

OSNOVNA ŠOLA ŽIRI

KOLIKO LISTOV IMA BODIKA
Matematično modeliranje na primeru biologije
matematika
raziskovalna naloga

Avtorica: Mija NOVAK

Mentorici: Petra Novak, prof. slovenščine
Martina Erznožnik, prof. matematike

Žiri, 2022

I Kazalo vsebine

1 UVOD.....	1
2 TEORETIČNI DEL.....	2
2.1 MATEMATIČNA PISMENOST.....	2
2.1.1 Razvijanje matematične pismenosti.....	2
2.2 PROBLEMSKE NALOGE.....	3
2.3 MATEMATIČNO MODELIRANJE.....	4
2.3.1 Proces matematičnega modeliranja.....	4
2.3.2 Metode matematičnega modeliranja.....	4
2.3.3 Matematično modeliranje v osnovni šoli.....	5
2.3.4 Model.....	6
2.3.5 Sorazmerja.....	6
3 RAZISKOVALNI DEL.....	11
3.1 METODOLOGIJA.....	11
3.1.1 Opis vzorca raziskave.....	11
3.1.2 Opis merskega instrumenta.....	11
3.1.3 Opis postopka zbiranja podatkov.....	12
Shemo drevesa oz. razraščanja sem tudi skicirala.....	15
3.1.4 Obdelava podatkov.....	17
3.2 REZULTATI.....	18
3.2.1 Prvi model.....	18
3.2.2 Drugi model.....	25
4 RAZPRAVA.....	29
5 ZAKLJUČEK.....	31
6 VIRI IN LITERATURA.....	32

II Kazalo slik

Slika 1: Procesi matematičnega razmišljanja	3
Slika 2: Vrste modelov	6
Slika 3: Iglavci in listavci	7
Slika 4: Proces fotosinteze	8
Slika 5: Bodika.....	9
Slika 6: Bodika s plodovi.....	9
Slika 7: Uspevanje bodike	10
Slika 8: Dalnograd	11
Slika 9: Telefon Xiaomi redmi 9	12
Slika 10: Izbrana bodika	13
Slika 11: Spodnje veje izbranega drevesa.....	14
Slika 12: Srednje veje izbranega drevesa.....	15
Slika 13: Skira razvejanosti drevesa na posameznih delih.....	16
Slika 14: Vzorci za merjenje ploščine listov	20
Slika 15: Centimeterska mreža I.....	21
Slika 16: Centimeterska mreža II.....	22
Slika 17: Centimeterska mreža III.....	23
Slika 18: Drevo iz žabje perspektive	30

III Kazalo tabel

Tabela 1: Razlike med matematičnim modeliranjem in običajnimi matematičnimi nalogami: .	4
Tabela 2: Seštevki ocen predmetov.....	5
Tabela 4: Tabela ploščine listov	24
Tabela 5: Prostornina krošnje in površina listov za različne višine dreves	26

IV Kazalo grafov

Graf 1: Prostornina krošnje in število vej glede na višino drevesa.....	27
Graf 2: Skupna površina listov glede na višino drevesa.....	27

Povzetek

Raziskovalna naloga predstavi matematično modeliranje na primeru iz biologije, in sicer botanike. V teoretičnem delu so predstavljene matematična pismenost, problemske naloge, matematično modeliranje in drevo bodike kot izbrana vrsta iz rastlinskega sveta.

Z računskim modelom je izračunana površina olistanih delov bodike ter na podlagi geometrijskih teles izračunana prostornina njene krošnje. Z ustreznimi predpostavkami je predvidena tudi prostornina krošnje za poljubno izbrane višine dreves iste vrste. S pridobljenimi izračuni naloga primerja površino in prostornino istega drevesa, na podlagi česar je prikazana uporabnost izbranega modela.

Ključne besede: matematično modeliranje, olistani deli, površina, prostornina krošnje, bodika

Zahvala

Za pomoč pri vodenju in izdelavi naloge se zahvaljujem mentoricama Petri Novak in Martini Erznožnik.

Za idejo gre zahvala dr. Amaliji Žakelj, dr. Zlatanu Magajni pa za osnovne napotke in pojasnila glede izbranega modela. Prav tako se zahvaljujem vsem botanikom, na katere sem se obrnila glede možnosti posameznih izračunov.

1 UVOD

Veliko učencev ne mara matematike, ker se jim zdi težka. Verjetno je to povezano s slabim razumevanjem učne snovi in slabo predstavo o uporabnosti matematike v vsakdanjem življenju. Pri matematiki se mi zdi dobro utrjevanje snovi pomembno, saj le tako lahko spoznavamo nove matematične pojme in računske operacije. Ker mnogi že na začetku sprejmejo dejstvo, da je matematika nerazumljiva in težka, se s tem »odločijo«, da je ne znajo. Večina sošolcev meni, da matematike ne bodo potrebovali v življenju, »saj zato so pa kalkulatorji«.

Matematika me zanima, ker si z njo lahko pomagam v vsakdanjem življenju. Včasih naletim na probleme, ki jih ne znam rešiti, ker še ne poznam dovolj formul in pravil. Če bi na primer želela narisati načrt za hišo, v kateri bo živel petčlanska družina, bi kmalu prišla do vprašanj: *Koliko mora biti hiša velika? Kakšne oblike mora biti streha glede na podnebje?*

Z enostavnimi problemi pa nimam težav: Ali ima večjo ploščino kletka v obliki pravilnega šestkotnika ali kvadrata, ki ima stranico dolgo dva-krat toliko kot šestkotnik? Kaj vse lahko kupim v trgovini, glede na to, koliko denarja imam? Na kateri dan v tednu pride določen datum? Naštete probleme bi lahko izračunali na pamet ali s pomočjo lista in svinčnika, vendar za vse to ne velja. Za nekatere probleme potrebujemo modele, saj si sami težko predstavljamo situacijo.

Primer takega modela je predvidevanje epidemiološke slike za širjenje okužb z virusom covid 19. Če bi veljalo, da vsak okužen naprej okuži le enega, bi si mogoče število okuženih za čez en mesec še predstavljali. Ker pa je situacija bolj zapletena, si moramo izdelati model. Enega prvih takih epidemioloških modelov je izdelal angleški znanstvenik Ronald Ross leta 1910. Ugotovil je, da so za prenašanje malarije odgovorni komarji in zato dobil Nobelovo nagrado. Tako se je med obema svetovnima vojnima razvil model, ki populacijo deli v tri skupine; tiste ki so okuženi, tiste, ki se ne morejo okužiti, in tiste, ki se lahko.

Poleg matematike me zanima tudi biologija, zato sem za to nalogo izbrala problem, ki je povezan z naravo:

- Koliko listov ima določeno drevo? Najprej sem si zaradi enostavnejše oblike listov in njene pogostosti v našem kraju in okolici izbrala bukev. Pri opazovanju bukev v gozdu sem naletela na problem, saj v času raziskovanja (oktober-marec) nima več/še nima listov. Ker me za to nalogo zanima prav zelena površina, za katero bi nujno potrebovala število listov, sem se namesto bukev odločila za zimzeleno rastlino - bodiko, ki sem jo kmalu opazila v okolici.

Naloga samega modeliranja bi bila izdelava modela zelene površine drevesa. To pomeni, da bi na osnovi nekih preprostih parametrov (npr. višine drevesa) znali oceniti število listov in nadalje izračunati ploščino zelenih delov drevesa. Izdelati je potrebno preprost matematični model drevesa. Nato pa je potrebno preveriti ustreznost modela. Za izračun sem si izbrala dva modela. Po modelu 1 sem število listov izračunala glede na razvejanost drevesa, po modelu 2 pa sem preštela število listov na določeno prostornino krošnje.

Za razliko od ostalih raziskovalnih nalog pri modelu ne postavljam hipotez, temveč predpostavke. Le-te navajam na začetku vsakega od dveh izračunov za posamezni model.

2 TEORETIČNI DEL

2.1 MATEMATIČNA PISMENOST

Matematična pismenost je povezovanje matematike z realnostjo oziroma povezovanje matematike s problemskimi situacijami (osebnimi, družbenimi, poklicnimi, znanstvenimi).

Za nekatere poklicne smeri je potrebna višja matematična pismenost. Te smeri so si zelo različne, zato je točno definicijo celotnega pojma »matematična pismenost« težko določiti.

Pri posamezniku matematična pismenost predstavlja:

- Prepoznavanje in razumevanje vloge, ki jo predstavlja matematika v vsakdanjih situacijah.
- Sposobnost postavljanja dobro utemeljenih odločitev.
- Sposobnost uporabe in vpletenosti matematike na načine, ki izpolnjujejo potrebe konstruktivnega in razmišljujočega posameznika.

