesi, ki jih opredeljujemo kot matematiko, odvisni od našega razuma, ki je v tem primeru »causa sui«), ki so, kot sta dokazala Gödel in Turing še nepopolni, brez temeljev in verjetno nekonsistentni. Kam to postavi človeški um? Po tej teoriji ne more biti univerzalen, njegova pravilnost pa je precej vprašljiva, kar se hitro lahko vidi v konkretnih primerih. Filozof E. J. Lowe (1950-2014) v svojem delu Uvod v filozofijo uma predstavi sledeč primer:[14] V nekem mestu je v pričo očividca taksi zbil nekega človeka. Znano je, da je v tem mestu petinosemdeset odstotkov vseh taksijev zelenih in petnajst modrih. Očividec poroča, da je bil taksi, ki je zakrivil nesrečo moder. Očividec je pri svoji oceni pravilen v osemdesetih odstotkih. Skupina filozofov in psihologov je nato sledeč problem predstavila skupini ljudi in jih vprašala kakšna je verjetnost, da je kriv taksi modre barve. Večina ljudi je odgovorila, da je verjetnost osemdeset odstotna, torej enaka sposobnosti očividca, vendar matematičen izračun verjetnosti kaže, da je verjetnost, da je taksi moder zgolj štiriinštirideset odstotna. Zakaj je prišlo do take razlike? Sklep tega poizkusa je, da so bili izprašanci preveč »zaupljivi« do očividca. To nas pripelje do sklepa, da pri sklepanju človeško razmišljanje večkrat ustvari lažne uteži in zaupanje, ki se kažejo kot napačnost deduktivnega sklepanja in nagonski lastnosti človeškega uma. Težko bi bilo reči, da so ti obstranski dejavniki odmik od »človeka-Turingovega stroja«, temveč zgolj dokaz, da je tudi človek ne napovedljiv. Različni ljudje so v tem konkretnem primeru podali različno razmišljanje in različne odgovore, ki jih ni bilo mogoče napovedati. V tem so bili zelo podobni Turingovemu stroju in Igri življenja. Daljša razprava o univerzalnosti matematike, nas torej pripelje, do precej krajšega sklepa o univerzalnosti in pomenu človeškega uma v povezavi z njo. Če človeško razmišljanje ni pogojeno z matematiko, temveč obratno, kot navajajo antirealisti, je torej nepopolnost matematike dokaz nepopolnosti in zmotljivosti človeškega uma. Antirealistična interpretacija predvidi, da človeški um nima matematične baze, temveč je baziran na nečem drugim (kar že diši po teološkem vprašanju), ali pa da sploh ni baziran. Napake v njem (kot jih kaže na primer  E. J. Lowe) pa so po tem takem že sestavni del človeškega razmišljanja, ki torej zgubi veliko svoje vrednosti in je pokvarjeno že v osnovi, saj se moti. Apologija zadnje trditve hitro lahko postane precej teološka in preprosto zamenja matematično bazo uma z neko drugo metafizično bazo vendar na tej točki lahko nastane začaran krog. Vsaka baza na katero bo postavljen človeški um, bo po tem takem izprašana in ovržena kot produkt človeškega uma, kot je bila matematika. Vsaka stvar, na kateri naj bi temeljilo človeško razmišljanje je zgolj »senca v votlini« (Platon) ali pa matrica (znanstveno

[14] E. J. Lowe, An introduction to the philosophy of mind, 2000, 193-202.

