

OBSEG PRSTNE VRTAVKE

Raziskovalno področje: Matematika ali logika

Šola: OŠ borcev za severno mejo, Maribor

Avtorici: Mia Škrobar in Ema Zorec

Mentor: Alenka Repnik

Maribor, 2022

KAZALO

KAZALO SLIK	3
POVZETEK	5
ABSTRACT	5
1 UVOD	6
1.1 Namen in cilj naloge	6
1.2 Hipoteze	6
2 METODOLOGIJA DELA	7
3 VEČKOTNIKI IN KROG	8
3.1 Večkotniki.....	8
3.1.1 Pravilni večkotniki.....	11
3.2 Krog in deli kroga.....	11
3.2.1 Središčna razdalja	12
3.2.2 Obsegi in ploščine kroga in njegovih delov	14
3.3 Podobni in skladni liki.....	15
3.4 Obseg in ploščina sestavljenega lika	16
4 PRSTNE VRTAVKE IN NJIHOV OBSEG	18
4.1 Kako načrtamo n -krako prstno vrtavko	19
4.2 Trikraka prstna vrtavka in njen obseg	24
4.3 Štirikraka prstna vrtavka	28
4.4 Petkraka prstna vrtavka	31
4.5 Šestkraka prstna vrtavka	35
4.6 Sedemkraka prstna vrtavka.....	39
4.7 n -kraka prstna vrtavka	43
5 ZAKLJUČEK	46
6 VIRI	50
6.1 Viri slik	50
PRILOGA 1.....	51

KAZALO SLIK

Slika 1:	Neenostavna nesklenjena lomljenka	8
Slika 2:	Enostavna nesklenjena lomljenka	8
Slika 3:	Neenostavna sklenjena lomljenka	8
Slika 4:	Enostavna sklenjena lomljenka omejuje ravninski lik, večkotnik	9
Slika 5:	Vdrti večkotnik, notranji in zunanji kot večkotnika	10
Slika 6:	Pravilni večkotniki	11
Slika 7:	Krog in krožnica z označenim središčem, polmerom in premerom	11
Slika 8:	Krog in deli kroga	12
Slika 9:	Krožnici imata natanko eno skupno točko, se dotikata od zunaj ali od znotraj	13
Slika 10:	Krožnici nimata skupnih točk	13
Slika 11:	Krožnici se sekata, imata natanko 2 skupni točki	14
Slika 12:	Podobna trikotnika	15
Slika 13:	Skladna petkotnika	16
Slika 14:	Srce – primer sestavljenega lika	16
Slika 15:	Igrača Fidget spinner – prstna vrtavka	18
Slika 16:	Dvo-, tri- in petkraka prstna vrtavka	18
Slika 17:	Trikraka prstna vrtavka	19
Slika 18:	Izbočeni in vbočeni krožni loki omejujejo prstne vrtavke	19
Slika 19:	Načrtovanje petkrake prstne vrtavke – načrtovanje pravilnega n -kotnika.....	20
Slika 20:	Načrtovanje petkrake prstne vrtavke – določitev središč krožnic, ki ležijo med krožnicama s središčem v ogliščih pravilnega n -kotnika	21
Slika 21:	Načrtovanje petkrake vrtavke – določitev dotikalšč krožnic	22
Slika 22:	Načrtovanje petkrake vrtavke – izris »vbočenih« in »izbočenih« krožnih lokov, ki omejujejo vrtavko	22
Slika 23:	Petkraka prstna vrtavka	23
Slika 24:	Pet- in šestkraka prstna vrtavka	23
Slika 25:	Središčni kot φ , ki mu pripada »vbočeni« krožni lok trikrake vrtavke	24
Slika 26:	Središčni kot, ki mu pripada »izbočeni« krožni lok trikrake vrtavke	26
Slika 27:	Središčni kot, ki mu pripada »vbočeni« krožni lok štirikrake vrtavke	28
Slika 28:	Središčni kot, ki mu pripada »izbočeni« krožni lok štirikrake vrtavke.....	29

Slika 29:	Središčni kot, ki mu pripada »vbočeni« krožni lok petkrake vrtavke	31
Slika 30:	Središčni kot, ki mu pripada »izbočeni« krožni lok petkrake vrtavke	32
Slika 31:	Središčni kot, ki mu pripada »vbočeni« krožni lok šestkrake vrtavke	35
Slika 32:	Središčni kot, ki mu pripada »izbočeni« krožni lok šestkrake vrtavke	36
Slika 33:	Središčni kot, ki mu pripada »vbočeni« krožni lok sedemkrake vrtavke	39
Slika 34:	Središčni kot δ , ki mu pripada »izbočeni« krožni lok sedemkrake vrtavke	40
Slika 36:	Različne n -krake prstne vrtavke	45
Slika 37:	Koti, ki jih potrebujemo za izračune dolžin krožnih lokov	47

POVZETEK

Idejo za raziskovalno nalogo smo dobili pri igrači, tako imenovani prstni vrtavki ali bolj znani pod imenom »fidget spinner«. Obris igrače nam da lik, ki ga omejujejo deli krožnic – krožni loki. Sprva smo preučevali vrtavko s tremi »kraki«, nato pa se vprašali, kaj pa če bi imela štiri krake (5, 6 oziroma n krakov). Ugotavljali smo, kakšen je obseg takšnega lika in kako se obseg spreminja, če se spreminja število krakov.

Ključne besede: *obseg, središčni kot, prstna vrtavka, krožni lok, krak*

ABSTRACT

We got the idea for this research paper from a toy named a fidget spinner. The outline of the toy gives us a figure bounded by parts of circles – circular arcs. First we looked at the three edged fidget spinner and then asked ourselves what would happen if it was four edged (5, 6 and n edged). We were trying to find out the circumference of the figure and how it changes if we change the number of edges it has.

Keywords: *circumference, central angle, fidget spinner, arc, edge*

1 UVOD

1.1 Namen in cilj naloge

Namen in cilj pričujoče raziskovalne naloge je raziskati obseg prstne vrtavke. Idejo smo dobili pri igrački, tako imenovani prstni vrtavki, bolj znani pod imenom »fidget spinner«. Obris igračke je lik, ki ga omejujejo deli krožnic – krožni loki.

Naš namen je bil ugotoviti, kakšen je obseg takega lika, glede na število krakov, ki jih ima igračka. Spraševali smo se, ali se obseg spreminja glede na število krakov in če se, kako.

Želeli smo odkriti splošno formulo, s katero lahko izračunamo obseg lika, ne glede na število krakov prstne vrtavke. Raziskovanje smo začeli s trikrako prstno vrtavko, nadaljevali pa s štirikrako, petkrako, šestkrako ...

1.2 Hipoteze

Na podlagi raziskovalnih vprašanj smo pred začetkom raziskovanja postavili naslednje hipoteze.

Hipoteza 1: Središčne razdalje med krožnicami, ki nosijo istovrstne¹ loke, ki omejujejo vrtavke, bodo konstantne; ne glede na število krakov posamezne vrtavke.

Hipoteza 2: Dolžina »izbočenega« krožnega loka je odvisna od števila krakov vrtavke. Z večanjem števila krakov se dolžina tega loka krajša.

Hipoteza 3: Dolžina »vbočenega« krožnega loka je odvisna od števila krakov vrtavke. Z večanjem števila krakov se dolžina tega loka krajša.

Hipoteza 4: Obseg prstne vrtavke je konstanten, ne glede na število krakov, ki jih ima vrtavka.

¹ Istovrstna loka sta, npr. dva izbočena loka prav tako sta istovrstna vbočena loka.

2 METODOLOGIJA DELA

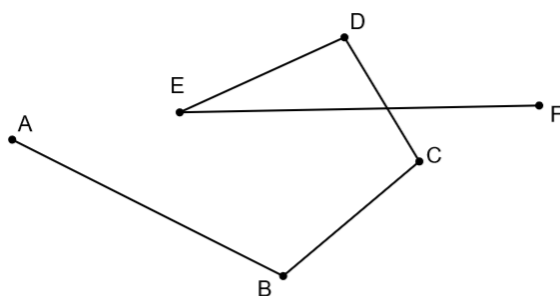
Pri raziskovanju smo uporabili več metod dela. Predvsem smo se opirali na metodi opazovanja in zbiranja podatkov. Uporabili smo številne slikovne prikaze; s pomočjo opazovanja le-teh smo ugotavljali tudi vzorce sprememb. Dobljene rezultate smo sistematično in dosledno zbirali in urejali. Slikovne prikaze smo risali ročno, z geometrijskim orodjem kot tudi s pomočjo programa za dinamično geometrijo – geogebra. Uporabili smo tudi metode načrtovanja, računanja in sklepanja.

3 VEČKOTNIKI IN KROG

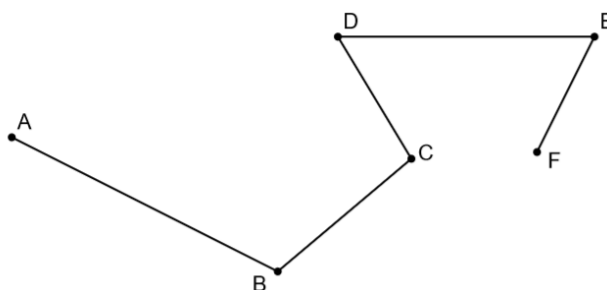
3.1 Večkotniki

Niz daljic, ki se zaporedoma stikajo v krajiščih, imenujemo lomljenka. Lomljenko sestavlja poljubno število daljic in je lahko sklenjena ali nesklenjena. Glede na to, ali daljice v lomljenki sekajo ena drugo, ločimo:

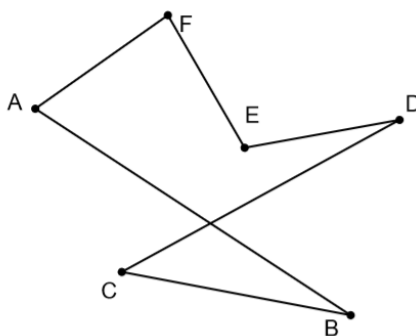
- enostavne lomljenke – daljice ne sekajo ena druge,
- neenostavne lomljenke – vsaj ena daljica preseka drugo daljico.



Slika 1: Neenostavna nesklenjena lomljenka (vir: avtor)

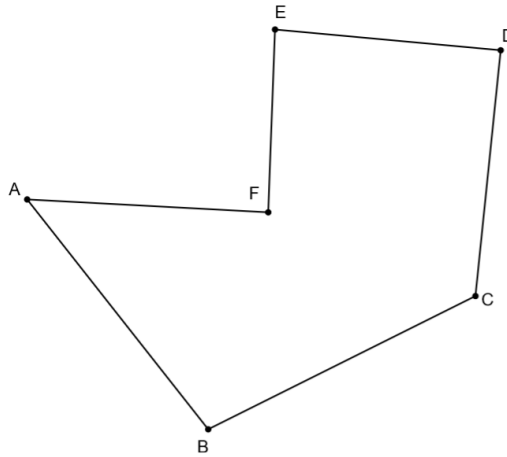


Slika 2: Enostavna nesklenjena lomljenka (vir: avtor)



Slika 3: Neenostavna sklenjena lomljenka (vir: avtor)

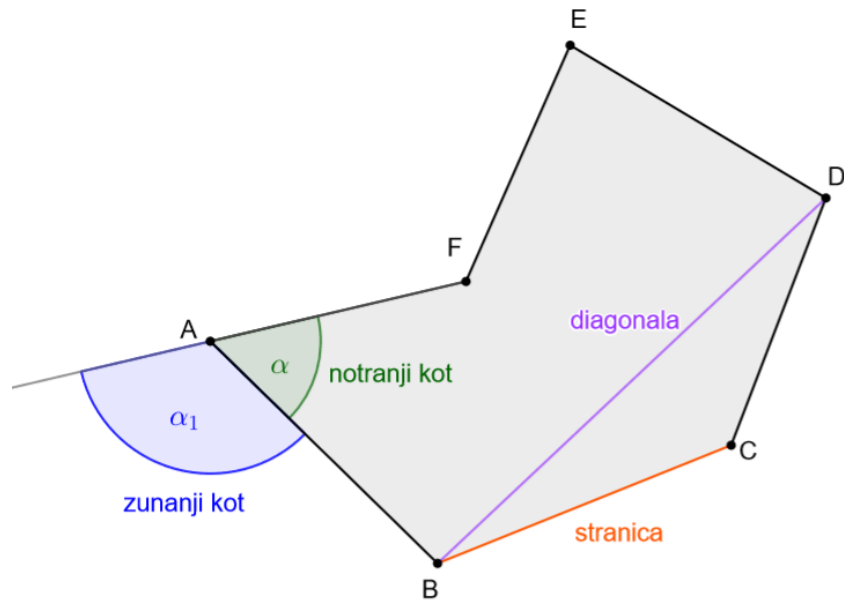
Enostavna sklenjena lomljenka omejuje del ravnine, to je večkotnik. Enostavna sklenjena lomljenka je črta sestavljena iz daljic, od katerih se zaporedni daljici stikata v skupnem krajišču, zadnja daljica pa se stika s prvo.



Slika 4: Enostavna sklenjena lomljenka omejuje ravninski lik, večkotnik (vir: avtor)

Daljica, ki povezuje sosednji oglišči večkotnika, je stranica. Daljica, ki povezuje nesosednji oglišči, se imenuje diagonalna.

Vsak večkotnik ima natanko toliko notranjih kotov, kot ima oglišč. Sokot notranjega kota večkotnika je zunanji kot večkotnika. Notranji kot večkotnika ima vrh v oglišču večkotnika, kraka pa ležita na stranicah večkotnika. Notranji koti vsebujejo notranjost večkotnika. Če je vsak notranji kot večkotnika manjši od iztegnjenega, je večkotnik izbočen ali konveksen. Če v večkotniku obstaja vsaj en notranji kot, ki je večji od 180° , je večkotnik vdrt (tudi udrt ali vbočeni) ali konkaven. Zunanji kot večkotnika je sokot notranjega kota, torej skupaj merita 180° . Posledično zunanji kot obstaja le, če je notranji kot manjši od 180° .