Iz navedenega povzamemo, da je matematična pismenost posameznikova sposobnost formuliranja, uporabe in interpretiranja matematičnih rešitev v raznolikih okoliščinah. Obsega matematično razmišljanje, uporabo matematičnih konceptov, postopkov, dejstev in orodij, s katerimi lahko razložimo ali opišemo pojave ali situacije. Posamezniku pomaga prepoznati vlogo matematike v svetu in sprejemati dobro utemeljene presoje in odločitve.

Vidiki matematične pismenosti:

- Matematične vsebine in njihova uporaba.
- Matematični procesi, ki opisujejo, kaj narediti, da bi kontekst problema povezali z matematiko in tako rešili problem ter katere kompetence zahtevajo tovrstni procesi.
- Konteksti, v katere so umeščene naloge.

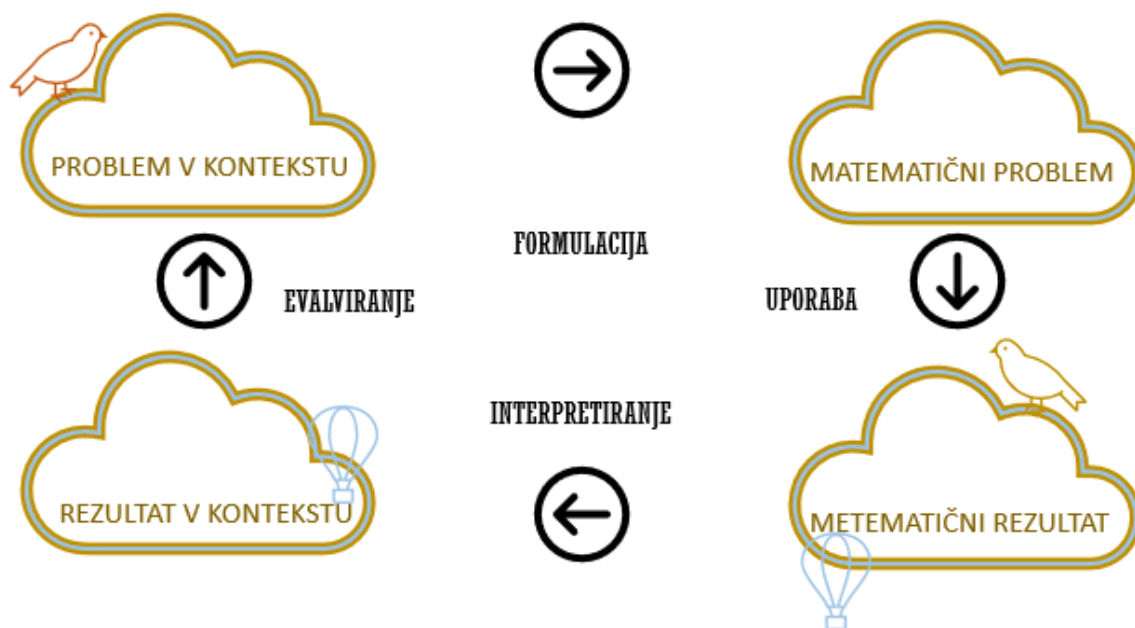
(Žakelj, str. 1-5)

2.1.1 Razvijanje matematične pismenosti

Temeljne matematične kompetence so:

- sporočanje,
- matematiziranje,
- modeliranje,
- prikazovanje,
- sklepanje in utemeljevanje,
- oblikovanje strategij za reševanje problemov,
- uporaba simbolnega, formalnega in tehniškega jezika in operacij,
- ter uporaba matematičnih orodij.

(Žakelj, str. 5-7).



Slika 1: Procesi matematičnega razmišljanja (Amalija Žakelj, str. 10)

2.2 PROBLEMSKE NALOGE

Problemske naloge so naloge, pri katerih je pomembno, da dobro razumemo besedilo, saj moramo iz njega izluščiti glavne značilnosti in podatke, iz katerih nato sestavljamo pot do rešitve.

Dejavniki uspešnega reševanja problemskih nalog so:

- Branje besedilnih nalog z razumevanjem. To ni le sposobnost, ki jo dobimo v otroštvu, ampak se obravnava kot sposobnosti, izkušnje in strategije, ki jih pridobivamo celo življenje.
- Razumevanje osnovnih matematičnih pojmov in obvladovanje proceduralnega znanja. Pri uvajanju novih matematičnih pojmov gradimo na predznanju in izkušnjah. Pojme uvajamo postopoma, pri tem smo pozorni na napačne predstave. Spodbujamo procese, ki nastopajo pri matematičnem sklepanju.
- Strategije reševanja problemov. Reševanje problemov temelji na matematičnem sklepanju: dedukciji, indukciji, transformaciji, intuiciji itd.
 - Deduktivni pristop. Izhajamo iz znanih predpostavk in sklepamo iz znanih dejstev. Če vem, da je zajec žival z dolgimi ušesi in pred sabo vidimo žival z dolgimi ušesi, lahko iz tega sklepamo, da je to zajec.
 - Induktivni pristop: Na primer, če vemo, da je žival pred nami zajec in vidimo, da ima dolga ušesa, lahko sklepamo, da imajo zajci dolga ušesa.

(Žakelj, str. 85-95)

2.3 MATEMATIČNO MODELIRANJE

Matematično modeliranje je povezovanje problemov v vsakdanjem življenju z matematičnimi operacijami.

2.3.1 Proces matematičnega modeliranja

Proces reševanja poteka po spodnjih korakih.

1. Razumeti moramo problem in si postaviti jasna vprašanja.
2. Izberemo si spremenljivke, ki jih bomo upoštevali, in izločimo tiste, ki ji ne bomo.
3. Sestavimo formulo in pri tem upoštevamo spremenljivke. Ta korak je najpomembnejši, saj na njem temeljijo vsi naslednji koraki.
4. Oblikujemo matematični izračun. Ta korak ni zahteven, če smo dobro sestavili formulo. Za pomoč pri razumevanju si lahko postavimo dodatne račune ali tabele ter grafe.
5. Matematične izračune in ugotovitve pretvorimo v kontekst.
6. Preverimo ustreznost rešitev. Včasih rešitve ne ustrezajo povsem realnosti. To pomeni, da matematični računi ne vsebujejo vseh možnosti in okoliščin, ki jih lahko pričakujemo v realnosti.
7. Poročamo o spremenljivkah, izračunih.

Tabela 1: Razlike med matematičnim modeliranjem in običajnimi matematičnimi nalogami:

	Običajne naloge	Modeliranje
Izhodišče	Podatki so enolični.	Sami se odločimo, katere podatke bomo upoštevali in katerih ne.
Cilji	Cilj je točno določen podatek.	Lahko je podan ali ne, če je, ga lahko spreminjamo.
Postopek	Lahko je določen ali ne, glede na učni cilj je lahko pravilen ali napačen.	Problem vedno v kontekstu, noben model ni povsem pravilen.
Namen	Poznavanje matematičnih pojmov, učenje postopkov.	Povezovanje matematičnih objektov in konteksta.
Realističnost	Naloge niso nujno realne.	Naloge vedno izhajajo iz realne situacije.

(M. Suban, S. Kmetič, 2013)

2.3.2 Metode matematičnega modeliranja

Najboljši primeri so tisti, ki jih lahko rešujemo na več načinov, in tisti, katerih modele lahko primerjamo z modeli drugega pristopa.

Poznamo tri načine reševanja:

- Empirični pristop: uporabljamo ga za ugotavljanje odvisnosti ali razmerij med količinami. Za reševanje uporabljamo matematična orodja.

- Teoretični pristop: izhajamo iz zakonitosti in predpostavk. Nato situacijo povežemo z matematičnimi pojmi.
- Simulacijski pristop: tak način reševanja naloge izberemo, kadar se naloge ne da v celoti prikazati matematično. Torej modeliramo s simulacijo, kadar poznamo ali predvidimo zakonitosti pojava, a ga ne znamo povsem prikazati teoretično.

2.3.3 Matematično modeliranje v osnovni šoli

Namenov pouka matematike je v osnovnih šolah več. Sčasoma se spreminjajo, vendar so nekateri od namenov zagotovo:

- uporaba v vsakdanjem življenju,
- uporaba pri ostalih predmetih in
- uporaba v poklicnem življenju.

Prvi primer je velikokrat zgrešen, saj besedilne naloge večkrat predstavljajo situacije, ki so v resničnem življenju povsem nesmiselne oziroma jih ne moremo povezati z našim vsakdanjem življenjem.

Primer preproste naloge: v trgovini stane 5 jajc 0,80 €. Koliko jajc lahko kupi gospodinja, ki ima v denarnici 10,50 €?

Že »šolski« način reševanja se močno razlikuje od dejanskega. V trgovini ne prodajajo jajc pakiranih po pet, poleg tega »šolski« način reševanja ne pride v poštev, saj se v trgovini verjetno ne bomo odločili za računanje »v stolpcu« s svinčnikom in papirjem. Sicer pa se bi v redkih primerih nekdo odločil za nakup 65 jajc.