fantastični film Matrica). Vendar problem tega je, ker se bo vsak »prihod iz jame« v kontekstu človeškega razmišljanja začel z novo jamo, iz katere bo prav tako potrebno priti. Ironično je, da sedaj na antirealistični strani prihajamo da močnega pojava samoreference. Baziranje človeškega uma bi celo lahko primerjali s strojema H in H+, saj bo vsak končen produkt takšnega procesa vselej napačen v širšem kontekstu in taka stroja ne moreta obstajati. Zgornji paradoks, ki se pojavi pri opredeljevanju matematike je izpostavil že Blaise Pascal,[15] ki je odkril problem krožnega sklepanja v kontekstu razumskega baziranja entitet kot je matematika. Pascal se v problem spusti iz teološkega vidika in v osredje postavi religijo. Izpostavi, da je utemeljevanje tovrstnega obstoja (abstraktnih pojmov) z razumom precej nedovršeno in da je treba verovati (verjeti v ne teološkem kontekstu). Kljub temu, da se Pascal navezuje na Boga, bi lahko enako veljalo tudi za um. Treba je verjeti v to, da um je, da je razlog naše zavesti in da deluje na nek način. Kakšna je potem narava uma in kakšen je način na katerega deluje? Odgovor je potem očiten: Človeški um je prost, neodvisen od vsega. Na videz osvobodilna misel, vendar nas vrne nazaj na ugotovitev, da je že v svoji osnovi pokvarjen in se moti zaradi človeškega dodajanja dejavnikov in njihove interpretacije. Tudi njegovo delovanje je potemtakem vprašljivo, ker očitno ne deluje na način, ki bi omogočil resničen uvid v svet, temveč omogoči popačenega, česar dokaz je nepravilnost npr. matematike. Um je tako neuniverzalen, zmotljiv, nepopravljiv in predvsem osamljen od resnice, ki lahko prosto potuje mimo našega uma, pa je nikoli ne bomo uspeli zaznati. Univerzalnost vseh entitet v danem kontekstu ne obstaja. Zamenja jo relativističen pogled tako na matematiko, kot na človeški um in celo resničnost. Utemeljitev antirealizma zelo soupada z pojavom postmodernizma, ki prav tako zavrača absolutnost na kateremkoli področju in hierarhijo. Vse to se lahko aplicira tudi na matematiko in na človeški um, ki se tako zdita precej »votla« in neoporečno relativna in univerzalna, kar je glede na poznavanje metode matematike precej radikalna misel. Antirealistična interpretacija uma sovpada z jogurtom, ki ga kupiš, vendar takoj za tem ugotoviš, da je splesnel. Na drugi strani, so realisti, ki raz(um) vsaj delno bazirajo na matematiki. Njihov sklep torej eliminira problem mimo potujoče resnice, saj sprejme usmerjenost narave kot njegovo bazo, vendar zmotljivost, kot je dokazal Gödel, še vedno obstaja. Pojavi se tudi nov problem, o katerem govori Searle v Kitajski sobi, problem pomankanja lastne iniciative. Če je naš um baziran na matematiki, kaj mu preprečuje, da ni zgolj matematika (kot je razvidno na primeru s šahom)? V tem primeru torej ni svoboden in je že sam po sebi zmota, je odvisen in zgolj posledica nekih (zmotljivih) matematičnih konceptov. Postal je orodje in nikakor ni univerzalen. Tako (novo) realistična, kot antirealistična interpretacija postavita človeški um nekje na spekter neuniverzalnega, ob matematiko. Zaključki obeh struj zvenijo bodisi deterministično, bodisi nihilistično, vselej pa precej melanholično. Na podlagi dokazov iz obeh strani, predvsem pa realistične in konkretno psihološke (Lowe), je človeški um razvrednoten. Vendar je za postavitev takega sklepa prezgodaj, saj ima človeški um še druge razsežnosti, ki jih je potrebno omeniti.

[15] Blaise Pascal, Misli, 1999, 282.

## Empirični del

Raziskovalna metoda v humanistiki na splošno, kot tudi v filozofiji še prav posebej, sestavljata analiza pojmov in racionalna argumentacija. Humanistika metode empiričnega merjenja in računanja ne uporablja, ker redukcija na t.i. naravoslovno-družboslovno znanstveno metodo ne more zajeti kompleksnosti obravnavanih konceptov, pojmov in idej, ki so predmet humanističnih raziskav. Zato je celoten raziskovalni del naloge predstavljen v teoretičnem delu in razpravi.