Slika 5: Vdrti večkotnik, notranji in zunanji kot večkotnika (vir: avtor)

Večkotnike poimenujemo po številu oglišč (stranic, notranjih kotov). Tako je večkotnik, ki ga omejujejo tri stranice (ima tri oglišča), trikotnik. Večkotnik, ki ga omejujejo štiri stranice (ima štiri oglišča), je štirikotnik, petkotnik omejuje pet stranic (ima pet oglišč) ... Tako je n -kotnik večkotnik, ki ga omejuje natanko n stranic ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) in ima torej tudi n oglišč.

Število diagonal večkotnika je odvisno od števila oglišč, ki večkotnik omejujejo. Število diagonal n -kotnika (d_n) je:

$$d_n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Zanimivo za nas je tudi dejstvo, da lahko poljubnemu vdrtemu večkotniku izračunamo vsoto notranjih kotov in prav tako vsoto zunanjih kotov.

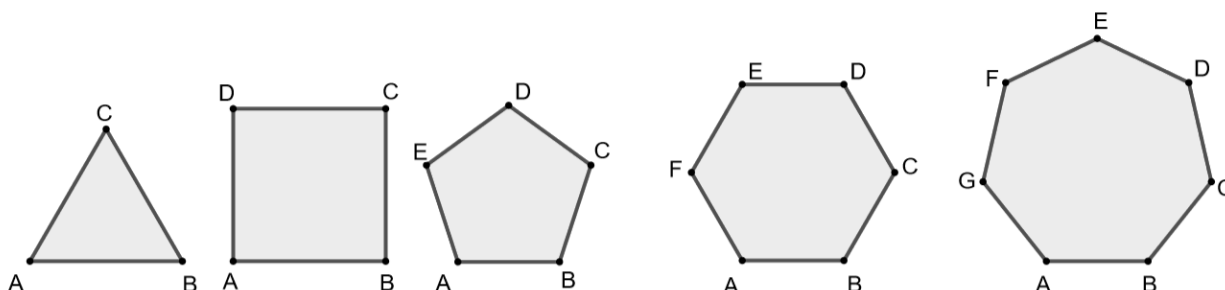
Vsota notranjih kotov vdrtega n -kotnika je enaka:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$

Vsota zunanjih kotov vdrtega n -kotnika je vedno enaka 360° .

3.1.1 Pravilni večkotniki

Večkotnik (n -kotnik) je pravilen, če ima skladne vse stranice in vse notranje kote. Pravilni n -kotnik je vedno konveksen.



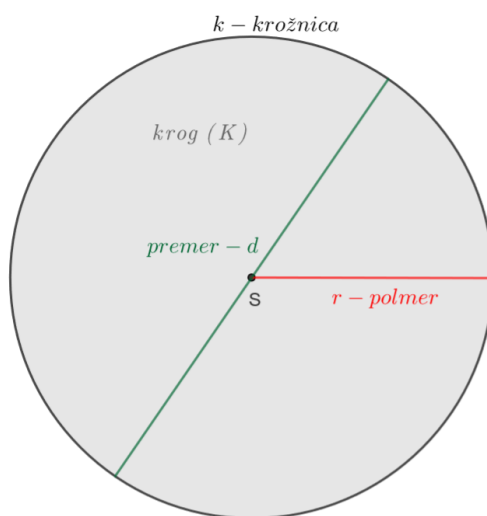
Slika 6: Pravilni večkotniki (vir: avtor)

3.2 Krog in deli kroga

Krog je geometrijski lik omejen s krožnico. Krožnica je sklenjena kriva črta, za katero velja, da so vse točke na njej enako oddaljene od središča kroga.

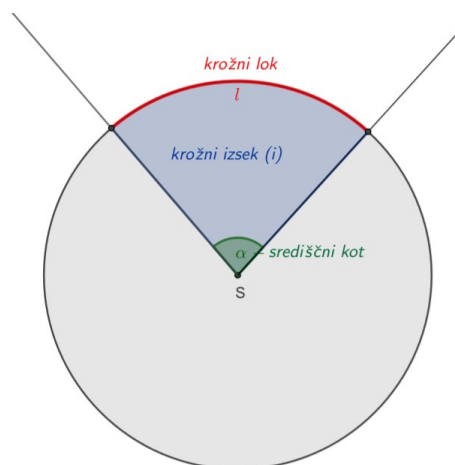
Polmer (r) je daljica, ki ima eno krajišče v središču kroga, drugo na krožnici. Označuje razdaljo med središčem kroga in točkami na krožnici.

Premer (d) je daljica, ki ima obe krajišči na krožnici in gre skozi središče, torej krog razpolovi. Za premer velja, da je njegova dolžina dvakratnik polmera $d = 2r$.



Slika 7: Krog in krožnica z označenim središčem, polmerom in premerom (vir: avtor)

Središčni kot (α) je kot, ki ima vrh v središču kroga. Del krožnice, ki pripada središčnemu kotu α , je krožni lok (l). Krožni lok je torej del krožnice, omejen z dvema točkama (točki sta presečišči krakov središčnega kota s krožnico). Del kroga, ki pripada središčnemu kotu α , je krožni izsek (i). Krožni izsek omejujejo krožni lok in kraka središčnega kota (polmera).



Slika 8: Krog in deli kroga (vir: avtor)

3.2.1 Središčna razdalja

Razdaljo med središčema dveh krožnic (krogov) imenujemo središčna razdalja. Glede na središčno razdaljo je medsebojna lega dveh krožnic lahko različna.

Kadar je središčna razdalja enaka vsoti polmerov obeh krožnic

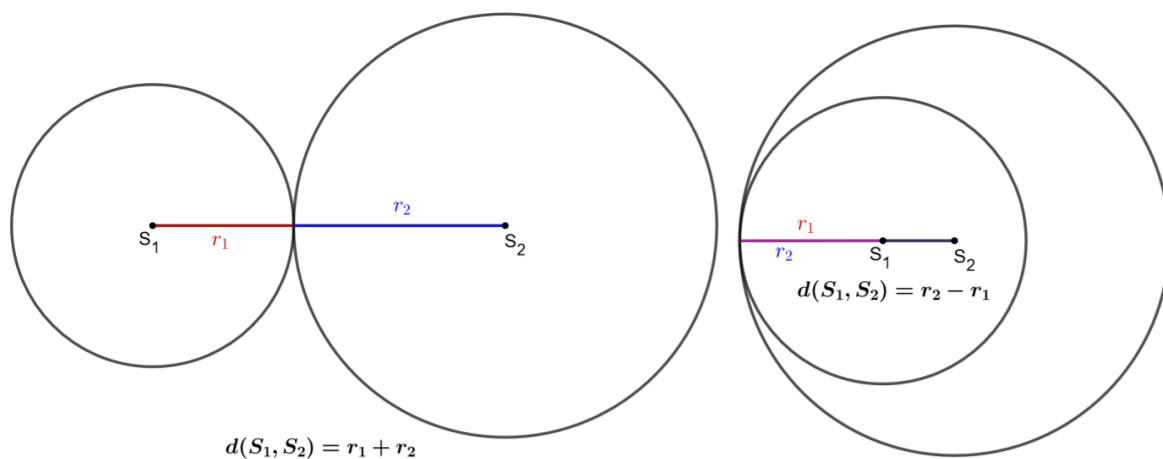
$$d(S_1, S_2) = r_1 + r_2,$$

se krožnici dotikata od zunaj, imata natanko eno skupno točko.

Kadar je središčna razdalja enaka razliki polmerov obeh krožnic

$$d(S_1, S_2) = r_2 - r_1,$$

se krožnici dotikata od znotraj, imata prav tako natanko eno skupno točko.



Slika 9: Krožnici imata natanko eno skupno točko, se dotikata od zunaj ali od znotraj (vir: avtor)

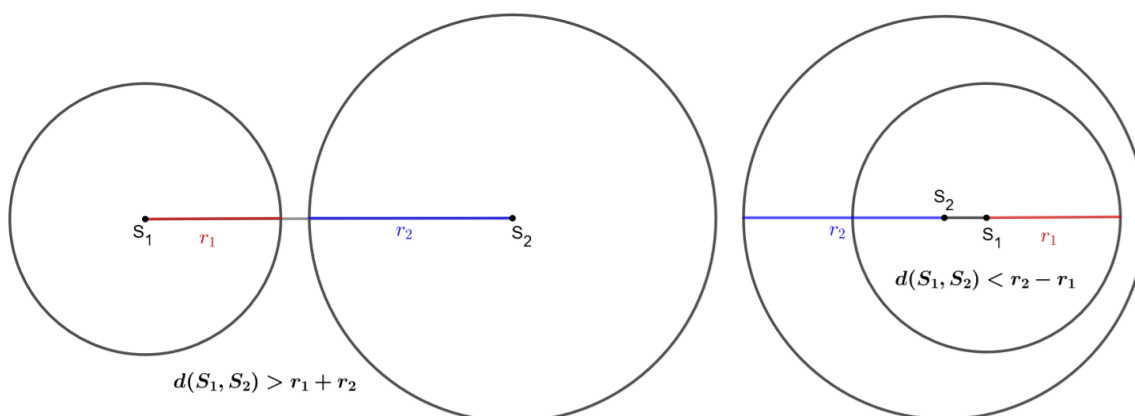
Kadar je središčna razdalja manjša od razlike polmerov obeh krožnic

$$d(S_1, S_2) < r_2 - r_1,$$

ali pa večja od vsote polmerov obeh krožnic

$$d(S_1, S_2) > r_1 + r_2,$$

krožnici nimata skupnih točk. Ležita ena ob drugi ali ena v drugi.

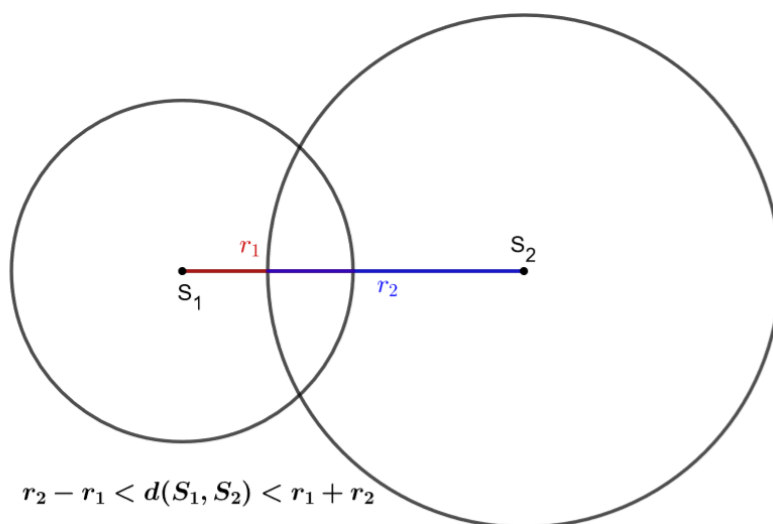


Slika 10: Krožnici nimata skupnih točk (vir: avtor)

Kadar je središčna razdalja manjša od vsote polmerov obeh krožnic in hkrati večja od razlike polmerov obeh krožnic

$$r_2 - r_1 < d(S_1, S_2) < r_1 + r_2,$$

imata krožnici dve skupni točki, se sekata.



Slika 11: Krožnici se sekata, imata natanko 2 skupni točki (vir: avtor)

3.2.2 Obsegi in ploščine kroga in njegovih delov

Obseg kroga (o) je dolžina krožnice, ki ga omejuje. Odvisen je od polmera kroga oziroma krožnice.

$$o = 2\pi r$$

Ploščina kroga (p) je velikost ploskve, ki jo krog pokrije in je prav tako odvisna od polmera.

$$p = \pi r^2$$

Dolžina krožnega loka (l) je odvisna od polmera kroga in središčnega kota, ki mu lok pripada. Izračunamo jo:

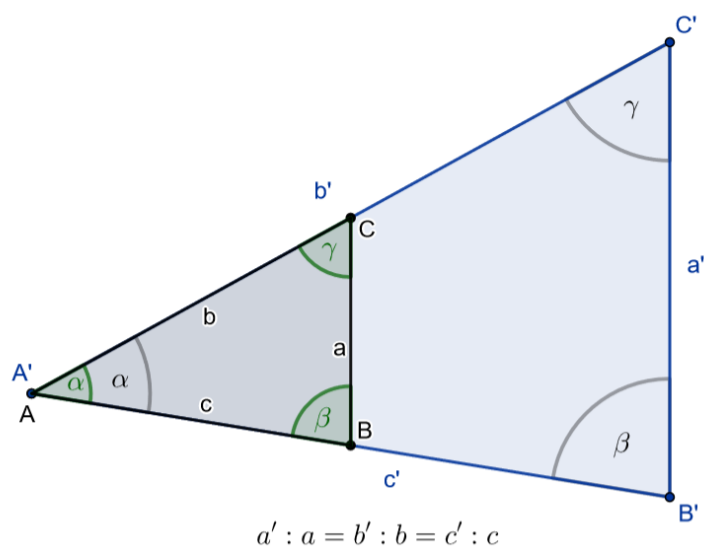
$$l = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi r \cdot \alpha}{180^\circ}$$

Ploščina krožnega izseka (p_i) je prav tako odvisna od polmera kroga in od središčnega kota, ki mu izsek pripada in jo izračunamo

$$p_i = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$$

3.3 Podobni in skladni liki

Pravimo, da sta lika podobna, če imata skladne istoležne kote, vsak par istoležnih stranic pa je v enakem razmerju.