Tudi če je zgornja naloga postavljena v realistični kontekst, nam v vsakdanjem življenju ne bi pomagala.

Namen takih nalog je ponovitev matematičnih postopkov iz učnega načrta. Pri nalogah namenjenih učenju uporabe pa nas zanimata smiselnost podatkov in rezultat, ne pa skladnost postopka z učnim načrtom ali primernost postopka na sploh.

Primerna osnovnošolska naloga bi bila na primer:

Spodnja preglednica prikazuje skupne seštevke ocen pri treh predmetih iz treh razredov in nato še skupen seštevke ocen pri vseh teh treh predmetih. Kateri razred je najuspešnejši?

Tabela 2: Seštevki ocen predmetov

Razred	Skupen seštevke ocen pri kemiji	Skupen seštevke ocen pri matematiki	Skupen seštevke ocen pri fiziki	Skupen seštevke ocen pri vseh treh predmetih	Število učencev
Razred A	40	45	44	129	24
Razred B	40	50	30	120	18
Razred C	46	37	40	123	20

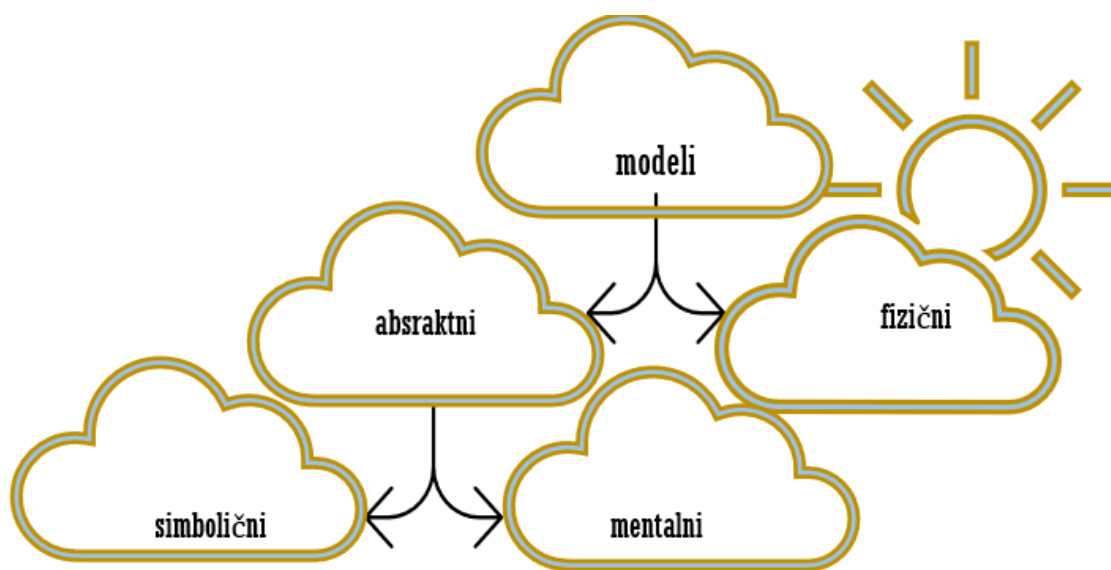
Pri taki nalogi mora učenec sam sestaviti kriterij za uspešnost in se odločiti, katere podatke bo upošteval in katerih ne bo. Ker je znanje učencev v osnovni šoli še preskromno, da bi sami izdelali model, je poudarek na:

- Interpretaciji izhodišč naloge.
- Formuliranju omejitev pri obravnavi pojava. Utemeljitvi izbrane interpretacije, izbiri omejitev, postavljanju hipotez.
- Izbiri oziroma izdelavi matematičnega modela. Ta vidik je manj poudarjen zaradi omejenega matematičnega znanja učencev.
- Interpretaciji izračunov in veljavnosti izračunov.
- Usklajevanju med udeleženci o interpretacijah, izbiri omejitev, izbiri ciljev.
- Zapis postopka modeliranja, predstavitev modela.

2.3.4 Model

»Model nam služi kot nadomestek ali pomoč pri razmišljanju in reševanju problemov različnih vrst.« (Žakelj, str.55)

Za model je značilna podobnost *in* zamenljivost med objektom in njegovo predstavitvijo. Na primer, če bi za model žoge vzeli geometrijsko kroglo, bi bila tudi žoga model krogle.



Slika 2: Vrste modelov

2.3.5 Sorazmerja

Enakost dveh razmerij imenujemo sorazmerje. Vrste sorazmerij delimo:

- glede na število enakosti v razmerjih:
 - **enostavno** sorazmerje, enostavno sorazmerje zapišemo kot enakost dveh enostavnih razmerij: predlagam manjši zamik
$$a : b = c : d$$
 - **sestavljeno** sorazmerje, zapišemo kot enakost večjega števila sestavljenih razmerij:

$$a : b : c = d : e : f$$

- glede na odnos med razmerji na:
 - premo** sorazmerje, ko se dve razmerji povečata/zmanjšata za enako količino, enako-krat (npr. če se vozimo s kolesom z enakomerno hitrostjo, sta čas in prevožena pot v premem sorazmerju)
 - obratno** sorazmerje, ko povečanje/zmanjšanje ene količine povzroči povečanje/zmanjšanje neke druge količine za enako količino

2.4 DREVO

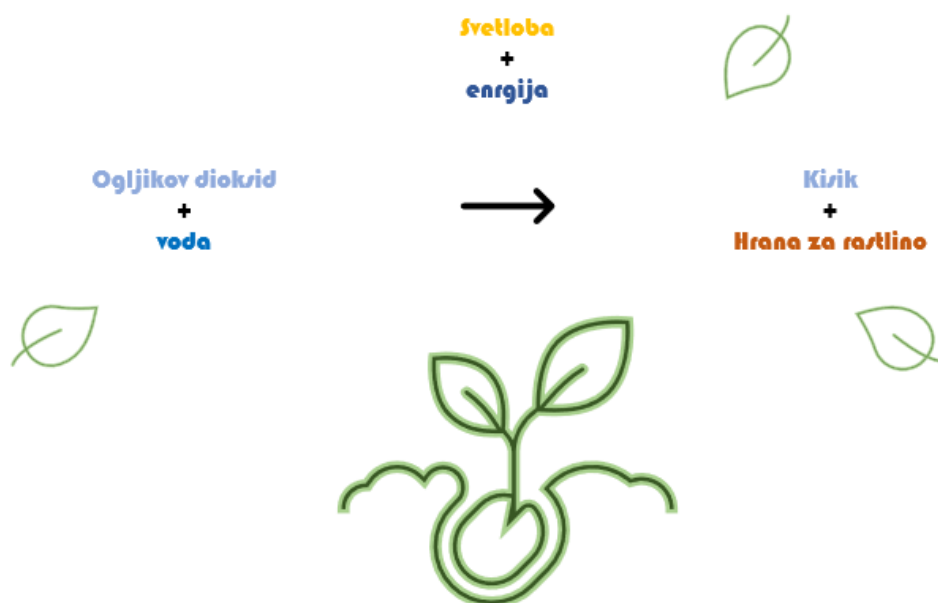
Drevo je lesnata rastlina z deblom, vejami in listi. Ločimo iglavce (na primer smreka, jelka, bor, macesen...) in listavce (na primer hrast, bukev, jesen, lipa, oreh, kostanj, jablana, hruška ...).



Slika 3: Iglavci in listavci

Najbolj zaznamujejo gozd, rastejo pa tudi v parkih in na naših vrtovih, zaradi pomirjujoče zelene barve njihovih bujnih krošenj. Listi so predvsem pomembni za nastanek hrane za rastlino.

Drevesa si izdelajo hrano s fotosintezo. Za ta proces potrebujejo kloroplaste (zeleni organeli v celici), ki listom tudi dajejo zeleno barvo. Ti iz ogljikovega dioksida in vode ob prisotnosti svetlobe izdelajo kisik in hrano (sladkor).



Slika 4: Proces fotosinteze

Tudi zato so rastline v ekosistemu zelo pomembne: fotosinteza je nasproten proces celičnemu dihanju. Pri celičnem dihanju se porabi kisik in nastaja ogljikov dioksid, pri fotosintezi pa ravno obratno in tako se ta dva procesa dopolnjujeta.

2.4.1 Bodika

Navadna bodika (*Ilex aquifolium* L.) je vedno zeleno drevo z bodičastimi listi. Pojavlja se kot drevo ali grm. Dobro uspeva na kislih tleh, na vlažnih rastiščih z milimi zimami in svežimi poletji. Raste počasi in lahko doseže 100 let in več.

Navadna bodika je v Sloveniji zakonsko zaščitena, saj je bila v gozdovih vedno redkejša zaradi izkopavanja mladih drevesc za presajanje. Zaradi lepih rdečih jagod in bodičastih listov je razširjena predvsem kot okrasno drevo v parkih in vrtovih.



