56. SREČANJE MLADIH RAZISKOVALCEV SLOVENIJE

PODRSAVAJOČI LIKI – OBSEGI IN PLOŠČINE

Raziskovalno področje: Matematika ali logika

Šola: OŠ borcev za severno mejo, Maribor

Avtor: Eva Lukman

Mentor: Alenka Repnik

Maribor, 2022

KAZALO

KAZALO SLIK

POVZETEK

Predstavljajte si dva skladna pravilna lika. Eden od njiju miruje, drugi pa kroži okoli prvega in se pri tem prvega lika vedno dotika s stranico oziroma vsaj z enim ogliščem. Poljubna točka drugega lika riše sled in tako izriše nov lik. V raziskovalni nalogi se sprašujemo: kakšen lik izriše podrsavajoči lik, kakšen je obseg in kakšna je ploščina narisanih likov? Raziskali smo tudi, ali položaj točke na podrsavajočem liku vpliva na obliko, obseg in ploščino narisanega lika. Kaj pa, če lika nista skladna, ampak zgolj podobna? Prav tako raziskujemo, ali je razmerje med obsegom mirujočega lika s stranico a in obsegom lika, ki ga izriše podrsavajoči lik, odvisno od števila stranic pravilnega lika in ali oblika lika vpliva na razmerje med ploščinami mirujočega lika in na novo izrisanega lika.

Ključne besede: *lik, mirujoči lik, podrsavajoči lik, pravilni lik, večkotnik, skladnost, obseg, ploščina, razmerje*

ABSTRACT

Imagine two congruent regular geometric shapes. One of them is still, while the other slides around the first one, always touching the first geometric shape with a side or at least a corner. Any point of the second geometric shape draws a trace and thus draws a new geometric shape. In the research paper, we ask ourselves: what kind of geometric shape draws the sliding geometric shape, what is the perimeter and what is the area of the drawn shapes? We also investigated whether the position of a point on a sliding figure affects the shape, perimeter, and area of the drawn figure. What if the geometric shapes are not congruent but merely similar? We also investigate whether the ratio between the perimeter of a stationary geometric shape with side a and the perimeter of the shape drawn by a sliding geometric shape depends on the number of sides of the regular geometric shape and whether the shape of the figure affects the ratio between the areas of the stationary geometric shape and the newly drawn geometric shape.

Keywords: *geometric shape/figure, stationary geometric shape, sliding geometric shape, regular shape, polygon, congruency, perimeter, area, ratio*

1 UVOD

1.1 Namen in cilj naloge

Imamo dva skladna pravilna lika. Eden od njiju miruje, drugi pa drsi okoli prvega in se pri tem prvega lika vedno dotika s stranico oziroma vsaj z enim ogliščem. Poljubna točka drugega lika riše sled in tako izriše nov lik. Namen naše raziskovalne naloge je poiskati povezave med temi liki. Najprej želimo ugotoviti, kakšen lik izriše podrsavajoči lik, nato se lotimo še obsegov in ploščin. V uvodnem delu naloge smo se posvetili geometrijskim likom, s katerimi smo se srečevali pri raziskovanju. Zanimalo nas je tudi, ali lahko položaj točke, ki izrisuje novi lik, vpliva na njegovo velikost in obliko.

1.2 Hipoteze

Preden smo zares začeli raziskovati, smo si postavili nekaj hipotez.

Hipoteza 1: *Izrisani lik je (po obsegu in ploščini) večji od mirujočega lika.*

Hipoteza 2: *Obseg izrisanega lika je odvisen od dolžine stranic mirujočega in podrsavajočega lika.*

Hipoteza 3: *Z lego točke, ki izrisuje novi lik, se na podrsavajočem liku spreminja tudi velikost izrisanega lika.*

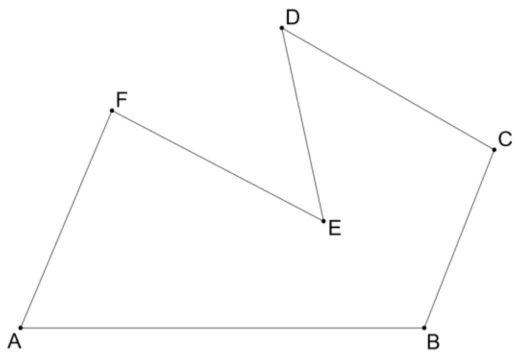
2 METODOLOGIJA DELA

Pri raziskovanju smo uporabili različne metode. Predvsem smo se opirali na metodo opazovanja in zbiranja podatkov. Za prikaz rezultatov smo uporabili še metodo grafičnih ponazoritev (grafične ponazoritve s pomočjo računalniških skic), uporabili pa smo tudi metode načrtovanja, računanja in sklepanja. Pri izračunih smo se zanesli predvsem na svoja računska znanja, v pomoč pa smo posegali po žepnem računalu in se kdaj pa kdaj »naslonili« tudi na računske spretnosti Geogebre.

3 VEČKOTNIKI

3.1 Večkotniki

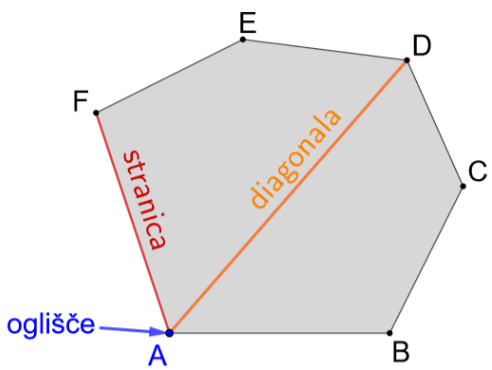
Večkotnik je ravninski lik, ki ga omejuje enostavna sklenjena lomljena črta (lomljenka). Enostavna sklenjena lomljenka je črta, sestavljena iz daljic. Po dve zaporedni daljici se stikata v skupnem krajišču, zadnja daljica se stika s prvo.



Slika 1: Enostavna sklenjena lomljenka (vir: avtor)

Te daljice nimajo drugih presečišč. Prav tako se v vsakem stičišču daljic stikata vedno le dve daljici. Dve zaporedni daljici praviloma nista vzporedni oziroma ne ležita na isti premici.

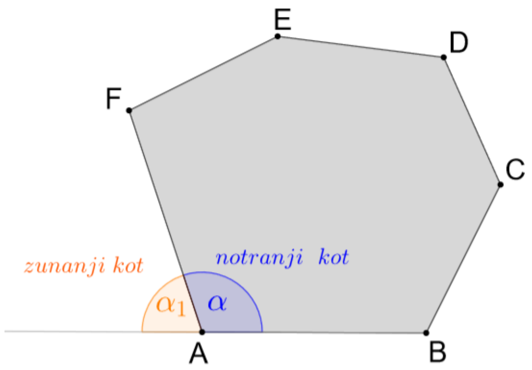
Daljice enostavne sklenjene lomljenke imenujemo stranice večkotnika, njihova krajišča pa so oglišča večkotnika. Oglišči, ki ju povezuje stranica, sta sosednji oglišči. Daljica, ki povezuje nesosednji oglišči večkotnika, je diagonala.



Slika 2: Večkotnik, oznaka oglišča, stranice in diagonale (vir: avtor)

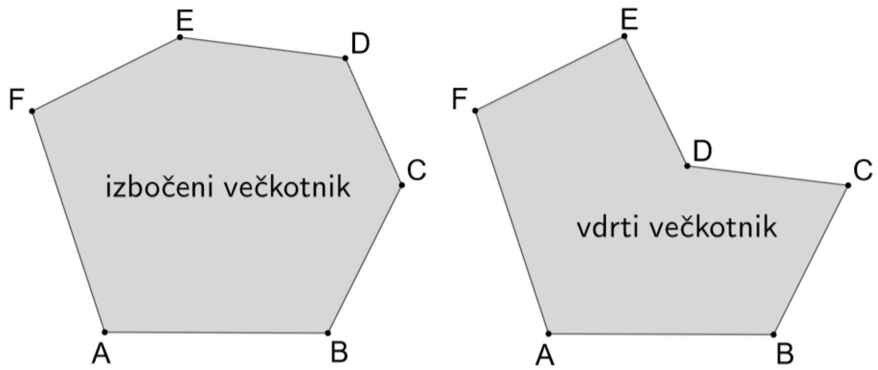
Notranji kot večkotnika je kot, ki ima vrh v posameznem oglišču večkotnika, kraka kota pa ležita na stranicah večkotnika, ki se v danem oglišču stikata. Notranjost kota leži znotraj večkotnika.