## Rezultati

Raziskovalna metoda v humanistiki na splošno, kot tudi v filozofiji še prav posebej, sestavljata analiza pojmov in racionalna argumentacija. Humanistika metode empiričnega merjenja in računanja ne uporablja, ker redukcija na t.i. naravoslovno-družboslovno znanstveno metodo ne more zajeti kompleksnosti obravnavanih konceptov, pojmov in idej, ki so predmet humanističnih raziskav. Zato je celoten raziskovalni del naloge predstavljen v teoretičnem delu in razpravi.

## Razprava

Zelo zanimivo je, da univerzalnost matematike in človeškega uma, ki je bila v času polpretekle zgodovine in precejšnjega relativnega tehnološkega napredka bolj zavrnjena kod podprta, dobi svojo najkonkretnejšo apologijo že dva tisoč štiristo let prej. Izhaja iz Platonove interpretacija matematike, ki je utemeljitev matematičnega realizma. Matematika je postavljena v metafizičen svet in je neodvisna od vsega. Možno jo je le raziskati in ne izumiti. Gre za pred gödlovsko interpretacijo realistične struje matematike. O pomenu Matematike za Platona sem v tej raziskavi že pisal, a je pomembno, da se jo omeni še enkrat, saj je močno povezana s Platonovim dojemanjem uma. Kot matematiko, tudi um Platon uvršča v metafizični svet, ki naj bi bil popoln.[16] Platon ga v svoji Državi (tako kot fizični svet) razdeli na dva dela: na epistemološkega in na ontološkega. V epistemološki del postavi um in razum, v ontološki pa pojme (matematika) in ideje. Za entitete metafizičnega sveta je značilno, da so bivajoče, nespremenljive, umljive (dojema se jih lahko samo z (raz)umom) in breztelesne. Prav zaradi teh lastnosti je Platonov metafizični svet univerzalen in popoln. Matematika je kot pojem del njega, zato tudi zanjo veljata omenjeni predpostavki. in iz njih vse nastane. Matematiko (števila), skupaj z razumom, ki matematiko lahko dojame Platon spoznava kot nefizične entitete in so tako del metafizičnega sveta. Kar ni metafizično ne spada v bivajoče in tako ni del odločanja z umom in prav tako ni v korelaciji z metafizičnimi pojmi, kot je matematika. Na tej točki je možno razdelati tudi problem aplikativne filozofije uma in Lowovega poizkusa s Taksiji. Neracionalne odločitve izprašancev v tistem primeru Platon ne označi kot delovanje uma, temveč kot pomankanja delovanja le tega (delujeta »polbivajoči« metodi spoznavanja, ki sta domnevanje in verjetje, ki pa v svetu dojemanja matematike »nimata moči«). Dejavniki, ki jih ljudje po nepotrebnem uvrščamo v takšna razmišljanja, so dokaz, da razmišljamo drugače kot z (raz)umom. Tudi um in razum se razlikujeta. Med tem, ko je razum namenjen sestavljanju in povezovanju vzorcev ter razumevanju sveta okoli nas, je um sam po sebi bolj celosten in prepoznava gotove resnice, ki je umu znana v naprej.[17] Um določa, ne zgolj naše sposobnosti povezovanja stvari okoli nas, temveč deluje tudi na področju morale in človečnosti. Sam po sebi je, po Platonovi teoriji, bolj bivajoč od razuma in vselej ostaja enak.[18] Če bi um prepisali na papir, ne bi bil ustvarjen iz izrekov in dokazov ali vprašanj in odgovorov (kot bi bil razum), temveč zgolj iz trdilnih stavkov. V svoji osnovi deluje zelo aksiomatično, vendar utemeljeno in dokazljivo. Zaradi svoje visoke hierarhičnosti si tudi težko zamislimo protiumno dejanje, medtem ko si protirazumno dejanje lahko, na primer, da pojemo kos torte preveč. Kar zadeva matematike, je tukaj razvidno, da njeno spoznavanje izhaja iz razuma, vendar predstava o njenih konceptih in celostnosti pa iz uma. Razum torej temelji na logičnih sklepanjih (na primer, če je a manjše od b in b manjše od c, je potem a manjše od ca tej točki se zopet pojavi Gödlov in Turingov problem, ki kaže na nepopolnost matematike. Kako je lahko še vseeno nepravilna, če pa je celostno vpletena v um? Na tej točki je pomembno omeniti Platonovo analogijo sonca iz njegove Države. Platon predstavi sonce kot prispodobo za tako imenovano idejo dobrega, zaradi katere lahko spoznamo druge stvari, prav tako kot zaradi sonca vidimo svet okoli sebe. Vsi predmeti, ki jih sonce osvetljuje so bivajoče stvari, tudi pojmi (sem