Slika 5: Bodika

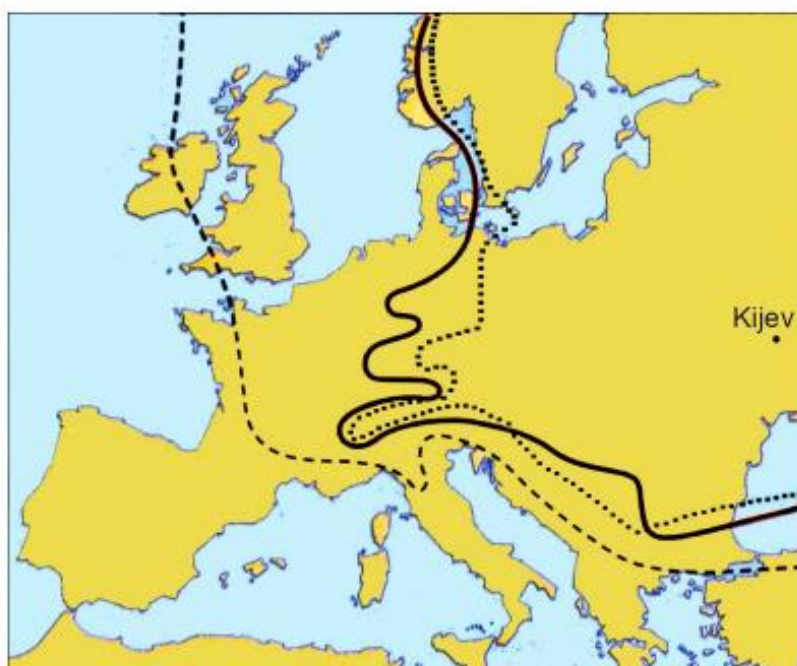
Zimzeleni usnjati listi so ovalni, njihov rob pa je nazobčan in ima ostre bodice. Po zgornji strani imajo povoščen videz, spodnja stran pa je svetlejša in bolj hrapava. Krošnja drevesa je piramidaste ali valjaste oblike.



Slika 6: Bodika s plodovi

Cvetovi drevesa so enospolni, majhni in bele barve na kratkih pecljih. Iz oplojenih cvetov se razvijejo majhne jagode rdeče barve, ki imajo na človeka odvajalni učinek, pri zaužitju velikega odmerka pa so celo strupene. V jagodi so štiri semena, s katerimi se rastlina razmnožuje.

Les je trd in obstojen, zato so ga včasih uporabljali namesto ebenovine, saj je njegova struktura podobna. Iz lesa se izdeluje šahovske figure ter ročaje posod za vroče napitke in hrano, saj les dobro prenaša visoke temperature. Skorja drevesa vsebuje veliko tanina in gost lepljiv sok, iz katerega so včasih kuhali »ptičji lim« za limanice. V zimskem času so rdeče jagode in bodičasti listi primerni za izdelavo zimzelenih šopkov in venčkov. Ponekod nadomešča tudi božično drevo. (<https://www.ljubljana.si/sl/moja-ljubljana/evropska-sredstva-za-ljubljano/projekt-urbfordan/golovec/drevesne-vrste-golovca/navadna-bodika/>)



Legenda:

————— vzhodna meja uspevanja bodike

- - - - - pas, kjer je povprečna temperatura v najhladnejšem mesecu 5 °C

..... pas, kjer je povprečna temperatura v najhladnejšem mesecu 0 °C

Slika 7: Uspevanje bodike

3 RAZISKOVALNI DEL

3.1 METODOLOGIJA

V nadaljevanju predstavljam metode, s katerimi sem prišla do svojih izračunov.

3.1.1 Opis vzorca raziskave

V vzorec sem zajela drevo bodika oz. liste na njem. Za vzorec sem izbrala eno drevo, po moji oceni visoko 9.6 m, zaokroženo na 10 metrov. Gre za bodiko, ki raste v senčni legi, v sosledju z drugimi drevesi, kar pomeni, da je bila morebitna velikost oz. premer krošnje omejena z drugimi drevesi.

Podatke sem pridobila z večkratnim opazovanjem in fotografiranjem.

Ker rastline proizvajajo fotosintezo z listi, sem se odločila, da izdelam matematični model za število listov, v nadaljevanju pa izračunam še skupno površino teh listov.

3.1.2 Opis merskega instrumenta

Kot že rečeno, sem točno določeno bodiko opazovala s prostim očesom in fotografiranjem. Pri tem sem jo opazovala s prostim očesom, z različnih pozicij, z daljnogledom in s slikanjem s pametnim telefonom.



Slika 8: Daljnogled



Slika 9: Telefon Xiaomi redmi 9

3.1.3 Opis postopka zbiranja podatkov

Za postavitev modela izračuna površine listov sem izbrala drevo, vrste bodika. Le-tega sem si izbrala v okolici Žirov, v Žirovskem Vrh. Opazovanje sem opravila v popoldanskem času v mesecu februarju. Najprej sem drevo opazovala v splošnem, sledilo je opazovanje podrobnosti, razraščanje vej, listov.

Drevo sem razdelila na tri dele (Slika 13).

Najbolj razvejane in goste so veje v srednjem (2. delu) drevesa. V tem delu drevesa sem najprej preštela »glavne veje«, torej te, ki rastejo iz debla (veje A); nato veje, ki rastejo iz vej A (veje B); nato veje, ki rastejo iz B-vej (C veje). Opazila sem, da so C-veje zadnji »nivo« vej, saj iz njih rastejo listi. Drevo ima torej tri nivoje – A, B in C (ter še listi).

V 1. in 3. delu drevesa (spodnji in zgornji del) so glavne veje tanjše ter imajo le dva nivoja in liste. Označila sem jih B in C.

V začetku sem opazovala spodnje veje, pri čemer sem opazila, da so listi nekoliko nazobčani, nato sem s fotografiranjem lažje ugotovila, kakšen je sistem razraščanja v srednjem delu drevesa. Tam so listi že bolj ovalne oblike. Sklepala sem, da je temu tako, ker se drevo poskuša zavarovati pred gozdnimi živalmi, ki bi v času zime z veseljem obgrizle liste, ki bi jih dosegle.



Slika 10: Izbrana bodika



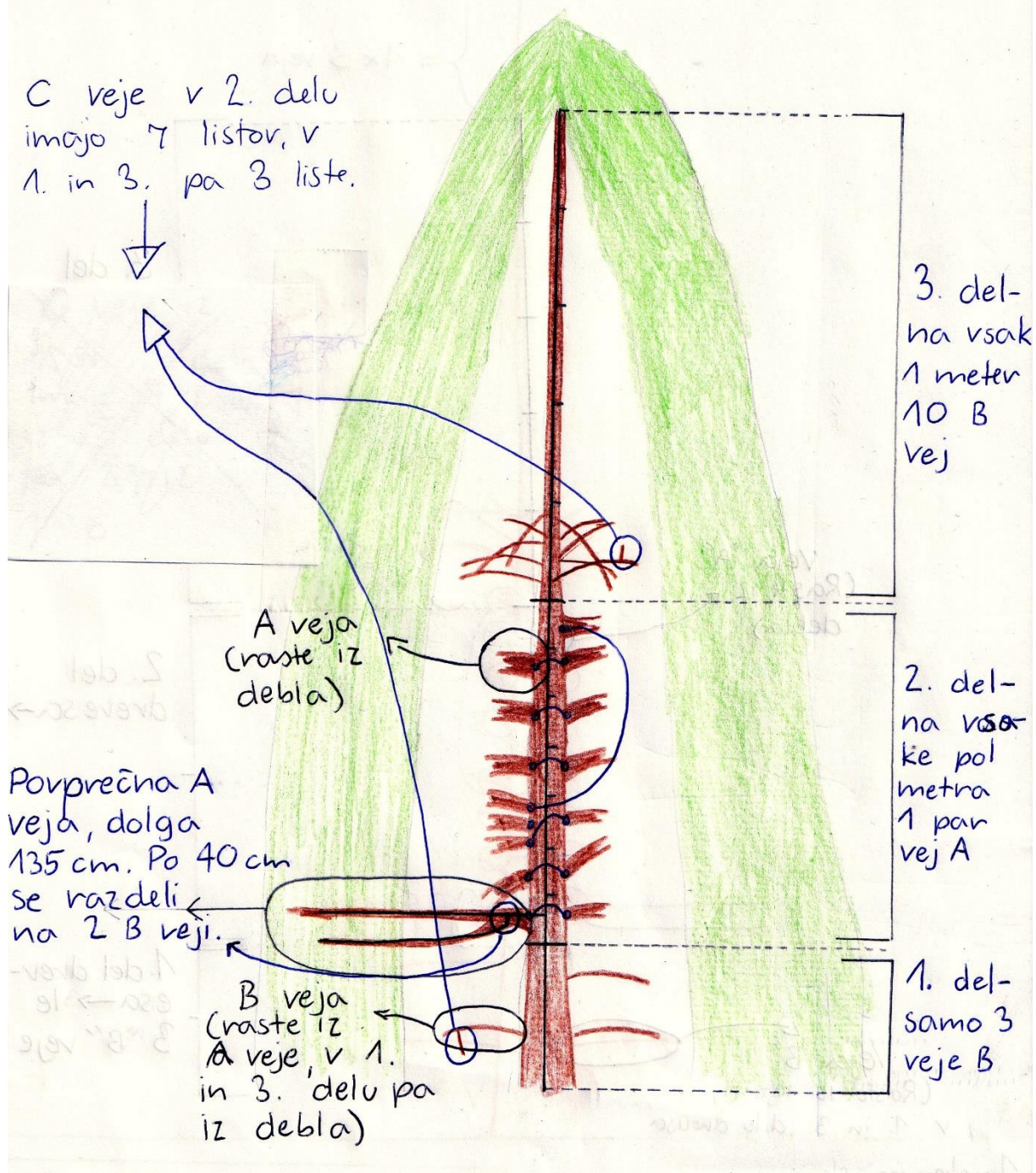
Slika 11: Spodnje veje izbranega drevesa