Slika 12: Podobna trikotnika (vir: avtor)

Razmerje istoležnih stranic podobnega in originalnega lika imenujemo podobnostni koeficient (k).

$$k = a' : a = \frac{a'}{a}$$

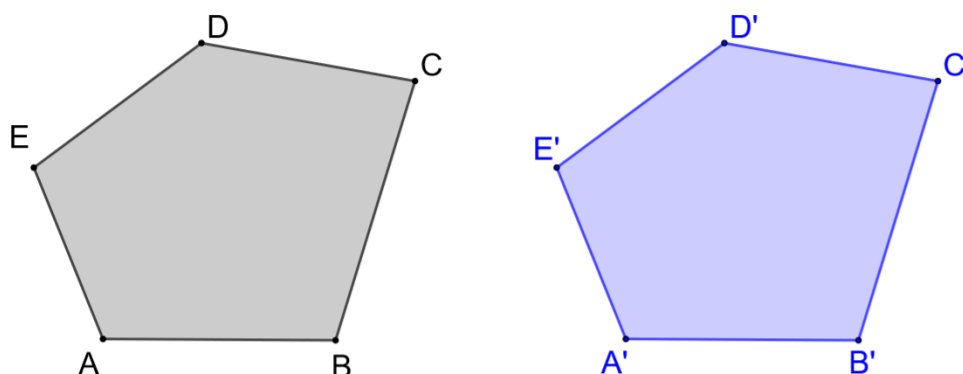
Razmerje obsegov podobnih likov je enako $o' : o$ in je enako podobnostnemu koeficientu (k).

$$o' : o = k$$

Za ploščine pa velja, da je razmerje ploščin podobnega in originalnega lika enako kvadratu podobnostnega koeficienta.

$$p' : p = k^2$$

Lika sta skladna, ko imata skladne istoležne kote, njune istoležne stranice pa so prav tako skladne. Taka lika se pri prekrivanju natanko ujameta.



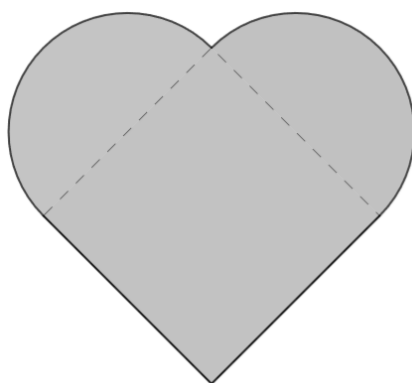
Slika 13: Skladna petkotnika (vir: avtor)

3.4 Obseg in ploščina sestavljenega lika

Pogosto imamo opraviti z liki, ki so sestavljeni iz več osnovnih geometrijskih likov ali njihovih delov. Rečemo jim lahko kar sestavljeni liki. Sestavljen lik je torej geometrijski lik, ki je sestavljen iz delov ali več drugih, enostavnejših likov, kot so štirikotniki, trikotniki, krog ...

Pri izračunavanju obsega in ploščine sestavljenega lika si pomagamo z razdelitvijo lika na enostavnejše, nam že znane like. Obseg sestavljenega lika izračunamo tako, da enostavno seštejemo dolžine posameznih črt (daljic, krožnic, krožnih lokov ...), ki ga omejujejo.

Na sliki spodaj je srce, ki ga sestavljajo kvadrat in dva polkroga.



Slika 14: Srce – primer sestavljenega lika (vir: avtor)

Obseg srca je enak vsoti dolžin črt, ki ga omejujejo. To pa sta dve stranici kvadrata in dve polovici dolžine krožnice s polmerom $\frac{a}{2}$.

$$o_{srca} = 2a + 2 \frac{o_o}{2}$$

$$o_{srca} = 2a + 2 \frac{2\pi \frac{a}{2}}{2}$$

$$o_{srca} = 2a + \pi a = a \cdot (2 + \pi)$$

Ploščino srca sestavljajo kvadrat in dve polovici kroga (torej en celi krog) s polmerom $\frac{a}{2}$.

Ploščino bomo torej izračunali po spodaj zapisanem obrazcu.

$$p_{srca} = p_{\square} + 2 \frac{p_o}{2}$$

$$p_{srca} = a^2 + 2 \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}$$

$$p_{srca} = a^2 + \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Tudi oblika prstne vrtavke je sestavljen lik. Tako smo enako strategijo izračunavanja obsegov, kot smo ga prikazali na primeru srca, imeli tudi pri našem raziskovanju obsega prstnih vrtavk, na katere smo se osredotočili v nalogi.

4 PRSTNE VRTAVKE IN NJIHOV OBSEG

Prstne vrtavke so igrače, pogostejše poznane pod angleškim imenom »fidget spinner«. Nas je pritegnila predvsem njena oblika. Običajno imajo te igrače tri krake, kakor smo poimenovali izbočene dele lika.



Slika 15: Igrača Fidget spinner – prstna vrtavka (vir: <https://www.vkf-renzel.com/fidget-spinner-in-bright-colours-13953.html>)

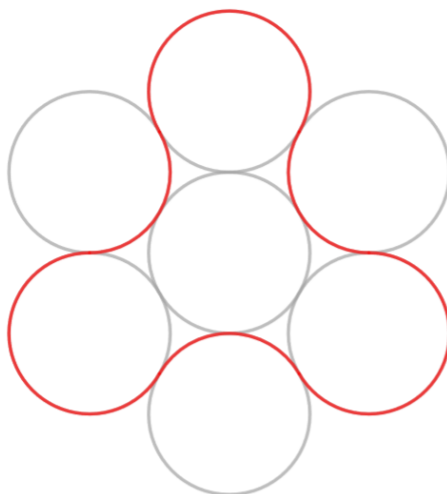
Sprva smo tako raziskali trikrako prstno vrtavko, kasneje pa smo se lotili raziskovanja štirikrakah, petkrakah, šestkrakah in večkrakah (n -krakah) prstnih vrtavk. Raziskovali smo, kolikšen je obseg posamezne prstne vrtavke, in ali se obseg spreminja in kako glede na število krakov vrtavke.



Slika 16: Dvo-, tri- in petkraka prstna vrtavka
(vir: <https://www.ubuy.vn/en/product/1AH3ZQ1OG-figrol-fidget-spinner-3-pack-simple-dimple-fidget-toys-push-pop-bubble-fidget-spinner-stress-relief-and-anxiety-fidget-toy-for-kids>)

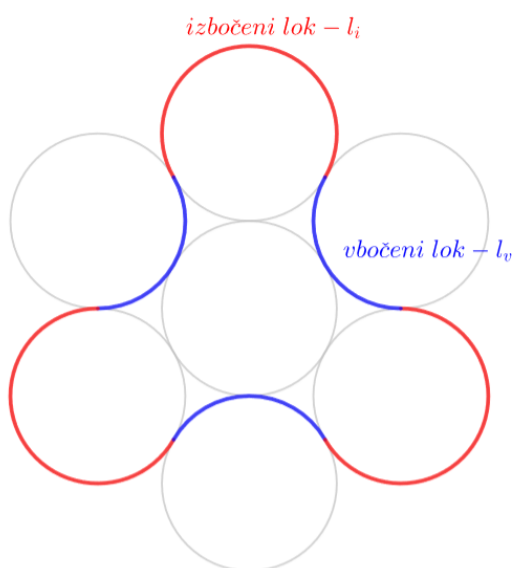
4.1 Kako načrtamo n -krako prstno vrtavko

Začetni izziv raziskovanja je bil načrtati prstno vrtavko. S pozornim opazovanjem fotografij prstnih vrtavk smo preizkušali različne ideje, kako jo načrtati. Končno smo prišli do ustrezne slike.



Slika 17: Trikraka prstna vrtavka (vir: avtor)

Vsako n -krako prstno vrtavko omejuje enako število »izbočenih« in »vbočenih« krožnih lokov, in sicer vsakih po n . Z načrtovanjem različnih prstnih vrtavk in pozornim opazovanjem smo ugotovili, da se dolžine »izbočenih« krožnih lokov (l_i) krajšajo, hkrati pa se krajšajo tudi dolžine »vbočenih« krožnih lokov (l_v).



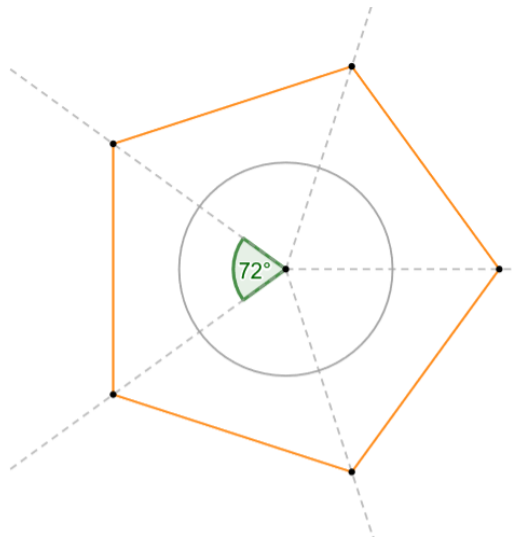
Slika 18: Izbočeni in vbočeni krožni loki omejujejo prstne vrtavke (vir: avtor)

Kako torej načrtamo prstno vrtavko?

Krožnici s središčem S in polmerom r vrišemo ustrezno velike središčne kote. Središčni kot določimo glede na število krakov prstne vrtavke. Sovpada z velikostjo zunanjega kota pravilnega večkotnika² (n -kotnika), ki ima prav toliko stranic, kot bo imela prstna vrtavka krakov (n). Središčni kot (α) je enak

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}.$$

Oglišča pravilnega n -kotnika so od središča izhodiščne krožnice (S) oddaljena za $2r$ in ležijo na krakih narisanih središčnih kotov.



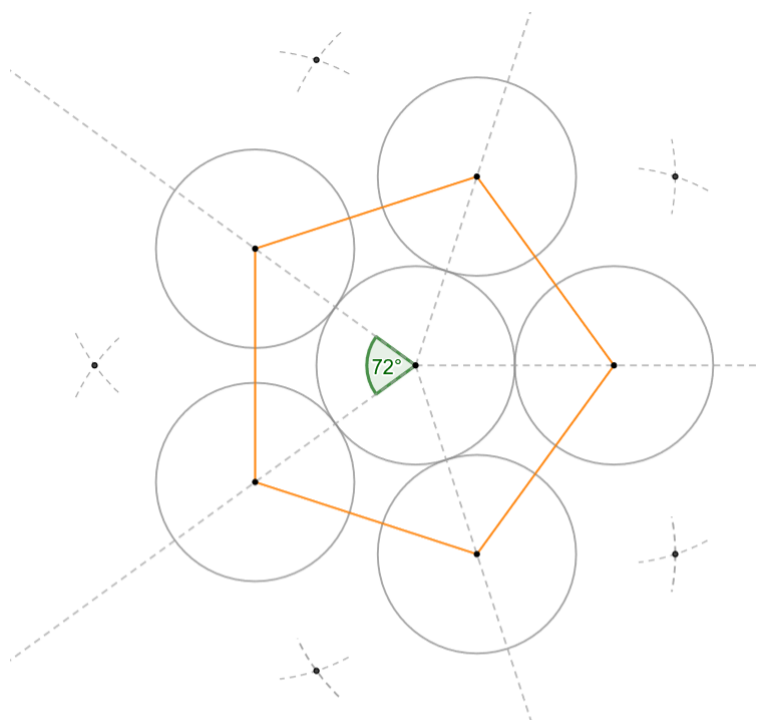
Slika 19: Načrtovanje petkrake prstne vrtavke – načrtovanje pravilnega n -kotnika (vir: avtor)

Nato načrtamo krožnice z enakim polmerom, kot ga ima izhodiščna krožnica (torej polmer dolžine r) s središči v ogliščih pravilnega n -kotnika.

Med krožnici, ki imata središči v sosednjih ogliščih pravilnega n -kotnika, vrišemo krožnico s polmerom r , ki se bo obeh že narisanih sosednjih krožnic dotikala. Torej je središčna razdalja do obeh že narisanih krožnic enaka, in sicer ima dolžino $2r$. Torej poiščemo točko, ki je od sosednjih oglišč n -kotnika oddaljena $2r$ in leži znotraj n -kotnika. Na enak način poiščemo

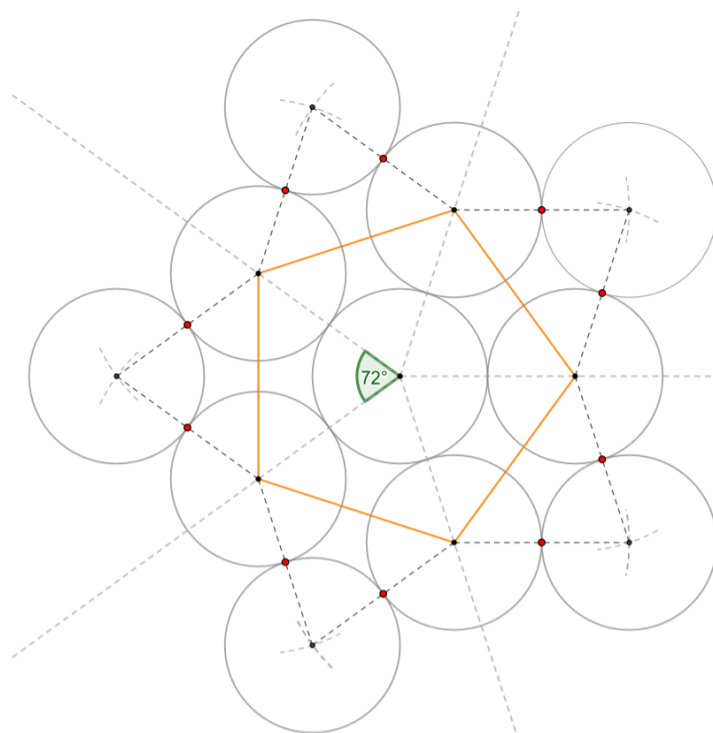
² Zunanji kot pravilnega n -kotnika namreč hkrati sovpada tudi z velikostjo središčnega kota, ki ga potrebujemo za načrtovanje v krožnico včrtanih pravilnih večkotnikov.

središča preostalih krožnic, ki se dotikajo krožnic s središči v ogliščih trikotnika. Končno načrtamo vse krožnice, ki smo jim tako določili središča.