Sokot notranjega kota večkotnika je zunanji kot večkotnika. Ker sta notranji in zunanji kot sokota, merita skupaj 180°. Posledično zunanji kot obstaja le, če je notranji kot manjši od iztegnjenega (180°).



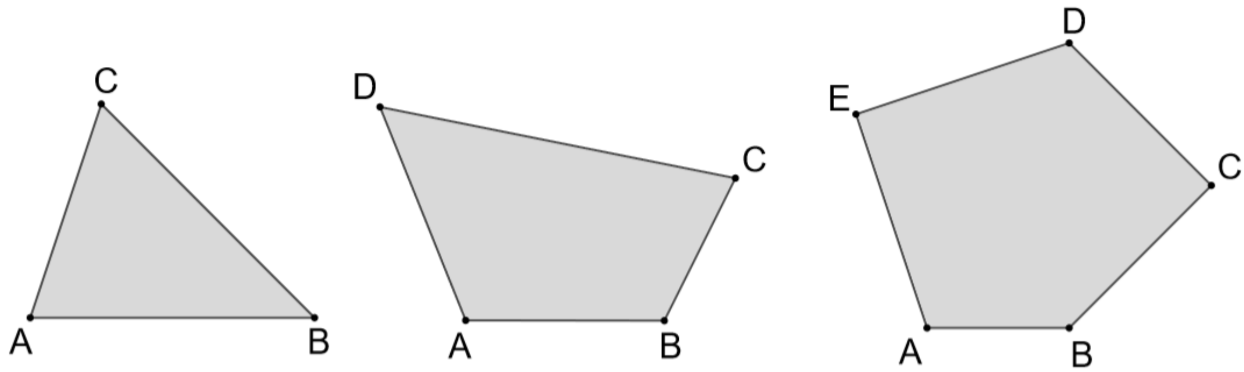
Slika 3: Zunanji in notranji kot večkotnika (vir: avtor)

Večkotniki so lahko vdrti ali izbočeni. Izbočeni oziroma konveksni večkotniki imajo vse notranje kote manjše od iztegnjenega kota, torej je vsak notranji kot izbočenega večkotnika manjši od 180°. Vsaka njegova daljica med dvema ogliščema je znotraj ali na robu tega večkotnika. Vbočeni, konkavni ali vdrti večkotniki imajo vsaj en notranji kot večji od iztegnjenega kota. Vsaj en notranji kot vdrtega večkotnika je torej večji od 180°.



Slika 4: Primer izbočenega in vdrtega večkotnika (vir: avtor)

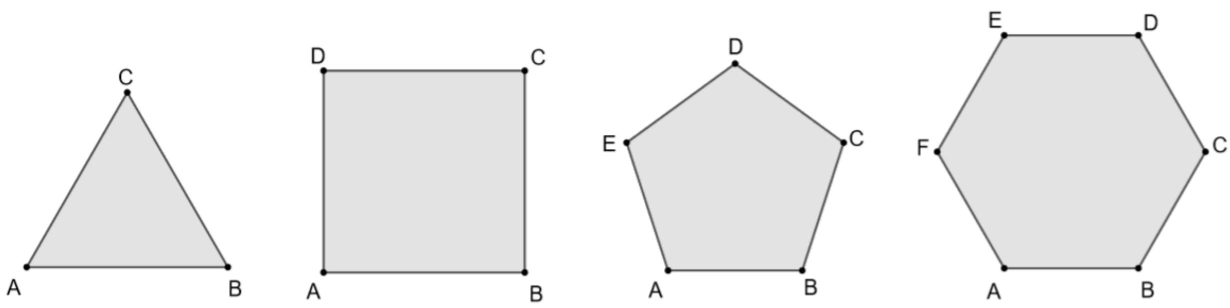
Večkotnik s tremi stranicami je trikotnik. Večkotnik, ki ima štiri stranice, je štirikotnik itd. Vsak večkotnik ima prav toliko oglišč (notranjih kotov, zunanjih kotov), kot ima stranic. Večkotnik, ki ima n oglišč, ima torej tudi n stranic, n notranjih kotov in n zunanjih kotov. Imenujemo ga n-kotnik.



Slika 5: Trikotnik, štirikotnik in petkotnik (vir: avtor)

Kadar ima večkotnik skladne vse stranice in skladne vse notranje kote, je večkotnik pravilen. Pravilni trikotnik je torej enakostranični trikotnik, pravilni štirikotnik pa je kvadrat.

Vsi pravilni večkotniki so izbočeni ali konveksni.



Slika 6: Pravilni liki: enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilni petkotnik in pravilni šestkotnik (vir: avtor)

3.1.1 Velikosti kotov večkotnika

Da bi izračunali vsoto vseh notranjih kotov poljubnega večkotnika, si pomagamo z znanjem o vsoti notranjih kotov trikotnika. Za to vsoto vemo, da je vedno enaka 180°. Z diagonalami iz enega oglišča lahko večkotnik razdelimo na trikotnike. Pri tem vsi notranji koti trikotnikov ravno sovpadajo z vsemi notranjimi koti večkotnika. Število nastalih trikotnikov je za dva manjše od števila oglišč n-kotnika, torej

$$n - 2.$$

Ker je vsota notranjih kotov posameznega trikotnika enaka 180°, je vsota notranjih kotov poljubnega n-kotnika

$$(n - 2) \cdot 180°.$$

Kadar gre za pravilni večkotnik, zaradi skladnosti notranjih kotov velja, da meri posamezni notranji kot (α)

$$\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}.$$

3.1.2 Število diagonal večkotnika

Število diagonal poljubnega večkotnika lahko izračunamo. Poljubni n-kotnik ima natanko n oglišč in zato iz vsakega oglišča $n - 3$ diagonal (diagonale iz poljubnega oglišča lahko narišemo v vsa nesosednja oglišča, teh pa je ravno $n - 3$, saj sta dve oglišči sosednji, iz izbranega oglišča pa v njega samega tudi ne moremo narisati diagonale). Ker je oglišč n, je torej vseh diagonal

$$n \cdot (n - 3).$$

Izkaže se, da je narisanih diagonal le polovica te vrednosti, saj je npr. diagonala AC enaka diagonali CA.

Število diagonal v večkotniku je torej enako

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

3.2 Obseg lika

Obseg lika je vsota dolžin vseh njegovih stranic. Na splošno je geometrijski lik sicer lahko omejen tudi s krivimi črtami, npr. krog. V takšnem primeru je obseg lika enak vsoti dolžin vseh krivulj, ki ta lik omejujejo. Obseg merimo z dolžinskimi merskimi enotami, saj je, kot zapisano zgoraj, obseg pravzaprav dolžina črte, ki omejuje lik.

Omenimo še možnost merjenja dolžin z nestandardnimi merskimi enotami. Seveda bi se lahko merjenja dolžine lotili tudi z le-temi (npr. dolžina koraka, stopala, palice …), a tega se v nalogi nismo posluževali.

Oznaka za obseg je o.