[16] Platon, Država, 2002, 109-111.
[17] Brian Duignan, Immanuel Kant, Britannica, 2022.
[18] Platon, Država, 2002, 521d.

uvrščamo matematiko). Oči naj bi predstavljale našo dušo, sposobnost vida pa je razum, zaradi katerega lahko vidimo osvetljene objekte. Glavni zaplet se pojavi pri poznavanju najvišje ideje po Platonu, torej ideje dobrega, torej sonca, kot njene fizične prispodobe sonce, ne samo da vidimo, temveč vidimo tudi svetlobo, ki jo oddaja in se odbija od predmetov. Za spoznavanje te ideje je v metafizičnem svetu potreben um, zaradi katerega lahko sploh spoznamo učinke ideje dobrega, oziroma zaradi katerega lahko vidimo sonce. Če se na tej točki vrnemo h Gödlu in Turingu vidimo, da bi bil svet tam drugačen. V njunem svetu velja predpostavka, da se da razrešiti kompleksne pojme kot je matematika s sistemom pravil, logiko in dedukcijo (torej z razumom, čisti um je umaknjen). V njunem svetu sonce ne sveti, oziroma se tega ne more zaznati, svetlobo pa oddajajo oči, oziroma telo, skupaj s tem, da ima sposobnost vida; (podobno Platonovi takratni teoriji in zmoti o biološkem vidu). V njunem svetu, bi bilo sicer možno videti stvari (spoznavati pojme, tudi matematiko), vendar oči nikoli ne bi razsvetljevale naenkrat celotnega sveta, temveč zgolj vidni kot, poleg tega, bi se pa, ob predpostavki, da se v njih ujame delček prahu kvaliteta vida in svetlobe zelo zmanjšala. Gödlovska smer izpade nekoliko antropocentrično in »raciocentrično«, med tem ko Platonova ideja dovoljuje prehod nad razum pri spoznavanju konceptov, med katerimi je matematika. Iz analogije sonca in njene gödlovske predelave je mogoče razvideti pomen uma in njegove lastnosti. Dopušča pogled v celostno sliko obstoja, se ne spreminja in je zaradi svoje celostnosti vselej konsistenten. Na tej točki smo dobili prvo popolnoma univerzalno entiteto v razpravi in to je (Platonski) um, ki je neodvisen od napak matematike in problemov, kot je koncept samoreference, saj ne potrebuje dokazov, ki bi lahko v take probleme vodili.