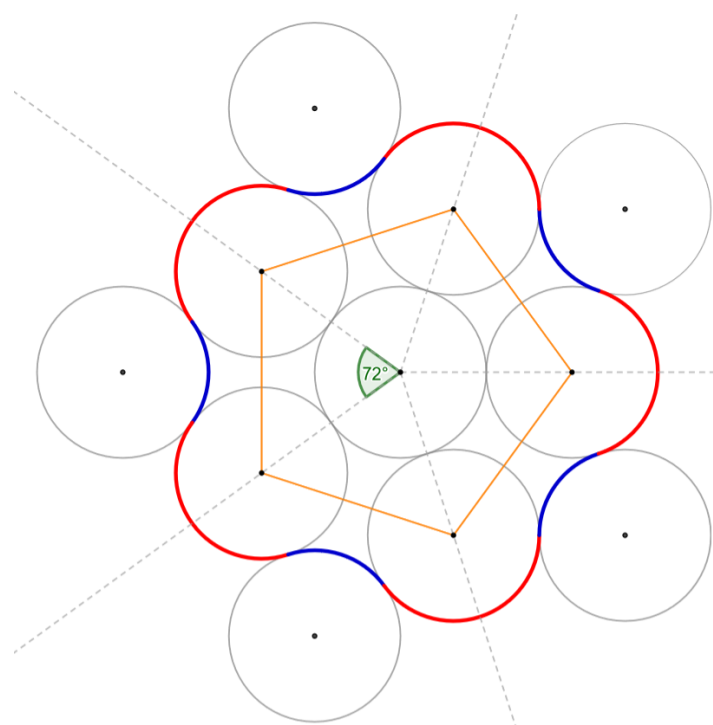
Slika 20: Načrtovanje petkrake prstne vrtavke – določitev središč krožnic, ki ležijo med krožnicama s središčem v ogliščih pravilnega n -kotnika (vir: avtor)

Zdaj določimo dotikališča tistih krožnic, ki ležijo izven n -kotnika in tistih, ki imajo središča v ogliščih n -kotnika. To so razpolovišča daljic, ki povezujejo središči krožnic dveh dotikajočih se krožnic (brez dotikališč z izhodiščno krožnico). Ta dotikališča krožnic namreč določajo krožne loke, ki omejujejo prstno vrtavko.

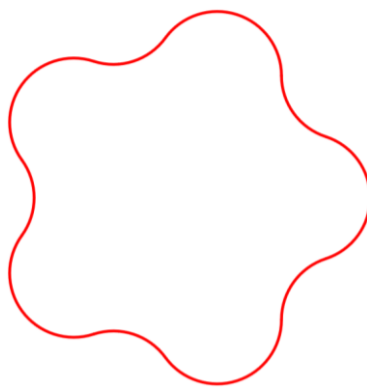


Slika 21: Načrtovanje petkrake vrtavke – določitev dotikališč krožnic (vir: avtor)

Končno le še narišemo loke od dotikališča do dotikališča, in sicer tako, da na krožnicah s središči v ogliščih večkotnika narišemo »izbočene« loke, na preostalih pa »vbočene« loke.



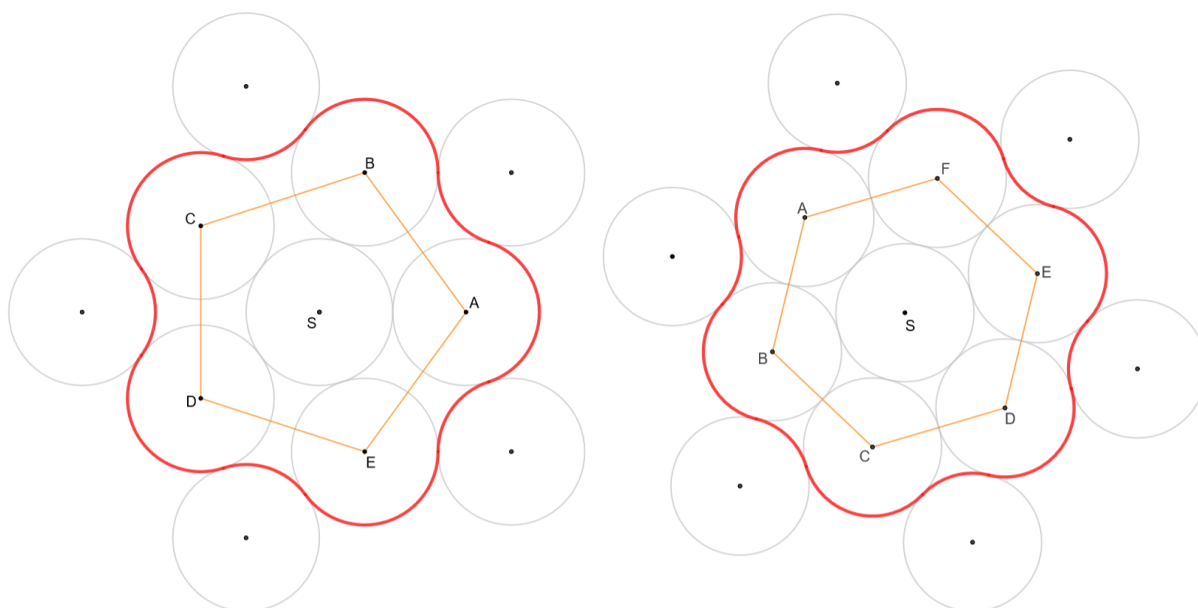
Slika 22: Načrtovanje petkrake vrtavke – izris »vbočenih« in »izbočenih« krožnih lokov, ki omejujejo vrtavko (vir: avtor)



Slika 23: Petkraka prstna vrtavka (vir: avtor)

Po več načrtanih prstnih vrtavkah smo ugotovili, da se središčne razdalje med krožnicami, ki nosijo istovrstne krožne loke, ki omejujejo posamezne vrtavke, več kot očitno spreminjajo glede na število krakov vrtavke. Pri posamezni vrtavki so te razdalje sicer vedno enake, vendar pa se med vrtavkami spreminjajo glede na število njenih krakov; tako središčne razdalje med krožnicami, ki nosijo »izbočene« krožne loke, kot tudi med krožnicami, ki nosijo »vbočene« krožne loke.

Središčna razdalja med krožnicama, ki nosita sosednja »izbočena« loka petkrake vrtavke, je zagotovo večja od $2r$, saj se krožnici ne stikata (glej sliko spodaj levo). Na sliki spodaj desno je hkrati jasno vidno, da je središčna razdalja med krožnicama, ki nosita sosednja »izbočena« loka šestkrake vrtavke, enaka natanko $2r$, saj se ti krožnici stikata.

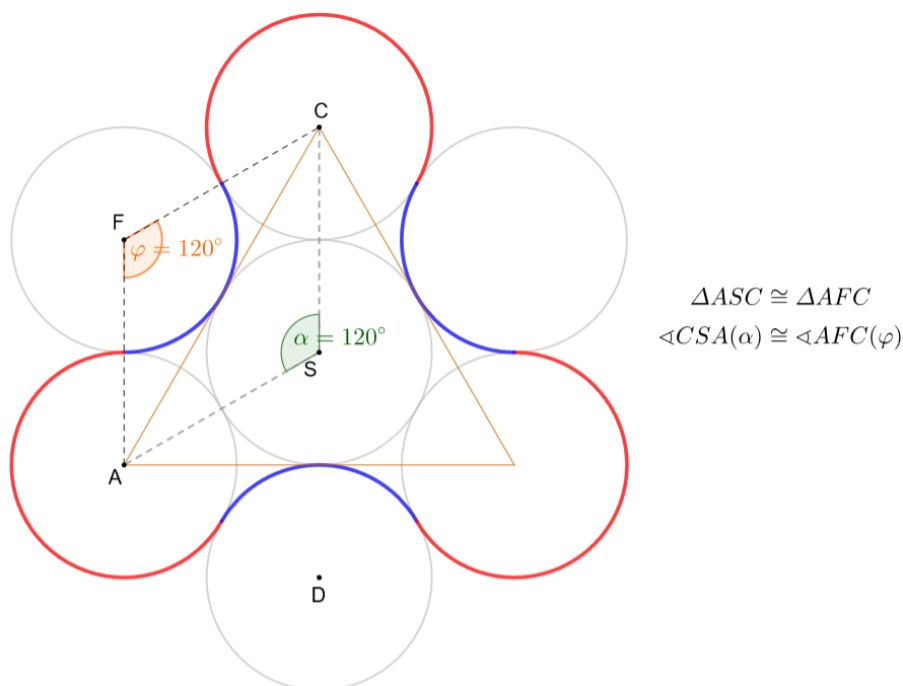


Slika 24: Pet- in šestkraka prstna vrtavka (vir: avtor)

4.2 Trikraka prstna vrtavka in njen obseg

Trikraka prstna vrtavka ima, kot pove že njeno ime, tri tako imenovane krake.

Pri načrtovanju trikrake prstne vrtavke po že zapisanem postopku vrtavko najprej načrtamo. Ko določamo dotikališča krožnic, katerih deli tvorijo obseg prstne vrtavke, lahko to naredimo načrtovalno, vendar pa bomo za izračun obsega potrebovali še nekaj podatkov. Da bi lahko izračunali dolžine posameznih krožnih lokov potrebujemo središče kote, ki jim ti loki pripadajo.



Slika 25: Središčni kot φ , ki mu pripada »vbočeni« krožni lok trikrake vrtavke (vir: avtor)

Trikotnika $\triangle ASC$ in $\triangle AFC$ sta skladna. Oba sta enakokraka, s krakoma dolžine $2r$.

$$|AS| \cong |AF|$$

$$|SC| \cong |FC|$$

Tretja stranica obeh trikotnikov pa je skupna, to je stranica $|AC|$. Ta stranica je hkrati stranica enakostraničnega trikotnika. Ker sta trikotnika skladna in središčni kot (α), ki ima vrh v središču izhodiščne krožnice (S), meri 120° ($\alpha = \frac{360^\circ}{n}$), prav toliko meri tudi središčni kot φ , z vrhom v točki F , ki je središče krožnice, del katere bo »vbočeni« krožni lok prstne vrtavke.

Obseg izhodiščnega kroga (o_K) s polmerom r meri:

$$o_K = 2\pi r$$

Prav takšni so tudi obsegi vseh ostalih načrtanih krogov, saj so vsi skladni z izhodiščnim krogom.

Zato je dolžina krožnega loka (l_v), ki pripada središčnemu kotu φ (to je dolžina »vbočenega« loka prstne vrtavke):

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot 120^\circ}{360^\circ}$$

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot 1}{3}$$

$$l_v = \frac{2\pi r}{3}$$

Dolžina tega loka predstavlja torej natanko tretjino obsega izhodiščnega kroga.

$$l_v = \frac{1}{3} o_K$$

»Izbočeni« loki ležijo na krožnicah, ki imajo središča v ogliščih enakostraničnega trikotnika in pripadajo kotu δ :

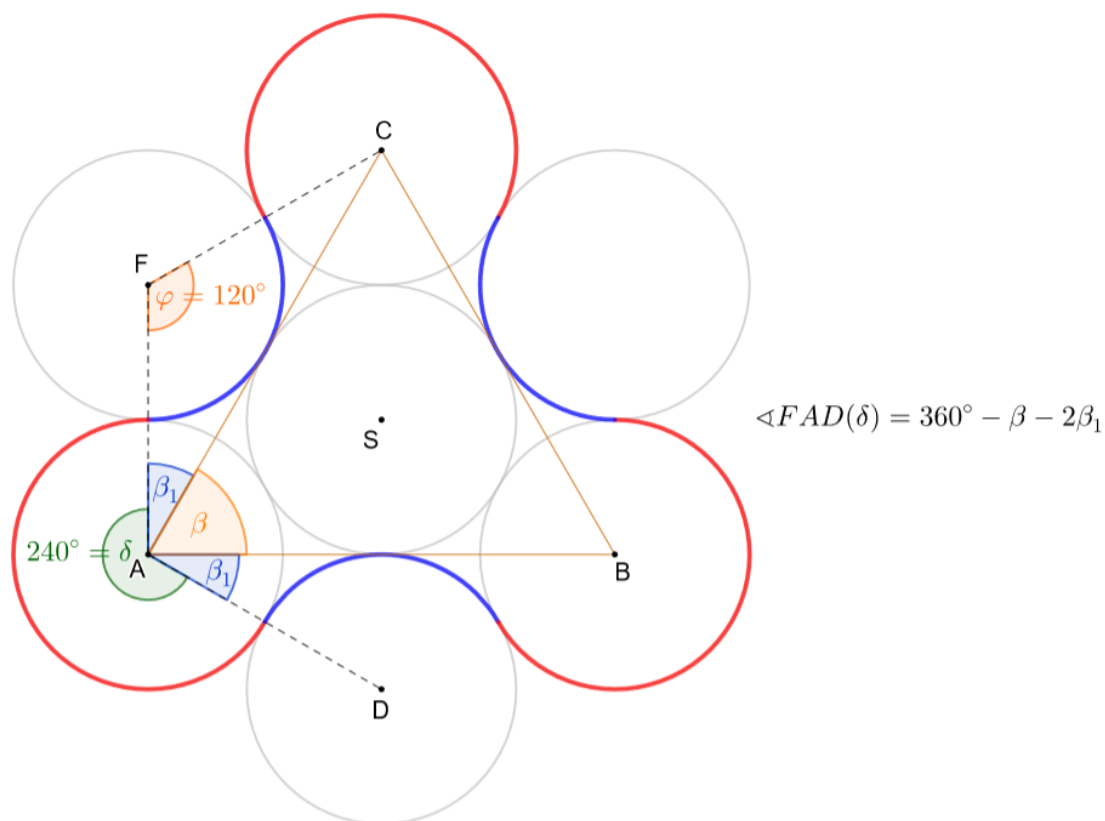
$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$

Kot β je notranji kot enakostraničnega trikotnika $\triangle ABC$ in torej meri 60° . Kot β_1 je kot ob kraku enakokrakega trikotnika $\triangle AFC$, zato meri:

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2}$$

$$\beta_1 = 30^\circ$$



Slika 26: Središčni kot, ki mu pripada »izbočeni« krožni lok trikrake vrtavke (vir: avtor)

Kot δ , ki mu pripada »izbočeni« lok, ki omejuje trikrako prstno vrtavko, tako meri:

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$

$$\delta = 360^\circ - 60^\circ - 2 \cdot 30^\circ$$

$$\delta = 240^\circ$$

Dolžina »izbočenega« krožnega loka (l_i), ki omejuje vrtavko, je:

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 240^\circ}{360^\circ}$$

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 2}{3}$$

$$l_i = \frac{4\pi r}{3}$$

Torej dolžina »izbočenega« loka predstavlja ravno dve tretjini obsega izhodiščnega kroga.

$$l_i = \frac{2}{3} o_K$$

Obseg trikrake prstne vrtavke (o_{V3}) je sestavljen iz šestih krožnih lokov, ki jo sestavljajo; treh »vbočenih« in treh »izbočenih«. Vsota dolžin teh lokov je enaka obsegu vrtavke.