3.2.1 Obsegi pravilnih večkotnikov

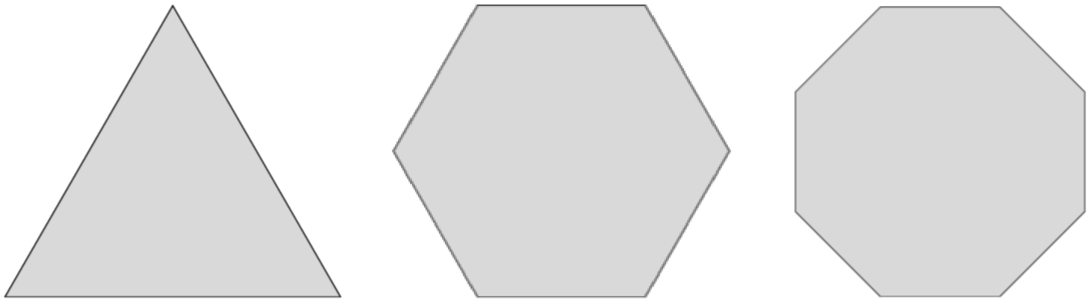
Pravilni večkotniki imajo vse stranice med seboj skladne, zato je njihov obseg dokaj lahko zapisati oziroma izračunati. Tako za n-kotnik s stranico a preprosto velja:

$$o = n \cdot a.$$

3.3 Ploščina lika

Ploščina lika je število, ki nam pove, koliko ploščinskih enot potrebujemo, da dani lik popolnoma prekrijemo. Če se postopek prekrivanja ne izide, ga nadaljujemo z manjšimi enotami. Ploščinske enote so v splošnem lahko različnih oblik. Med raziskovanjem smo se občasno poslužili tudi t. i. nestandardnih ploščinskih enot. Običajno pa uporabljamo standardne ploščinske enote, to so enotski kvadrati (npr. cm^2, dm^2 …).

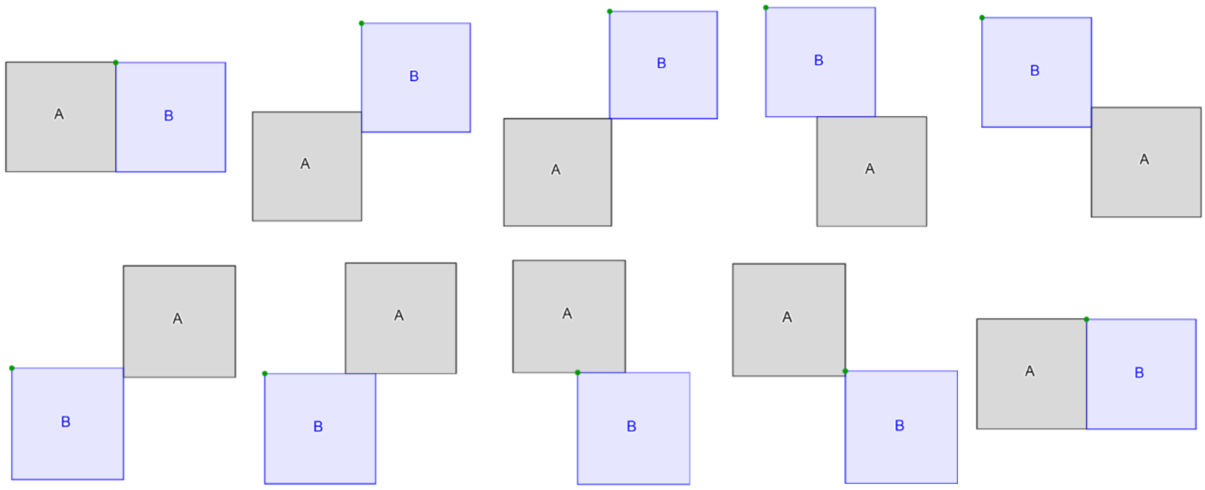
Ploščino označujemo s črko p.



Slika 7: Primer nestandardnih merskih enot za merjenje ploščine – od leve: enakostranični trikotnik, pravilni šestkotnik, pravilni osemkotnik (vir: avtor)

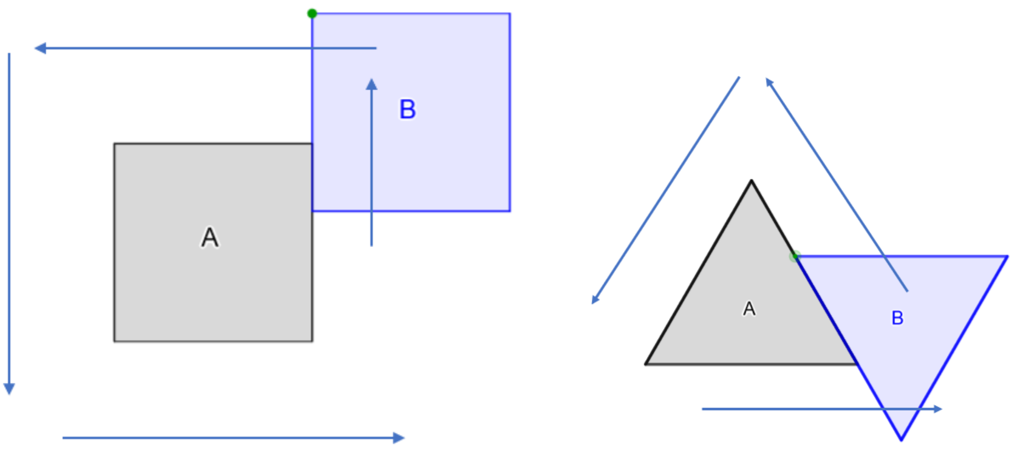
4 KAJ SO PODRSAVAJOČI LIKI

Imamo skladna pravilna večkotnika, ki smo ju označili »lik A« in »lik B«. Lik A je mirujoči lik. Lik B imenujemo podrsavajoči lik, saj drsi oziroma podrsava okoli lika A, in sicer tako, da se lika A dotika s stranico, delom stranice oziroma vsaj ogliščem. Poljubna točka na liku B (na sliki zgornje levo oglišče) riše sled in tako izriše nov lik (»lik C«), ki je podoben likoma A in B. Izrisani lik je večji od mirujočega lika.

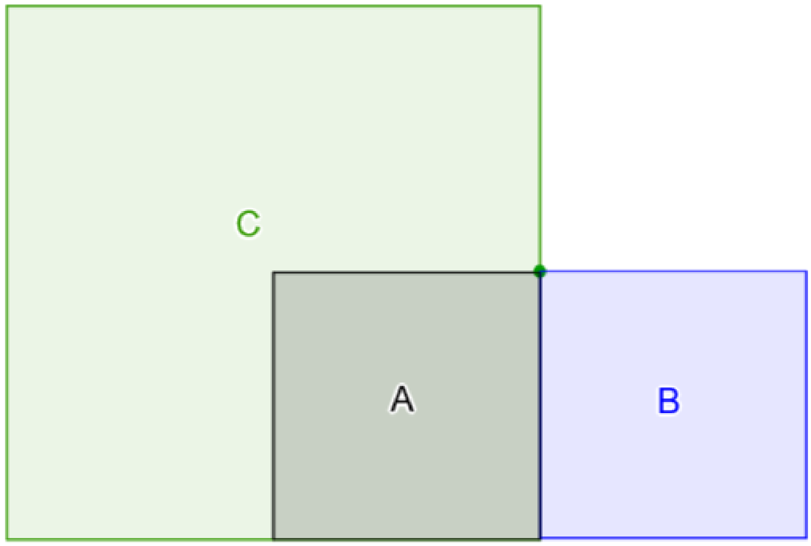


Slika 8: Podrsavajoči lik drsi okoli osnovnega mirujočega lika (vir: avtor)

Sprva smo raziskovali situacije, kjer je podrsavajoči lik skladen mirujočemu, kasneje smo poskusili še s podobnimi liki.