Slika 12: Srednje veje izbranega drevesa

Shemo drevesa oz. razraščanja sem tudi skicirala.

Zimzeleno drevo - bodika:
1 m v naravi je 2 cm na skici.
DELITEV DREVEŠA IN VEJ:



Slika 13: Skica razvejanosti drevesa na posameznih delih

3.1.4 Obdelava podatkov

Pridobljene podatke sem obdelala s pomočjo dveh modelov.

Pri prvem sem upoštevala razraščенost vej (drevesni model); do dobljenih rezultatov sem prišla z množenjem na posameznih nivojih.

Pri drugem pa sem s pomočjo štetja listov na posamezni veji in uporabe povprečja izračunala število listov v določeni prostornini izbranega geometrijskega telesa, nato pa s pomočjo premega sorazmerja izračunala število listov za primer dveh višin dreves.

Dobljene rezultate sem med seboj primerjala in izračunala odstopanje.

3.2 REZULTATI

Rezultate podajam po načrtu matematičnega modeliranja, ki sem si ga izbrala v teoretičnem delu.

Razumeti moramo problem in si postaviti jasna vprašanja.

Moja naloga je bila, da določim zeleno površino drevesa (bodike), torej skupno površino vseh listov na drevesu. Da bi prišla do tega rezultata, sem najprej morala oceniti velikost drevesa in število listov na njem.

Izbrala sem si dva postopka (modela), po katerih sem naredila izračun in nato naredila primerjavo.

3.2.1 Prvi model

Izberemo si spremenljivke, ki jih bomo upoštevali, in izločimo tiste, ki ji ne bomo.

Upoštevala sem naslednje spremenljivke:

- velikost drevesa,
- razvejanost vej v posameznem delu drevesa,
- obliko listov.

Nisem pa upoštevala:

- lege bodike,
- temperature ozračja, v katerem raste,
- strukture in vrste okoliških dreves ter kako gosto ta drevesa rastejo, torej koliko prostora za rast ima bodika.

Sestavimo formulo in pri tem upoštevamo spremenljivke. Ta korak je najpomembnejši, saj na njem temeljijo vsi naslednji koraki.

Moje predpostavke, ki sem jih upoštevala v izračunu:

1. Listi so podolgovate, na koncu špičaste oblike.
2. Vsi listi imajo približno enako ploščino. Vzela sem povprečno ploščino 20 listov, od tega 10 listov s spodnjih vej in 10 z zgornjih.
3. Drevo se deli na tri dele.
4. V vsakem posameznem delu drevesa so veje enakomerno razporejene:
 - a) spodnji del drevesa:
 - število razvejišč na drugem nivoju (B-veje) je: 3;

- število razvejišč na zadnjem nivoju (C-veje) je: 10;
- število listov, ki rastejo iz C-vej: 7;

b) srednji del drevesa :

- število razvejišč na prvem nivoju (A-veje) je: 7 parov;
- število razvejišč na drugem nivoju (B-veje) je: 2;
- število razvejišč na zadnjem nivoju (C-veje) je: 20;
- število listov, ki rastejo iz C-vej: 7;

c) zgornji del drevesa:

- število razvejišč na drugem nivoju (B-veje) je: 50;
- število razvejišč na zadnjem nivoju (C-veje) je: 3;
- število listov, ki rastejo iz C-vej: 3.

Tabela 3: Tabela razvejanosti opazovane bodike

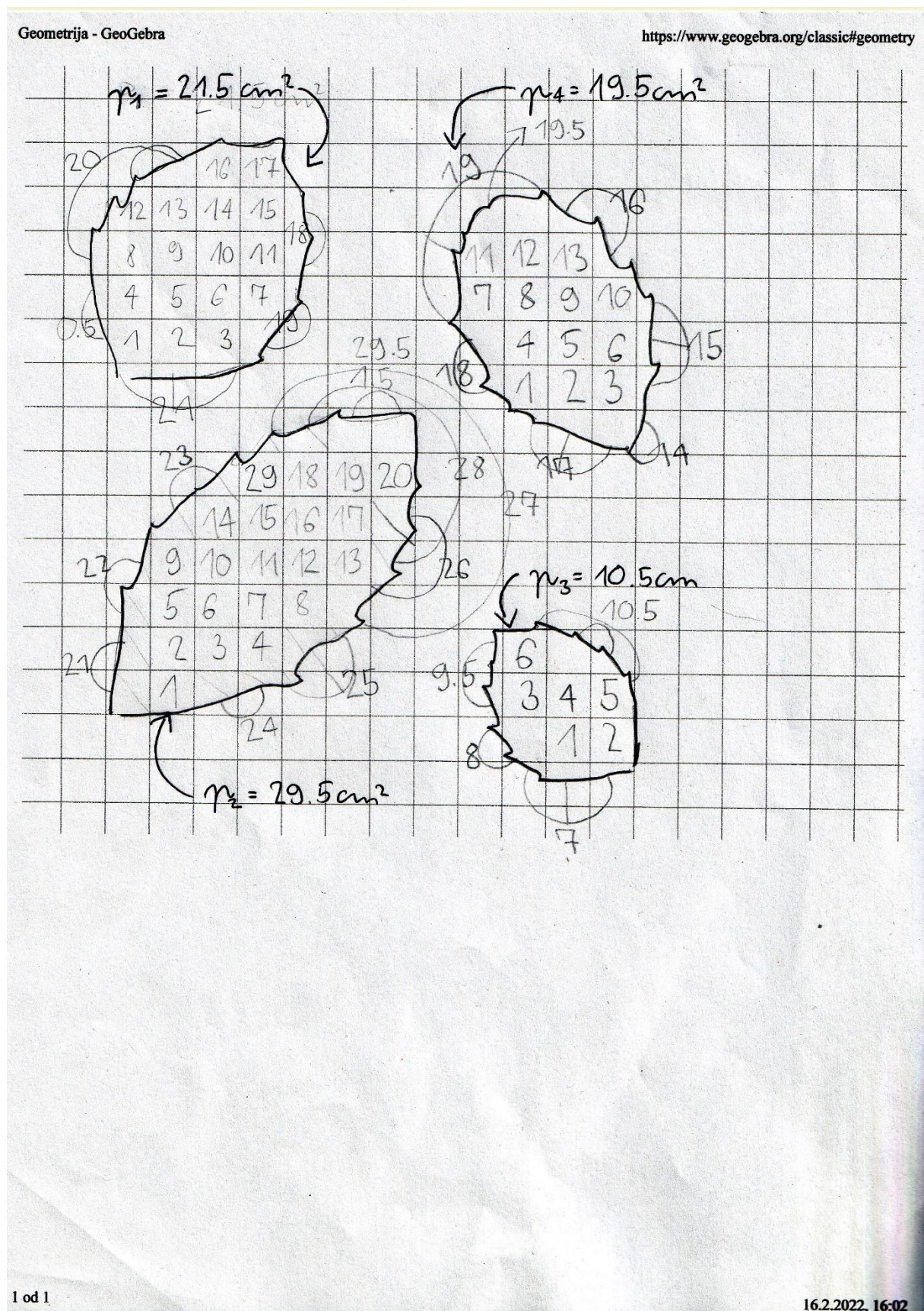
Del drevesa	Število vej A	Število B-vej, ki rastejo iz A-vej (pri 1. in 3. delu pa iz debla)	Število C-vej, ki rastejo iz B vej	Število listov, ki rastejo iz C-vej
1.	/	3	10	7
2.	14	2	20	7
3.	/	50	3	3

Določitev ploščine listov:

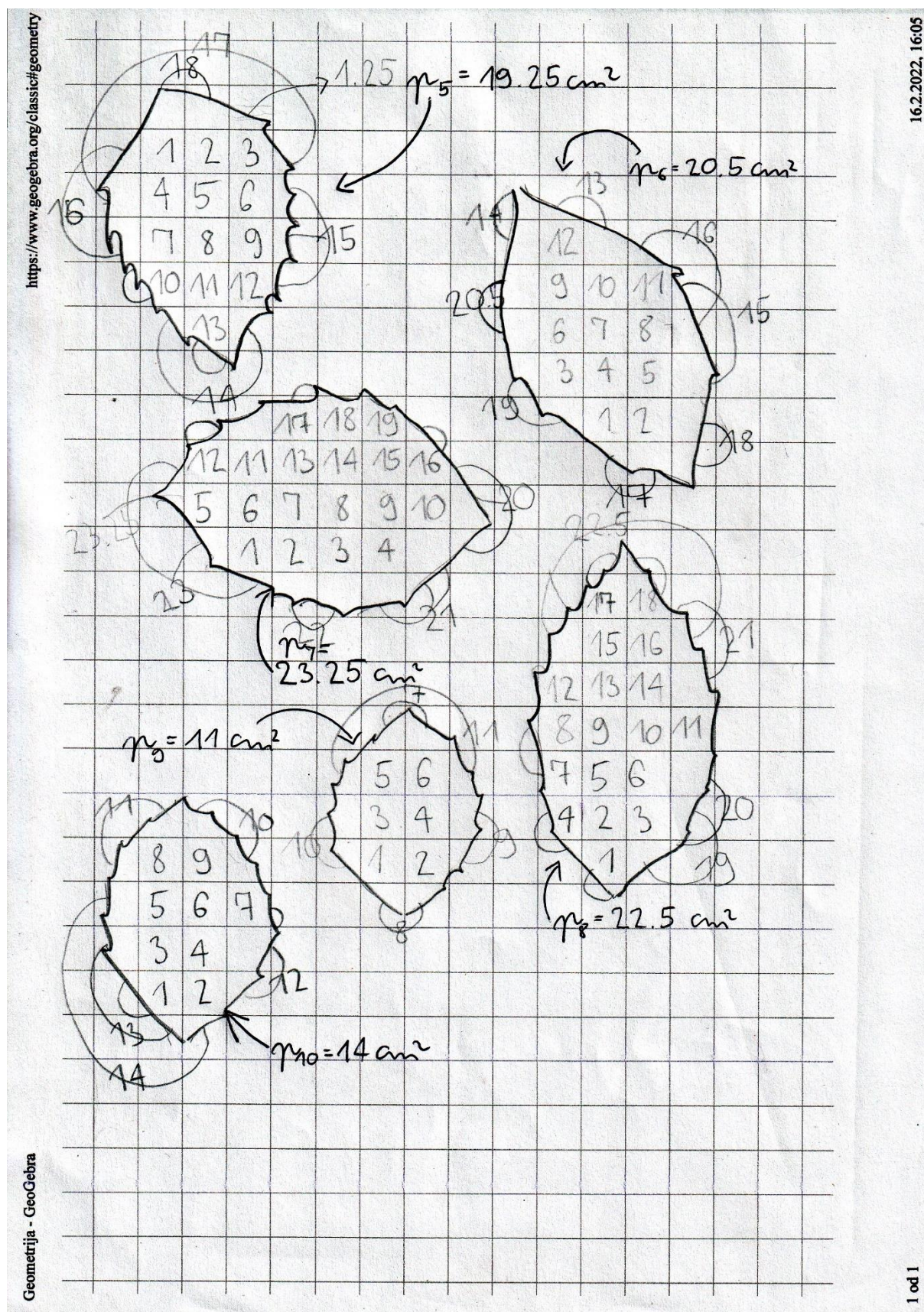
Vzela sem vzorec 20 listov z različnih delov drevesa. Ker so listi nepravilnih oblik, ploščine ne moremo izračunati po obrazcu. Liste sem zato obrisala na centimetrsko mrežo. S štetjem kvadratkov sem nato določila povprečno ploščino lista.



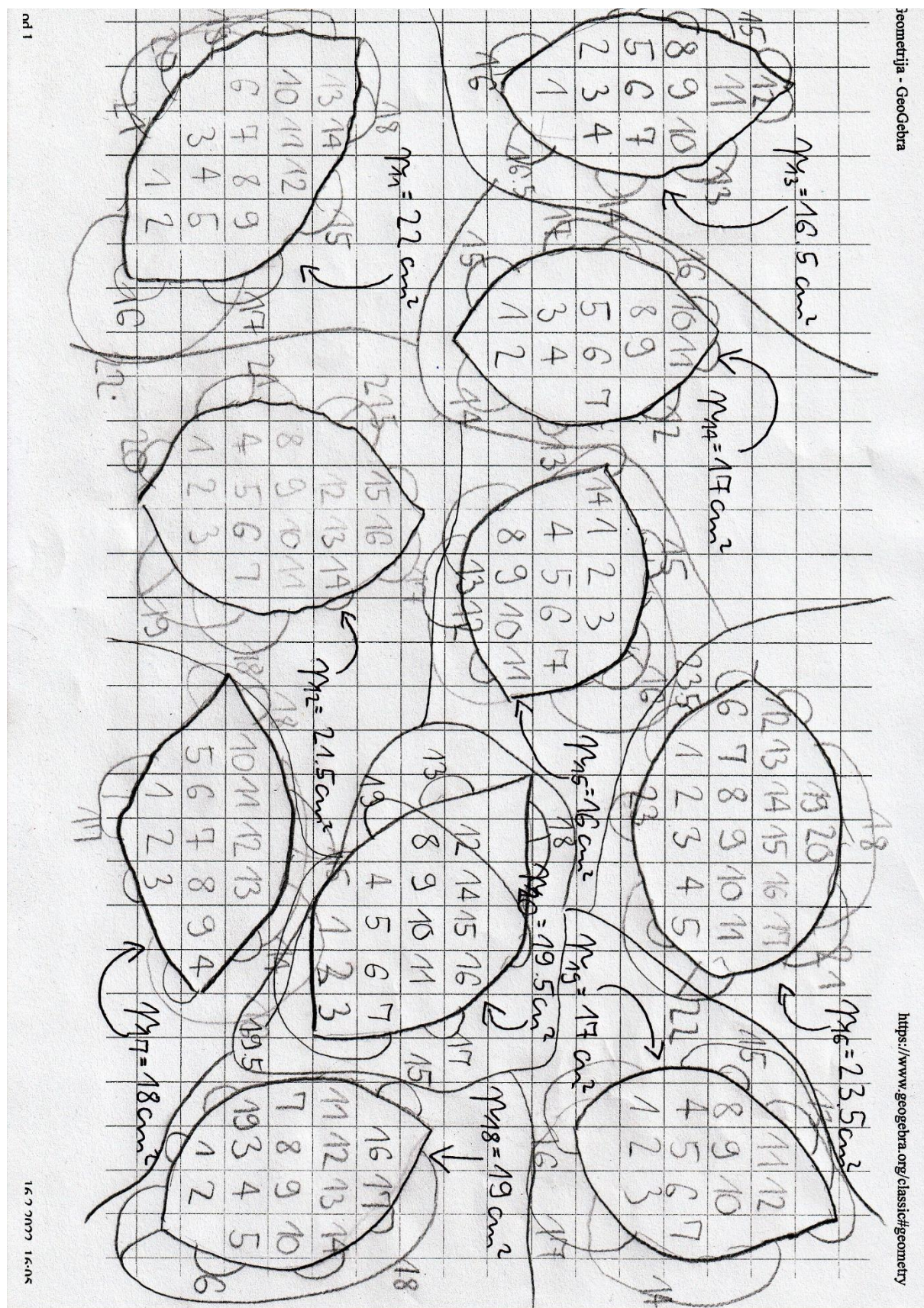
Slika 14: Vzorci za merjenje ploščine listov



Slika 15: Centimeterska mreža I.



Slika 16: Centimetrska mreža II.



Slika 17: Centimetrska mreža III.

Tabela 3: Tabela ploščine listov

Zaporedna številka lista	Ploščina (cm ²)
1.	21.5
2.	19.5
3.	10.5
4.	29.5
5.	19.5
6.	20.5
7.	23.25
8.	22.5
9.	11
10.	14
11.	22
12.	21.5
13.	16.5
14.	17
15.	16
16.	23.5
17.	18
18.	19
19.	17
20.	19.5
Povprečna ploščina	19,0875

Povprečna ploščina lista: 19,0875 cm², zaokroženo na stotine znaša 19,09 cm².

Oblikujemo matematični izračun.