Glede na raziskano sem mnenja, da na tej točki že lahko domnevamo, da univerzalnost matematike ni dokaz za univerzalnost človeškega uma, kot ga dojemata Platon, Kant in iz teološkega vidika tudi Pascal, saj slednji je univerzalen, prva pa ne. Vendar bi si bilo smiselno razložiti še nekaj zanimivih iztočnic, ki so se pojavile skozi raziskovanje. Kot prvo sem zaznal, da so si logične ovržbe Hilbertovih predpostavk matematike (popolnost, konsistentnost in utemeljenost s aksiomi) precej podobne. Pri vseh naletimo na takšen ali drugačen pojav problema samoreference. Ta singularnost problematike matematike je lahko sama po sebi precej zgovorna. Če smo, kot navajajo izpostavljene pomanjkljivosti, dobili nepopolno, neutemeljeno in zgolj vprašljivo konsistentno matematiko, ali ji lahko sploh še zaupamo. Po drugi strani lahko že z osnovnim opazovanjem narave ugotovimo, da veliko sveta (cel svet) temelji na pravilnih matematičnih zakonitostih. Kaj naj sedaj to pomeni? V najhujšem primeru bi to pomenilo, da svet in narava delujeta na nepravilnem sistemu in do strašljivega zaključka, da svet okoli nas v osnovi temelji na nepravilnosti. Vendar ali bi lahko domnevno kompleksna struktura, kot je svet, delovala, če bi bila utemeljena na napaki. Ali se ne bi te napake, ki jih matematika več kot očitno ima nekje pojavile in skrunile delovanje sveta, ter porušile na njem stoječe komplekse. Možno je razmišljati v smeri, da je svet v katerem živimo že posledica napake in da je že napačen, ter takega s pravilno matematiko sploh ne poznamo in si ga ne moremo zamišljati. Ta teorija je sicer smiselna na prvi pogled, vendar ob misli, da je že v »matematično pokvarjenem svetu« toliko stvari postavljenih na »pravilnostih« matematike, zgubi kredibilnost. Kako lahko torej toliko sveta stoji na matematiki? Tukaj v igro pridejo podobnosti pri napakah matematike. Od tukaj naprej je najbolj logično izpostaviti, da svet sicer temelji na nekem redu, za katerega pa ni nujno, da je matematičen v pomenu besede, kot si jo danes razlagamo ljudje. Veliko tega reda je sicer mogoče relativno dobro matematično opisati. Do pojavov nepopolnosti matematike in ostalih predmetov pač ne pride, ker so bili »odpravljeni« na nek drugačen način, oziroma so bili že ustvarjeni na način, da do samoreference ni bilo mogoče priti. Matematiko se raziskuje z razumom, temelji na vzorcih in povezavah določenih zakonitosti, ki se lahko izkažejo za napačne. Obstaja možnost, da svet deluje na drugačnem redu, prepoznavnemu zgolj čistemu umu in ne didaktičnemu razumu. Dejstvo, da se vsak problem matematike konča z isto napako, definitivno kaže na to, da v igri mogoče ni neke velike luknje, ki opozarja na napako, temveč zgolj v danih okoliščinah nepojasnljiv koncept, ki je rešljiv samo s pomočjo neke druge sfere. V namen razumevanja si lahko predstavljamo nalogo, kjer moramo v enodimenzionalnem prostoru narisati sliko kvadrata. Gre za nerešljiv problem. Kakorkoli se ga bomo poskušali lotevati bomo vselej prišli do iste težave in nezmožnosti končanja naloge. Problem bo mogoč za reševanje šele takrat, ko bo dana možnost, da se kvadrat lahko narišemo v dvo ali več dimenzionalnem prostoru. Pri tem je pomembno poudariti, da je bilo kvadrat vselej mogoče narisati, vendar se zaradi omejitve na pogoje tega sprva nismo uspeli ustrezno lotiti. Lahko predpostavimo, da gre pri napakah matematike za podobno stvar. Če v zakup vzamemo Platonovo interpretacijo uma in njegovo razlikovanje od razuma, se zdi ta koncept precej mogoč. Zopet smo se vrnili na začetek. Dobili smo matematični red, ki je univerzalen in popolnoma pravilen, vendar zraven dokazali, da to ni matematika, ki jo poznamo in na podlagi katere domnevamo, da je današnji svet sestavljen. Na tej točki je smiselno spet omeniti pesek v očeh gledajočega iz novega opisa analogije o soncu. Kaj pa če imajo v resnici prav formalisti in so napake v matematiki zgolj posledica precej nedokončane in površne interpretacije matematike s strani človeka. V tem primeru Hilbertove predpostavke o matematiki držijo, vendar je malo matematike v resnici spoznane. Vendar je v tem primeru potrebno vzeti v zakup, da je tudi človeštvo veliko doseglo s pomočjo poznavanja matematike (lep primer tega je računalništvo) in če bi bila človeška interpretacija matematike napačna, bi teh dosežkov ne moglo biti, saj bi slej ali prej prišlo do pomote in do nesloge s svetom, tako da je sklep, da ima matematika še neko drugo, do danes nerazjasnjeno dimenzijo, bolj varen in bolj verjeten. Naslednja