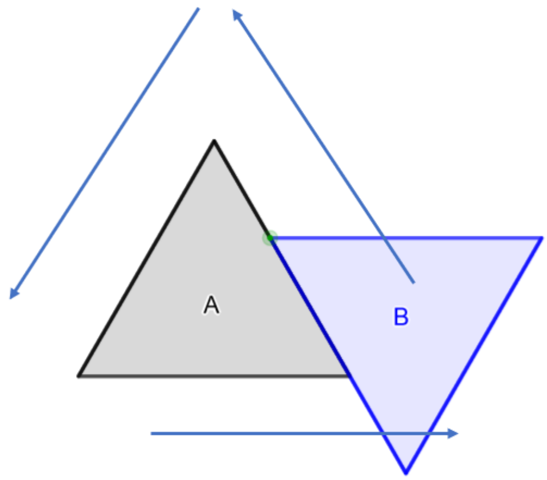
Slika 9: Osnovni, mirujoči lik in podrsavajoči lik (vir: avtor)



Slika 10: Zeleno izrisan novi lik C je podoben prvotnima likoma (vir: avtor)

4.1 Obseg in ploščina podrsavajočega enakostraničnega trikotnika

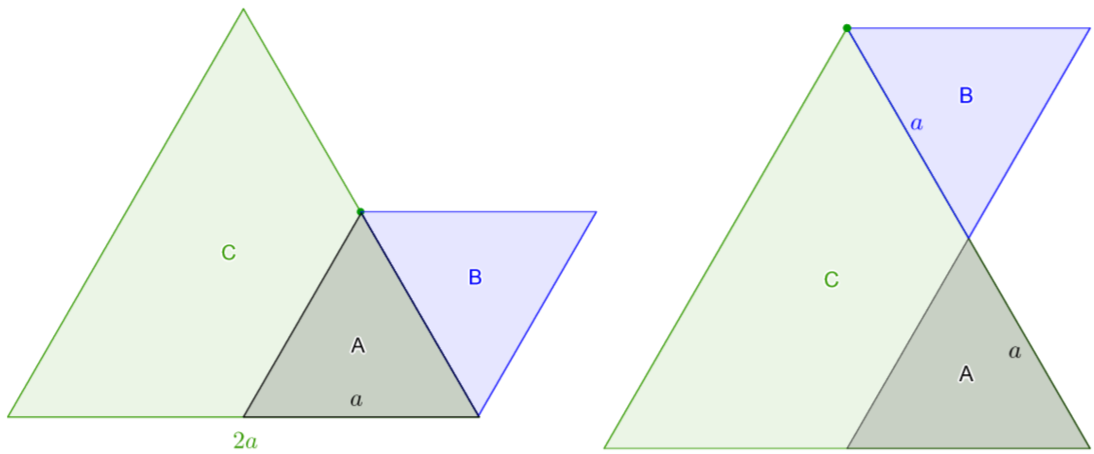
Raziskovanje smo sicer sprva začeli s pravilnim štirikotnikom (kvadratom), a v nalogi vseeno najprej zapisujemo ugotovitve za podrsavajoči pravilni trikotnik (enakostranični trikotnik).



Slika 11: Podrsavajoči trikotnik B drsi okoli mirujočega skladnega trikotnika A (vir: avtor)

Za podrsavajoči pravilni trikotnik (na sliki spodaj lik B) velja kot za vse ostale podrsavajoče like, da je skladen z mirujočim likom (na sliki spodaj lik A), ki je torej prav tako pravilni oziroma enakostranični trikotnik s stranico a. Podrsavajoči pravilni trikotnik pri drsenju okoli mirujočega pravilnega trikotnika izriše prav tako pravilni trikotnik (na sliki spodaj lik C). Izrisani enakostranični trikotnik je podoben mirujočemu in podrsavajočemu enakostraničnemu trikotniku.

Ker se podrsavajoči lik vedno dotika vsaj z ogliščem mirujočega lika, je dolžina stranice izrisanega lika dvakratnik ($2 \cdot a$) mirujočega oziroma tudi podrsavajočega trikotnika.



Slika 12: Mirujoči pravilni, enakostranični trikotnik s stranico a, njemu skladni podrsavajoči enakostranični trikotnik in novo izrisani podobni enakostranični trikotnik (vir: avtor)

Obsega mirujočega in podrsavajočega lika sta enaka, ker gre za skladna lika:

$$o_A = o_B = 3 \cdot a$$

Obseg novo izrisanega lika je:

$$o_C = 3 \cdot 2 \cdot a$$

$$o_C = 6 \cdot a$$

Obseg izrisanega lika je torej dvakratnik obsega podrsavajočega (oziroma mirujočega lika), saj je količnik (količnik obsegov – K_o) med obsegom izrisanega lika in mirujočega lika enak:

$$K_o = o_C : o_A = (6 \cdot a) : (3 \cdot a) = \frac{6a}{3a} = 2$$

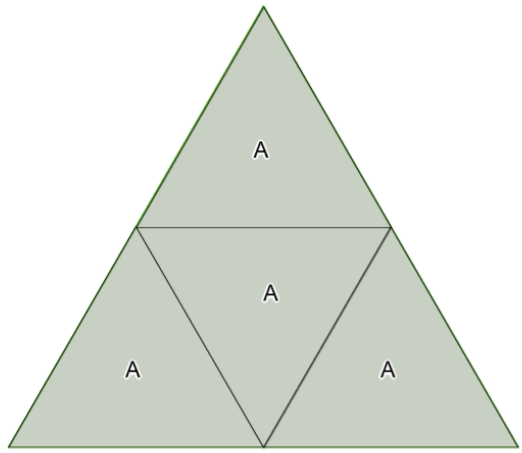
Za merjenje ploščine smo za začetek kot enoto vzeli kar mirujoči lik A. Tako velja:

$$p_A = p_B = 1$$

Za novo izrisan lik pa s prekrivanjem dobimo:

$$p_C = 4 \cdot p_A = 4$$

Ploščina izrisanega lika C je torej štirikratnik mirujočega lika A, ki je skladen z likom B. Lika A in B imata torej enako ploščino.



Slika 13: Prikaz prekrivanja izrisanega enakostraničnega trikotnika z enakostraničnim trikotnikom A (vir: avtor)

Ploščini smo primerjali tudi s pomočjo izračunov obeh ploščin z obrazcem za ploščino enakostraničnega trikotnika. Za mirujoči lik A in podrsavajoči lik B, ki imata stranico a, tako velja:

$$p_A = p_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ker ima novo izrisani lik C stranico dvakrat daljšo kot mirujoči lik, zanj velja:

$$p_C = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$p_C = \frac{4a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$p_C = a^2\sqrt{3}$$

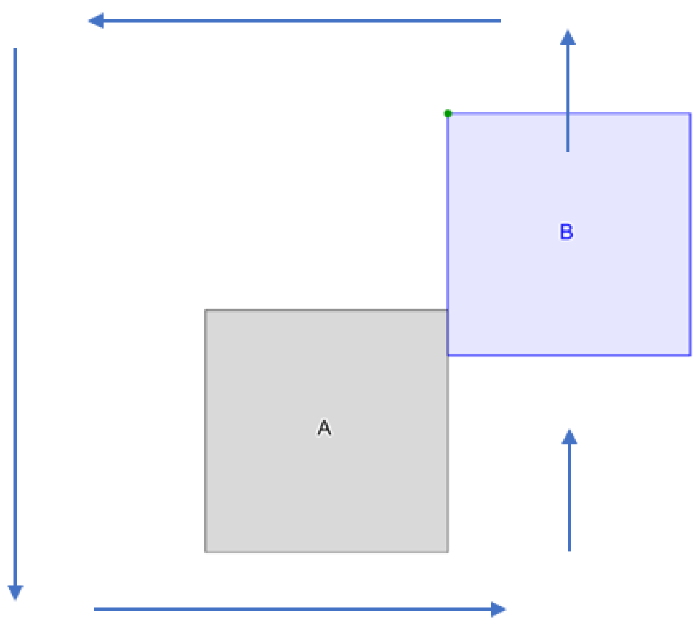
Količnik ploščine (K_p) lika C in ploščine lika A je tako:

$$K_p = \left(a^2\sqrt{3}\right) : \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{4}{a^2\sqrt{3}} = 4$$

Torej še en dokaz, da je ploščina novo izrisanega lika štirikratnik ploščine mirujočega lika oziroma podrsavajočega lika, ki je skladen z mirujočim likom.