Matematični izračun skupne površine vseh listov na drevesu:

a) Izračun skupnega števila listov:

$$(3 \cdot 10 \cdot 7) + (14 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 7) + (50 \cdot 3 \cdot 3) = \\ = 210 + 3920 + 450 = \mathbf{4\ 580}$$

b) Izračun skupne površine listov:

$$4\ 580 \cdot 19,09 = \mathbf{87432,2\ cm^2 = 8,74\ m^2}$$

Matematične izračune in ugotovitve pretvorimo v kontekst.

Ugotovila sem, da je skupna površina listov opazovane bodike, torej 10 metrov visokega drevesa z 9 metrov visoko krošnjo in tremi nivoji vej 8,74 m².

3.2.2 Drugi model

Za izračun po tem postopku, kjer je izračun temeljil na prostornini geometrijskega telesa, ki mu je krošnja bodike najbolj podobna, sem postavila nove predpostavke:

1. Krošnja bodike je valjaste oblike.
2. Prostorninska gostota listov (tj. število listov na prostorninsko enoto) je stalna.
3. Listi bodike se na vejah začnejo šele na oddaljenosti približno 0,4 metra.
4. Veje so postavljene pravokotno na deblo.
5. Na vsak meter debela raste povprečno 7 vej s po 70 listi (razen 1 meter od tal, kjer ni vej).
6. Povprečna dolžina veje je 1,35 m.

Olistani del bodike predstavlja valj dane višine in polmera, od katerega odvezamemo valj na sredini (kjer ni listov).

Za primer opazovane bodike (10 metrov visoke) sem izračunala olistano prostornino in določila skupno število listov. Nato sem glede na to izračunala še skupno površino listov.

Ravno tako kot po modelu 1 sem upoštevala, da je povprečna ploščina lista 19,09 cm².

Obrazec za izračun prostornine valja:

Prostornina valja je enaka produktu ploščine osnovne ploskve in višine valja.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$$

Obrazec za izračun olistane prostornine drevesa:

Iz celotne prostornine krošnje drevesa (V_1) izrežemo neolistani del prostornine (V_2).

Tako dobimo le prostornino olistanega dela (V).

$$V = V_1 - V_2$$

Izračun prostornine krošnje za 10 m visoko drevo:

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = \pi \cdot (1,35^2 - 0,4^2) \cdot 9$$

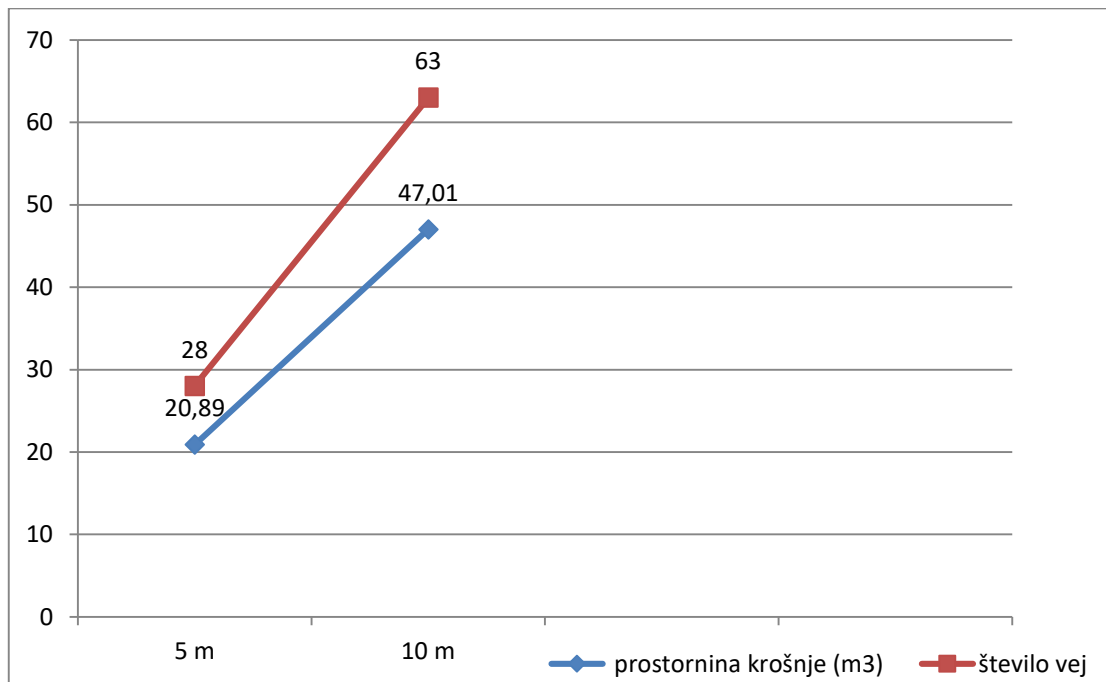
$$V = \pi \cdot 1,6625 \cdot 9$$

$$V = 47,01 \text{ m}^3$$

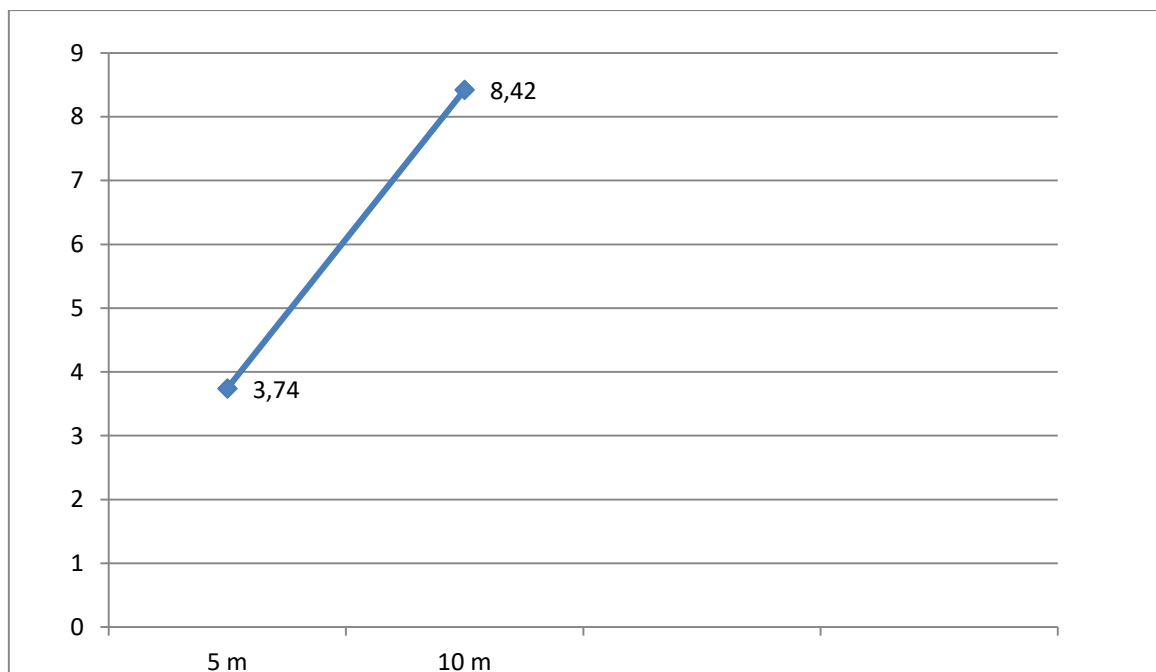
Pri izračunih v tabeli sem upoštevala, da je število listov na drevesu premo sorazmerno z višino olistanega drevesa.

Tabela 4: Prostornina krošnje in površina listov za različne višine dreves

Višina drevesa (m)	Višina drevesa z vejami (m)	Prostornina krošnje (m ³)	Število vej	Število listov	Površina listov (m ²)
/	1	5,22	7	490	0,94
5	4	20,89	28	1960	3,74
10	9	47,01	63	4410	8,42



Graf 1: Prostornina krošnje in število vej glede na višino drevesa



Graf 2: Skupna površina listov glede na višino drevesa

Matematične izračune in ugotovitve pretvorimo v kontekst.

Ugotovila sem, da skupna površina listov opazovane bodike izračunana po tem postopku znaša 8,42 m².

Primerjava rezultatov:

Razlika med rezultati po 1. in 2. načinu je 0,32 m². Po drugem načinu, kjer sem predpostavila, da ima krošnja drevesa obliko valja, je rezultat manjši za 4 % od prvega rezultata.

4 RAZPRAVA

Rezultat sem dobila s pomočjo podatkov o ploščini povprečnega lista, številu vej, na katerih rastejo listi, in višini drevesa.

Najprej sem izračunala povprečno ploščino lista s centimetrsko mrežo in obrisovanjem listov nanjo. Povprečna ploščina enega lista je $19,09 \text{ cm}^2$.

Razlika med dobljenimi rezultati posameznega modela znaša 4 %, kar se mi zdi zelo malo.