$o_{V3} = 3 \cdot l_v + 3 \cdot l_i$	<i>oziroma</i>	$o_{V3} = 3 \cdot l_v + 3 \cdot l_i$
$o_{V3} = 3(l_v + l_i)$		$o_{V3} = 3(l_v + l_i)$
$o_{V3} = 3 \left(\frac{2\pi r}{3} + \frac{4\pi r}{3} \right)$		$o_{V3} = 3 \left(\frac{1}{3} o_K + \frac{2}{3} o_K \right)$
$o_{V3} = 3 \cdot \frac{6\pi r}{3}$		$o_{V3} = 3 \cdot o_K$
$o_{V3} = 6\pi r$		$o_{V3} = 6\pi r$

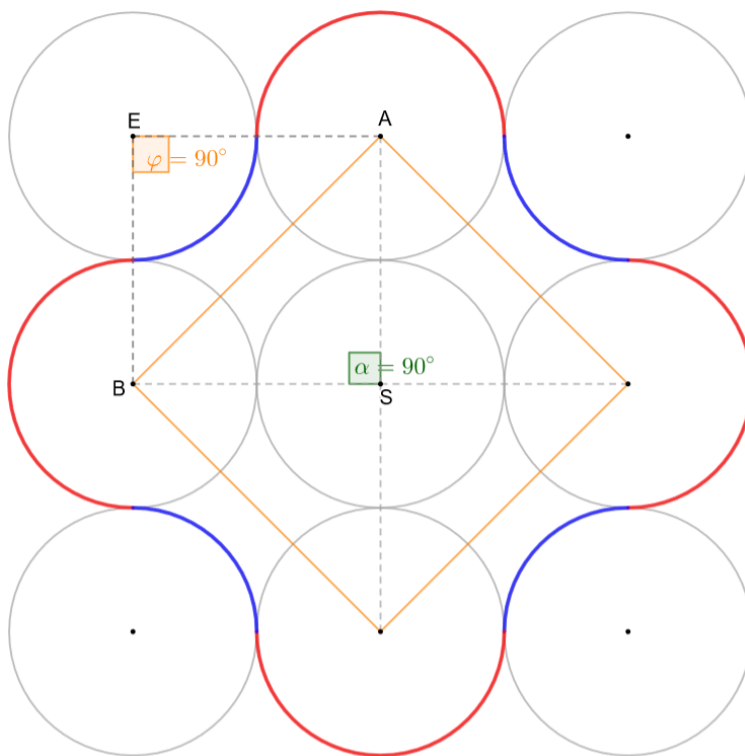
Obseg trikrake prstne vrtavke je torej enak trikratniku obsega izhodiščnega kroga.

$$o_{V3} = 3o_K$$

4.3 Štirikraka prstna vrtavka

Štirikraka prstna vrtavka ima štiri tako imenovane krake. Za načrtanje pravilnega štirikotnika (kvadrata) narišemo središčni kot (α) z vrhom v središču izhodiščne krožnice (S), ki meri 90° , saj je:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$



Slika 27: Središčni kot, ki mu pripada »vbočeni« krožni lok štirikrake vrtavke (vir: avtor)

Iz skladnosti trikotnikov $\triangle ABS$ in $\triangle ABE$ sledi skladnost kotov $\sphericalangle ASB$ (α) in $\sphericalangle BEA$ (φ). To pomeni, da »vbočeni« loki, ki omejujejo štirikrako vrtavko, pripadajo središčnemu kotu velikosti 90° . Tako dolžina tega loka (l_v) meri:

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot 90^\circ}{360^\circ}$$

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot 1}{4}$$

$$l_v = \frac{2\pi r}{4}$$

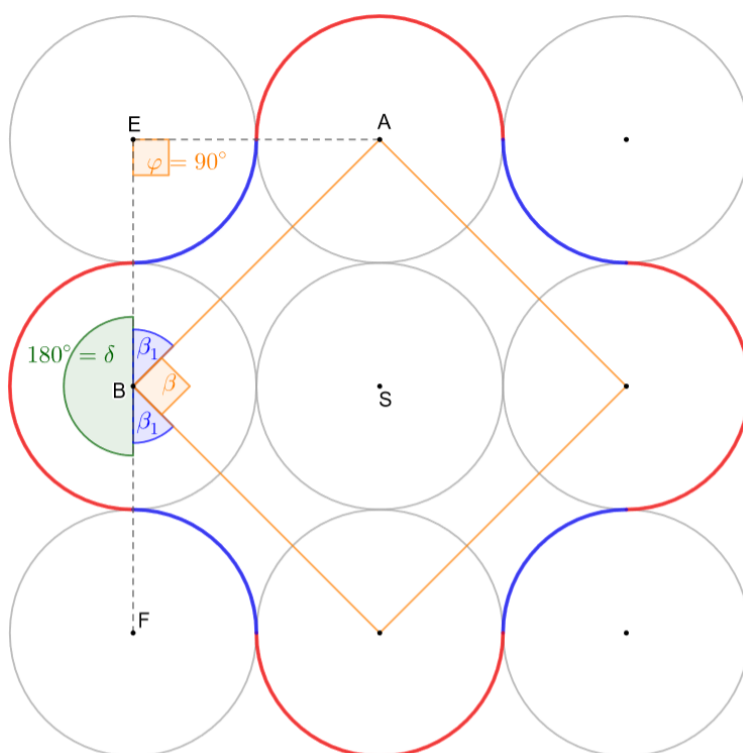
$$l_v = \frac{\pi r}{2}$$

Dolžina tega loka predstavlja torej natanko četrtnino obsega izhodiščnega kroga.

$$l_v = \frac{1}{4} o_K$$

»Izbočeni« loki ležijo na krožnicah, ki imajo središča v ogliščih kvadrata in pripadajo kotu δ :

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$



Slika 28: Središčni kot, ki mu pripada »izbočeni« krožni lok štirikrake vrtavke (vir: avtor)

Kot β je notranji kot kvadrata, zato meri 90° . Kot β_1 je kot ob kraku enakokrakega trikotnika $\triangle ABE$, zato meri:

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2}$$

$$\beta_1 = 45^\circ$$

Kot δ , ki mu pripada »izbočeni« lok, ki omejuje štirikrako prstno vrtavko, meri:

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$

$$\delta = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 45^\circ$$

$$\delta = 180^\circ$$

Dolžina »izbočenega« krožnega loka (l_i), ki omejuje vrtavko, je:

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 180^\circ}{360^\circ}$$

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 1}{2}$$

$$l_i = \pi r$$

Torej dolžina »izbočenega« loka predstavlja ravno polovico obsega izhodiščnega kroga (oziroma dve četrtini).

$$l_i = \frac{1}{2} o_K$$

Obseg štirikrake prstne vrtavke (o_{V4}) je sestavljen iz osmih krožnih lokov, ki jo sestavljajo, štirih »vbočenih« in štirih »izbočenih«. Vsota dolžin teh lokov je enaka obsegu vrtavke.

$$o_{V4} = 4 \cdot l_v + 4 \cdot l_i$$

oziroma

$$o_{V4} = 4 \cdot l_v + 4 \cdot l_i$$

$$o_{V4} = 4(l_v + l_i)$$

$$o_{V4} = 4(l_v + l_i)$$

$$o_{V4} = 4 \left(\frac{\pi r}{2} + \pi r \right)$$

$$o_{V4} = 4 \left(\frac{1}{4} o_K + \frac{1}{2} o_K \right)$$

$$o_{V4} = 4 \left(\frac{\pi r}{2} + \frac{2\pi r}{2} \right)$$

$$o_{V4} = 4 \left(\frac{1}{4} o_K + \frac{2}{4} o_K \right)$$

$$o_{V4} = 4 \cdot \frac{3\pi r}{2}$$

$$o_{V4} = 3 \cdot o_K$$

$$o_{V4} = 6\pi r$$

$$o_{V4} = 6\pi r$$

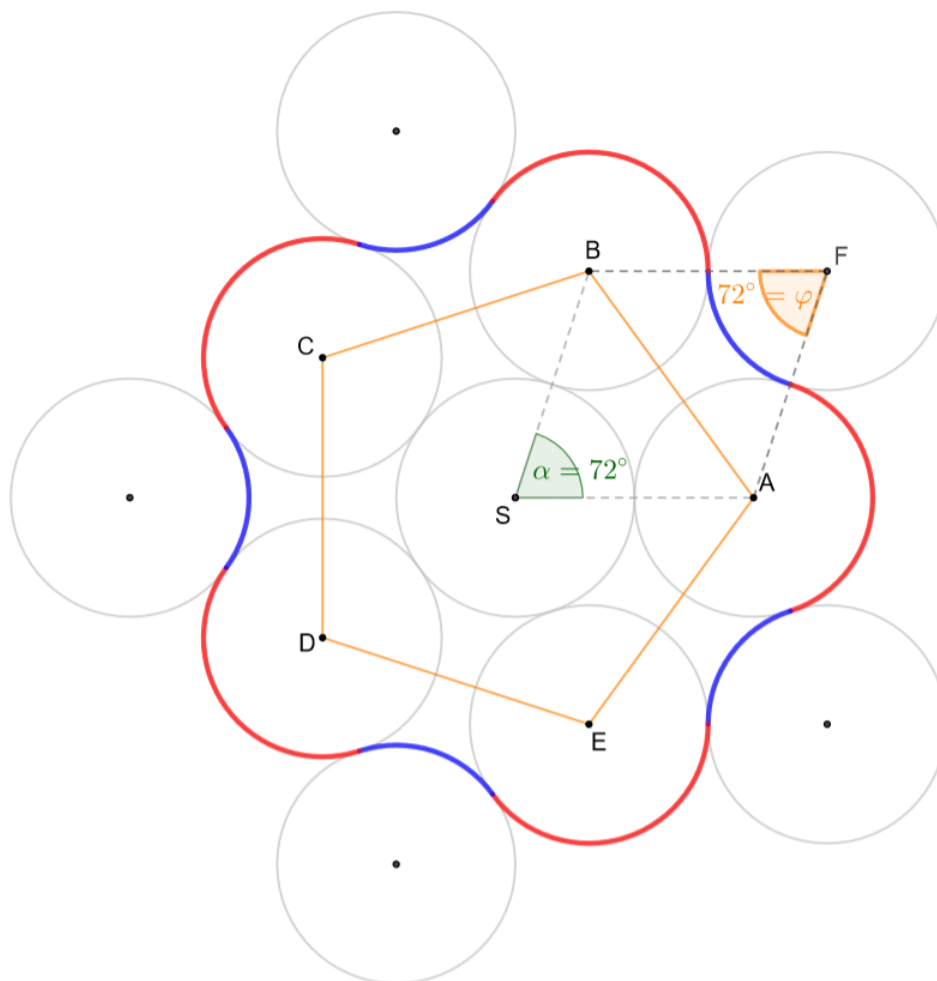
Obseg štirikrake prstne vrtavke je torej, prav tako kot pri trikraki vrtavki, enak trikratniku obsega izhodiščnega kroga.

$$o_{V4} = 3o_K$$

4.4 Petkraka prstna vrtavka

Zdaj je že jasno, da ima petkraka prstna vrtavka pet tako imenovanih krakov. Za načrtanje pravilnega petkotnika v izhodiščni krog narišemo središčni kot (α) z vrhom v središču izhodiščne krožnice (S), ki meri 72° , saj je:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$



Slika 29: Središčni kot, ki mu pripada »vbočeni« krožni lok petkrake vrtavke (vir: avtor)

Skladnost kotov $\sphericalangle ASB$ (α) in $\sphericalangle BFA$ (φ) je posledica skladnosti trikotnikov $\triangle ABS$ in $\triangle ABF$. »Vbočeni« loki, ki omejujejo petkrako vrtavko, torej pripadajo središčnemu kotu velikosti 72° . Tako dolžina tega loka (l_v) meri:

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot 72^\circ}{360^\circ}$$

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot 1}{5}$$

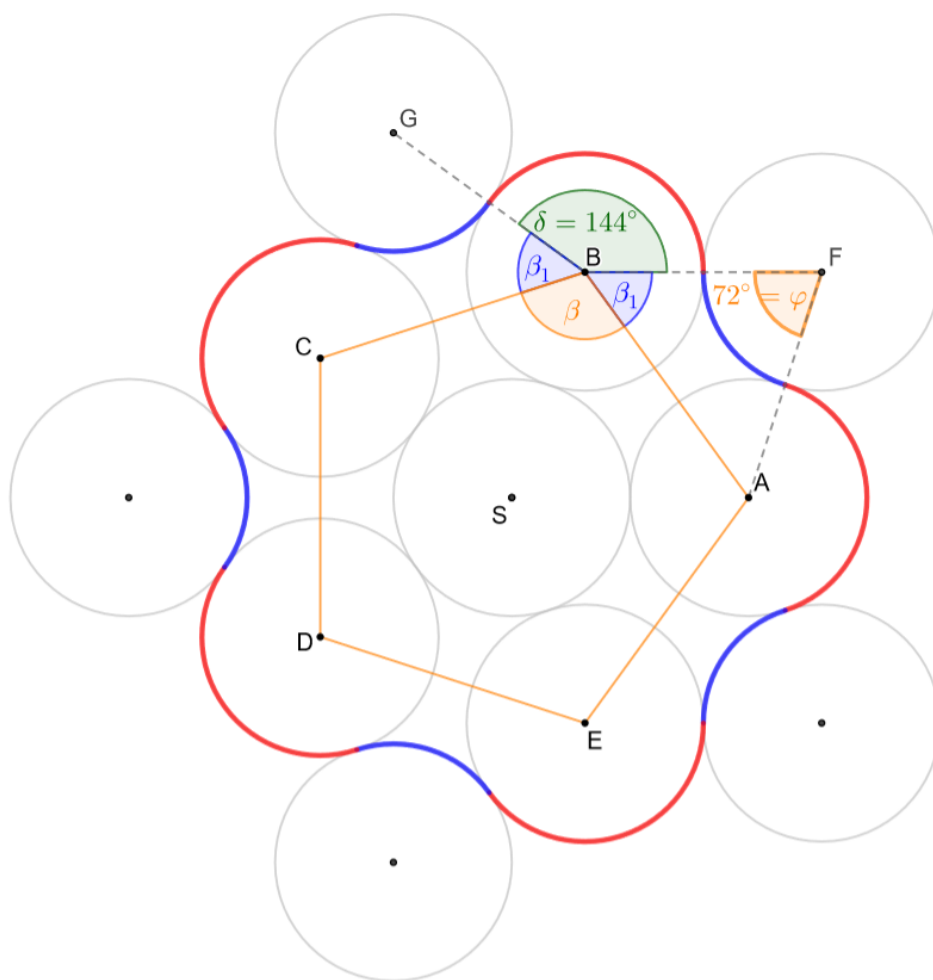
$$l_v = \frac{2\pi r}{5}$$

Dolžina tega loka predstavlja natanko petino obsega izhodiščnega kroga.

$$l_v = \frac{1}{5} o_K$$

»Izbočeni« loki ležijo na krožnicah, ki imajo središča v ogliščih pravičnega petkotnika in pripadajo kotu δ :

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$



Slika 30: Središčni kot, ki mu pripada »izbočeni« krožni lok petkrake vrtavke (vir: avtor)

Kot β je notranji kot pravilnega petkotnika, zato meri:

$$\beta = \frac{(5 - 2) \cdot 180^\circ}{5}$$

$$\beta = 108^\circ$$

Kot β_1 je kot ob kraku enakokrakega trikotnika $\triangle ABF$, zato meri:

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2}$$

$$\beta_1 = 54^\circ$$

Kot δ , ki mu pripada »izbočeni« lok, ki omejuje petkrako prstno vrtavko, meri:

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$

$$\delta = 360^\circ - 108^\circ - 2 \cdot 54^\circ$$

$$\delta = 144^\circ$$

Dolžina »izbočenega« krožnega loka (l_i), ki omejuje petkrako vrtavko, je:

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 144^\circ}{360^\circ}$$

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 2}{5}$$

$$l_i = \frac{4\pi r}{5}$$

Torej dolžina »izbočenega« loka predstavlja dve petini obsega izhodiščnega kroga.

$$l_i = \frac{2}{5} o_K$$

Obseg petkrake prstne vrtavke (o_{V5}) sestavlja deset krožnih lokov, pet »vbočenih« in prav toliko »izbočenih«. Vsota dolžin teh lokov je enaka obsegu vrtavke.

$$o_{V5} = 5 \cdot l_v + 5 \cdot l_i$$

oziroma

$$o_{V5} = 5 \cdot l_v + 5 \cdot l_i$$

$$o_{V5} = 5(l_v + l_i)$$

$$o_{V5} = 5(l_v + l_i)$$

$$o_{V5} = 5 \left(\frac{2\pi r}{5} + \frac{4\pi r}{5} \right)$$

$$o_{V5} = 5 \left(\frac{1}{5} o_K + \frac{2}{5} o_K \right)$$

$$o_{V5} = 5 \cdot \frac{6\pi r}{5}$$

$$o_{V5} = 5 \cdot \frac{3}{5} o_K$$

$$o_{V5} = 6\pi r$$

$$o_{V5} = 3 \cdot o_K$$

$$o_{V5} = 6\pi r$$

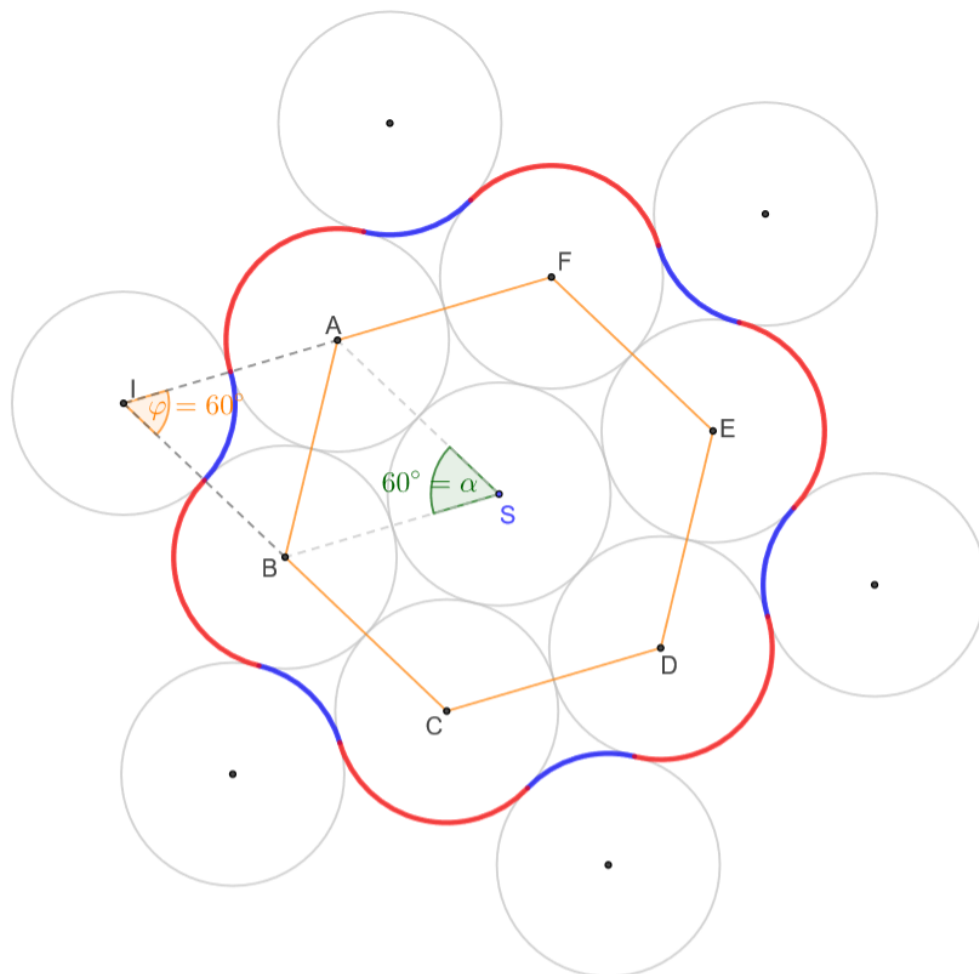
In znova se izkaže, da je obseg petkrake prstne vrtavke enak trikratniku obsega izhodiščnega kroga.

$$o_{V5} = 3o_K$$

4.5 Šestkraka prstna vrtavka

Šestkraka prstna vrtavka ima šest tako imenovanih krakov. Za načrtanje pravilnega šestkotnika v izhodiščni krog narišemo središčni kot (α) z vrhom v središču izhodiščne krožnice (S), ki meri 60° , saj je:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$



Slika 31: Središčni kot, ki mu pripada »vbočeni« krožni lok šestkrake vrtavke (vir: avtor)

Skladnost kotov $\sphericalangle ASB$ (α) in $\sphericalangle BIA$ (φ) je posledica skladnosti trikotnikov $\triangle ABS$ in $\triangle ABI$. »Vbočeni« loki, ki omejujejo šestkrako vrtavko, torej pripadajo središčnemu kotu velikosti 60° . Dolžina »vbočenega« krožnega loka (l_v) šestkrake prstne vrtavke meri:

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot 60^\circ}{360^\circ}$$

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot 1}{6}$$

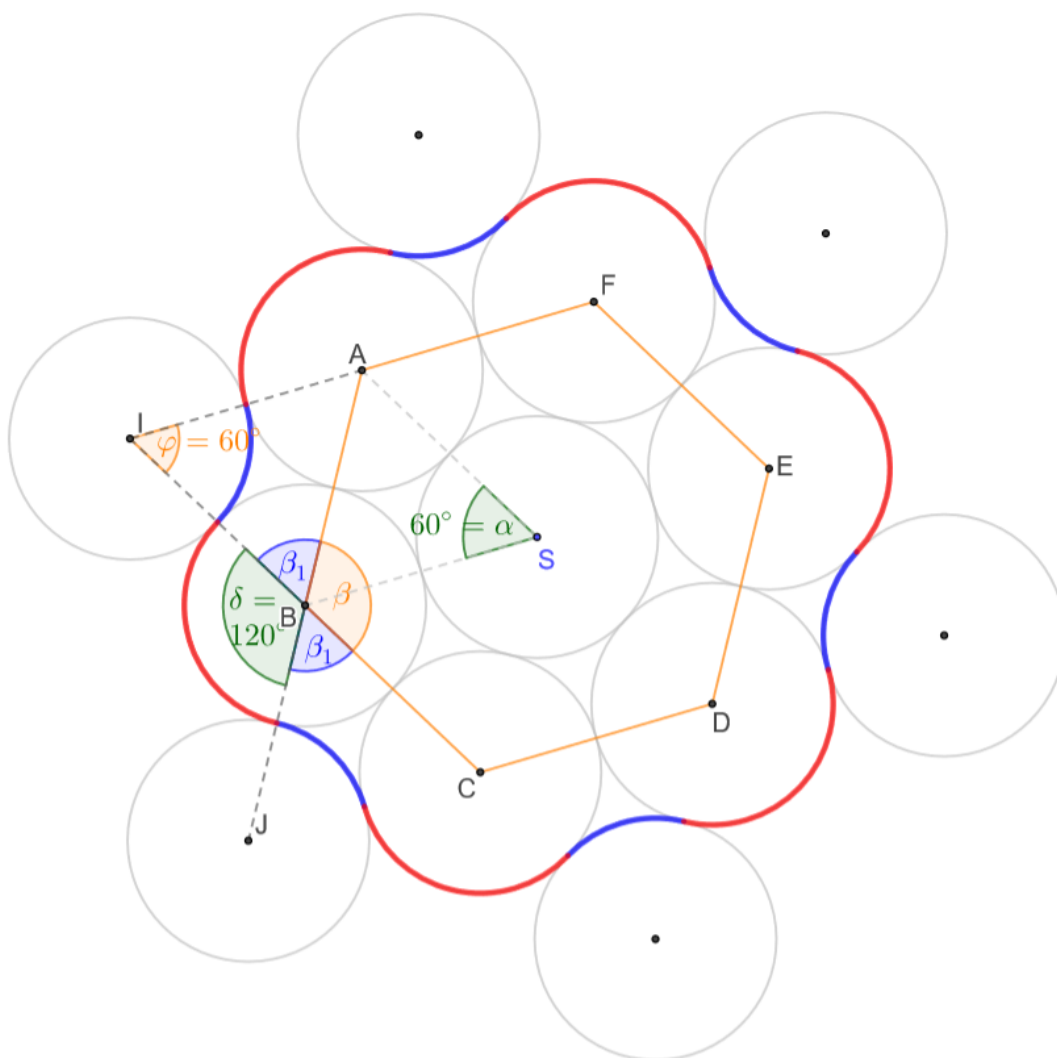
$$l_v = \frac{\pi r}{3}$$

Dolžina loka torej predstavlja natanko šestino obsega izhodiščnega kroga.

$$l_v = \frac{1}{6} o_K$$

»Izbočeni« loki ležijo na krožnicah, ki imajo središča v ogliščih pravičnega šestkotnika in pripadajo kotu δ :

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$



Slika 32: Središčni kot, ki mu pripada »izbočeni« krožni lok šestkrake vrtavke (vir: avtor)

Notranji kot pravilnega šestkotnika β meri:

$$\beta = \frac{(6 - 2) \cdot 180^\circ}{6}$$

$$\beta = 120^\circ$$

Kot β_1 je tudi tokrat kot ob kraku enakokrakega trikotnika $\triangle ABI$, zato:

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2}$$

$$\beta_1 = 60^\circ$$

Kot δ , ki mu pripada »izbočeni« lok, ki omejuje šestkrako prstno vrtavko, je enak:

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$

$$\delta = 360^\circ - 120^\circ - 2 \cdot 60^\circ$$

$$\delta = 120^\circ$$

Dolžina »izbočenega« krožnega loka (l_i), ki omejuje šestkrako vrtavko, je:

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 120^\circ}{360^\circ}$$

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 1}{3}$$

$$l_i = \frac{2\pi r}{3}$$

Torej dolžina »izbočenega« loka predstavlja dve šestini obsega izhodiščnega kroga.

$$l_i = \frac{1}{3} o_K$$

Obseg šestkrake prstne vrtavke (o_{V6}) sestavlja dvanajst krožnih lokov, po šest »vbočenih« in prav toliko »izbočenih«. Vsota dolžin teh lokov je enaka obsegu vrtavke.