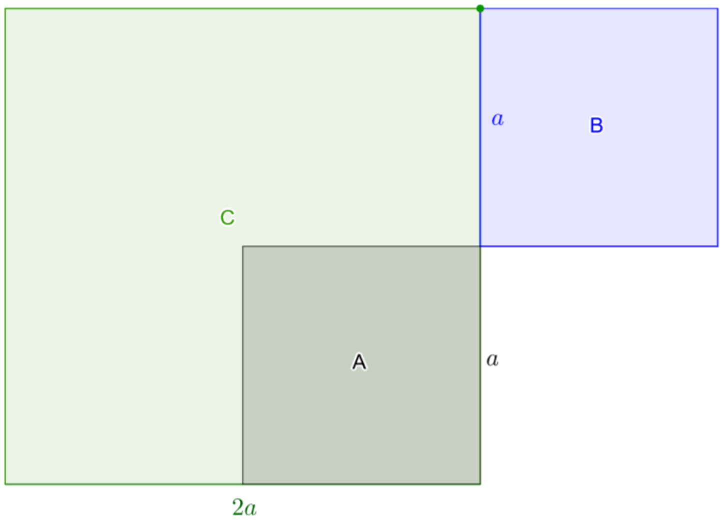
4.2 Obseg in ploščina podrsavajočega kvadrata

Podrsavajoči pravilni štirikotniki, torej kvadrati, so tisti, ki smo jih raziskovali najprej. Podrsavajoči kvadrat je skladen z mirujočim likom. Oba kvadrata imata stranico a. Podrsavajoči kvadrat pri drsenju okoli mirujočega kvadrata izriše prav tako kvadrat. Izrisani kvadrat je podoben mirujočemu in podrsavajočemu kvadratu.



Slika 14: Podrsavajoči kvadrat B drsi okoli mirujočega skladnega kvadrata A (vir: avtor)

Podrsavajoči kvadrat izrisuje kvadrat, katerega stranica je dvakratnik ($2a$) mirujočega oziroma tudi podrsavajočega kvadrata. Torej enako kot smo že zapisali v prejšnjem poglavju, je stranica novo izrisanega lika dvakratnik stranice podrsavajočega lika. V nadaljevanju raziskovanja smo ugotovili, da to velja za vse novo izrisane like, kadar sta mirujoči in podrsavajoči lik skladna.



Slika 15: Mirujoči pravilni štirikotnik – kvadrat s stranico a, njemu skladni podrsavajoči kvadrat v skrajni legi nad eno stranico ter novo izrisani podobni kvadrat (vir: avtor)

Mirujoči in podrsavajoči lik sta skladna, zato zanju velja:

$$o_A = o_B$$

Primerjajmo obsega podrsavajočega in novo izrisanega lika.

$$o_B = 4 \cdot a$$

$$o_C = 4 \cdot 2a = 8 \cdot a$$

Količnik obsegov izrisanega lika in podrsavajočega lika je torej:

$$K_o = o_c : o_B$$

$$K_o = \frac{8a}{4a} = 2$$

Izračun znova dokazuje, da je obseg izrisanega lika dvakratnik obsega podrsavajočega oziroma mirujočega lika.

Kako pa je z razmerjem ploščin izrisanega in podrsavajočega kvadrata? Poglejmo. Ploščini mirujočega lika A in podrsavajočega lika B, ki imata stranico a, sta enaki, saj velja:

$$p_A = p_B = a^2$$

Ker je stranica novo izrisanega lika dvakratnik stranice mirujočega lika, zanj velja:

$$p_C = (2a)^2$$

$$p_C = 4a^2$$

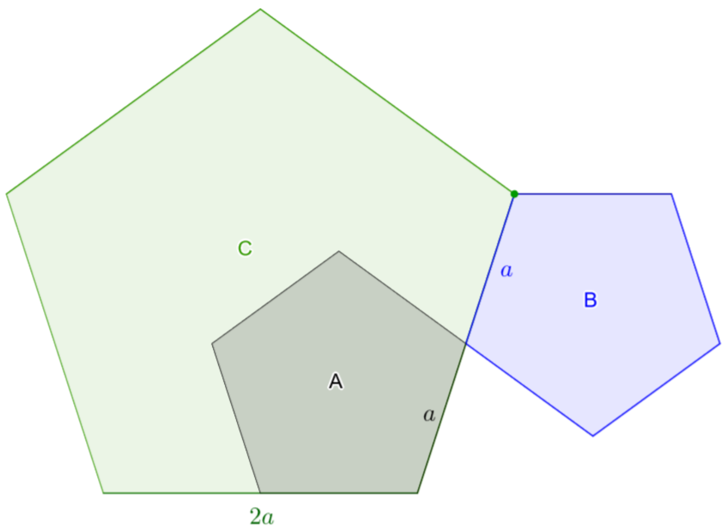
Količnik ploščine (K_p) izrisanega kvadrata in ploščine podrsavajočega kvadrata je tako:

$$K_p = 4a^2 : a^2 = \frac{4a^2}{a^2} = 4$$

Ploščina izrisanega kvadrata je štirikratnik ploščine podrsavajočega kvadrata oziroma mirujočega kvadrata, ki je skladen s podrsavajočim kvadratom.

4.3 Obseg in ploščina podrsavajočega pravilnega petkotnika

Podrsavajoči pravilni petkotnik, ki drsi okoli skladnega mirujočega pravilnega petkotnika, izriše prav tako pravilni petkotnik. Izrisani pravilni petkotnik je podoben mirujočemu in podrsavajočemu, njegova stranica je tudi pri pravilnem petkotniku dvakratnik podrsavajočega pravilnega petkotnika. Mirujoči in podrsavajoči pravilni petkonik imata stranico a, torej ima izrisani pravilni petkotnik stranico dolžine $2a$.



Slika 16: Mirujoči pravilni petkotnik s stranico a, njemu skladni podrsavajoči pravilni petkotnik v skrajni legi nad eno od stranic ter novo izrisani podobni pravilni petkotnik (vir: avtor)

Mirujoči in podrsavajoči lik sta skladna, zato imata enaka obsega:

$$o_A = o_B = 5 \cdot a$$

Izrisani lik ima obseg, ki je dvakratnik obsega podrsavajočega lika:

$$o_C = 5 \cdot 2a = 10 \cdot a$$

Količnik obsegov izrisanega lika in podrsavajočega lika je torej:

$$K_o = o_c : o_B$$

$$K_o = \frac{10a}{5a} = 2$$

Obseg izrisanega pravilnega petkotnika je dvakratnik obsega podrsavajočega oziroma mirujočega petkotnika.

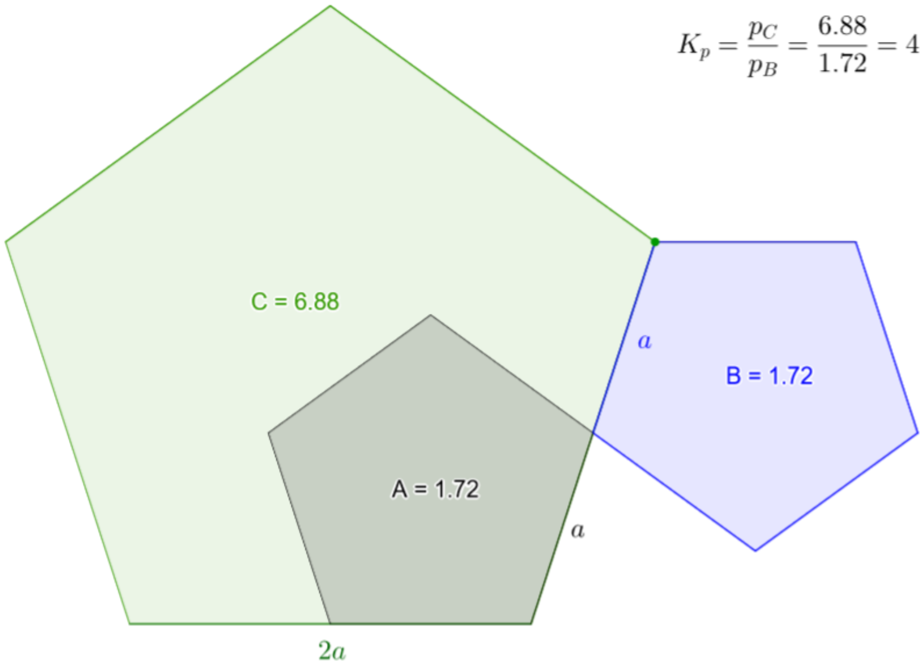
Pri primerjanju ploščin smo si pri pravilnem petkotniku pomagali z Geogebro, ki nam je pomagala pri izračunih ploščin pravilnih petkotnikov, saj je to presegalo naše znanje.