stvar, ki jo je še vredno izpostaviti je sam problem samoreference in njegova sestavljenost. Že Russlova samoreferenca pri primeru množic in brivca, sama po sebi nikoli ni bila napačna v smislu, da bi bil vprašljiv rezultat oziroma končni enačaj dogodka. Z drugimi besedami Russlov brivec ne ostane neobrit. Russlov konkreten problem je bila samoreferenca množice vseh množic ki, zaradi tega ker vsebuje vse množice, vsebuje tudi množico vseh množic, tudi samo sebe, kar pa pomeni, da množica vseh množic ni množica vseh množic, ker je podmnožica neke druge množice (same sebe). Slednji model se na prvi pogled zdi precej zapleten, vendar je potrebno vedeti, da obstoj množice vseh množic in večina njegovih komponent ni bila nikoli vprašanje. Vedelo se je, da obstaja, vendar fragment njenega obstoja ni bil koherenten s samim seboj. Gre za podoben princip kot upodobitev kompleksnih ničel funkcije v številskem koordinatnem sistemu. Tega ne moremo narediti na način, da bi bila upodobitev razvidna, vendar več kot očitno obstajajo. Za samoreferenco lahko prav tako predpostavimo, da je žrtev razlike med razumom, ki stalno opozarja na njeno prisotnost in umom, ki kljub temu problemu pride do rešitve. Že dejstvo, da se je v matematiki večkrat pojavil pojav, ko je bila samoreferenca preprosto spregledana (na primer peti peanov aksiom, ki govori o »Russlovih« množicah)[19] pa je do rešitve še vseeno prišlo, kaže na to, da je bil slednji problem že nekako samo po sebi premagan in da je popolnost matematike, oziroma nekega višje nivojskega reda, ohranjena. V primer lažjega razumevanja si lahko zamislimo pot iz točke A v točko B, ki jo moramo narediti z avtom po neki cesti. V avtu imamo super napredno navigacijo, ki nam pove, da bomo to pot lahko opravili. Po nekaj časa vožnje z avtomobilom na cesti naletimo na zaporo. Po tej cesti torej iz točke A v B ne moremo. Navigacija nas nato usmeri po drugi cesti, ki je prej nismo poznali, ki pa nas v točko B pripelje. Že od samega začetka smo vedeli, da je pot iz A v B mogoča, vendar naša percepcija ceste po kateri se vozimo je bila napačna. Enako je pri redu matematike in samoreferenci. Na prvi pogled se slednja teorija morda zdi nekoliko »iz trte izvita« in predvsem banalna, vendar na podlagi raziskanega menim, da je povratek k Platonu najboljši možni odgovor na brutalen paradoks, ki se pojavi pri teoretični matematiki in matematiki v naravi. V teoriji so bili izpostavljeni konkretni problemi, medtem ko narava kaže, da teh problemov ne more biti. Obe predpostavki sta dokazani, zato je najverjetnejši možni odgovor, da pač ne delujeta v istih sferah, oziroma pod istimi pogoji. Bodisi ena od njiju vključuje dejavnik preveč, ali pa dejavnik premalo. Tukaj v igro pride koncept didaktičnega razuma, ki je prisoten v obeh opredelitvah matematike, medtem ko je koncept uma odsoten vsaj v teoretični razlagi. Iz dejstva, da je rezultat različen in da je narava tista, ki ji poveljuje red lahko sklepamo, da je razumu skrito bistvo, ki ga lahko odkrije le čisti um tisto kar naredi temeljno razliko. Kljub svoji (navidezni) pravilnosti na veliki skali, ima na manjši skali tudi narava svoje nekonsistentnosti, ki se kažejo predvsem v kvantni mehaniki. Že osnoven primer premikanja delcev skozi dve odprtini v zidu je lahko zelo nazoren, saj nam dokaže, da se lahko atom naenkrat obnaša kot delec in kot valovanje. Z drugimi besedami narava naenkrat dokaže a in ne a. Kaj naj sedaj to pomeni za urejenost narave, ima torej tudi narava svoje napake, ali pa so te napake del reda urejenosti v svetu in je zgolj razum tisti, ki se moti. Zagotovo dejstvo, da se samoreferenca pojavi tako v teoriji, kot tudi v naravi ni zanemarljivo. Če se vrnem nazaj na napake v teoretični matematiki (Gödlova izreka), jih lahko primerjamo s kaosom, vendar je v naravi zaradi dodatnega, še nedefiniranega reda ta kaos urejen. Če so teoretični problemi burna eksplozija delca, je »naravni red« komora jedrske elektrarne, kjer ta delitev poteka nadzorovano in celo namensko. Na tej točki se spet vračamo k problemu, ki smo si ga zastavili na začetku: ali je matematika univerzalna? Menim, da je odgovor oboje pritrdilen in nikalen, zaradi svoje dualistične narave. Vendar menim, da je na tej točki bolj pomembno, da za bazo vprašanja postavimo edino stvar te naloge, za katero lahko z večjo zanesljivostjo rečemo da je univerzalna, človeški um. Nova razpravljalna trditev bi se tako glasila: Ali je univerzalnost človeškega uma dokaz za univerzalnost matematike?