$o_{V6} = 6 \cdot l_v + 6 \cdot l_i$	<i>oziroma</i>	$o_{V6} = 6 \cdot l_v + 6 \cdot l_i$
$o_{V6} = 6(l_v + l_i)$		$o_{V6} = 6(l_v + l_i)$
$o_{V6} = 6\left(\frac{\pi r}{3} + \frac{2\pi r}{3}\right)$		$o_{V6} = 6\left(\frac{1}{6}o_K + \frac{1}{3}o_K\right)$
$o_{V6} = 6 \cdot \frac{3\pi r}{3}$		$o_{V6} = 6\left(\frac{1}{6}o_K + \frac{2}{6}o_K\right)$
$o_{V6} = 6\pi r$		$o_{V6} = 6 \cdot \frac{3}{6}o_K$
		$o_{V6} = 3 \cdot o_K$
		$o_{V6} = 6\pi r$

Še enkrat več je obseg vrtavke enak trikratniku obsega izhodiščnega kroga.

$$o_{V6} = 3o_K$$

4.6 Sedemkraka prstna vrtavka

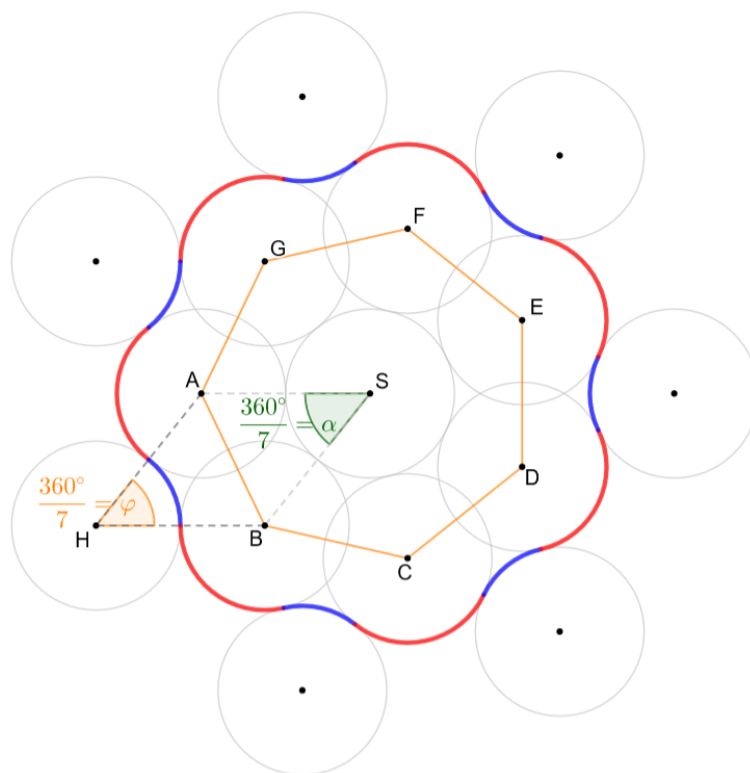
Zagotovo ste že opazili vzorec, ki se je začel pojavljati. Tudi mi smo ga zaznali že med raziskovanjem, a smo vendarle nadaljevali še s sedem- in osemkrako prstno vrtavko.

Pri sedemkraki prstni vrtavki se je sprva zdelo, da jo bo težko narisati, saj se bodo krogi začeli vsaj delno prekrivati. Tudi velikost izračunanega središčnega kota je za natančno načrtovanje s svinčnikom, geotrikotnikom in šestilom pravzaprav »misija nemogoče«. A se izkaže, da sledenje postopku načrtovanja brez težav pripelje do želenega rezultata, torej načrtane sedemkrake prstne vrtavke. Če to počnemo s pomočjo tehnologije – v našem primeru računalniške aplikacije za dinamično geometrijo (Geogebra), je to seveda še lažje, predvsem pa natančneje.

Središčni kot (α) z vrhom v središču izhodiščne krožnice (S) meri:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{7} \doteq 51,43^\circ$$

Tega kota seveda pri načrtovanju na list papirja z geometrijskim orodjem ne moremo narisati dovolj natančno. A s pomočjo tehnologije nismo imeli nikakršnih težav.



Slika 33: Središčni kot, ki mu pripada »vbočeni« krožni lok sedemkrake vrtavke (vir: avtor)

Skladnost kotov $\sphericalangle ASB$ (α) in $\sphericalangle BHA$ (φ) je posledica skladnosti trikotnikov $\triangle ABS$ in $\triangle ABH$.

»Vbočeni« loki, ki omejujejo sedemkrako vrtavko, torej pripadajo središčnemu kotu velikosti $\frac{360^\circ}{7} \doteq 51,43^\circ$. Dolžina »vbočenega« krožnega loka (l_v) sedemkrake prstne vrtavke tako meri:

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot \frac{360^\circ}{7}}{360^\circ}$$

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot 360^\circ}{7 \cdot 360^\circ}$$

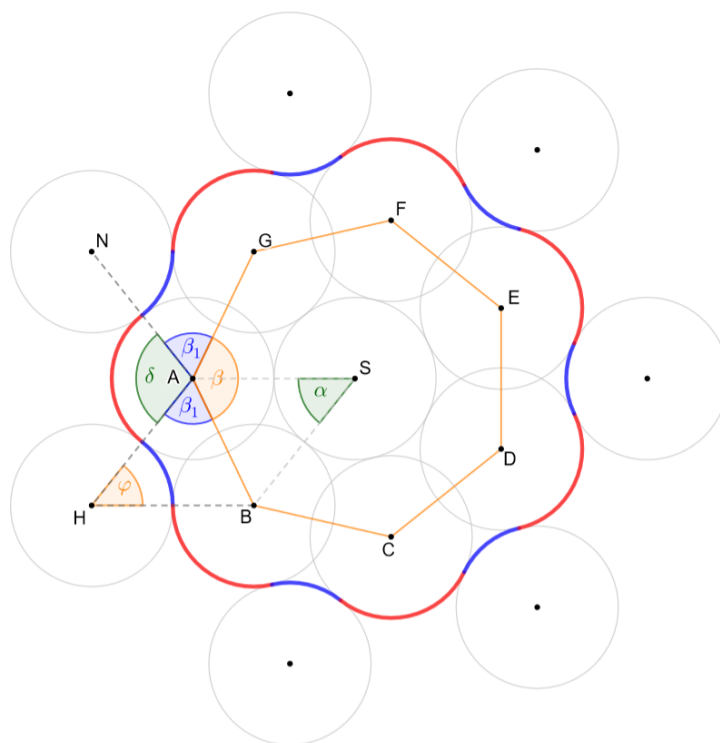
$$l_v = \frac{2\pi r}{7}$$

Dolžina loka je enaka natanko eni sedmini obsega izhodiščnega kroga.

$$l_v = \frac{1}{7} o_K$$

»Izbočeni« loki ležijo na krožnicah, ki imajo središča v ogliščih pravičnega sedemkotnika in pripadajo kotu δ :

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$



Slika 34: Središčni kot δ , ki mu pripada »izbočeni« krožni lok sedemkrake vrtavke (vir: avtor)

Notranji kot pravilnega sedemkotnika β meri:

$$\beta = \frac{(7 - 2) \cdot 180^\circ}{7}$$

$$\beta = \frac{900^\circ}{7} \doteq 128,57^\circ$$

Kot β_1 je kot ob kraku enakokrakega trikotnika $\triangle ABH$, zato je:

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{7}}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{1260^\circ - 360^\circ}{14}$$

$$\beta_1 = \frac{900^\circ}{14} = \frac{450^\circ}{7}$$

Kot δ , ki mu pripada »izbočeni« lok, ki omejuje sedemkrako prstno vrtavko, je enak:

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$

$$\delta = 360^\circ - \frac{900^\circ}{7} - 2 \cdot \frac{450^\circ}{7}$$

$$\delta = \frac{2520^\circ}{7} - \frac{900^\circ}{7} - \frac{900^\circ}{7}$$

$$\delta = \frac{720^\circ}{7} \doteq 102,86^\circ$$

Dolžina »izbočenega« krožnega loka (l_i), ki omejuje sedemkrako vrtavko, je:

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot \frac{720^\circ}{7}}{360^\circ}$$

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 720^\circ}{7 \cdot 360^\circ}$$

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 2}{7}$$

$$l_i = \frac{4\pi r}{7}$$

Torej dolžina »izbočenega« loka predstavlja dve sedmini obsega izhodiščnega kroga.

$$l_i = \frac{2}{7} o_K$$

Obseg sedemkrake prstne vrtavke (o_{V7}) sestavlja štirinajst krožnih lokov, po sedem »vbočenih« in prav toliko »izbočenih«. Vsota dolžin teh lokov je enaka obsegu vrtavke.

$o_{V7} = 7l_v + 7l_i$	<i>oziroma</i>	$o_{V7} = 7l_v + 7l_i$
$o_{V7} = 7(l_v + l_i)$		$o_{V7} = 7(l_v + l_i)$
$o_{V7} = 7\left(\frac{2\pi r}{7} + \frac{4\pi r}{7}\right)$		$o_{V7} = 7\left(\frac{1}{7}o_K + \frac{2}{7}o_K\right)$
$o_{V7} = 7 \cdot \frac{6\pi r}{7}$		$o_{V7} = 7 \cdot \frac{3}{6}o_K$
$o_{V7} = 6\pi r$		$o_{V7} = 3 \cdot o_K$
		$o_{V7} = 6\pi r$

Tudi tokrat je obseg vrtavke enak trikratniku obsega izhodiščnega kroga.

$$o_{V7} = 3o_K$$

4.7 n -kraka prstna vrtavka

Naj bo število krakov prstne vrtavke n . Takšna vrtavka ima n »izbočenih« in n »vbočenih« krožnih lokov, ki jo omejujejo.

Pa pogledjmo, kakšni so pripadajoči koti n -krake prstne vrtavke.

Središčni kot (α) z vrhom v središču izhodiščne krožnice (S) meri:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

Zaradi skladnosti trikotnikov (po analogiji pregledanih primerov) je kot $\varphi = \alpha$. Kotu φ pa pripadajo »vbočeni« krožni loki posamezne prstne vrtavke. Zato je dolžina »vbočenega« loka n -krake vrtavke:

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot \frac{360^\circ}{n}}{360^\circ}$$

$$l_v = \frac{2\pi r \cdot 360^\circ}{n \cdot 360^\circ}$$

$$l_v = \frac{2\pi r}{n}$$

Dolžina tega loka torej ustreza n -temu delu obsega kroga.

$$l_v = \frac{1}{n} \cdot o_K$$

Ker »izbočeni« krožni loki n -krake vrtavke ležijo na krožnicah, ki imajo središča v ogliščih pravičnega n -kotnika, pripadajo kotu δ , ki je enak:

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$

Notranji kot β pravičnega n – kotnika meri:

$$\beta = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Za kot β_1 , ki leži ob kraku enakokrakega trikotnika, velja:

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{2n}$$

Torej je

$$\beta_1 = \frac{\beta}{2}$$

Kot δ , ki mu pripada »izbočeni« lok, ki omejuje n -krako prstno vrtavko, je enak:

$$\delta = 360^\circ - \beta - 2\beta_1$$

$$\delta = 360^\circ - \beta - \beta$$

$$\delta = 360^\circ - 2\beta$$

$$\delta = 360^\circ - \frac{2(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

$$\delta = \frac{n \cdot 360^\circ - (n-2) \cdot 360^\circ}{n}$$

Oziroma po ureditvi tega zapisa

$$\delta = \frac{720^\circ}{n}$$

Dolžina »izbočenega« krožnega loka (l_i), ki omejuje n -krako vrtavko, je:

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot \frac{720^\circ}{n}}{360^\circ}$$

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 720^\circ}{n \cdot 360^\circ}$$

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 2}{n}$$

Če dolžino »izbočenega« loka predstavimo kot delež obsega kroga, dobimo

$$l_i = \frac{2}{n} \cdot o_K$$

Za obseg n -krake vrtavke torej velja:

$$o_{Vn} = nl_v + nl_i$$

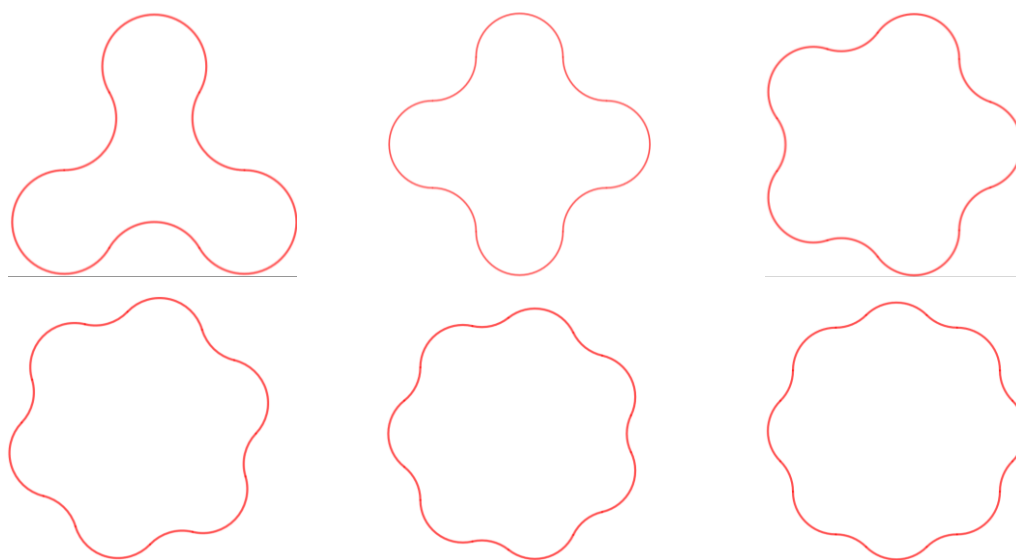
$$o_{Vn} = n(l_v + l_i)$$

$$o_{Vn} = n \left(\frac{1}{n} o_K + \frac{2}{n} o_K \right)$$

$$o_{Vn} = n \cdot \frac{3}{n} o_K$$

$$o_{Vn} = 3 \cdot o_K$$

$$o_{Vn} = 6\pi r$$



Slika 35: Različne n -krake prstne vrtavke (vir: avtor)

Tako smo pokazali, da je obseg n -krake prstne vrtavke vedno enak $6\pi r$ oziroma je trikratnik obsega izhodiščnega kroga.