Ploščini mirujočega in podrsavajočega pravilnega petkotnika sta seveda enaki, saj gre za skladna lika. Glede na to, da smo kot enoto za stranico vzeli dolžino a, je enota, v kateri smo merili ploščine, a^2. Na sliki spodaj, ki smo jo povzeli iz Geogebre, je moč razbrati, da je:

$$p_A = p_B = 1{,}72\ \mathrm{a}^2$$

Hkrati vidimo, da je ploščina izrisanega lika enaka:

$$p_C = 6{,}88\ \mathrm{a}^2$$



Slika 17: Ploščine pravilnih petkotnikov (mirujočega, podrsavajočega in izrisanega) (vir: avtor)

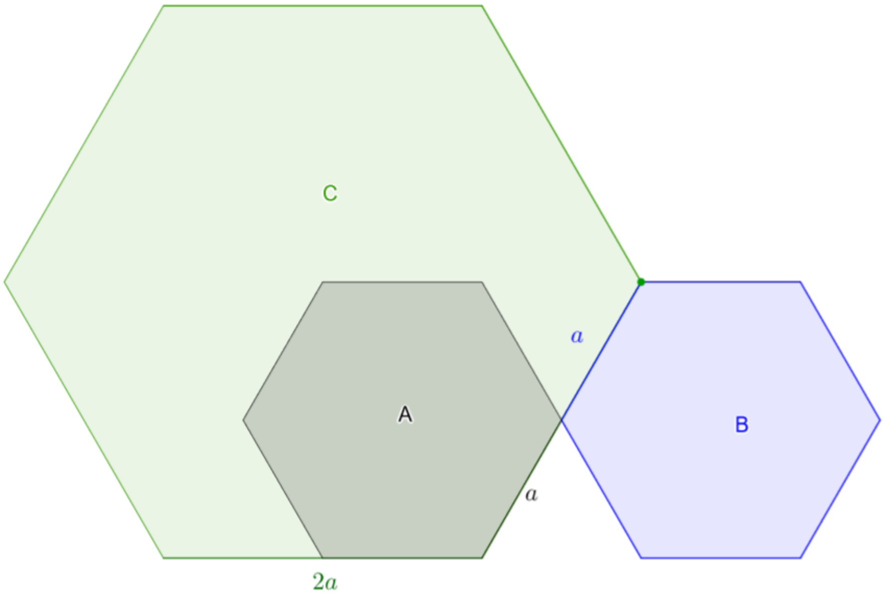
Izkaže se, da je količnik ploščine (K_p) izrisanega in ploščine podrsavajočega pravilnega petkotnika:

$$K_p = 6{,}88\ a^2 : 1{,}72\ a^2 = \frac{6{,}88\ a^2}{1{,}72\ a^2} = 4$$

Ploščina izrisanega pravilnega petkotnika je štirikratnik ploščine podrsavajočega pravilnega petkotnika oziroma mirujočega pravilnega petkotnika, ki je skladen s podrsavajočim.

4.4 Obseg in ploščina podrsavajočega pravilnega šestkotnika

Pri drsenju okoli mirujočega pravilnega šestkotnika skladni pravilni šestkotnik izriše prav tako pravilni šestkotnik. Izrisani pravilni šestkotnik je podoben mirujočemu in podrsavajočemu, njegova stranica je tudi pri pravilnem šestkotniku dvakratnik podrsavajočega pravilnega šestkotnika. Mirujoči in podrsavajoči pravilni šestkotnik imata stranico a, torej ima izrisani pravilni šestkotnik stranico dolžine $2a$.



Slika 18: Mirujoči pravilni šestkotnik s stranico a, njemu skladni podrsavajoči pravilni šestkotnik v skrajni legi nad eno od stranic ter novo izrisani podobni pravilni šestkotnik (vir: avtor)

Mirujoči in podrsavajoči lik sta skladna, zato imata enaka obsega:

$$o_A = o_B = 6 \cdot a$$

Izrisani lik ima obseg, ki je dvakratnik obsega podrsavajočega lika:

$$o_C = 6 \cdot 2a = 12 \cdot a$$

Količnik obsegov izrisanega lika in podrsavajočega lika je torej:

$$K_o = o_c : o_B$$

$$K_o = \frac{12a}{6a} = 2$$

Obseg izrisanega pravilnega šestkotnika je dvakratnik obsega podrsavajočega oziroma mirujočega pravilnega šestkotnika.

Tudi ploščini mirujočega in podrsavajočega pravilnega šestkotnika sta seveda enaki, saj gre za skladna lika. Ploščina mirujočega pravilnega šestkotnika (in hkrati podrsavajočega pravilnega šestkotnika, ki je z njim skladen) je enaka šestkratniku ploščine enakostraničnega trikotnika:

$$p_A = p_B = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ker ima novo izrisani lik C stranico dvakrat daljšo kot mirujoči lik, zanj velja:

$$p_C = \frac{6(2a)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$p_C = \frac{6 \cdot 4a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$p_C = 6a^2\sqrt{3}$$

Količnik ploščine (K_p) lika C in ploščine lika A je tako:

$$K_p = \left(6a^2\sqrt{3}\right) : \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6a^2\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{4}{6a^2\sqrt{3}} = 4$$

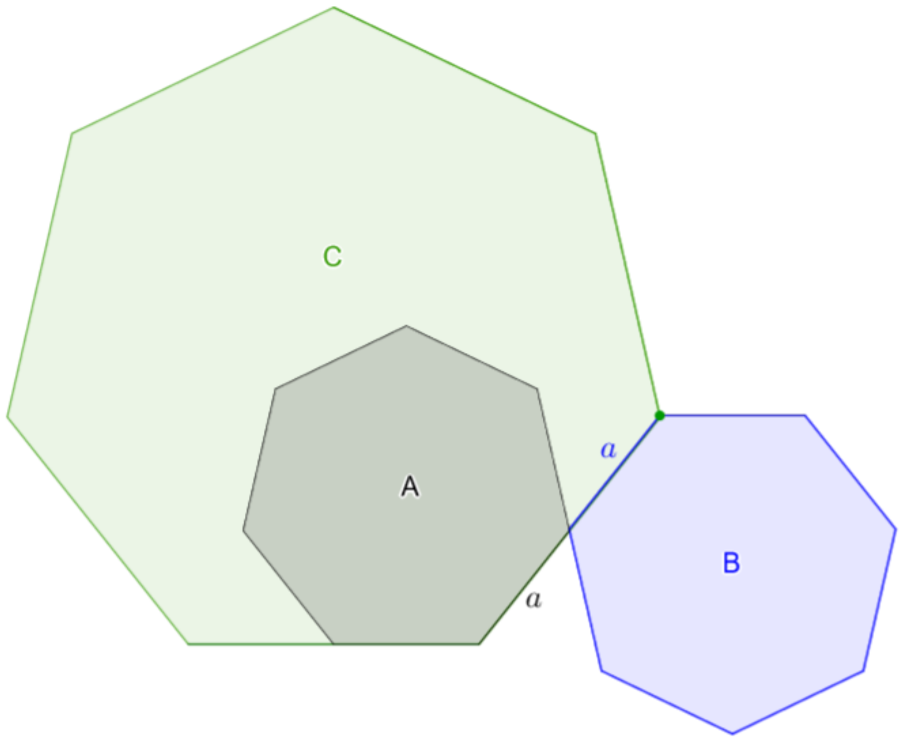
Ploščina izrisanega pravilnega šestkotnika je štirikratnik ploščine podrsavajočega pravilnega šestkotnika oziroma mirujočega pravilnega šestkotnika, ki je skladen s podrsavajočim.