[19] Marc Colyvan, An introduction to the Philosophy of Mathematics, 2006, 12.

## Zaključek

Na podlagi raziskanega, prebranega in razmišljanja sem prišel do ugotovitve, da univerzalnost matematike ni dokaz za univerzalnost človeškega uma, saj je zaradi svoje dvojne narave (teoretične in naravne) univerzalnost matematike precej izmuzljiv pojem, bolj kot univerzalnost človeškega uma. Tisočletja raziskav so pokazala na številne komplekse in paradokse v matematiki, zato jo je postavljati za temelj nečesa kot je človeški um lahko precej tvegano. Po drugi strani je prav (človeški) um tisti, ki kaže svojo neodvisnost od celotne okolice in svojo brezčasno konsistentnost, torej univerzalnost. Po drugi strani se mi tudi nova predpostavka, da je um tisti, ki je dokaz za univerzalnost matematike/matematičnega reda precej neverjetna, saj že sama narava in v končni fazi tudi umetna inteligenca dokazujeta, da je matematika tudi neodvisna od intervencije uma. Z gotovostjo pa ugotavljam, da je v danem problemu um tisti, ki je središče razprave in da je univerzalnost človeškega uma dokaz za možnost uvida v univerzalnost matematike.

# Literatura

1. Bolander, Thomas, (2020). Selfreference, Stanford Encyclopedia of Philosophy , Stanford, ZDA. https://plato.stanford.edu/entries/self-reference/
2. Cole, David, (2020). The Chinese room argument, Stanford Encyclopedia of Philosophy , Stanford, ZDA. https://plato.stanford.edu/entries/chinese-room/
3. Colyvan, Marc (2006). An introduction to the Philosophy of Mathematics, NSW, Sydney, Avstralija.
4. Duignan Brian (2022). Immanuel Kant, Brittanica, London. https://www.britannica.com/biography/Immanuel-Kant
5. Horsten, Leon, (2022). Philosophy of Mathematics, Stanford Encyclopedia of Philosophy, Stanford, ZDA. https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/
6. Irwine, Andrrew (2009). Philosophy of Mathematics, North Holland, Burlington, ZDA.
7. Lowe, E.J. (2000), An introduction to the philosophy of mind, University press, Cambridge, VB.
8. Muller, Derek, (2021). Math has a fatal flaw, Veritasium, ZDA. https://www.youtube.com/watch?v=HeQX2HjkcNo
9. Pascal, Blaise (1999). Misli, Mohorjeva družba, Celje.
10. Platon (2002).Država. V: Izbrani dialogi in odlomki, Mladinska knjiga, Ljubljana.
11. Russelll, Bertrand (1979). Filozofija Logičnega Atomizma, Cankarjeva založba, Ljubljana.
12. Russelll, Bertrand (2010). Introduction to mathematical philosophy, LTD, New York, ZDA.
13. Shapiro, Stewart (1997). Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology, Oxford university press, Oxford, VB.