5 ZAKLJUČEK

Prstna vrtavka je igrača, ki jo bolje poznamo pod njenim angleškim imenom »fidget spinner«. Obris igrače je lik, ki ga omejujejo krožni loki. Krožne loke smo za namen raziskovanja poimenovali »vbočeni« in »izbočeni« krožni loki, glede na njihovo lego na krožnici. Raziskovali smo obsege različnih prstnih vrtavk, saj imajo lahko prstne vrtavke različno število tako imenovanih krakov. Glede na število krakov smo vrtavke poimenovali trikrake, štirikrake ... in končno splošno tudi n -krake prstne vrtavke. Ugotavljali smo, kakšen je obseg posamezne vrtavke in kako se obseg spreminja, če se spreminja število krakov.

Raziskovanje smo začeli s trikrako prstno vrtavko, nadaljevali pa s štirikrako, petkrako, šestkrako ... Najprej smo se lotili zgolj načrtovanja posameznih vrtavk, šele ko smo to usvojili, smo se lotili tudi izračunov obsegov. Prišli smo do spoznanja, da za izračunavanje obsegov potrebujemo tudi podatke, ki jih pri načrtovanju nismo nujno potrebovali. Znanje o kotih se je izkazalo za izredno koristno, hkrati pa ugotavljamo, da je sposobnost dobrega opazovanja prav tako bistveno pripomogla k nastanku te naloge. Končno smo odkrili oziroma izpeljali tudi splošno formulo za n -krako vrtavko, s katero lahko izračunamo obseg lika, ne glede na število krakov prstne vrtavke. Pravzaprav nas je izpeljava pripeljala do spoznanja, da se obseg prstne vrtavke, ne glede na število njenih krakov, ne spremeni (odvisen je le od polmera izhodiščnega kroga).

Za načrtovanje prstnih vrtavk smo določili začetni pogoj, da imajo vse krožnice, ki bodo nosilke krožnih lokov, ki vrtavke omejujejo, enak polmer dolžine r . Vsa načrtovanja smo začeli z izhodiščno krožnico, nad katero smo očrtovali pravilne večkotnike. Pravilni n -kotnik, ki smo ga očrtovali, ima vedno prav toliko oglišč, kot ima vrtavka krakov. Oglišča n -kotnika so od središča izhodiščnega kroga oddaljena $2r$. Vrtavko omejuje enako število »vbočenih« in »izbočenih« krožnih lokov, vsakih po n .

Po več načrtanih prstnih vrtavkah smo ugotovili, da se središčne razdalje med krožnicami, ki nosijo istovrstne krožne loke, ki omejujejo posamezne vrtavke, očitno spreminjajo glede na število krakov vrtavke. Pri posamezni vrtavki so te razdalje sicer vedno enake, vendar pa se med vrtavkami spreminjajo glede na število njenih krakov; tako središčne razdalje med krožnicami, ki nosijo »izbočene« krožne loke kot tudi med krožnicami, ki nosijo »vbočene«

krožne loke. S tem smo ovrgli našo hipotezo 1, da so središčne razdalje med krožnicami, ki nosijo istovrstne loke, ki omejujejo vrtavko, konstantne.

Dolžine krožnih lokov so, zaradi začetnega pogoja, da imajo vse krožnice enak polmer, odvisne le od središčnih kotov, ki jim loki pripadajo.

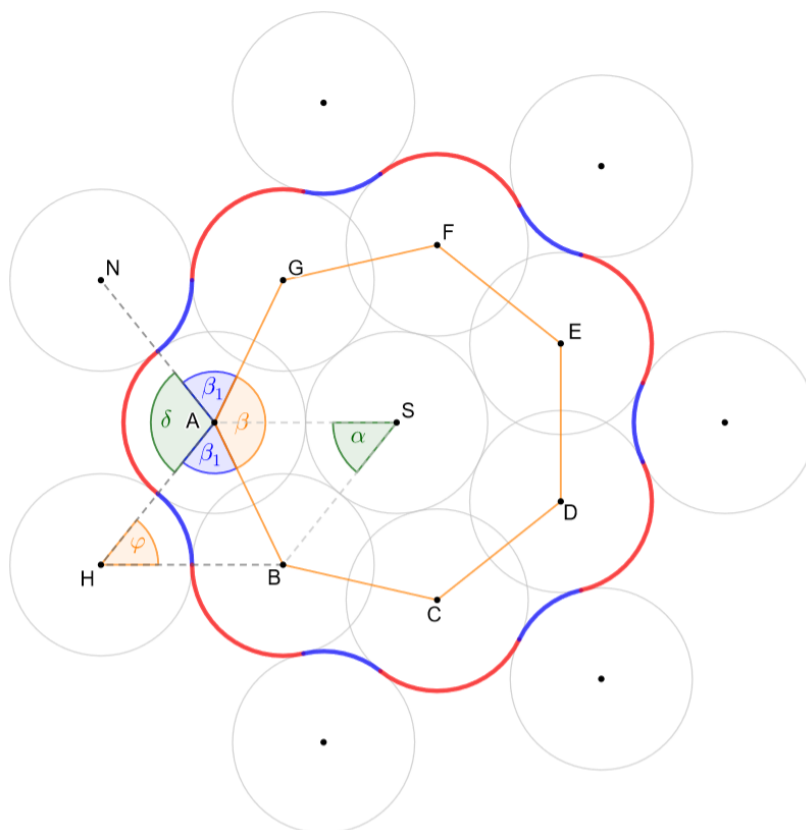
Tako smo skozi nalogo z α označevali središčni kot, s pomočjo katerega smo izrisali želeni pravilni n -kotnik. Ta kot je vedno enak:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

Zaradi skladnosti je kot, ki mu pripada »vbočeni« krožni lok vrtavke, označevali smo ga s φ , enak kotu α .

Kot, ki mu pripada posamezni »izbočeni« krožni lok vrtavke, smo dobili s pomočjo znanja o notranjih kotih pravilnih večkotnikov in znanja o kotih v trikotnikih, natančneje enakokrakih trikotnikih. Ta kot smo imenovali δ . Izkazalo se je, da je kot δ enak:

$$\delta = \frac{720^\circ}{n}$$



Slika 36: Koti, ki jih potrebujemo za izračune dolžin krožnih lokov (vir: avtor)

Dolžini lokov (l) lahko zdaj izračunamo brez večjih težav, saj vemo, da je:

$$l = \frac{2\pi r \cdot x}{360^\circ}$$

pri čemer x označuje kot, ki mu krožni lok pripada.

»Vbočeni« loki pripadajo kotu φ , dolžina »vbočenega« loka (l_v) n -krake vrtavke je tako:

$$l_v = \frac{2\pi r}{n}$$

Ali še drugače: dolžina tega loka ustreza n -temu delu obsega kroga.

$$l_v = \frac{1}{n} \cdot o_K$$

Dolžina »vbočenega« krožnega loka se torej glede na število krakov vrtavke spreminja, in sicer se s povečevanjem števila krakov krajša. S tem smo uspeli potrditi našo hipotezo 3, v kateri smo prav to tudi predvideli.

Dolžina »izbočenega« krožnega loka (l_i), ki omejuje n -krako vrtavko, je:

$$l_i = \frac{2\pi r \cdot 2}{n} = \frac{4\pi r}{n}$$

oziroma zapisano z deležem obsega kroga:

$$l_i = \frac{2}{n} \cdot o_K$$

Tudi dolžina »izbočenega« krožnega loka se torej glede na število krakov vrtavke spreminja, in sicer se s povečevanjem števila krakov krajša. S tem smo uspeli potrditi tudi našo hipotezo 2, ki pravi, da se z večanjem števila krakov vrtavke dolžina »izbočenega« loka krajša.

Iz vsega, kar smo zgoraj zapisali o dolžinah krožnih lokov, sledi, da je obseg n -krake vrtavke vedno enak trikratniku obsega izhodiščnega kroga:

$$o_{Vn} = 3 \cdot o_K = 6\pi r$$

S tem potrjujemo še hipotezo 4, s katero smo napovedali, da bo obseg vrtavk konstanten, torej enak, ne glede na število krakov vrtavke.

Pri delu se nam je pogosto zatikalo, a smo z vztrajnostjo počasi napredovali. Občasni nenadni uvidi so potrebovali naknadne dokaze, kar je bilo tudi naporno. Občasno smo se znašli v položaju, ko smo »videli« končni rezultat, pot do njega pa je bila še skrita. Ker pa smo v tem primeru tekmovali le sami s seboj, sta bili vztrajnost in natančnost ključ do uspeha.

Naj zapišemo še, da smo ponosni na nastalo nalogo, čeprav se je pri njenem nastajanju večkrat zdelo, da bo pretežko – pa ne toliko razmisleki, pač pa zapisi, ki morajo biti natančni in dosledni. A končno nastala naloga dokazuje, da smo uspeli tudi to oviro premagati.

Za prihodnje raziskovalce puščamo odprto vprašanje ploščin prstnih vrtavk, morda pa najdejo še kakšno idejo v pričujočih zapisih. Menimo, da nam bo ta raziskovalna naloga pomagala pri ugotavljanju obsegov tudi drugih sestavljenih likov, še posebej tistih, ki vsebujejo veliko delov ali več krožnic. V prihodnosti bomo morda lahko to uporabili pri zahtevnejših nalogah. Seveda pa bomo navdušenje nad novo pridobljenim znanjem delili z vsemi, ki nas bodo pripravljeni poslušati.

Pričujoča raziskovalna naloga je plod našega lastnega raziskovanja in dela. Podatke v nalogi smo skušali zbrati pregledno in sistematično. Naloga verjetno ne bo imela širšega vpliva na družbo, smo pa z njo obogatili svoje znanje in izkušnje, da bomo v to družbo stopali odgovorno, resno, zanesljivo in spoštljivo. Pridobljeno znanje, ne le matematično, nam bo v prihodnosti pomagalo še nadgrajevati svoja znanja, s čimer se bomo lahko aktivneje vključevali v vse ravni družbe. Seveda se bomo potrudili svoje matematično znanje predati vsem, še posebej zainteresiranim, radovednim vrstnikom in našim potencialnim naslednikom, raziskovalcem.

6 VIRI

Berk J., Draksler J., Robič M.

Skrivnosti števil in oblik 9 (3. izdaja). 2021, Ljubljana, Rokus Klett.

Smogavec J., Govejšak C., Škerget M.

Matematika za radovedneže 8. 2004, Škofljica, Pikal.

6.1 Viri slik

Igrača Fidget spinner – prstna vrtavka (slika 15) – pridobljeno s <https://www.vk-renzel.com/fidget-spinner-in-bright-colours-13953.html>, [datum ogleda: 20. 12. 2021]

Dvo-, tri- in petkraka prstna vrtavka (slika 16) – pridobljeno s <https://www.ubuy.vn/en/product/1AH3ZQ1OG-figrol-fidget-spinner-3-pack-simple-dimple-fidget-toys-push-pop-bubble-fidget-spinner-stress-relief-and-anxi-anxiety-fidget-toy-for-kids>, [datum ogleda: 20. 12. 2021]

PRILOGA 1

Tabela 1: Zbirnik dolžin krožnih lokov in obsegov n -krakih prstnih vrtavk

št. krakov prstne vrtavke	dolžina »izbočenega« loka (l_i)		dolžina »vbočenega« loka (l_v)		obseg prstne vrtavke
3	$\frac{2\pi r \cdot 240^\circ}{360^\circ} = \frac{4\pi r}{3}$	$\frac{2}{3}o_K$	$\frac{2\pi r \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{3}$	$\frac{1}{3}o_K$	$6\pi r = 3o_K$
4	$\frac{2\pi r \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \pi r$	$\frac{1}{2}o_K = \frac{2}{4}o_K$	$\frac{2\pi r \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r}{2}$	$\frac{1}{4}o_K$	$6\pi r = 3o_K$
5	$\frac{2\pi r \cdot 144^\circ}{360^\circ} = \frac{4\pi r}{5}$	$\frac{2}{5}o_K$	$\frac{2\pi r \cdot 72^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{5}$	$\frac{1}{5}o_K$	$6\pi r = 3o_K$
6	$\frac{2\pi r \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{3}$	$\frac{1}{3}o_K = \frac{2}{6}o_K$	$\frac{2\pi r \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r}{3}$	$\frac{1}{6}o_K$	$6\pi r = 3o_K$
7	$\frac{2\pi r \cdot \frac{720^\circ}{7}}{360^\circ} = \frac{4\pi r}{7}$	$\frac{2}{7}o_K$	$\frac{2\pi r \cdot \frac{360^\circ}{7}}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{7}$	$\frac{1}{7}o_K$	$6\pi r = 3o_K$
8	$\frac{2\pi r \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r}{2}$	$\frac{1}{4}o_K = \frac{2}{8}o_K$	$\frac{2\pi r \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r}{4}$	$\frac{1}{8}o_K$	$6\pi r = 3o_K$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\frac{2\pi r \cdot \frac{720^\circ}{n}}{360^\circ} = \frac{4\pi r}{n}$	$\frac{2}{n}o_K$	$\frac{2\pi r \cdot \frac{360^\circ}{n}}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{n}$	$\frac{1}{n}o_K$	$6\pi r = 3o_K$