4.5 Obseg in ploščina podrsavajočega pravilnega n-kotnika

Pravilni n-kotnik, ki drsi okoli skladnega pravilnega n-kotnika, izriše podobni pravilni n-kotnik. Stranica podrsavajočega in mirujočega pravilnega n-kotnika je dolžine a, medtem ko je stranica podobnega n-kotnika dolžine $2a$.

Iz zgoraj zapisanega sledi, da je obseg izrisanega pravilnega n-kotnika dvakratnik obsega mirujočega oziroma njemu skladnega pravilnega n-kotnika, ki okoli mirujočega lika drsi. Obseg izrisanega lika je dvakratnik obsega mirujočega lika ne glede na to, za kateri večkotnik gre.

$$o_C = 2o_A$$



Slika 19: Mirujoči pravilni sedemkotnik s stranico a, njemu skladni podrsavajoči pravilni sedemkotnik v skrajni legi nad eno od stranic ter novo izrisani podobni pravilni sedemkotnik (vir: avtor)

Pri izračunavanju ploščin smo že pri pravilnem petkotniku naleteli na težave, ki jih s trenutnim matematičnim znanjem nismo mogli rešiti. Na povsem identične težave naletimo tudi pri skoraj vseh n-kotnikih, z izjemo enakostraničnega trikotnika, kvadrata in pravilnega šestkotnika. Za preostale pravilne večkotnike ne poznamo obrazcev za izračun ploščin, kar nam onemogoča dokazovanje naših trditev z izračuni. Smo pa s pomočjo računalniške tehnologije (Geogebra) in nam dosegljivih dokazov uspeli pokazati, da je ploščina izrisanega večkotnika vedno štirikratnik ploščine mirujočega večkotnika.

Tudi logični premislek nas pripelje do istega zaključka: ploščina novo izrisanega lika bo vedno štirikratnik ploščine mirujočega lika. Ker ploščino merimo s kvadratnimi enotami, bo ploščina mirujočega lika, pravilnega večkotnika s stranico a:

$$p_A = x \cdot a^2$$

Pri tem je x pozitivno realno število. Stranica novo izrisanega lika je dvakratnik mirujočega lika, zato bo ploščina tega lika štirikratnik ploščine mirujočega lika:

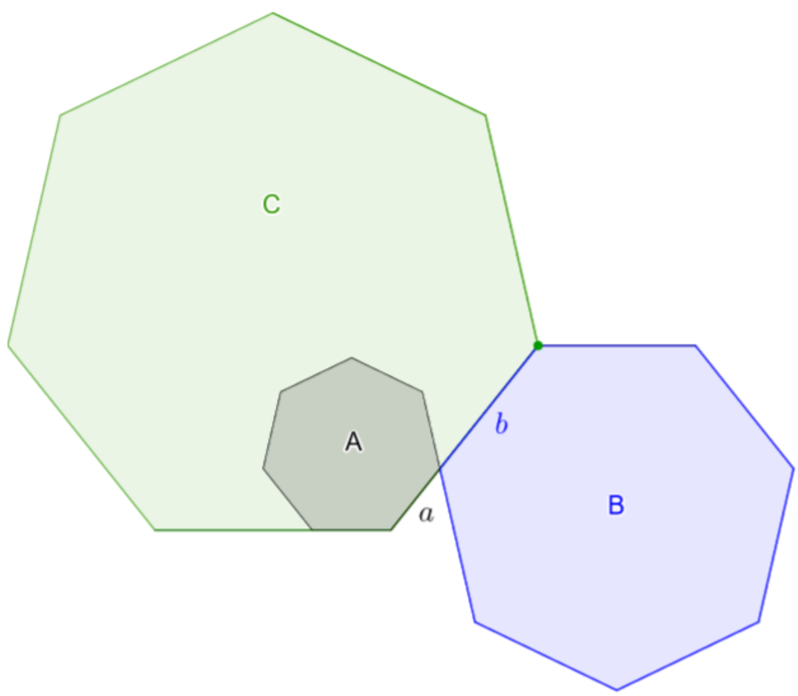
$$p_C = x \cdot (2a)^2 = 4 \cdot x \cdot a^2$$

V nadaljevanju smo še malo poglobili svoja razmišljanja o obsegu.

Stranica izrisanega lika je, pri naših začetnih pogojih, vedno dvakratnik stranice podrsavajočega oziroma mirujočega lika (oba lika sta med seboj skladna), kar je posledica skrajne lege podrsavajočega lika, ki »prepotuje« celotno stranico mirujočega lika in nato še celotno dolžino svoje stranice. Stranica izrisanega lika je torej pravzaprav vsota dolžin stranic mirujočega in podrsavajočega lika. Če bi torej podrsavajoči lik bil le podoben mirujočemu, ne pa z njim tudi skladen, bi veljalo, da je stranica izrisanega lika, ki je prav tako podoben prejšnjima dvema, imela dolžino enako vsoti dolžin stranic mirujočega in podrsavajočega lika.

Naj ima mirujoči pravilni n-kotnik stranico dolžine a, podrsavajoči pravilni n-kotnik pa stranico dolžine b. Kot je jasno vidno tudi s slike spodaj, ima potem izrisani pravilni n-kotnik stranico dolžine

$$c = a + b.$$



Slika 20: Mirujoči pravilni sedemkotnik s stranico a, podrsavajoči podobni pravilni sedemkotnik s stranico b ter novo izrisani podobni pravilni sedemkotnik s stranico $c = a + b$ (vir: avtor)

Za obsege bo torej veljalo:

$$o_A = n \cdot a.$$

$$o_B = n \cdot b$$

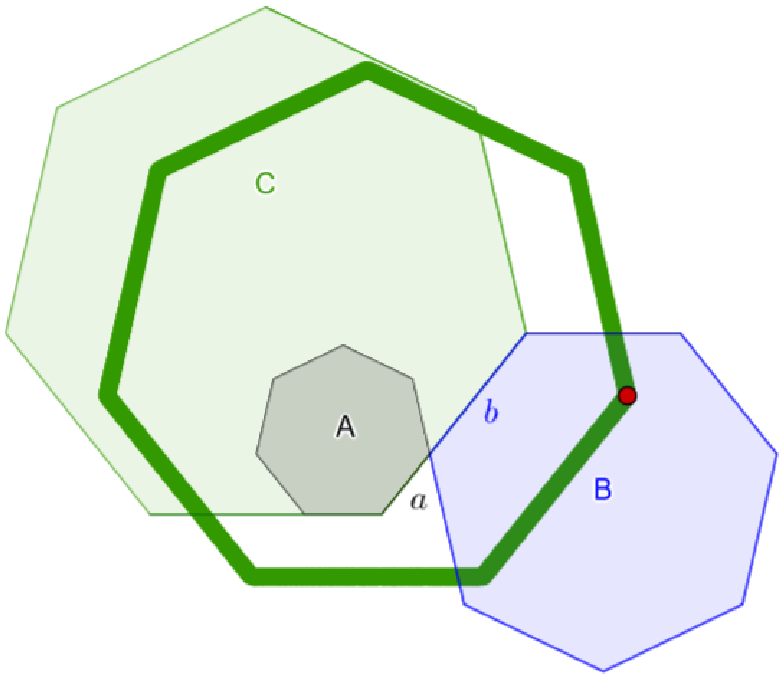
$$o_C = n \cdot c = n \cdot (a + b)$$

$$o_C = n \cdot a + n \cdot b$$

$$o_C = o_A + o_B$$

Obseg izrisanega pravilnega večkotnika je torej pravzaprav enak vsoti obsegov preostalih dveh večkotnikov, ne glede na število stranic pravilnih večkotnikov.

Kaj pa, če bi točko, ki izrisuje novi lik, premaknili iz oglišča podrsavajočega n-kotnika kamorkoli v njegovo notranjost?