1. Listi so podolgovate, na koncu špičaste oblike.
Ker ploščine listov nisem izračunala s pomočjo ploščine likov, na katere bi lahko list razdelili, ta predpostavka ni bila tako pomembna.
2. Vsi listi imajo približno enako ploščino. Vzela sem povprečno ploščino 20 listov, od tega 10 listov s spodnjih vej in 10 z zgornjih.
Ta predpostavka opisuje način, ki sem si ga izbrala za izračun povprečne ploščine listov.
3. Drevo se deli na tri dele.
Ker so veje drevesa različno razporejene oz. imajo različno število listov, je končni rezultat (zelena površina drevesa) veliko bolj točen, če te razlike med vejami upoštevamo. Ta predpostavka ne velja za vsa drevesa, zato modela ne moremo uporabiti za katero koli drevo.
4. V vsakem posameznem delu drevesa so veje enakomerno razporejene.

Tudi ta predpostavka je primerna, čeprav v naravi najbrž ni vedno temu ni tako, torej model ni povsem točen.

Zagotovo noben model ne more biti povsem točen, a oba moja modela po mojem mnenju dajeta verodostojno oceno zelene površine bodike. Točnost svojih modelov pa bi lahko preverila z 'biološko' metodo 'leaf area index'. Obstaja več definicij indeksa listne površine (ang. leaf area index – LAI), ki so odvisne predvsem od metode meritve in vrste drevesa, za katerega določamo LAI. Prvo definicijo, ki pravi, da je LAI celotna površina ene strani fotosintetičnega tkiva na enoto površine tal, je podal Watson (1947). Da bi pri določanju lahko upoštevali tudi nepravilne in zavite oblike listov ter iglice, so nekateri avtorji predlagali, da se upošteva projekcijo površine lista, s tem pa se je pojavilo vprašanje, pod katerim kotom narediti projekcijo, saj vertikalna projekcija ne da nujno največje vrednosti. Tako je prišlo do definicije, da je LAI enak največji projekciji površine listov na enoto površine tal. Ne glede na različne definicije se najpogosteje uporablja splošna razlaga, da je indeks listne površine enak skupni enostranski površini zelenih listov na enoto površine $[\text{m}^2/\text{m}^2]$. LAI opisuje količino vse listne površine v krošnji. Vrednosti so globalno zelo raznolike, saj v sušnih območjih lahko padejo pod vrednost 1, medtem ko v najgostejših tropskih gozdovih lahko dosežejo tudi velike vrednosti. Indeks listne površine je odvisen predvsem od vrste rastline, stopnje njenega razvoja in sezone merjenja.

Neposredne metode so bolj natančne, vendar pa zahtevajo veliko časa, zaradi česar niso primerne za večje površine. Pri posrednih metodah pa je indeks listne površine določen na podlagi opazovanj ali z upoštevanjem ostalih parametrov, kar je hitreje, bolj primerno za avtomatizacijo in zato uporabno tudi v večjem obsegu. Neposredni metodi določanja indeksa listne površine, ki se najpogosteje omenjata in uporabljata v raziskavah, sta dve: zbiranje količine odpadlega listja in sekanje rastlin za določanje celotne listne površine rastline. Zbiranje odpadlega listja je mogoče za listnata drevesa in poteka celo leto, predvsem pa v obdobju odpadanja listov. Pod drevesi se naključno razporedi posode enakih dimenzij, v katerih se

zbira odpadlo listje. Indeks listne površine se nato določi glede na maso posušenih listov na enoto površine in pred tem določene specifične površine listov.

Za določanje indeksa listne površine se pogosteje uporabljajo posredne metode, ki jih je tudi več. Ločimo meritve, ki jih izvajamo s tal, pri katerih po navadi uporabimo več točk meritev.

Najpogosteje uporabljena metoda za določanje LAI je posredna nekontaktna metoda hemisferičnega fotografiranja krošnje. Tehnika preučuje lastnosti krošnje s fotografij, ki so posnete s hemisferičnim objektivom (polkrogelni, t. i. ribje oko) pod krošnjo usmerjene v zenit ali nad krošnjo usmerjene navzdol. Prednost tega načina je, da zagotavlja trajen zapis trenutnega stanja, iz katerega lahko specifične informacije o položaju, velikosti, gostoti in razporeditvi odprtin v krošnji pridobimo tudi kasneje, ko nas zanimajo. Posnete fotografije nato analiziramo s pomočjo ustrezne programske opreme in modelov (Zabert, 2013).



Slika 18: Drevo iz žabje perspektive

5 ZAKLJUČEK

Z matematičnim modeliranjem sem se srečala v jesenskem času, ko se v šoli pripravljamo na izdelavo raziskovalnih nalog. Obenem me je narava vedno zanimala, predvsem zelene rastline, zato sem se odločila, da z matematičnim modelom ocenim olistano površino drevesa. Najprej se je zataknilo pri izbiri drevesa, saj prvotno zamišljena bukev v času raziskovanja nima listov.

Ker sem želela dobiti podatek o številu listov na veji, sem se obrnila na strokovnjake Biotehniške fakultete, ki so bili sicer zelo odzivni in prijazni, vendar mi je kmalu postalo razumljivo, da ob navedbah:

Število listov na veji je lahko od nič do zelo veliko, odvisno od velikosti veje in še mnogih drugih faktorjev. Zato o tem težko napišem kaj več, če nimam natančnejših izhodišč. Seveda, to, kar vidite čisto na koncu vej, so najmlajše, torej enoletne (lanske) vejice. Tudi se da določiti, do kod sega enoletna, do kod dvoletna, do kod triletna vejica itd., meje so značilne obročkaste brazgotine ne mestih, kjer je leto prej rasel terminalni vrst. Sicer pa podatek o skupni površini listov pri drevesu pove t. i. indeks listne površine (LAI - Leaf Area Index). To je brezdimenzijska količina, ki označuje rastlinske krošnje. Opredeljen je kot enostranska zelena površina listov na enoto površine tal ($LAI = \text{površina listov} / \text{površina tal}$, m^2 / m^2) ne bom prišla do zelenih podatkov o številu listov na bukvi.

Moja odločitev za bodiko je bila kmalu jasna, saj zimzelenih dreves v okolici ni prav veliko. Če pa jih že najdemo, gre največkrat za okrasne grme, ki pa so velikokrat obrezani. Po izračunu olistanega dela drevesa sem prav tako želela pridobiti podatek o količini kisika, ki bi ga le-ti proizvedli. Pa sem tudi pri tem naletela na težavo:

Fotosinteza odvisna od mnogih dejavnikov, predvsem od svetlobe in temperature, preskrbljenosti rastline z vodo, vlage v zraku, ki se poleg tega spreminjajo v času, je takšno računanje malo nehvaležno in je bolj v stilu, "koliko bi, če bi". Težava lahko nastopi, če pridobljene vrednosti nekritično uporabljamo naprej.

V literaturi se da dobiti podatek, koliko v določenih razmerah bodika vgradi CO₂ na določeno površino lista, v določenem času. Vrednost pa drži le za te razmere. Okoljski parametri, ki smo jih omenjali, se spreminjajo med dnevi in tekom dneva, listi so zaradi različnega položaja izpostavljeni različnim mikroklimatskim razmeram (predvsem so različno osvetljeni) itd.

Kljub temu da sem v času raziskovanja naletela kar na dve dilemi, ki sem jih morala preseči (nemogoče dobiti bukev v zimskem času z listi in posplošiti izračun za proizvodnjo kisika), se ob vsem zastavlja veliko novih vprašanj. In glede na to, da matematično modeliranje predstavlja nek nov način raziskovanja oz. povezovanja matematike z drugimi vedami, se mi zdi, da ostaja veliko modelov, ki jih lahko postavimo, in prav toliko ovir, na katere lahko naletimo. Prav to pa je čar raziskovanja – preseči ovire in po potrebi postaviti nove predpostavke.

6 VIRI IN LITERATURA

Bodika. Pridobljeno na: <https://www.ljubljana.si/sl/moja-ljubljana/evropska-sredstva-za-ljubljano/projekt-urbfordan/golovec/drevesne-vrste-golovca/navadna-bodika/>, februar 2022.

Erznožnik, K. *Računalniške simulacije in učenje matematike*. Ljubljana: Pedagoška fakulteta, 2014.

Magajna, Z. E-sporočila in video pogovori. Ljubljana-Žiri, januar-marec 2022.

Repež, M. *Izhodišča merjenja matematične pismenosti raziskavi PISA 2006*, Nacionalni center PISA, 2008.

Suban, M., Kmetič, S. *Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi: matematika*, Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, 2013.

Zabert K. Vpliv značilnosti drevesnih vrst na prestrezanje padavin. V: *Acta hydrotehnica*. Letn. 26, št. 45 (2013), str. 99-116.

Žakelj A. *Učenje in poučevanje matematične pismenosti*, 3. konferenca učiteljev naravoslovnih predmetov. Pridobljeno na: <https://www.zrss.si/naravoslovje2015/files/cetrtek-sekcije/Ucenje-in-poucevanje-matematicne-pismenosti.pdf>, december 2021.