Slika 21: Točka, ki izrisuje novi lik, leži v notranjosti podrsavajočega lika (vir: avtor)

Izkaže se, da je novo izrisani lik, ne glede na lego točke znotraj podrsavajočega lika, vedno enako velik. Vsi tako izrisani liki so torej med seboj skladni, le njihova lega se nekoliko spreminja.

5 ZAKLJUČEK

Raziskovanja smo se lotili dokaj lahkotno, saj je izgledalo, da zastavljen problem ne bo pretežak. Izkazalo se je, da nekaterih svojih trditev žal nismo znali potrditi z računskimi dokazi, saj je naše znanje na nekaterih področjih še prešibko. To nas sicer ni odvrnilo od iskanja možnih rešitev, ki smo jih tudi nakazali, le z gotovostjo se nanje ne moremo zanesti.

Pod drobnogled smo vzeli sprva skladna pravilna lika, od katerih eden miruje, drugi pa drsi okoli prvega in se pri tem prvega lika vedno dotika s stranico oziroma vsaj z enim ogliščem. Poljubna točka drugega lika riše sled in tako izriše nov lik. Sprva sta predmet našega raziskovanja bila skladna kvadrata in izkazalo se je, da točka v tem primeru izriše prav tako kvadrat, ki pa je od prvotnih dveh večji. Jima je podoben, ni pa z njima skladen. Sledilo je preiskovanje podrsavajočih enakostraničnih trikotnikov, pa pravilnih petkotnikov in pravilnih šestkotnikov. Vedno je izrisan lik večji od prvotnih in prvotnima likoma podoben. Točka trikotnika torej izriše trikotnik, točka petkotnika petkotnik, točka šestkotnika šestkotnik … iz česar sklepamo, da točka n-kotnika izriše n-kotnik. Že zgolj z opazovanjem je mogoče potrditi našo prvo hipotezo, da bo torej izrisani lik po obsegu in ploščini večji od mirujočega lika.

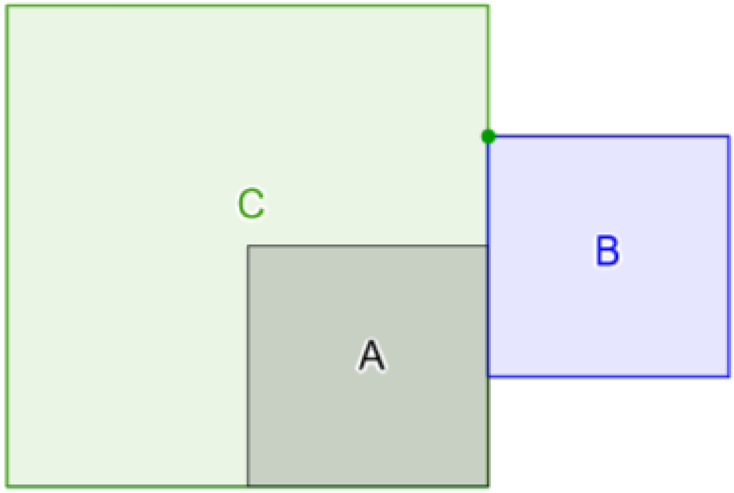
Za obsege smo celo uspeli dokazati, da je obseg izrisanega lika vedno enak vsoti obsegov mirujočega in podrsavajočega lika. Tudi v primeru, ko slednja nista skladna.

$$o_C = o_A + o_B$$

Če pa sta mirujoči in podrsavajoči pravilni večkotnik skladna, kot smo zahtevali v začetnih pogojih, se izkaže, da je obseg izrisanega lika natanko dvakratnik obsega mirujočega lika.

$$o_C = 2o_A$$

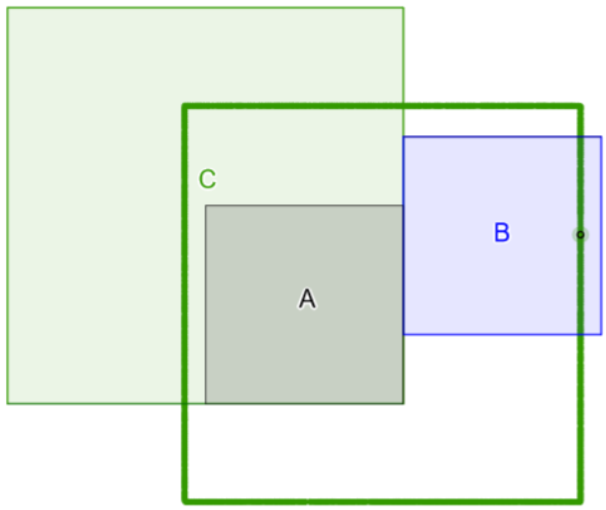
S tem smo potrdili našo drugo hipotezo, v kateri smo predvideli, da je obseg izrisanega lika (na sliki spodaj lik C) odvisen od dolžin stranic mirujočega (na sliki spodaj lik A) in podrsavajočega lika (na sliki spodaj lik B).



Slika 22: Mirujoči lik A, podrsavajoči lik B in izrisani lik C, ki ga izriše zgornje levo oglišče podrsavajočega lika (vir: avtor)

Pri dokazovanju povezav med ploščinami smo naleteli na več težav, saj je izračunavanje nekaterih ploščin presegalo naše znanje. Smo pa s pomočjo izračunov, ki smo jih uspeli izpeljati, in deloma s pomočjo Geogebre in logičnega sklepanja pokazali, da je ploščina izrisanega lika (ko sta mirujoči in podrsavajoči lik skladna) enaka štirikratniku ploščine mirujočega lika. Pri raziskovanju smo si pomagali tudi z metodo prekrivanja – izrisani lik smo prekrivali z mirujočemu liku skladnimi liki oziroma njihovimi deli in tudi tako prišli do enakega spoznanja.

Raziskali smo tudi, ali položaj točke na podrsavajočem liku vpliva na obliko, obseg in ploščino narisanega lika in ugotovili, da je odgovor nikalen. Torej lega točke na podrsavajočem liku ne vpliva na obliko, obseg in ploščino, vpliva pa na lego izrisanega lika glede na mirujočega. S tem smo ovrgli našo tretjo hipotezo.



Slika 23: Lega izrisanega lika se spremeni, če spremenimo položaj točke na podrsavajočem liku (vir: avtor)

S ponosom gledamo na naš izdelek in ob koncu ugotavljamo, da smo bili dokaj uspešni. Čeprav nismo uspeli dokazati vseh svojih trditev, smo vsaj z veliko verjetnostjo nakazali možne rešitve. Kljub vsemu smo se skozi raziskovanje veliko naučili in pridobili številna nova znanja in spretnosti.

Upamo, da smo s predstavitvijo svojega dela tako otroke kot odrasle spodbudili k razmišljanju in morda v njih prebudili zanimanje, kaj so naši podrsavajoči liki. Seveda lahko naše ugotovitve pridejo prav tudi drugim raziskovalcem, ki jih bo to zanimalo in bodo raziskovali podobno področje. Želimo si tudi, da bi naše raziskovanje pripomoglo k lažjemu razumevanju matematike ter da bi z nalogo uspeli pokazati, da je lahko geometrija zabavna in se lahko z njo poigravamo na vse možne načine. Pridobljene izkušnje in znanja pa bomo lahko uporabili v prihodnje pri nadaljnjem izobraževanju.

6 VIRI

Berk J., Draksler J., Robič M.

Skrivnosti števil in oblik 8 (2. izdaja). Ljubljana, Rokus Klett, 2013.

Dornik M., Smolej T., Turk M., Vehovec M.

Kocka 8. Matematika za 8. razred osnovne šole (6. prenovljena izdaja). Ljubljana, Modrijan izobraževanje d.o.o., 2019.

Pev M., Mahnič B., Tadina Bence V., Gorše Pihler M., Lešnik V., Šabeder R., Juričinec M., Bajramović N., Štaher A., Hauptman A. (2014)

Matematika 8 – i-učbenik za matematiko v 8. razredu osnovne šole. V Senekovič, J. (ur.). *Ljubljana:* Zavod RS za šolstvo, [datum ogleda: 17. 12. 2021].

Dostopno na: https://eucbeniki.sio.si/